Revue française d'automatique, informatique, recherche opérationnelle. Recherche opérationnelle

M. Mercatanti

L. Spanedda

La recherche de l'ensemble optimal des itinéraires des véhicules dans une entreprise de transports automobiles extra-urbains

Revue française d'automatique, informatique, recherche opérationnelle. Recherche opérationnelle, tome 9, n° V1 (1975), p. 59-75

<http://www.numdam.org/item?id=RO_1975__9_1_59_0>

© AFCET, 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue française d'automatique, informatique, recherche opérationnelle. Recherche opérationnelle » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

R.A.I.R.O.
(9e année, janvier 1975, V-1, p. 59 à 75)

LA RECHERCHE DE L'ENSEMBLE OPTIMAL DES ITINERAIRES DES VEHICULES DANS UNE ENTREPRISE DE TRANSPORTS AUTOMOBILES EXTRA-URBAINS (*)

par M. MERCATANTI et L. SPANEDDA (1)

Résumé. — *Pour rechercher l'ensemble optimal des parcours des véhicules d'une entreprise de transports extra-urbains, on a utilisé, en raison de la variété et du type des contraintes qui interviennent dans le problème, un procédé exhaustif.*

L'horaire de l'entreprise et les voyages possibles hors-service ont été représentés au moyen d'une grammaire à structure de phrase ; tous les itinéraires possibles ont été déterminés à l'aide d'un analyseur syntaxique particulier des langages engendrés par la grammaire même.

Parmi les solutions, compatibles avec un certain nombre de conditions de nature syndicale et de gestion, on a choisi, à l'aide de techniques de programmation linéaire, celles qui réalisent le coût minimal.

1. INTRODUCTION

Pour la recherche de l'ensemble optimal des itinéraires des véhicules d'une entreprise de transports automobiles extra-urbains, on crée un isomorphisme entre les graphes et des grammaires particulières à structure de phrase.

Le graphe représentant l'horaire de l'entreprise, exprimé au moyen d'une grammaire, est la meilleure représentation des éléments qui caractérisent le problème en question.

En utilisant, en outre, des méthodes appropriées, la théorie même des langages libres, on engendre tous les itinéraires possibles des véhicules, en fonction de l'horaire de l'entreprise.

Le choix de l'ensemble optimal des itinéraires est ramené à un problème de programmation linéaire.

---

(1) Istituto di Elaborazione dell'Informazione del Consiglio Nazionale delle Ricerche, Pisa.
(*) Reçu le 28 janvier 1974.

2. CONSIDERATIONS GENERALES

Pour la définition des itinéraires des véhicules, les critères et les procédés adoptés par les entreprises sont nombreux.

La solution que propose cette étude, laisse à l'entreprise une ample marge de choix dans la formulation des termes du problème; en général, c'est la variété et la nature de ces critères qui rendent une solution analytique extrêmement difficile à formuler.

Examinons, par exemple, les conditions suivantes, considérées comme valables pour un grand nombre d'entreprises italiennes :

(*i*) à la fin de la journée, les véhicules doivent rentrer à leur dépôt d'origine;

(*ii*) pour réduire l'incidence des inconvénients mécaniques, chaque véhicule est toujours confié à un ou, au plus, à deux conducteurs.

La première condition n'étant pas exprimable en termes d'équations [8], il est difficile d'utiliser des techniques de programmation linéaire pour la solution du problème.

La deuxième, en identifiant, entre certaines limites, le moyen de transport avec le conducteur, subordonne le procédé de composition des voyages, sous forme d'itinéraires, au respect des termes du contrat de travail et, par conséquent, à des contraintes de type logique.

D'autres conditions du même type règlent, par exemple, la composition des voyages suivant les critères de la compatibilité et de la préférence, l'itinéraire devant être desservi par un même véhicule. En raison des critères de préférence, il n'est pourtant pas possible de partitionner strictement l'horaire en classes homogènes.

Vu ce que nous venons de dire, le problème a été divisé en deux parties. Dans la première, par un procédé exhaustif on engendre tous les itinéraires possibles qui, pour respecter la condition (*i*) commencent et se terminent dans une même localité, ou bien dans des localités différentes, pour les entreprises dans lesquelles la condition précédente n'est pas valable; dans la deuxième, après avoir vérifié la compatibilité des itinéraires avec les conditions établies par l'entreprise, on en calcule les coûts.

Enfin, à l'aide d'un procédé de programmation linéaire, on choisit l'ensemble des parcours qui réalise le coût minimum et qui se compose, à la fois, de tous les voyages prévus dans l'horaire.

3. OBSERVATIONS SUR LE PROCEDE HEURISTIQUE DE GENERATION DES ITINERAIRES

Pour la représentation de l'horaire d'une entreprise de transports, nous avons utilisé un graphe particulier, différent du « graphe des transports », dans le but de mettre en évidence les arcs correspondant aux arrêts entre les arrivées et les départs. Nous avons également montré que ce graphe peut être aussi exprimé au moyen d'un arbre.

Étant donné l'isomorphisme entre les graphes et des grammaires particulières à structure de phrase, nous avons estimé qu'il était plus facile de représenter l'horaire d'une entreprise par une grammaire, et plus convenable de transformer le problème de la recherche des parcours des véhicules en celui de la recherche des structures syntaxiques des mots appartenant au langage engendré par la grammaire elle-même.

Il nous semble, en effet, que la théorie des langages, étant appropriée au traitement des structures d'arbre, est plus propre que la théorie des graphes à résoudre le problème en question.

4. DEFINITION D'UN GRAPHE

Nous rappelons ici brièvement, d'après C. Berge [1], à qui nous renvoyons, qu'on définit graphe le couple $G = (X, \Gamma)$, où $X = \{ x_i \}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, est un ensemble fini de sommets et Γ est une application de X dans X.

On appelle « arcs » les couples ordonnés (x_i, x_j), où $x_j \in \Gamma x_i$.

Un arc (x_i, x_j) est appelé « incident » à x_i « vers l'extérieur » ou bien incident à x_j « vers l'intérieur ». L'arc (x_i, x_i) est nommé « boucle ».

Dans un arc $u = (x_i, x_j)$, x_i et x_j sont appelés respectivement « extrémité initiale » et « extrémité terminale » de l'arc. On nomme « chemin » une suite d'arcs. tels que l'extrémité terminale d'un arc coïncide avec l'extrémité initiale de l'arc suivant : $u = (u_1, u_2, \ldots u_n)$ sauf pour u_n.

Dans un graphe $G = (X, \Gamma)$, dont on a fixé deux sommets x_i et x_t, distincts ou non, la génération des chemins possibles de x_i à x_t dépend de l'application de Γ.

x_i est l'extrémité initiale de u_1 et x_t l'extrémité terminale de u_n, u est appelé « circuit », lorsque $x_i \equiv x_t$.

5. DEFINITION D'UNE GRAMMAIRE

L'analyseur syntaxique, auquel nous référons dans la suite, est un analyseur pour langages libres, c'est pourquoi nous bornerons nos rappels exclusivement aux grammaires libres.

On nomme « alphabet » un ensemble V de symboles et « vocabulaire terminal » V_t et « vocabulaire non terminal » V_N; V_N et V_t étant une partition de V.

Un « mot sur V » est une succession finie de symboles de V : sa « longueur » est donnée par le nombre d'éléments qui le composent.

Nous indiquerons par V^* l'ensemble de tous les mots sur V (y compris le mot vide).

Par l'écriture $X \rightarrow x$ nous désignerons l'association d'un mot x de V^* avec un élément X de V_N. Nous appelons « production » cette application dans les éléments de V^* et de V_N.

Une « grammaire libre » est un quadruplet $M(V, V_T, P, S)$ où :

V et V_T sont les ensembles définis ci-dessus;

P est un ensemble fini de productions $X \rightarrow x$ et S un élément de V_N, appelé « symbole initial ».

Un mot est dit « terminal » s'il est composé exclusivement de symboles de l'alphabet terminal. Nous indiquerons par V_T^* l'ensemble de tous les mots terminaux engendrés par une grammaire M.

Soit X un symbole appartenant à V_N, on appelle « X-dérivation d'un mot K » une suite de mots $x_0, x_1, \dots x_n (n \geqslant 1)$ telle que

$$x_0 = X, x_n = K \quad \text{et} \quad x_i \rightarrow x_{i+1} \in P, x_i \in V^*,$$

pour $0 \leqslant i < n$.

Une X-dérivation d'un mot $K \in V_T^*$ est indiquée par l'écriture

$$X \rightarrow K$$

signifiant que le mot K est engendré par X.

Étant donnée une grammaire libre M, nous appelons langage libre $L(M)$ l'ensemble

$$L(M) = \{ K \mid K \in V_T, S \rightarrow K \}$$

S'il existe plusieurs S-dérivations d'un mot, le langage est dit alors ambigu.

6. ANALYSE SYNTAXIQUE

La possibilité de vérifier qu'un mot k, donné arbitrairement, appartient ou non à l'ensemble des mots qui forment un langage libre, engendré par une grammaire M, implique l'existence d'un algorithme qui donne au moins une S-dérivation de k par rapport à M.

Un analyseur syntaxique est précisément l'algorithme qui, étant donné un langage $L(M)$ et une chaîne arbitraire k de symboles terminaux par rapport à L, décide si k appartient ou non à $L(M)$ et qui, dans le cas positif, fournit une S-dérivation de k, c'est-à-dire sa structure syntaxique.

L'analyseur considéré dans le problème en question est du type descendant et il est capable d'engendrer toutes les structures syntaxiques possibles d'un mot [10], [11].

7. GRAPHES ET LANGAGES LIBRES

Le problème de l'analyse de certains types de graphes peut être ramené à des problèmes concernant la théorie des ensembles réguliers, sous-classe des grammaires libres.

L'analogie existante entre la recherche des chemins dans un graphe et les dérivations d'une grammaire libre présente un intérêt particulier.

Il est possible qu'une recherche plus approfondie sur ce sujet révèle des applications générales et plus intéressantes de la théorie des langages à des problèmes de recherche opérationnelle.

Dans un graphe $G = (X, \Gamma)$ où sont fixés deux sommets x_i et x_t, distincts ou non, la loi de génération des chemins possibles de x_i à x_t dépend de l'application Γ.

D'une façon analogue, dans un langage, où un symbole initial S et un mot terminal x_t sont fixés, la loi de génération de x_t est l'ensemble des S-dérivations possibles de x_t.

On peut définir une correspondance entre Γx et P, entre x_i et S, entre x_t et l'ensemble des mots terminaux V_T.

Cette correspondance entre l'ensemble des chemins possibles et celui des S-dérivations de x_t permet de représenter au moyen d'une grammaire libre un graphe $G = (X, \Gamma)$ dont les arcs jouissent des propriétés suivantes :

1) Certains éléments de Γx appartiennent à V_N.
2) Certains éléments de Γx appartiennent à V_T.
3) Il existe un élément $x \in V_N$ correspondant à l'élément S.

Réciproquement, il est possible de se référer à une grammaire M toutes les fois que, étant donné un graphe, on désire rechercher les chemins possibles entre deux sommets donnés, x_i et x_t.

La grammaire qui en dérive est $M'(V, V_T, P, S)$ où $S = x_i$, $V_T = \{ x_t \}$, $V = X$ et $P = \Gamma x$.

Les langages formels qui répondent aux conditions ci-dessus sont un sous-ensemble des langages libres, et plus précisément ceux dont les productions sont de longueur un. Le problème de la recherche des chemins possibles de x_i à x_t est équivalent à la génération des arbres syntaxiques de x_t, à partir de x_i, c'est-à-dire à la recherche de toutes les S-dérivations

$$x_i \to x_t$$

Il faut remarquer, enfin, que, s'il existe plusieurs chemins, le graphe est équivalent à une grammaire ambigüe.

8. DEFINITION D'UN HORAIRE DE VOYAGES DANS UNE ENTREPRISE DE TRANSPORTS

Un horaire des départs et arrivées dans une entreprise de transports, peut être aussi exprimé au moyen d'un ensemble Θ de quadruplets θ_k, correspondant aux Q voyages, ou courses, programmés dans l'horaire :

(8.1) $$\Theta = \{ \theta_k \} = \{ A'_k, t_k, A''_k, \tau_k \} \qquad k = 1, 2, \ldots Q$$

Par le quadruplet θ_k on spécifie en effet : la localité de départ A'_k et la localité d'arrivée A''_k, l'heure de début t_k et de fin du voyage τ_k, (modulo 24 h).

Si on indique par $P = \{ A_i \}$ $i = 1, 2, \ldots Z$, l'ensemble des localités du réseau de transports de l'entreprise, on a, en général

$$Q \geqslant Z$$

Considérons deux courses θ_r et θ_s, qui répondent à la condition

(8.2) $$A''_r \equiv A'_s$$

Le véhicule qui repart de A'_s, à l'instant t_s, pour atteindre la localité A''_s, s'arrête en A'_s pendant un temps égal à $t_s - \tau_r$, si $t_s \geqslant \tau_r$ ou bien $24\text{ h} - \tau_r + t_s$ si $t_s < \tau_r$.

L'inactivité ou attente du véhicule qui effectue consécutivement les voyages θ_r et θ_s peut être par suite exprimée par le quadruplet

$$\theta'_{r,s} = [(A''_r, \tau_r), (A'_s, t_s)]$$

déduit de θ_r et θ_s.

En indiquant par $\Phi = \{ 1, 2, \ldots Q \}$ l'ensemble des indices des éléments θ_k de Θ, on obtient l'horaire des attentes « possibles » Θ', formé par les quadruplets $\theta'_{r,s}$ qui répondent à la condition :

(8.3) $$(A''_r \equiv A'_s) \qquad r, s \in \Phi.$$

$\Phi' = \{ (r, s) \}$ est l'ensemble des couples d'indices des quadruplets θ_{rs} qui satisfont à la condition (8.3).

9. GRAPHE REPRESENTATIF D'UN HORAIRE DE VOYAGES

Supposons qu'on n'ait considéré en P que les localités qui constituent des points de ramification dans le réseau de transport de l'entreprise.

L'ensemble $U = \{ A_i, A_j \}$ des liaisons possibles entre les localités du réseau étant connu, le graphe G du réseau de transport est défini par $G = (P, U)$

Si l'on veut encore représenter l'horaire de l'entreprise par un graphe $G^* = (P^*, U^*)$, il est nécessaire d'associer à chaque sommet A_i de P les quantités t_k ou τ_k exprimant les temps où les véhicules partent ou arrivent en A_i, ou bien commencent ou terminent un arrêt.

Si l'on indique par $\pi_k = V'(A'_k, t_k)$ et $\alpha_k = V''(A''_k, \tau_k)$ $k = 1, 2, \dots Q$, les sommets correspondant au voyage θ_k, il s'ensuit que :

$$P^* = \bigcup_k (\pi_k \cup \alpha_k)$$

est l'ensemble des sommets de G^*.

De $\Theta^* = \Theta \cup \Theta'$ on tire l'ensemble des arcs orientés U^*, car Θ^* est l'application Γ de P^* en P^* qui définit l'horaire des voyages et des arrêts.

En effet, chaque élément de Θ^* définit un couple ordonné de sommets et par suite un arc orienté de G^*.

L'arc $[V'(A'_k, t_k), V''(A''_k, \tau_k)]$, ou (π_k, α_k), représente une course de Θ, tandis que l'arc $[V''(A''_k, \tau_k), V'(A'_h, t_h)]$, ou (α_k, π_h) représente un arrêt en $A''_k \equiv A_h$, d'après Θ'.

Par suite :

$$U^* = \{ \{ (\pi_k, \alpha_k) \mid k \in \Phi \} \quad , \quad \{ (\alpha_r, \pi_s) \mid (r, s) \in \Phi' \} \}$$

10. UN EXEMPLE D'APPLICATION DE LA THEORIE DES LANGAGES A UN RESEAU DE TRANSPORT

La génération des chemins de G^*, étant donné un sommet initial π_k et un sommet terminal α_h, correspond à la recherche de l'arbre syntaxique du mot α_h, étant donné le symbole initial π_k.

Considérons l'exemple suivant.

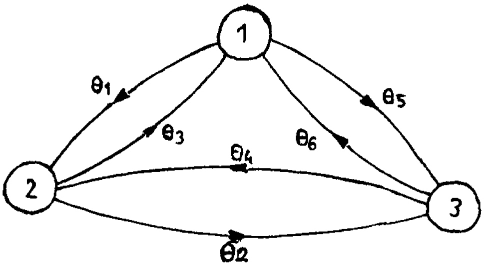

Figure 1

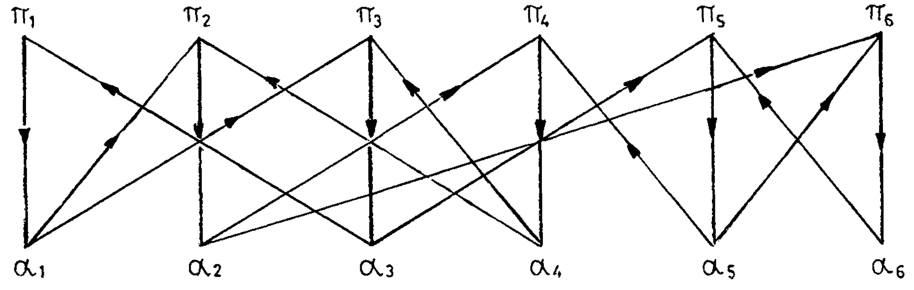

Figure 2

Soit $\Theta = \{ \theta_1, \theta_2, ..., \theta_6 \}$ l'horaire d'une entreprise de transports (voir la figure 1, suivant la représentation courante, et la figure 2, suivant celle proposée aux paragraphes 8 et 9), où :

$$(10.1) \qquad \begin{cases} \theta_1 = (A_1, t_1, A_2, \tau_1) & \theta_4 = (A_3, t_4, A_2, \tau_4) \\ \theta_2 = (A_2, t_2, A_3, \tau_2) & \theta_5 = (A_1, t_5, A_3, \tau_5) \\ \theta_3 = (A_2, t_3, A_1, \tau_3) & \theta_6 = (A_3, T_6, A_1, \tau_6) \end{cases}$$

et

$$(10.2) \qquad \Theta'' = \{ \theta'_{1,2}, \theta'_{1,3}, \theta'_{2,4}, \theta'_{2,6}, \theta'_{3,1}, \theta'_{3,5}, \theta'_{4,2}, \theta'_{4,3}, \theta'_{5,6} ; \theta'_{5,4}, \theta'_{6,1}, \theta'_{6,5} \}.$$

est l'ensemble des quadruplets des attentes possibles.

En ordonnant les paramètres t_i et τ_i, $i = 1, 2, ... 6$ par ordre croissant, on obtient l'horaire $\Theta' \subseteq \Theta''$ des attentes, pour lesquelles est valable la condition $\tau_i \leqslant t_j$.

Soit par exemple (voir la figure 3) :

$$(10.3) \qquad \Theta' = \{ \theta'_{1,2}, \theta'_{1,3}, \theta'_{2,4}, \theta'_{2,6}, \theta'_{3,5}, \theta'_{5,6} \}$$

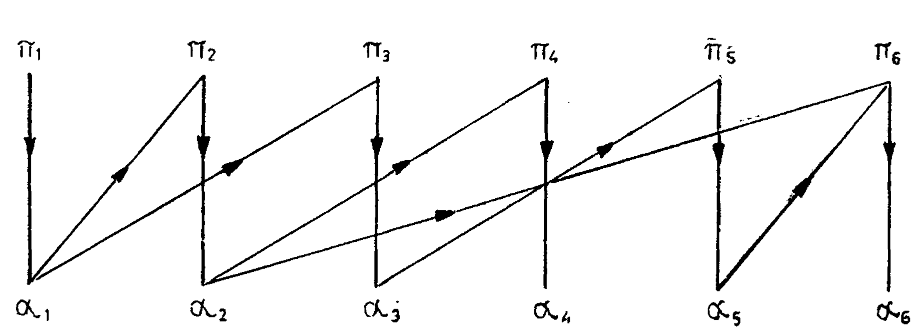

Figure 3

La grammaire libre qui en dérive est la suivante :

(10.4) $$M'(V, V_T, P, S)$$

où

$$\begin{aligned} V &= \{ \pi_1, \alpha_1, \pi_2, \alpha_2, \ldots, \pi_6, \alpha_6 \} \\ V_T &= \{ \alpha_4, \alpha_6 \} \\ P &= \{ \pi_1 \to \alpha_1, \pi_2 \to \alpha_2, \ldots, \pi_6 \to \alpha_6, \alpha_1 \to \pi_2 \mid \\ &\quad \pi_3, \alpha_2 \to \pi_4 \mid \pi_6, \alpha_3 \to \pi_5, \alpha_5 \to \pi_6 \} \end{aligned}$$

Si l'on veut enfin obtenir tous les chemins qui ont π_1 pour origine, c'est-à-dire de A_1 à l'instant t_1, on pose

$$S = \pi_1$$

Tous les itinéraires possibles sont par suite obtenus en appliquant les π_1-dérivations des mots appartenant au langage engendré par la (10.4). Ce sont

(10.5) $$\begin{cases} \pi_1 \to \alpha_1 \to \pi_2 \to \alpha_2 \to \pi_4 \to \alpha_4 \\ \pi_1 \to \alpha_1 \to \pi_2 \to \alpha_2 \to \pi_6 \to \alpha_6 \\ \pi_1 \to \alpha_1 \to \pi_3 \to \alpha_3 \to \pi_5 \to \alpha_5 \to \pi_6 \to \alpha_6 \end{cases}$$

Il s'ensuit que l'horaire Θ^* correspond au graphe associé à l'ensemble P des productions de la grammaire (10.4), comme on peut aisément relever de la figure 4, les sommets et les arcs étant associés à la variable temps. En effet, un

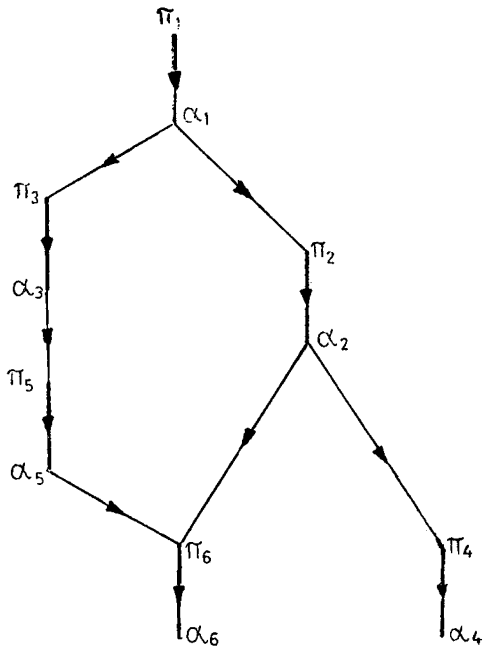

Figure 4

horaire, tout en étant cyclique, peut être toujours considéré dans un intervalle minimum de temps Δt, donné précisément par :

$$\Delta t = [\min_i (t_i), \max_i (\tau_i)] \tag{10.6}$$

11. LA DETERMINATION DES ITINERAIRES

Nous allons définir les fonctions $a_i(t)$ et $p_i(t)$ qui, pour t variant dans l'intervalle $[0,24^h)$, comptent respectivement le nombre des arrivées et des départs dans la localité A_i $i = 1, 2, \ldots z$.

L'ensemble S^* des symboles initiaux possibles est formé par les π_k pour lesquels, dans chaque A_i, pour t croissant dans l'intervalle $[0,24^h)$, si l'on pose $t = t_k$ la fonction

$$g_i(t) = p_i(t) - a_i(t) \tag{11.1}$$

acquiert une valeur plus grande que la valeur maximale atteinte auparavant.

D'une façon analogue V_T est formé par les α_k pour lesquels, pour t décroissant dans l'intervalle $(24^h,0]$, si l'on pose $t = \tau_k$, la fonction $- g(t)$ acquiert, dans ce cas-là aussi, une valeur positive plus grande que la valeur maximale précédente.

Pour générer, au moyen de l'analyseur syntaxique cité au paragraphe 2, tous les parcours possibles des véhicules, selon un certain horaire, il est nécessaire de définir M_j grammaires :

$$M_j = (V, V_T(j), P, S_j) \qquad j = 1, 2, \ldots Q$$

où

$$\begin{cases} V = \bigcup_{k \in \Phi} (\pi_k \cup \alpha_k) \\ V_T(j) = \{ \alpha_k \mid \alpha_k \in V_T, A''_k \equiv A'_j \} \\ P = \{\{ \pi_k \to \alpha_k \mid k \in \Phi \}, \{ \alpha_k \to \pi_h \mid k, h \in \Phi' \}\} \\ S_j = \pi_j \in S^* \end{cases} \tag{11.2}$$

Il faut remarquer que, à partir d'un horaire donné, un moyen pour réduire le nombre des véhicules nécessaires consiste à utiliser, en respectant certaines conditions, les véhicules momentanément inactifs, pour effectuer dans d'autres localités les voyages qui demandent d'autres véhicules des dépôts.

Il faut vérifier les conditions suivantes :

i) pour le réemploi d'un véhicule, une compatibilité doit exister entre le voyage à effectuer et les caractéristiques techniques du moyen de transport.

Le type de véhicule nécessaire est subordonné, tout en prévoyant une certaine marge de tolérance, au type de route à parcourir, au niveau de confort demandé par les voyageurs, à la célérité du service etc... ;

ii) un véhicule, transféré pour effectuer un voyage dans une autre localité, doit être, en tout cas, remplacé par un autre pour assurer le service pendant le reste de la journée ou pour le jour suivant, si le véhicule vient d'accomplir son service.

Du point de vue de l'emploi des véhicules, on peut classer les voyages de l'horaire en trois groupes :

a) Voyages dont les temps de départ et la localité d'origine sont tels qu'ils nécessitent l'emploi de nouveaux véhicules des dépôts ;

b) Voyages qui exigent de nouveaux véhicules, mais qui peuvent également utiliser des véhicules envoyés haut-le-pied d'autres localités ;

c) Voyages qui utilisent des véhicules précédemment arrivés dans la localité d'où ils partent.

Nous indiquons par K^* l'ensemble des indices k des Θ_k appartenant au groupe b.

Un véhicule est disponible pour son réemploi si, en indiquant par τ_j l'heure d'arrivée en A''_j, il existe au moins une localité A'_k, où un voyage est prévu à l'instant t_k, tel que

$$t_k \geqslant \tau_j + \eta_{jk} \tag{11.3}$$

où η_{jk} indique le temps nécessaire au moyen de transport pour se déplacer de A''_j à A'_k.

Les indices j des θ_j pour les quels la condition (11.3) est vérifiée peuvent se grouper en deux classes : ceux qui appartient à K^* et les autres. Nous indiquons par J^{**} la première de ces classes et par J^* la deuxième.

Nous allons maintenant considérer l'ensemble Θ_X des voyages affectés aux véhicules pouvant être potentiellement transférés haut-le-pied dans d'autres localités.

Vu ce que nous venons de dire dans la condition (*ii*), nous incluons dans Θ_X autant de voyages fictifs θ_k, $k = Q + 1, Q + 2, \ldots$ dont l'origine et la destination coïncident, que de véhicules ayant accompli leur service et pouvant être transférés.

L'heure de départ et l'heure d'arrivée peuvent être toutes deux confondues avec les heures limites accordées au personnel roulant pour l'accomplissement du travail.

En indiquant par K^{**} l'ensemble des indices des voyages appartenant à Θ_X, on a :

$$|J^*| = |K^*| \quad \text{et} \quad |J^{**}| = |K^{**}| \tag{11.4}$$

Nous posons $m = |J^*|$ et $n = |J^{**}|$ et $l = m + n$

En indiquant par x_{kj} le voyage θ_k qui utilise un véhicule parti de A''_j à l'instant τ_j on obtient immédiatement les relations suivantes :

$$
(11.5) \qquad \begin{cases} \sum_{j=1}^{l} x_{kj} \leqslant 1 & k = 1, 2, \ldots, l \\ \sum_{k=1}^{l} x_{kj} \leqslant 1 & j = 1, 2, \ldots, l \\ x_{kj} = 0 \quad \text{ou} \quad 1 \end{cases}
$$

Transformons les relations (11.5) en équations :

$$
(11.5a) \qquad \begin{cases} \sum_{j=1}^{l} x_{kj} + v_k = 1 & k = 1, 2, \ldots, l \\ \sum_{k=1}^{l} x_{kj} + u_j = 1 & j = 1, 2, \ldots, l \\ x_{kj}, v_k, u_j = 0 \quad \text{ou} \quad 1 \end{cases}
$$

Les v_k représentent les disponibilités non utilisées, tandis que les u_j indiquent les voyages qui utilisent des véhicules des dépôts de A'_k, ne pouvant disposer de véhicules provenant d'autres localités.

En exécutant la somme dans le système (11.5a) respectivement par rapport à k et à j, dans le premier et dans le second ensemble d'équations, on a :

$$
\begin{cases} \sum_{k=1}^{l} \sum_{j=1}^{l} x_{kj} + \sum_{k=1}^{l} v_k = l \\ \sum_{j=1}^{l} \sum_{k=1}^{l} x_{kj} + \sum_{j=1}^{l} u_j = l \end{cases}
$$

Si l'on pose

$$
(11.6) \qquad y = \sum_{k=1}^{l} \sum_{y=1}^{l} x_{kj}
$$

on ajoute au système (11.5a) les deux équations suivantes :

$$
(11.7) \qquad \begin{cases} \sum_{k=1}^{l} v_k + y = 1 \\ \sum_{j=1}^{l} u_j + y = 1 \end{cases}
$$

où y représente le nombre total d'utilisations des véhicules pour les voyages supplémentaires et pour les voyages de l'horaire.

Associons aux x_{kj} un coefficient c_{kj} égal au coût par kilomètre du parcours à vide (A''_j, A'_k), plus un coût du personnel roulant proportionnel à la durée du voyage, ou bien égal à zéro si $A''_j \equiv A'_k$, $j, k = 1, 2, \dots m$.

Aux $u_j, j = m + 1, m + 2, \dots, m + n$ associons le coefficient C_f, correspondant au coût fixe journalier d'un véhicule, et enfin associons un coût nul aux variables y et v_k, $k = m + 1, m + 2, \dots l$, v_k ayant la même signification que les $u_j, j = m + 1, m + 2, \dots l$.

Pour le coût correspondant aux u_j et v_k,

$$j = k = 1, 2, \dots, m$$

on fixe un entier positif très grand, afin que ces variables prennent toujours une valeur nulle, la condition (ii) devant être en tout cas respectée.

La fonction objective est donc :

$$\text{minimiser } Z = \sum_{k=1}^{l} \sum_{j=1}^{l} C_{kj} x_{kj} + \sum_{j=m+1}^{l} C_f \cdot u_j \tag{11.8}$$

Les relations (11.5*a*), (11.7) et (11.8) constituent un problème de programmation linéaire à variables bivalentes, dont la solution donne l'horaire Θ^* des voyages hors-service $(x_{kj} = 1, k, j = m + 1, m + 2, \dots, m + n)$ formé par des quadruplets du type :

$$\theta_j = (A''_j, \tau_j, A'_k, \tau_j + \eta_{kj}). \tag{11.9}$$

Par suite l'horaire d'où dérivent les M_j dans la (11.2) est :

$$\Theta^{(T)} = \Theta^* \cup \Theta_X$$

Il s'ensuit que l'ensemble des symboles des M_j est :

$$V^{(T)} = V \cup V_X$$

où V_X est l'ensemble des sommets déduits de Θ_X.

12. LA RECHERCHE DE L'ENSEMBLE OPTIMAL DES ITINERAIRES

Parmi les itinéraires, obtenus à l'aide de l'analyseur syntaxique, on devra choisir ceux qui apparaissent les plus économiques et qui comprennent la totalité des courses prévues dans l'horaire de l'entreprise.

Il est pourtant nécessaire de faire précéder la recherche de l'ensemble optimal des itinéraires, d'une analyse des solutions, dans le but d'en vérifier la compatibilité avec un ensemble de conditions de nature syndicale et technique.

Un itinéraire, comme on l'a déjà vu, est une suite de voyages et d'arrêts, disposés alternativement. Les temps maximaux établis par les accords syndicaux pour la durée du travail et de la conduite, déterminent automatiquement une subdivision de l'horaire en unités de travail pour un ou deux tours de conducteurs. Naturellement on écarte les solutions qui prévoient plus de deux tours de conducteurs. En général, les entreprises de transports publics automobiles effectuent un service journalier ayant la durée de 14-15 heures; parmi les autres conditions, il est nécessaire de vérifier celle concernant le retour du personnel à la résidence qui peut avoir lieu aussi, hors-service, en utilisant d'autres moyens de transport de l'entreprise ou non.

Il est évident que cela implique la connaissance des différents moyens pour transporter le personnel roulant (trains et autocars d'autres entreprises).

Il faut remarquer que l'analyse des solutions compatibles et le choix de l'ensemble optimal des itinéraires des véhicules définissent en outre implicitement un ensemble de tours de travail du personnel, c'est-à-dire « l'habillage des tours des véhicules ».

Comme nous l'avons dit auparavant, une autre analyse concerne le type des voyages qui composent un itinéraire et, par suite, les types des véhicules nécessaires. Des marges de tolérance étant fixées, l'hétérogénéité des voyages se traduit en un coût fictif qui, par exemple, peut avoir une incidence sur le coût fixe du véhicule (voir dans la suite); sauf le cas, au contraire, où l'hétérogénéité est telle qu'il est techniquement impossible d'effectuer tous les voyages prévus dans l'itinéraire, avec un même type de véhicule.

Dans ce cas-là aussi, la solution est écartée.

En tout cas, d'autres critères peuvent être introduits et autant d'analyses sont nécessaires pour obtenir, avant le calcul, un ensemble de solutions compatibles.

Soit $S = \{ s_i \}$, $i = 1, 2, \dots n$, l'ensemble des solutions obtenues; s_i est l'ensemble des symboles de $V^{(T)}$, correspondant à un chemin de G^*, ou bien à un itinéraire de $\Theta^{(T)}$.

Le choix d'un itinéraire $s_{\hat{i}}$ implique l'élimination de toutes les solutions auxquelles correspondent des $s_{\hat{i}}$ $(i \neq \hat{i})$ ayant en commun avec s_i au moins un élément.

Associons à chaque élément de S une variable entière x_i qui ne puisse prendre que les valeurs 0 ou 1. La recherche de l'ensemble optimal $S' \subseteq S$ consiste à choisir un ensemble de valeurs x_i qui rende minimale la forme linéaire

$$z = \sum_{i=1}^{n} (c_i^* \cdot x_i - \bar{c}\varphi_i) \tag{12.1}$$

où c_i^* est le coût de l'itinéraire s_i et $\bar{c} \cdot \varphi_i$ est une quantité dépendant du nombre des voyages qui composent s_i.

Soit N l'ensemble des nombres naturels compris entre 1 et n, et N^* l'ensemble des sous-ensembles de N, ainsi indiqués :

$$N_j \{ i \mid s_j \bigcap_{i \in N} s_i \neq \varnothing \}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n \tag{12.2}$$

On devra alors avoir :

$$\sum_{i \in N_j} x_i \leqslant 1 \qquad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{12.3}$$

Puisque les valeurs possibles de x_i sont 0 ou 1, la recherche de S' se ramène dans ce cas-là aussi au problème de programmation linéaire, (12.3) et (12.1), à la condition que l'on ait $\cup\, s_i = V^{(T)}$.

En sommant aux coûts c_i^* une quantité $- \bar{c}\varphi_i$, où $\bar{c}$ est une constante positive qui soit sûrement supérieure à c_i^* et où φ_i est le nombre des voyages élémentaires effectués pendant s_i, on maximise aussi φ_i, d'où

$$\cup\, s_i = V^{(T)}$$

Le coût des parcours est calculé par les différentes entreprises en suivant des critères presque toujours uniformes; ce qui varie, au contraire, c'est la politique de gestion, dans le sens que certains coûts ont une incidence plus forte ou plus faible que d'autres.

Supposons, par exemple, que l'on ait décidé de minimiser, par ordre de priorité décroissante, les composantes de coût suivantes :

a) le nombre des véhicules nécessaires pour assurer le service;

b) le coût d'exploitation du véhicule;

c) le coût du personnel roulant.

Pour la composante *a*) on associe un coût $c_i^{(F)}$ au type de véhicule affecté au parcours s_i. Les $c_i^{(F)}$ représentent des coûts fixes ayant une incidence sur les véhicules, tels que les frais d'amortissement, d'usine, de dépôt etc... plus le coût fictif dérivant de l'hétérogénéité des courses.

Pour la condition *b*) on calcule le coût total $c_i^{(E)}$ du voyage, y compris les courses extra-horaire éventuelles, sur la base du coût par kilomètre du véhicule qui effectue s_i.

La composante de coût *c*), enfin, est calculée d'après le salaire du personnel roulant et les diverses indemnités extraordinaires (travail extraordinaire, indemnité de distance, etc.).

En indiquant par $c_i^{(P)}$ le coût du personnel, ayant une incidence sur s_i, on a :

$$c_i = c_i^* - \bar{c} \cdot \varphi_i = c_i^{(F)} + c_i^{(E)} + c_i^{(P)} - \bar{c} \cdot \varphi_i \tag{12.4}$$

Dans certains cas, il peut être convenable de multiplier $c_i^{(F)}$ par un facteur, plus grand que 1, si les autres composantes résultent considérables, mais inférieures.

Dans tous les cas, d'après ce que nous avons dit plus haut, on devra avoir

$$\bar{c} \geqslant c_i^*$$

CONCLUSIONS

La réalisation d'un procédé de génération automatique d'itinéraires, du type que nous venons de décrire, constitue sans doute un instrument de travail utile pour une entreprise de transports.

Elle permet en effet à l'entreprise de s'adapter d'une manière rapide et économique aux caractéristiques changeantes de la circulation, en lui donnant à la fois des orientations valables pour modifier ou développer un horaire préexistant.

L'indication des motifs du rejet des solutions non admissibles donne de précieuses informations pour améliorer l'économie de l'horaire d'une entreprise.

Nous remercions ici la Société de Transports publics automobiles extra-urbains Lazzi Frères, de Florence, pour la collaboration qu'elle nous a voulu bien offrir pour la définition du problème en question.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Berge C., *Théorie des graphes et ses applications*, Paris, Dunod, 1963.

[2] Bar-Hillel Y., Perles M. and Shamir E., *On formal properties of simple phrase structure grammars*. Tech. Report n° 4, Office Naval Research, Information System Branch, 1960.

[3] Caracciolo di Forino A., Spanedda L. and Wolkenstein N., *PANON-1B : A programming language for symbol manipulation*. Calcolo, **3** (2) (1966).

[4] Chomsky N., *Three models for the description of languages*. IRE Trans., **3** (1956).

[5] Chomsky N., *On certain formal properties of grammars*. Information and Control, **2** (2) (1959).

[6] Ginsburg S., *The mathematical theory of context free languages*. New York, McGraw Hill, 1966.

[7] Guzman A. McIntosh H. V. and Kraft D., *Comments on « all paths through a maze »*. IEE Proc. **55** (8) (1967).

[8] MERCATANTI M., *La determinazione degli itinerari delle vetture in un impresa di servizi pubblici automobilistici*, Calcolo (suppl. n° 1), **5** (1968).

[9] ROSENKRANTZ J. D., *Programmed grammars, a new device for generating formal languages*. IEE Conference record of eight annual symposium on switching and automata theory, IEEE Pub. n. 16-c-56, October 1967.

[10] SPANEDDA L., *SYNREC, L'analizzatore sintattico per l'interpretatore PANON-1B*. Calcolo (suppl. 1), **5** (1968).

[11] WOLKENSTEIN N., *Some remarks on the implementation of PANON-1B*. Nota interna dell'I.E.I. Luglio 1967.