REVUE FRANÇAISE D'AUTOMATIQUE, INFORMATIQUE, RECHERCHE OPÉRATIONNELLE. RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

M. GONDRAN

Algèbre linéaire et cheminement dans un graphe

Revue française d'automatique, informatique, recherche opérationnelle. Recherche opérationnelle, tome 9, n° V1 (1975), p. 77-99

<http://www.numdam.org/item?id=RO_1975__9_1_77_0>

R.A.I.R.O.
(9e année, janvier 1975, V-1, p. 77 à 99)

ALGEBRE LINEAIRE ET CHEMINEMENT DANS UN GRAPHE (*)

par M. GONDRAN (1)

Résumé. — *On montre comment les problèmes de cheminement dans un graphe peuvent être résolus par des méthodes d'algèbre linéaire.*

1. INTRODUCTION

Les différentes manières d'aborder un problème de la théorie des graphes ou des hypergraphes paraissent entrer dans l'une des 4 catégories suivantes :

- Méthodes purement graphiques.
- Méthodes analytiques.
- Méthodes d'énumération implicite.
- Méthodes basées sur des propriétés d'algèbre particulière.

C'est cette dernière approche que nous considèrerons ici pour l'étude des problèmes de cheminement dans les graphes.

Notre exposé s'inspirera des travaux d'un grand nombre d'auteurs. Pour la formalisation des problèmes en termes de structures algébriques (§ 1 et 2), notons particulièrement Berge [3], Roy [22], Maghout [16], Fortet [8], Cruon et Hervé [28], Pair et Derniame [18], Benzaken [2], Kuntzman [15], Pichat [20], Robert et Ferland [21], Tomescu [25], Peteanu [19], Carré [4].

Pour les algorithmes de résolution (§ 3), notons particulièrement Roy [22], Warshall [27], Floyd [6], Robert et Ferland [21], Tomescu [26], Dantzig [5], Pair et Derniame [18], Pichat [20] et Carré [4].

Nous définirons ici une structure algébrique beaucoup plus vaste permettant d'englober un très grand nombre de problèmes de cheminement dans un

(1) Électricité de France, direction des Études et Recherches.
Service Informatique et Mathématiques Appliquées, Département Traitement de l'Information et Études Mathématiques, Clamart.
(*) Reçu le 4 mars 1973.

graphe (§ 1 et 2). Nous montrons alors (§ 3) que les algorithmes classiques de résolution se généralisent facilement.

1.1. Définition de la structure algébrique

Considérons la structure $(S, \oplus, *)$ où :

– l'opération « addition » $\oplus$ munit l'ensemble S d'une structure de *monoïde commutatif* (fermeture, commutativité, associativité). On suppose de plus l'existence d'un élément neutre ε. S'il n'existait pas, on le rajouterait à S;

– l'opération « multiplication » $*$ munit l'ensemble S d'une structure de monoïde (fermeture, associativité). S'il n'existe pas d'élément neutre e pour $*$, on le rajoutera à S. Il sera appelé l'unité;

– la multiplication est distributive à droite et à gauche par rapport à l'addition. L'élément « nul » ε est absorbant pour $*$, c'est-à-dire $a * \varepsilon = \varepsilon$ pour tout $a \in S$.

On définira alors l'addition et la multiplication pour les matrices carrées d'ordre n à éléments dans S à partir des lois $\oplus$ et $*$. L'ensemble des matrices $M(n, S)$ ainsi défini admet alors la même structure que S avec comme élément neutre la matrice :

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \varepsilon & \cdots & \varepsilon \\ \vdots & & \vdots \\ \varepsilon & \cdots & \varepsilon \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

et pour unité la matrice :

$$E = \begin{bmatrix} e & & \varepsilon \\ & \ddots & \\ \varepsilon & & e \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

Nous noterons encore $\oplus$ et $*$ les opérations induites par la structure de S sur $M(n, S)$.

1.2. Matrice d'incidence d'un graphe

Considérons maintenant un graphe orienté, en général sans boucle, $G = (X, U)$. On peut supposer qu'à chaque arc (x_i, x_j) est associé un élément $s_{ij} \in S$. On appellera alors *matrice d'incidence généralisée sommets-sommets* du graphe G la matrice $A = (a_{ij})$ définie par :

$$a_{ij} = \begin{cases} s_{ij} & \text{si } (x_i, x_j) \in U \\ \varepsilon & \text{sinon} \end{cases} \tag{1.3}$$

Soit $|X| = n$ l'ordre de la matrice A.

On notera $B^k = (b_{ij}^k)$ la puissance k-ième d'une matrice $B \in M(n, S)$.

Considérons alors un *chemin* μ_{ij} dans G de x_i à x_j. Il s'écrit :

$$\mu_{ij} = (x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}, \ldots, x_{i_{k+1}})$$

avec $\quad x_{i_1} = x_i, x_{i_{k+1}} = x_j$ et $(x_{i_r}, x_{i_{r+1}}) \in U$.

On peut alors définir son *poids* $w(\mu_{ij})$ par :

(1.4) $$w(\mu_{ij}) = s_{i_1 i_2} * s_{i_2 i_3} * \ldots * s_{i_k i_{k+1}}$$

Soit alors M_{ij}^k l'ensemble de tous les chemins de x_i à x_j empruntant exactement k arcs et $M_{ij}'^k$ l'ensemble de tous les chemins de x_i à x_j empruntant au plus k arcs.

On a alors la propriété suivante que l'on peut vérifier facilement par induction sur k en tenant compte que ε est absorbant pour $*$.

Proposition 1

(1.5) $$a_{ij}^k = \sum_{\mu_{ij} \in M_{ij}^k}^{\oplus} w(\mu_{ij})$$

En posant :

(1.6) $$A^{(k)} = E \oplus A \oplus A^2 \oplus \ldots \oplus A^k$$

la proposition 1 devient :

Proposition 2

(1.7) $$a_{ij}^{(k)} = \sum_{\mu_{ij} \in M_{ij}'^k}^{\oplus} w(\mu_{ij})$$

Dans le cas particulier où $\oplus$ est *idempotente*, c'est-à-dire quand

$$a \oplus a = a \quad \forall a \in S \qquad \text{(cf. (2.1) à (2.8))},$$

on peut définir la matrice :

(1.8) $$A' = E \oplus A.$$

On a alors :

(1.9) $$A'^k = E \oplus \sum_{r=1 \text{ à } k}^{\oplus} C_k^r A^r = E \oplus \sum_{r=1 \text{ à } k}^{\oplus} A^r = A^{(k)}$$

Ainsi, lorsque le second membre des propositions 1 et 2 a une interprétation intéressante, la détermination des puissances k-ième des matrices A et A' devient d'un grand intérêt.

On pourra classer les différentes interprétations possibles en quatre classes qui correspondent aux différentes préoccupations de la combinatoire : existence, énumération, dénombrement, optimisation.

On résoudra des problèmes d'*existence* lorsque S est l'algèbre de Boole ordinaire (cf. 2.1), des problèmes d'*énumération* lorsque $\oplus$ correspond à une union ensembliste (cf. 2.2 et 2.8), des problèmes d'*optimisation* dans les autres cas (cf. 2.3 à 2.7) où $\oplus$ est *idempotente.*

Si l'opération $\oplus$ n'est pas *idempotente*, on résoudra des problèmes de *dénombrements* (cf. 2.9, 2.10 et 2.11) et certains problèmes d'*optimisation* (cf. 2.12 et 2.13).

Le tableau suivant présente différents types de problèmes ainsi résolus d'après la structure algébrique choisie. Ces problèmes seront étudiés au paragraphe 2.

1.3. Quelques propriétés

Nous sommes amenés à calculer les différentes puissances des matrices A et A'. Or l'associativité de $\oplus$ et $*$ et la distributivité de $*$ par rapport à $\oplus$ entraîne :

(1.10) $$A^{p+q} = A^p * A^q$$

Ainsi le calcul de A^{2^k} ne demande que k produits matriciels puisque nous avons :

$$A^{2^r} = A^{2^{r-1}} * A^{2^{r-1}}$$

Alors pour calculer A^k, il suffit de décomposer k en base 2 :

(1.11) $$k = \alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_r \qquad \text{avec} \qquad \alpha_r = 1,$$

alors :

$$A^k = A^{2^{\alpha_r}} A^{2^{\alpha_{r-1}}} \dots A^{2^{\alpha_0}}$$

et le nombre des produits matriciels est égal à :

(1.12) $$N(k) = r + \sum_{i=0}^{r} \alpha_i - 1$$

On peut montrer (cf. Knuth [14]) que ce nombre $N(k)$ est une très bonne approximation du minimum des multiplications matricielles nécessaire pour calculer dans le cas général A^k.

Par exemple pour k de 1 à 50, la formule (1.12) est optimale sauf pour l'ensemble suivant : { 15, 27, 30, 31, 39, 43, 45, 46, 47 }.

Comme pratiquement la plupart des problèmes se poseront comme la recherche de chemins élémentaires, introduisons l'ensemble N_{ij} de tous les chemins *élémentaires* de x_i à x_j et l'ensemble N_{ij}^k de tous les chemins *élémentaires* de x_i à x_j empruntant au plus k arcs.

On dira que G est *sans circuit absorbant* si pour chaque circuit μ_{ii}, on a :

(1.13) $$e \oplus w(\mu_{ii}) = e$$

	TYPES DE PROBLÈMES RÉSOLUS	PROBLÈMES RÉSOLUS	S	$\oplus$	$*$	ε	e
$\oplus$ Idempotent	Existence	Les problèmes de connexité	$\{0,1\}$	max	min	0	1
	Énumération	Énumération des chemins élémentaires	$P(X^*)$	U	Multiplication latine	$\varnothing$	X
		Problèmes multicritères	$P(\mathbf{R}^p)$	Ensemble des chemins efficaces de l'union	Ensemble des chemins efficaces de la somme	$(+\infty)^p$	$(0)^p$
	Optimisation	Chemin de capacité maximale	$\mathbf{R}^+ \cup \{+\infty\}$	max	min	0	$+\infty$
		Chemin de longueur minimale	$\mathbf{N} \cup \{+\infty\}$	min	+	$+\infty$	0
		Plus court chemin	$\mathbf{R} \cup \{+\infty\}$	min	+	$+\infty$	0
		Plus long chemin (PERT)	$\mathbf{R} \cup \{-\infty\}$	max	+	$-\infty$	0
		Chemin de fiabilité maximale	$\{a \mid 0 \leqslant a \leqslant 1\}$	max	X	0	1

	TYPES DE PROBLÈMES RÉSOLUS	PROBLÈMES RÉSOLUS	S	$\oplus$	$*$	ε	e
$\oplus$ Non idempotent	Dénombrement	Dénombrement de chemins	$\mathbf{N}$	$+$	X	0	1
		Chaînes de Markov	$\{ a \mid 0 \leqslant a \leqslant 1 \}$	$+$	X	0	1
		Fiabilité d'un réseau	Polynômes indempotents pour *	Différence symétrique	X	0	1
	Optimisation	Problèmes du $k^{\text{ième}}$ chemin	Cône de $\overline{\mathbf{R}}^k$	k plus petits termes des deux vecteurs	k plus petits termes des sommes de couples	$(+\infty)^k$	$(0, +\infty, +\infty, \ldots, +\infty)$
		Chemins η-optimaux	Suites ordonnées de terme de $\overline{\mathbf{R}}$ d'amplitude η	Suite des η-plus petits termes des deux suites	Suite des η-plus petits termes des sommes de couples	$+\infty$	0

On a alors la proposition fondamentale suivante :

Proposition 3. *Si G est sans circuit absorbant, les équations suivantes sont vérifiées :*

$$(1.14) \qquad a_{ij}^{(k)} = \sum_{\mu_{ij} \in N_{ij}^k} w(\mu_{ij})$$

$$(1.15) \qquad a_{ij}^{(n-1)} = \sum_{\mu_{ij} \in N_{ij}^k} w(\mu_{ij})$$

$$(1.16) \qquad A^* = \lim_{k \to +\infty} A^{(k)} = A^{(n-1)} = A^{(n)} = \dots = A^{(n+p)} = \dots$$

$$(1.17) \qquad A^* = A^*A \oplus E = AA^* \oplus E$$

Démonstration

Pour démontrer la proposition, il suffit de montrer que tout chemin contenant un circuit n'a pas à être pris en compte dans (1.7). En effet, considérons un chemin $\mu_{ij} = \mu_{il}\mu_{ll}\mu_{lj}$ contenant un circuit μ_{ll}. Montrons que le chemin $\mu_{il}\mu_{ll}\mu_{lj}$ peut être absorbé dans (1.7) par le chemin $\mu_{il}\mu_{lj}$. En effet :

$$w(\mu_{il}) * w(\mu_{ll}) * w(\mu_{lj}) \oplus w(\mu_{il}) * w(\mu_{lj}) = w(\mu_{il}) * (w(\mu_{ll}) \oplus e) * w(\mu_{lj})$$

Alors en tenant compte de l'hypothèse (1.13), $w(\mu_{ll}) \oplus e = e$, l'équation précédente devient :

$$w(\mu_{il}) * w(\mu_{ll}) * w(\mu_{lj}) \oplus w(\mu_{il}) * w(\mu_{lj}) = w(\mu_{il}) * w(\mu_{lj}).$$

On en tire alors (1.14), (1.15) se déduit alors de (1.14) en remarquant qu'un chemin élémentaire a au plus $n - 1$ arcs. On en déduit alors que la suite $A^{(k)}$ admet une limite qui est atteinte pour $k = n - 1$, d'où (1.16). Enfin :

$$E \oplus AA^* = E \oplus A(E \oplus A \oplus \dots \oplus A^{n-1}) = E \oplus A \oplus \dots \oplus A^n = A^{(n)}$$

donne les équations (1.17).

La proposition précédente se généralise de la façon suivante. Introduisons l'ensemble $N_{ij}(p)$ de tous les chemins de x_i à x_j *n'empruntant pas plus de* $p - 1$ *fois chaque circuit élémentaire du graphe* ($N_{ij}(1) = N_{ij}$) et l'ensemble $N_{ij}^k(p)$ de tous les chemins de $N_{ij}(p)$ empruntant au plus k arcs.

On dira que G est *sans circuit p-absorbant* si pour chaque circuit élémentaire μ_{ii}, on a :

$$(1.18) \qquad e \oplus w(\mu_{ii}) \oplus w^2(\mu_{ii}) \oplus \dots \oplus w^p(\mu_{ii}) = e \oplus w(\mu_{ii}) \oplus w^2(\mu_{ii}) \oplus \dots \oplus w^{p-1}(\mu_{ii})$$

on a alors la proposition suivante :

Proposition 4. *Si G est sans circuit p-absorbant et si l'opération $*$ est commutative, les équations suivantes sont vérifiées :*

$$a_{ij}^{(k)} = \sum_{\mu_{ij} \in N_{ij}^{k}(p)} w(\mu_{ij}) \tag{1.19}$$

$$a_{ij}^{(N_p)} = \sum_{\mu_{ij} \in N_{ij}(p)} w(\mu_{ij}) \tag{1.20}$$

où N_p est le nombre maximum d'arcs des chemins $N_{ij}(p)$ $(N_1 = n - 1)$.

$$A^* = \lim_{k \to +\infty} A^{(k)} = A^{(N_p)} = A^{(N_p+1)} = \ldots \tag{1.21}$$

$$AA^* \oplus E = A^*A \oplus E = A^*. \tag{1.22}$$

Démonstration

La démonstration se fera d'une manière identique à celle de la proposition 3.

Pour cela montrons qu'un chemin contenant p ou plus de p fois un circuit n'a pas à être pris en compte dans (1.7).

Considérons un chemin $\mu_{ij}^{p'}$ contenant $p'(p' \geqslant p)$ fois le circuit μ_{ll}. Désignons par $\mu_{ij}^{r}(p' - p \leqslant r \leqslant p' - 1)$ des chemins de i à j correspondant au chemin $\mu_{ij}^{p'}$ auquel on a enlevé $p' - r$ fois le circuit μ_{ll}. Alors le chemin $\mu_{ij}^{p'}$ peut être absorbé dans (1.7) par les chemins μ_{ij}^{r}. En effet comme $*$ est commutative et associative =

$$\sum_{q=p'-p}^{q=p'} w(\mu_{ij}^{q}) = w(\mu_{ij}^{p'-p}) * \left(\sum_{q=1}^{q=p} w^q(\mu_{ll}) \oplus e\right)$$

et en tenant compte de l'hypothèse (1.18), l'équation précédente devient :

$$\sum_{q=p'-p}^{q=p'} w(\mu_{ij}^{q}) = w(\mu_{ij}^{p'-p}) * \left(e \oplus \sum_{q=1}^{q=p-1} w^q(\mu_{ll})\right)$$
$$= \sum_{r=p'-p}^{r=p'-1} w(\mu_{ij}^{r}).$$

On tire alors (1.19) — (1.20) se déduit alors de (1.19) en prenant pour N_p le nombre maximum d'arcs des chemins $N_{ij}(p)$.

On en déduit alors que la suite $A^{(k)}$ admet une limite qui est atteinte pour $k = N_p$ d'où (1.21). On vérifie alors les équations (1.22).

Au paragraphe 3, nous montrerons comment les techniques classiques de résolution des systèmes d'équations nous permettent de trouver des algorithmes efficaces pour calculer la (ou une partie de la) matrice A^*.

2. QUELQUES EXEMPLES

Nous donnerons dans ce paragraphe, un grand nombre d'exemples, en particulier pour les problèmes d'optimisation.

2.1. Problèmes d'existences

Pour la résolution des problèmes d'existences, on utilisera en général l'*algèbre de Boole* habituelle, c'est-à-dire la structure :

$$(S = \{ 0,1 \}, \quad \oplus = \max, \quad * = \min), \qquad \varepsilon = 0 \text{ et } e = 1.$$

A chaque arc $(x_i, x_j) \in U$, on associera $s_{ij} = 1$.

En interprétant les propositions du paragraphe 1, nous obtenons les propriétés suivantes :

– Il existe un chemin empruntant k arcs entre x_i et x_j si et seulement si $a_{ij}^k = 1$.

– Le graphe est *transitif* si et seulement si pour tout $n - 1 \geqslant k > 1$, $a_{ij}^k = 1$ entraîne $a_{ij} = 1$.

– Il existe un chemin empruntant au plus k arcs entre x_i et x_j si et seulement si $a_{ij}'^k = 1$.

– Le graphe est *fortement connexe* si et seulement si :

$$A^* = E \oplus \sum_{k=1}^{n-1} A^k = A'^{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & --- & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & --- & 1 \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

– La matrice d'incidence de la *fermeture transitive* d'un graphe est $A^* = A'^{n-1}$.

– Si $A^{n-1} = 0$, il n'existe pas de chemin hamiltonien.

– Si $a_{ii}^k = 0$, il n'existe pas de circuit de longueur k passant par x_i.

– Si $\operatorname{tr}(A^n) = 0$, il n'existe pas de circuit hamiltonien.

– Le graphe est *sans circuit* si et seulement si $A^n = 0$.

On remarque donc la richesse de l'algèbre de Boole pour résoudre les problèmes d'existences de chemins et de circuits dans les graphes.

2.2. Problèmes d'énumération

Pour la résolution des problèmes d'énumération, nous devons prendre comme addition $\oplus$ l'*union* ensembliste. Alors S sera l'ensemble des parties d'un ensemble S' ; $S = \mathcal{P}(S')$.

Nous prendrons ici comme exemple l'énumération des *chemins élémentaires* (cf. B. Roy [22], A. Kaufmann et Y. Malgrange [13]).

Soit X^* l'*ensemble des suites ordonnées* des éléments de $X = \{ x_1, x_2, ..., x_n \}$ vérifiant une *propriété* P. Chaque élément de X^* sera appelé un *chemin*. On assujettira ici les chemins à être élémentaires (propriété P).

L'ensemble vide $\emptyset$ sera considéré comme un élément de X^*. On prendra comme ensemble S la famille des parties de X^*, c'est-à-dire $S = \mathcal{P}(X^*)$.

On prendra pour opération $\oplus$ l'*union* ensembliste, d'où $\varepsilon = \emptyset$.

L'opération $*$ sera la *multiplication latine* (cf. A. Kaufmann et Y. Malgrange [13]) défini par :

$$\bullet\ u * \emptyset = \emptyset * u = \emptyset \qquad \forall u \in S$$

$$\bullet\ \text{si } u_\alpha = (u_{\alpha_i}) \quad \text{avec} \quad u_{\alpha_i} \in X^*$$
$$u_\beta = (u_{\beta_j}) \quad \text{avec} \quad u_{\beta_j} \in X^*$$

alors :

$$u_\alpha * u_\beta = (u_{\alpha_i} * u_{\beta_j}) \tag{2.2}$$

avec :

$$\text{si } u_{\alpha_i} = (x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k})$$
$$\text{et } u_{\beta_j} = (x_{j_1} x_{j_2} \ldots x_{j_l})$$

$$u_{i} * u_{j} = \begin{cases} (x_{i_1} x^i{}_2 \ldots x_{i_l} x_{j_2} x_{j_3} \ldots x_{j_l}) \\ \text{si } x_{i_k} = x_{j_1} \text{ et si cette suite vérifie la propriété } P. \\ \emptyset \text{ sinon.} \end{cases} \tag{2.3}$$

Alors $*$ admet pour élément neutre l'ensemble de tous les éléments de X, c'est-à-dire $e = X$.

A chaque arc (x_i, x_j) on associe $s_{ij} = x_i x_j \in S$.

En interprétant les propositions du paragraphe 1, on obtient les propriétés suivantes :

— a^k_{ij} représente l'ensemble des chemins élémentaires entre x_i et x_j empruntant k arcs.

— a'^k_{ij} représente l'ensemble des chemins élémentaires entre x_i et x_j empruntant au plus k arcs.

— a^{n-1}_{ij} représente l'ensemble des *chemins hamiltoniens* entre x_i et x_j.

Cette dernière relation permet d'énumérer aussi tous les *circuits hamiltoniens* d'un graphe.

— a'^{n-1}_{ij} représente l'ensemble des chemins élémentaires entre x_i et x_j.

Faisons encore quelques remarques :

— Si on ne tient pas compte de la propriété P, a^k_{ij} et a'^k_{ij} représenteront l'ensemble des chemins de longueur k ou k au plus entre x_i et x_j.

Si le graphe n'admet pas de circuits, on retrouve les propriétés précédentes.

– La propriété P peut être assez complexe et ainsi permettre d'énumérer des chemins ayant des propriétés plus compliquées. En particulier, on peut définir une valuation sur chaque arc (x_i, x_j) et ne retenir que les chemins élémentaires dont la valuation est bien définie.

– D'autre part, si on prend pour propriété P que les « chemins » sont des chemins élémentaires ou des circuits, alors chaque élément de la diagonale de A^n correspond à l'ensemble des circuits hamiltoniens.

Donnons maintenant cinq exemples de problèmes d'optimisation.

2.3. Chemin de capacité maximale

On considère ici l'algèbre de Boole suivante :

$S = \mathbf{R}^+ U \{ + \infty \}, \quad \oplus = \max \quad , \quad * = \min \quad , \quad \varepsilon = 0 \text{ et } e = + \infty.$

A chaque arc (x_i, x_j), on associe sa *capacité* $s_{ij} \geqslant 0$.

La capacité indique le maximum de flot qui peut passer de x_i à x_j par l'arc (x_i, x_j). Le problème est de trouver un chemin de x_i à x_j,

$$\mu(x_i, x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}, x_j),$$

tel que min $(s_{ii_1}, s_{i_1 i_2}, \ldots, s_{i_k j})$ soit maximum.

En interprétant les propositions du paragraphe 1, on obtient les propriétés suivantes :

– La capacité maximale d'une route empruntant k arcs entre x_i et x_j est a^k_{ij}.

– La capacité maximale d'une route empruntant au plus k arcs entre x_i et x_j est a'^k_{ij}.

– La *capacité maximale d'une route* entre x_i et x_j est a'^{n-1}_{ij}.

2.4. Chemin de longueur minimale

On considère ici la structure suivante :

$S = \mathbf{N} U \{ + \infty \}, \quad \oplus = \min \quad , \quad * = + \quad , \quad \varepsilon = + \infty \text{ et } e = 0.$

A chaque arc (x_i, x_j), on associe $s_{ij} = 1$.

En interprétant les propositions du paragraphe 1, on obtient les propriétés suivantes :

– $a^k_{ij} = k$ si il existe un chemin empruntant k arcs de x_i à x_j, $a^k_{ij} = + \infty$ sinon.

– Si $a'^k_{ij} + \infty$, a'^k_{ij} représente la longueur du chemin de longueur minimale (qui emprunte le minimum d'arcs) entre x_i et x_j.

— $a_{ij}^{\prime n-1}$ représente la longueur du chemin de longueur minimale entre x_i et x_j.

La matrice A'^{n-1} est très intéressante pour déterminer centres, rayon, diamètre, etc... d'un graphe [3].

2.5. Plus court chemin

$S = \mathbf{R} U \{+\infty\}$, , $\oplus = \min$, $\otimes = +$, $\varepsilon = +\infty$ et $e = 0$.

A chaque arc (x_i, x_j), on associe sa longueur s_{ij}.

En interprétant les propositions du paragraphe 1, on obtient les propriétés suivantes :

— a_{ij}^k représente la valeur du plus court chemin entre x_i et x_j empruntant k arcs.

— $a_{ij}^{\prime k}$ représente la valeur du plus court chemin entre x_i et x_j empruntant au plus k arcs.

— $a_{ij}^{\prime n-1}$ représente la valeur du plus court chemin entre x_i et x_j s'il n'existe pas de circuit de longueur strictement négative.

— $a_{ii}^k < 0$ si il existe un circuit négatif de longueur k passant par x_i.

— $a_{ii}^{\prime k} < 0$ si il existe un circuit négatif de longueur au plus k passant par x_i.

— $a_{ii}^{\prime n} < 0$ si il existe un circuit négatif passant par x_i.

2.6. Plus long chemin

$S = \mathbf{R} U \{-\infty\}$, $\oplus = \max$, $\otimes = +$, $\varepsilon = -\infty$ et $e = 0$.

On trouve des résultats équivalents à ceux du 2.5. C'est ce problème qu'on a comme sous-problème dans les problèmes d'ordonnancement (Pert et Potentiels).

2.7. Chemin de fiabilité maximale

$S = \{a \mid 0 \leqslant a \leqslant 1\}$, $\oplus = \max$, $\otimes = \times$, $\varepsilon = 0$ et $e = 1$.

A chaque arc (x_i, x_j) on associe la probabilité $0 \leqslant p_{ij} \leqslant 1$ de passer de x_i à x_j. Le problème est de trouver la probabilité du chemin de x_i à x_j qui est le plus probable.

En interprétant les propositions du paragraphe 1, on obtient les propriétés suivantes :

— La fiabilité maximale d'un chemin empruntant k arcs entre x_i et x_j est a_{ij}^k.

– La fiabilité maximale d'un chemin empruntant au plus k arcs entre x_i et x_j est a'^{k}_{ij}.

– La fiabilité maximale d'un chemin entre x_i et x_j est a'^{n-1}_{ij}.

2.8. Les problèmes multicritères

Pour l'ensemble des problèmes d'optimisation des sous-paragraphes précédents (2.3 à 2.7) on peut définir un problème multicritère que nous formulerons ici dans le cas des problèmes de plus courts chemins (on peut définir une formulation équivalente pour les autres problèmes d'optimisation des sous-paragraphes 2.3 à 2.7).

A chaque arc (x_i, x_j), on associe p longueurs $s^1_{ij}, s^2_{ij}, \ldots, s^l_{ij}, \ldots, s^p_{ij}$ avec $s^l_{ij} \in \overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R}\, U \{ +\infty \}$.

On dira qu'un vecteur $s \in \overline{\mathbf{R}}^p$ est efficace par rapport à un sous-ensemble F de $\overline{\mathbf{R}}^p$ s'il n'existe pas dans F de vecteurs $t \neq s$ qui aient toutes ses composantes plus petites ou égales à celles de s.

Le problème sera de rechercher les chemins efficaces entre deux sommets x_i et x_j.

On prendra donc pour S l'ensemble des parties finies de $\overline{\mathbf{R}}^p$; $S = \mathcal{T}(\overline{\mathbf{R}}^p)$.

Les opérations $\oplus$ et $*$ seront définies de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \text{si } u_\alpha &= (u_{\alpha_i}) \quad \text{avec} \quad u_{\alpha_i} \in \overline{\mathbf{R}}^p \\ u_\beta &= (u_{\beta_j}) \quad \text{avec} \quad u_{\beta_j} \in \overline{\mathbf{R}}^p \end{aligned}$$

alors :

$$u_\alpha \oplus u_\beta = \text{ensemble des vecteurs efficaces de } u_\alpha \cup u_\beta.$$

$$u_\alpha * u_\beta = \text{ensemble des vecteurs efficaces de la forme } u_{\alpha_i} + u_{\beta_j}$$

On vérifie aisément que ces deux lois vérifient les hypothèses du sous-paragraphe 1.1 avec

$$\varepsilon = (+\infty)^p \quad \text{et} \quad e = (0)^p.$$

En interprétant les propositions du paragraphe 1, on obtient les propriétés suivantes :

– a^k_{ij} représente l'ensemble des valeurs des chemins efficaces de x_i à x_j empruntant k arcs.

– a'^k_{ij} représente l'ensemble des valeurs des chemins efficaces entre x_i et x_j empruntant au plus k arcs.

– $a^{n-1}_{ij} = a^*_{ij}$ représente l'ensemble des valeurs des chemins efficaces entre x_i et x_j s'il n'existe pas de circuit de longueur négative pour chacune des p valuations du graphe.

On peut généraliser les problèmes multicritères ainsi définis d'un grand nombre de façons. En particulier on peut considérer les problèmes multicritères où les différents critères porteront simultanément sur la capacité, la longueur et la fiabilité d'un chemin.

D'une manière générale chaque fois que l'on aura défini une relation d'ordre *non totale* sur un ensemble S' et une opération munissant S' d'une structure de monoïde commutatif compatible avec la relation d'ordre, on pourra rechercher dans $S = \mathcal{T}(S')$ les chemins efficaces.

2.9. Problèmes de dénombrement

Pour la résolution des problèmes de dénombrement, on utilisera en général les entiers naturels N. Dans cet exemple, on prendra la structure suivante :

$$S = \mathbf{N} \quad , \quad \oplus = + \quad , \quad * = \times \quad , \quad \varepsilon = 0 \text{ et } e = 1.$$

A chaque arc (x_i, x_j), on associe $s_{ij} = 1$.

En interprétant les propositions du paragraphe 1, on a :

— a_{ij}^k représente le nombre de chemins différents de longueur k entre x_i et x_j.

— $\sum_{r=1}^{k} a_{ij}^r$ représente le nombre de chemins différents de longueur k au plus entre x_i et x_j.

— S'il n'existe pas de circuit, alors $a_{ij}^* = a_{ij}^{(n-1)} = \sum_{r=1}^{n-1} a_{ij}^r$ représente le nombre de chemins différents entre x_i et x_j. On a de plus : $A^* = (E - A)^{-1}$.

— a_{ii}^k représente le nombre de circuits différents de longueur k passant par x_i.

— Le coefficient ij de la matrice $A^\alpha d(A^\beta) A^\gamma$, où $d(A^\beta)$ est la diagonale de la matrice A^β, représente le nombre de chemins de x_i à x_j de la forme

$$\mu = (x_i, ..., x_k, ..., x_l, ..., x_j)$$

avec $x_l = x_k$, $l(\mu(x_i, x_k)) = \alpha$, $l(\mu(x_k, x_l)) = \beta$ et $l(\mu(x_l, x_j)) = \gamma$ (cf. [3]).

Nous donnons maintenant deux autres exemples qui peuvent être considérés aussi comme des problèmes de dénombrement.

2.10. Chaîne de Markov

$$S = \{ a \mid 0 \leqslant a \leqslant 1 \} \quad , \quad \oplus = + \quad , \quad * = \times \quad , \quad \varepsilon = 0 \text{ et } e = 1.$$

A chaque arc (x_i, x_j) on associe $0 \leqslant p_{ij} \leqslant 1$ qui est la probabilité de passer de x_i à x_j par l'arc (x_i, x_j). On a de plus $\sum_j p_{ij} = 1$.

La matrice A est alors stochastique. Le problème est de trouver la probabilité de passage de x_i à x_j. En interprétant la proposition 1, on obtient :

— a_{ij}^k représente la probabilité de passage de x_i à x_j en k étapes.

2.11. Fiabilité d'un réseau

On prendra pour S l'ensemble des polynômes à coefficients dans Z indempotents pour la multiplication ordinaire (donc en particulier à variables booléennes), pour addition la différence symétrique ($a \oplus b = a + b - ab$), pour multiplication la multiplication ordinaire. On a donc $\varepsilon = 0$ et $e = 1$.

A chaque arc (x_i, x_j), on associe la variable booléenne y_{ij} ($= 1$ si l'arc existe et 0 autrement). On donne alors la probabilité p_{ij} d'existence de l'arc (x_i, x_j). En supposant que ces probabilités sont indépendantes, déterminer qu'elle est la probabilité que le sommet x_j soit relié à x_i par un chemin.

En interprétant les propositions du paragraphe 1, on obtient :

— a_{ij}^k est un polynôme en $y(a_{ij}^k = a_{ij}^k(y))$ tel que $a_{ij}^k(p)$ représente la probabilité que x_j soit relié à x_i par un chemin de longueur k.

— $a_{ij}^{(k)} = \sum_{r=1}^{k} a_{ij}^r$ est tel que $a_{ij}^{(k)}(p)$ représente la probabilité que x_j soit relié à x_i par un chemin de longueur k au plus.

— $a_{ij}^* = a_{ij}^{(n-1)}$ est tel que $a_{ij}^*(p)$ représente la probabilité que x_j soit relié à x_i.

(La proposition 3 s'applique car (1.13) est toujours vérifiée :

$$1 \oplus a = 1 + a - a = 1.)$$

2.12. Les problèmes du $k^{\text{ième}}$ chemin

Pour l'ensemble des problèmes d'optimisation des sous-paragraphes 2.3 à 2.7 on peut rechercher les k meilleurs chemins entre deux sommets x_i et x_j.

Nous nous placerons ici dans le cas de la recherche des k plus courts chemins (on définira trivialement une axiomatique équivalente pour les autres problèmes d'optimisation des sous-paragraphes 2.3 à 2.7).

Notons $\overline{\mathbf{R}} = RU\{+\infty\}$ et soit S le cône de $\overline{\mathbf{R}}^k$ défini de la façon suivante : $u = (u_1, u_2, \ldots, u_i, \ldots, u_k) \in S$ si et seulement si $u_i \in \overline{\mathbf{R}}$ et

$$u_1 \leqslant u_2 \leqslant \ldots \leqslant u_i \leqslant \ldots \leqslant u_k.$$

A chaque arc (x_i, x_j), on associe le k-uple

$$s_{ij} = (l_{ij}, \underbrace{+\infty, +\infty, \ldots, +\infty}_{k-1}) \in S$$

où l_{ij} représente la longueur de l'arc (x_i, x_j).

REMARQUE 1. — Dans le cas où on considère un multigraphe, il pourra exister plusieurs arcs de x_i à x_j. On associera alors au couple (x_i, x_j) le vecteur s_{ij} correspondant aux longueurs des k plus petits arcs de x_i à x_j (on complètera par des $+\infty$).

Les opérations $\oplus$ et $*$ seront définies de la manière suivante :

$$\text{si } u_\alpha = (u_{\alpha_1}, u_{\alpha_2}, \ldots, u_{\alpha_k}) \text{ avec } u_{\alpha_i} \in \overline{\mathbf{R}}$$
$$u_\beta = (u_{\beta_1}, u_{\beta_2}, \ldots, u_{\beta_k}) \text{ avec } u_{\beta_j} \in \overline{\mathbf{R}}$$

alors :

$$u_\alpha \oplus u_\beta = u_\gamma = (u_{\gamma_1}, u_{\gamma_2}, \ldots, u_{\gamma_k})$$

où u_γ représente les k plus petits termes de $(u_{\alpha_1}, u_{\alpha_2}, \ldots, u_{\alpha_k}, u_{\beta_1}, \ldots, u_{\beta_k})$

$$u_\alpha * u_\beta = u_\gamma = (u_{\gamma_1}, u_{\gamma_2}, \ldots, u_{\gamma_k})$$

où u_γ représente les k plus petits termes de la forme $u_{\alpha_i} + u_{\beta_j}$ avec $i = 1$ à k et $j = 1$ à k.

On vérifie que ces lois vérifient les hypothèses du sous-paragraphe 1.1 avec $\varepsilon = (+\infty)^k$ et $e = (0, +\infty, +\infty, \ldots, +\infty)$.

REMARQUE 2. — On remarquera que l'opération $\oplus$ n'est pas idempotante. Par exemple si $u = (2, 3, 4, 4)$ alors $u \oplus u = (2, 2, 3, 3) \neq u$.

REMARQUE 3. — Un problème important pratiquement est de connaître le nombre de calculs élémentaires (addition ordinaire et comparaison) nécessaires pour le calcul des opérations $\oplus$ et $*$.

On peut montrer (cf. Coffy et Gondran [29]) que l'opération $\oplus$ demande k comparaisons et que l'opération $*$ demande de l'ordre de $k \log_2 k$ comparaisons et additions ordinaires.

On supposera que tous les chemins du graphe ont une longueur différente. On pourra se ramener à ce cas en faisant de petites perturbations indépendantes sur chaque arc.

En interprétant les propositions du paragraphe 1, on obtient les propriétés suivantes :

— a_{ij}^p représente les valeurs des k plus courts chemins de x_i à x_j empruntant p arcs.

— $a_{ij}^{(p)}$ représente les valeurs des k plus courts chemins entre x_i et x_j empruntant au plus p arcs.

— a_{ij}^* représente les valeurs des k meilleurs chemins de x_i à x_j s'il n'existe pas de circuit de longueur négative dans le graphe.

REMARQUE 4. — Cette dernière propriété provient de la proposition 4 et non de la proposition 3 comme dans les exemples précédents. En effet, dans le cas du problème du k-ième chemin le fait que le graphe ne contient pas de circuit de longueur strictement négative est équivalent à ce que le graphe soit sans circuit k-absorbant.

Les algorithmes du paragraphe 3 ne seront pas valables pour ce problème. On pourra se reporter à [30] pour les algorithmes (qui généralisent ceux du paragraphe 3).

2.13 Les chemins η optimaux

Pour l'ensemble des problèmes d'optimisation des sous-paragraphes 2.3 à 2.7 on peut rechercher l'ensemble des chemins η-optimaux entre deux sommets x_i et x_j.

Nous nous placerons ici dans le cas de la recherche des plus courts chemins à η près laissant au lecteur le soin de l'extension aux autres problèmes d'optimisation des sous-paragraphes 2.3 à 2.7.

Notons $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R}\, U \{ + \infty \}$ et soit S l'ensemble des suites défini de la manière suivante :

$$u = (u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_p) \in S \text{ si et seulement si } p \geqslant 1,\ u_i \in \overline{\mathbf{R}},$$

$u_1 \leqslant u_2 \leqslant \ldots \leqslant u_i \leqslant \ldots \leqslant u_p$ et $u_p \leqslant u_1 + \eta$ où η est un nombre positif donné.

A chaque arc (x_i, x_j), on associe $s_{ij} = l_{ij} \in S$ où l_{ij} représente la longueur de l'arc (x_i, x_j).

On supposera encore que tous les chemins du graphe ont une longueur différente. On pourra se ramener à ce cas en faisant des petites perturbations indépendantes sur chaque arc.

REMARQUE 1. — Dans le cas où on considère un multigraphe, il pourra exister plusieurs arcs de x_i à x_j. On associera alors au couple (x_i, x_j) la suite s_{ij} des longueurs des arcs de x_i à x_j ayant une longueur voisine à η près de la longueur de l'arc le plus court de x_i à x_j.

Les opérations $\oplus$ et $*$ seront définies de la manière suivante :

$$\text{si } u_\alpha = (u_{\alpha_i}) \in S$$
$$u_\beta = (u_{\beta_j}) \in S$$

alors :

$u_\alpha \oplus u_\beta = u_\gamma$ où u_γ représente la suite ordonnée des termes des suites (u_{α_i}) et (u_{β_j}) plus petit ou égal à $\min(u_{\alpha_1}, u_{\beta_1}) + \eta$.

$u_\alpha * u_\beta = u_\gamma$ où u_γ représente la suite ordonnée des termes de la forme $u_{\alpha_i} + u_{\beta_j}$ plus petit ou égal à $u_{\alpha_1} + u_{\beta_1} + \eta$.

On vérifie aisément que ces lois vérifient les hypothèses du sous-paragraphe 1.1 avec $\varepsilon = +\infty$ et $e = 0$.

En interprétant les propositions du paragraphe 1, on obtient les propriétés suivantes :

— a_{ij}^k représente les longueurs des chemins entre x_i et x_j empruntant k arcs et ayant une longueur à η près de celle du plus court chemin entre x_i et x_j empruntant k arcs.

— a_{ij}^* représente les longueurs des η-plus courts chemins de x_i à x_j s'il n'existe pas de circuit de longueur négative (au sens large) dans le graphe.

Remarque 2. — Cette dernière propriété vient de la proposition 4 et non de la proposition 3. En effet dans le cas de la recherche des chemins η-optimaux le fait que le graphe ne contient pas de circuit de longueur négative ou nulle, est équivalent au fait que le graphe soit sans circuit p-absorbant ou p = partie entière (longueur du plus court circuit/η).

On pourra se reporter à Gondran [30] pour les algorithmes de résolution de ce problème.

3. CALCUL DE A^*

Nous adapterons ici la présentation de Carré [4] faite dans le cas d'une structure algébrique plus particulière.

Lorsque G est *sans circuit p-absorbant* (cf. (1.13 pour $p = 1$ et 1.18 pour $p \geqslant 2$)) A^* vérifie les équations (1.17 ou 1.22) et la recherche de A^* revient à la résolution d'une de ces équations. Nous nous placerons ici dans le cas où G est sans circuit absorbant. Nous donnons une généralisation au cas sans circuit p-absorbant ($p \geqslant 2$) dans [30].

En multipliant une des équations (1.17) à droite par une matrice B, cette équation devient :

(3.1) $$Y = AY \oplus B \qquad \text{où} \qquad Y = A^*B.$$

Si $B = E$, la solution de (3.1) est la matrice A^*, si B est le vecteur unité e_j, la solution de (3.1) est la colonne a_j^* de A^*.

En multipliant une des équations (1.17) à gauche par une matrice B, cette équation devient :

(3.2) $$Z = ZA \oplus B \qquad \text{où} \qquad Z = BA^*.$$

Si B est le vecteur ligne unité e^j, la solution de (3.2) est la ligne a^{*j} de A^*.

Nous adapterons les méthodes classiques de résolution d'équations linéaires à la résolution de (3.1). La résolution de (3.2) se fait exactement de la même manière.

Nous étudierons d'abord les méthodes itératives, méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel, puis les méthodes directes, élimination de Jordan et de Gauss, méthode « escalier ».

3.1. Méthode de Jacobi

A partir d'un $Y^{(0)}$ donné, on définit $Y^{(k)}$ par la relation de récurrence :

(3.3) $$Y^{(k)} = AY^{(k-1)} \oplus B$$

Par induction sur (3.3), on a :

$$Y^{(k)} = A^k Y^{(0)} \oplus (E \oplus A \oplus \dots \oplus A^{k-1})B$$

donc, si G est sans circuit absorbant, on a :

$$Y^{(k)} = A^k Y^{(0)} \oplus A^* B \qquad \text{pour tout } k \geqslant n.$$

En prenant $Y^{(0)} = \Sigma$, la méthode de Jacobi converge en au plus n itérations vers la solution A^*B. On retrouve ici pour le cas particulier du plus court chemin la méthode de Bellman [1].

3.2. Méthode de Gauss-Seidel

Écrivons la matrice A sous la forme :

$$A = L \oplus U \tag{3.4}$$

où L et U sont respectivement les matrices triangulaires inférieure et supérieure de A.

A partir d'un $Y^{(0)}$ donné, on définit $Y^{(k)}$ par la relation de récurrence :

$$Y^{(k)} = LY^{(k)} \oplus UY^{(k-1)} \oplus B \tag{3.5}$$

En remplaçant r fois $Y^{(k)}$ par sa valeur dans (3.5), on obtient pour tout $r > 0$:

$$Y^{(k)} = L^r Y^{(k)} \oplus (E \oplus L \oplus \dots \oplus L^{r-1})(UY^{(k-1)} \oplus B)$$

L étant sans circuit, on a $L^n = 0$ (cf. Proposition 1) et

$$E \oplus L \oplus \dots \oplus L^{n-1} = L^*.$$

L'équation (3.5) devient en faisant $r = n$:

$$Y^{(k)} = L^* UY^{(k-1)} \oplus L^* B \tag{3.6}$$

La méthode de Gauss-Seidel revient donc à appliquer la méthode de Jacobi à l'équation :

$$Y = (L^* U)Y \oplus L^* B$$

Par induction sur (3.6), on obtient donc :

$$Y^{(k)} = (L^* U)^k Y^{(0)} \oplus (E \oplus (L^* U) \oplus \dots \oplus (L^* U)^{k-1})L^* B$$

On peut alors montrer que $(L \oplus U)^* = [E \oplus L^* U \oplus \dots \oplus (L^* U)^{k-1}]L^*$ pour tout $k \geqslant n$. L'équation (3.5) devient :

$$Y^{(k)} = (L^* U)^k Y^{(0)} \oplus A^* B \qquad \text{pour tout } k \geqslant n. \tag{3.7}$$

En prenant $Y^{(0)} = \Sigma$, la méthode de Gauss-Seidel converge en au plus, n itérations vers la solution A^*B. On retrouve ici pour le cas particulier du plus court chemin la méthode de Ford [7].

Si on a des informations supplémentaires sur la structure, on peut montrer (Carré [4]) que :

— la convergence des deux méthodes itératives précédentes peut être démontrée (et la rapidité ainsi augmentée) pour d'autres points de départ $Y^{(0)}$;

— la méthode de Gauss-Seidel converge en général plus vite que la méthode de Jacobi. En particulier, si A est triangulaire inférieure, elle converge en une seule itération.

3.3. Elimination de Jordan

Elle est basée sur l'élimination successive des variables des équations (3.1).

On part des équations initiales (3.1) que nous noterons :

$$Y = A^{[0]} Y \oplus B^{[0]} \tag{3.8}$$

A partir de ces équations, nous définissons $n - 1$ systèmes équivalents :

$$Y = A^{[k]} Y \oplus B^{[k]} \qquad (k \text{ de } 1 \text{ à } n) \tag{3.9}$$

tel que les k premières colonnes de la matrice $A^{[k]}$ soient nulles.

Le système (3.8) donne :

$$y_1 = \sum_{j=2 \text{ à } n}^{\oplus} a_{1j}^{[0]} * y_j \oplus b_1^{[0]} \tag{3.10}$$

et en substituant y_1, dans les autres équations de (3.8), on a :

(3.11)
$$y_i = a_{i1}^{[0]} * a_{1i}^{[0]} * y_i \oplus \sum_{\substack{j=2 \text{ à } n \\ j \neq i}}^{\oplus} [(a_{i1}^{[0]} * a_{1j}^{[0]} \oplus a_{ij}^{[0]}) * y_j] \oplus a_{i1}^{[0]} * b_1^{[0]} \oplus b_i^{[0]}$$

pour i de 2 à n.

Or, puisque G est sans circuit absorbant, on a :

$$a_{i1}^{[0]} * a_{1i}^{[0]} \oplus e = e.$$

L'équation (3.11) peut alors s'écrire :

$$y_i = \alpha * y_i \oplus \beta \tag{3.12}$$

où $\alpha = a_{i1}^{[0]} * a_{1i}^{[0]}$ est tel que $e \oplus \alpha = e$.

Alors $y_i = \beta$ est une solution de (3.12) puisque alors

$$y_i = (e \oplus \alpha) * y_i = y_i \oplus \alpha * y_i = \alpha * y_i \oplus \beta.$$

On peut donc remplacer l'équation (3.11) par :

$$y_i = \sum_{\substack{j=2 \text{ à } n \\ j \neq i}}^{\oplus} [(a_{i1}^{[0]} * a_{1j}^{[0]} \oplus a_{ij}^{[0]}) * y_j] \oplus (a_{i1}^{[0]} * b_1^{[0]}) \oplus b_i^{[0]} \tag{3.13}$$

Les équations (3.10) et (3.13) forment le système :

$$Y = A^{[1]} Y \oplus B^{[1]}$$

En itérant ce processus, on trouve à l'étape k une matrice $A^{[k]}$ dont les k premières colonnes sont nulles et tel que :

$$(3.14) \quad \begin{aligned} a_{ij}^{[k]} &= (a_{ik}^{[k-1]} * a_{kj}^{[k-1]}) \oplus a_{ij}^{[k-1]} \qquad i \text{ de } 1 \text{ à } n \\ b_i^{[k]} &= (a_{ik}^{[k-1]} * b_k^{[k-1]}) \oplus b_i^{[k-1]} \qquad j \text{ de } k+1 \text{ à } n \end{aligned}$$

La solution A^*B est alors égale à $B^{[n]}$.

Des formes particulières de cet algorithme, pour déterminer A^*, ont été développées par de nombreux auteurs. Il a été développé par Roy ([22], 1959) pour déterminer la fermeture transitive d'un graphe, retrouvé par Warshall ([27], 1962), défini pour le cas des plus courts chemins par Floyd ([6], 1962) puis généralisé par un grand nombre d'auteurs, en particulier Nolin ([17], 1964), Pair et Derniame ([18], 1964), Robert et Ferland ([21], 1968), Tomescu ([26], 1967), Pichat [20], Carré [4].

3.4. Elimination de Gauss

Elle est basée sur une élimination permettant de trianguler la matrice A.

Elle se fait comme dans Carré [4], p. 288-291, d'une manière analogue à l'élimination de Jordan du paragraphe 3.3.

Elle sera particulièrement intéressante car elle permet d'exploiter la symétrie et le faible remplissage de la matrice A.

3.5. Méthodes « escalier »

Elles sont basées sur un partitionnement de la matrice A. Ne dépendant que de l'équation (1.13), elles se font de la même façon que dans Carré [4], p. 292-3. On retrouve alors pour le cas particulier de la recherche de tous les plus courts chemins, l'algorithme de Dantzig [5].

On pourra trouver dans [30] et [31] une description détaillée des algorithmes précédents.

3.6. Amélioration de ces algorithmes

Comme toutes les résolutions d'équations linéaires, ces algorithmes peuvent être améliorés de nombreuses façons :

– par le partitionnement de la matrice (cf. Hu [12], Hoffman et Winograd [11], Shier [32]).

– par la prise en compte des arcs manquants (cf. Tabourier [24], Grassin et Minoux [10]),

– par un rangement préalable des sommets du graphe (cf. la notion très intéressante de pile utilisée par Pair et Derniame [18], la notion voisine de rangement utilisée par B. Roy [23]),

– et plus généralement, comme pour tout algorithme, par l'utilisation des propriétés particulières du graphe.

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier MM. Feingold, G. Olivero, B. Roy, E. Pichat, D. Carton et P. Vincke pour les très fructueuses discussions que nous avons eues et qui m'ont permis d'améliorer notablement les résultats et les exemples de ce papier.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BELLMAN R., « On a routing problem, *Quart. Appl. Math.*, 16 (1958).

[2] BENZAKEN C., « Structures algébriques des cheminements : pseudo-treillis, gerbier de carré nul », in Network and Switching Theory, edited by G. Biorci, Academic Press, 1968, p. 40-47.

[3] BERGE C., « Théorie des graphes et ses applications », Dunod, Paris, 1958.

[4] CARRÉ B. A., « An algebra for network routing problems », *J. Inst. Maths. Applics*, 7 (1971), p. 273-294.

[5] DANTZIG G. B., « All shortest routes in a graph », Proc. I.C.C. Conference on Theory of Graphs, Rome (1966), Gordon and Breach, N.Y., p. 91-92.

[6] FLOYD R. W., « Algorithm 97 : Shortest path », *Communication of ACM*, Vol. 5 (1962), p. 345.

[7] FORD L. R. and FULKERSON D. R., « Flows in Network », Princeton University Press, 1962.

[8] FORTET R., « L'algèbre de Boole et ses applications en Recherche Opérationnelle », *Cahier du Centre d'Études de R.O.*, Bruxelles, 1959, n° 4.

[9] GONDRAN M., « Fiabilité dans les réseaux », note EDF à paraître.

[10] GRASSIN J. et MINOUX M., « Variations sur un algorithme de Dantzig. Application à la recherche des plus courts chemins dans les grands réseaux », *R.A.I.R.O.*, 7 année (1973), V1, p. 53-62.

[11] HOFFMAN A. J. and WINOGRAD S., « Finding all shortest Distances in a directed Network », *IBM J. Res. Develop.*, 1973.

[12] HU T. C., « A decomposition algorithm for shortest paths in a network », *Operations Research*, 16 (1968), n° 1, p. 91-102.

[13] KAUFMAN A. et MALGRANGE Y., « Recherche des chemins et circuits hamiltoniens d'un graphe », *Revue Française de R.O.*, 7 année (1963), n° 26, p. 61-73.

[14] KNUTH D. E., « The art of Computer Programming », vol. 2, Seminumerical algorithms, Addison-Wesley, 1969, p. 398-422.

[15] KUNTZMANN J., « Théorie des relations et des réseaux », Cours, Université de Grenoble, 1966.

[16] MAGHOUT K., « Applications de l'algèbre de Boole à la théorie des graphes et aux problèmes linéaires et quadratiques », *Cahiers du Centre d'Études et de R.O.*, Bruxelles, tome 5 (1963), n° 1-2, p. 21-99.

[17] NOLIN I., « Traitement des données groupées », Publication de l'Institut Blaise Pascal, Paris, mai 1964.

[18] PAIR C. et DERNIAME J. C., « Étude des problèmes de cheminement dans les graphes finis », Convention D.G.R.S.T., n° 66-002.

[19] PETEANU V., « An algebra of the optimal path in networks », *Mathematica*, vol. 9 (1967), n° 2, p. 335-342.

[20] PICHAT E., « Algorithms for finding the maximal elements of a finite universal algebra », Proc. IFIP Congress 1968, Edinburg, Booklet A, p. 96-101.

[21] ROBERT P. and FERLAND J., « Généralisation de l'algorithme de Warshall », *Rev. Française Informatique et R.O.* (1968), n° 7, p. 71-85.

[22] ROY B., « Transitivité et connexité », *C.R. Acad. Sciences Paris*, tome 249 (1959), p. 216.

[23] ROY B., « Algèbre moderne et théorie des graphes », Dunod, Paris, 1970, tome 2.

[24] TABOURIER Y., « All shortest distances in a graph. An improvement to Dantzig's inductive algorithm », *Discrete Mathematics*, 4 (1973), p. 83-87.

[25] TOMESCU I., « Sur les méthodes matricielles dans la théorie des réseaux », *C.R. Acad. Sci. Paris*, tome 263 (1966), p. 826-829.

[26] TOMESCU I., « Un algorithme pour la détermination des plus petites distances entre les sommets d'un réseau », *R.I.R.O.*, 1e année (1967), n° 5, p. 133-139.

[27] WARSHALL S., « A theorem on boolean Matrices », *J. of ACM*, vol. 9 (1962), p. 11-12.

[28] CRUON R. et HERVÉ P., « Quelques résultats relatifs à une structure algébrique et son application au problème central de l'ordonnancement », *Revue Française de R.O.*, n° 34, 1965, p. 3-19.

[29] COFFY et GONDRAN, « Note sur le problème du *k*-ième plus court chemin », à paraître.

[30] GONDRAN M., « Algèbre des chemins et algorithmes », note EDF, HI 1753/02 du 10 août 1974, à paraître en anglais sous le titre « Path Algebra and Algorithms » dans « Combinatorial Programming : Methods and Applications », B. Roy éditeur, D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, Hollande (1975).

[31] GONGRAN M., « Les algorithmes dans les algèbres de chemins », à paraître dans le *Bulletin des Etudes et Recherches EDF*, 1975.

[32] SHIER D. R., « A decomposition algorithm for optimality problems in tree-structured networks », *Discute Mathematics* 6, 1973, p. 175-189.