REVUE FRANÇAISE D'AUTOMATIQUE, INFORMATIQUE, RECHERCHE OPÉRATIONNELLE. RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

PH. TUAN NGHIEM

Le problème de collecte des ordures urbaines

Revue française d'automatique, informatique, recherche opérationnelle. Recherche opérationnelle, tome 8, nº V2 (1974), p. 75-111

<http://www.numdam.org/item?id=RO_1974__8_2_75_0>

R.A.I.R.O.
(8e année, mai 1974, V-2, p. 75 à 111)

LE PROBLEME DE COLLECTE DES ORDURES URBAINES (1)

par Ph. Tuan Nghiem (2)

Résumé. — *La collecte des ordures est un problème dans lequel une benne parcourt une ville en passant au moins une fois par chaque côté d'un tronçon de rue. Cet article étudie le cas particulier où il n'y a pas de sens unique (mais où il y a des interdictions de tourner à gauche, ou de faire demi-tour au bout d'une rue). Le problème est ramené à celui de la construction d'un certain graphe. On montre tout d'abord qu'une classe de solutions intéressante est celle où les graphes construits sont des arbres. On étudie ensuite les propriétés des solutions générales, en examinant plus particulièrement celles dans lesquelles le circuit passe par chaque côté d'une rue une fois et une seule. En utilisant les résultats obtenus, on décrit enfin les grandes lignes d'un algorithme de résolution pratique.*

On peut poser le problème de la collecte des ordures urbaines dans les termes suivants :

Une ville (ou un quartier de ville) est formée d'un ensemble d'îlots producteurs d'ordures (c'est un point de vue duquel il est légitime de considérer nos habitations). Ces ordures sont déposées le long des rues qui bordent les îlots. Pour enlever ces ordures, on utilise des bennes de collecte.

Le problème se présente à plusieurs niveaux qu'il faut tous aborder, dans une solution pratique.

La prévision des quantités à ramasser est un aspect très important du problème. Elle a fait l'objet de nombreuses études [cf. 3, 5, 6, 8, 9, 10, 11]. Ce problème n'est pas abordé dans le présent article.

Il semble que le problème de la définition du trajet des bennes ait été quelque peu négligé jusqu'ici. C'est cet aspect du problème qu'on se propose d'étudier ici.

Une pratique assez courante consiste à découper la ville en groupes d'îlots, et à affecter une benne à chacun de ces groupes.

(1) Cet exposé a été mis au point à l'occasion d'une étude faite pour le C.A.P. (Centre d'Analyse et de Programmation).

(2) Conseil en Informatique et gestion, Paris.

Un problème important, et difficile sur le plan théorique, est de trouver un découpage qui conduise à utiliser le nombre minimum de bennes, compte tenu des quantités à enlever. Ce problème n'est pas abordé ici.

Nous nous intéressons à la définition des trajets qui donne le kilométrage minimum.

Pour assurer la collecte, chaque benne doit passer au moins une fois par chaque côté des rues de la zone qui lui est affectée.

L'objectif économique, pour chaque benne, est de parcourir chaque tronçon de rue sur les deux côtés, en faisant le moins de trajets supplémentaires possible. L'idéal est de passer par chaque côté de la rue une fois et une seule.

Il y a sans doute encore le problème de découper la ville de façon que le kilométrage de l'ensemble des bennes soit minimum. Mais l'on voit aussitôt que cet objectif vient en conflit avec celui du découpage envisagé plus haut. Dans la pratique, ce dernier qui touche au domaine des investissements est en général de beaucoup le plus important : la réduction du kilométrage sera le plus souvent recherchée dans le cadre d'un découpage préalable visant à minimiser le nombre de bennes. D'un point de vue purement spéculatif, notons que s'il est possible de trouver, pour chaque benne, le trajet idéal (trajet passant par chaque côté de rue une fois et une seule), le découpage est sans influence sur le kilométrage global (qui est alors égal à la longueur totale des voies, comptées dans les deux sens). Il semble donc que ce découpage ne joue qu'au second ordre. Au surplus, c'est un problème pour lequel il semble assez difficile de trouver une formulation opérationnelle : l'optimum est lié à la forme des zones qui permet de trouver, pour chaque benne, une solution plus ou moins proche du minimum idéal. Pour toutes les raisons évoquées, ce problème est laissé de côté.

Finalement, le problème retenu est celui de la recherche du trajet optimum pour une benne, dans la zone qui lui est affectée.

Ce problème possède une régularité suffisante pour laisser voir des propriétés mathématiques intéressantes lorsqu'il n'y a pas de rue en sens unique (mais il peut y avoir des interdictions de tourner à gauche, sans que les dites propriétés soient remises en cause).

C'est le cas particulier qui est étudié dans cet article. Nous y montrons quelques propriétés des circuits soumis à certaines restrictions, comme l'interdiction de faire demi-tour au bout d'une rue, ou de tourner à gauche à certains carrefours. Prenant en compte ces propriétés, nous développons alors les grandes lignes d'un algorithme de résolution du problème.

Naturellement, pour la Recherche Opérationnelle les Mathématiques ne sont pas une fin en soi. Des rues en sens unique continueront à exister dans certaines villes, en attendant que les édiles soient tous mathématiciens, ce qui peut arriver (« Tout peut naître ici-bas d'une attente infinie »). Pour l'instant, devant un problème pratique, comportant des rues en sens unique, on peut soit compléter sur le plan théorique l'étude présentée ici, si l'on en a le temps, soit adapter cette étude par des ajustements empiriques.

1. FORMULATION MATHEMATIQUE DU PROBLEME

1.1. Enoncé du problème

Les rues sont découpées en tronçons délimités par les intersections.

Sur la figure ci-dessous, la rue qui va de A à B est découpée en deux tronçons, l'un allant de A à C, l'autre allant de C à B.

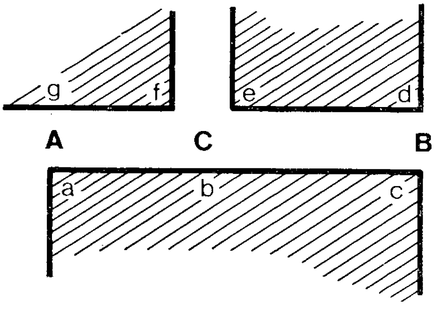


Figure 1

Tronçons de rue

Chaque côté d'un tronçon de rue est représenté par un arc orienté dans le sens de la circulation. Les deux tronçons de rue AC et CB de la figure ci-dessus donnent naissance aux arcs orientés de la figure 2.

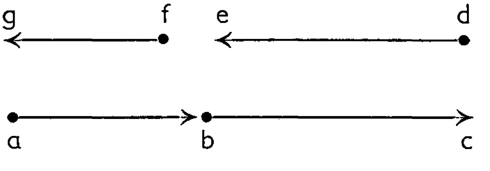


Figure 2

Représentation des tronçons de rue

Les arcs qu'on vient de définir délimitent chaque îlot par un circuit fermé. Ces arcs sont appelés *arcs bordants*.

Le circuit des arcs bordants entourant un îlot sera appelé *circuit d'îlots*, ou simplement *îlot* lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté possible.

Considérons les îlots de la figure 3 ci-dessous.

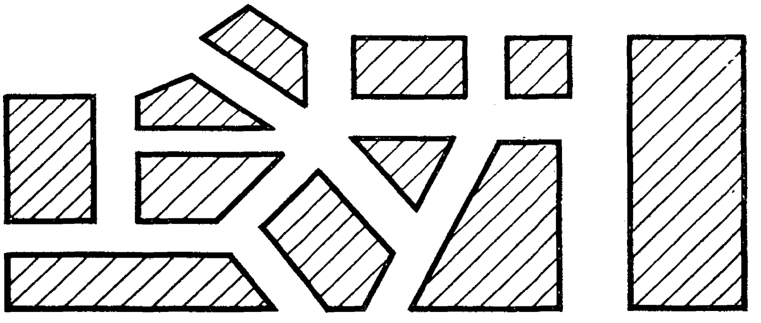


Figure 3

Plan des îlots et des rues

Sur la figure 4, les arcs bordants représentant les côtés des tronçons de rue de la figure 3 sont dessinés en traits pleins.

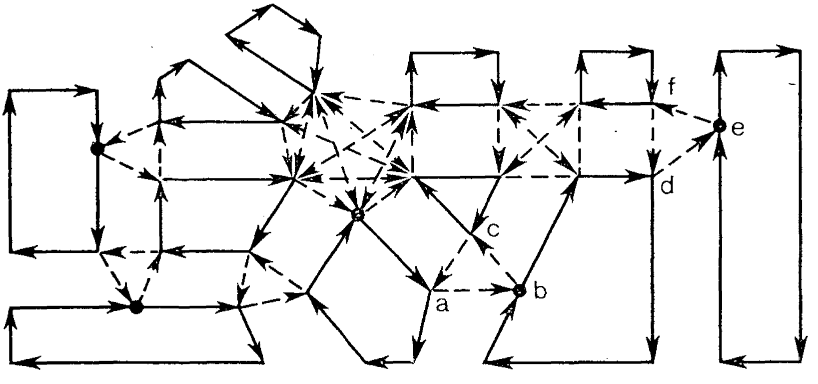


Figure 4

Graphe des trajets possibles

On passe d'un îlot à l'autre en traversant un carrefour.

Les arcs permettant de traverser un carrefour seront appelés *arcs de carrefour*. Ces arcs sont représentés en pointillé sur la figure 4.

Le graphe formé par l'ensemble des arcs bordants et des arcs de carrefour sera appelé *graphe des trajets possibles.*

Dans ce graphe, les arcs bordants sont ceux par lesquels on doit passer obligatoirement.

Le passage par les arcs de carrefour n'est pas obligatoire. On doit cependant en choisir un certain nombre pour joindre les îlots entre eux.

En tout sommet du graphe des trajets possibles, il y a exactement un arc bordant qui entre et un arc bordant qui sort. Il peut y avoir un nombre quelconque d'arc de carrefour qui entrent ou qui sortent. Chaque arc de carrefour représente un trajet autorisé sortant d'un tronçon de rue pour entrer dans un autre. Les réglementations comme l'interdiction de tourner à gauche ont pour effet de supprimer certains arcs de carrefour.

Dans cet article, nous nous intéresserons aux graphes formés de tous les arcs bordants et d'un certain nombre d'arcs de carrefour et pour lesquels il existe un circuit passant par chaque arc une fois et une seule. Un tel circuit est dit *eulérien.*

Le problème peut être formulé de la façon suivante :

Choisir un ensemble d'arcs de carrefour de façon que le graphe obtenu admette un circuit eulérien.

Cette formulation est cependant insuffisante si, à un carrefour, la réglementation interdit d'entrer dans certains tronçons de rue lorsqu'on vient de certains autres.

Considérons par exemple la situation suivante :

— en sortant du tronçon finissant en a il est interdit d'entrer dans le tronçon commençant en c et permis d'entrer dans le tronçon commençant en b,

— en sortant du tronçon finissant en b, il est permis d'entrer dans celui commençant en c (cf. fig. 4).

Dans le graphe, il n'y a pas d'arc de carrefour ac, mais il y a un arc de carrefour ab et un arc de carrefour bc.

Un circuit qui passe de a en b, puis immédiatement de b en c se traduit dans le concret par un itinéraire passant directement de a en c, ce qui est interdit.

Des exemples de la règlementation qu'on vient d'évoquer sont l'interdiction de tourner à gauche, ou encore de faire demi-tour en arrivant au bout d'une rue.

Si ces interdictions n'existent en aucun carrefour, la solution du problème est immédiate, par la remarque suivante :

— étant donné un circuit passant une fois et une seule par chaque arc bordant d'un groupe d'îlots, moyennant un demi-tour éventuel au bout d'une rue, on peut toujours étendre ce circuit pour y incorporer un îlot adjacent, tout en conservant au circuit sa propriété initiale.

Considérons par exemple la figure 1. Supposons que le circuit initial comprenne l'îlot contenant l'arc *de*, mais non l'îlot contenant l'arc *fg*. Pour étendre le circuit en y incorporant ce dernier îlot, on peut, après avoir parcouru l'arc *de*, aller de *e* en *f*, puis faire le tour de l'îlot. Étant revenu en *f*, on repasse en *e* pour reprendre le circuit initial, ce qui implique un demi-tour dans la rue séparant *e* et *f*.

Utilisant cette remarque, on peut construire une solution par une procédure « d'agglomération progressive » qui part du circuit constitué par un îlot, et l'étend par incorporation d'îlots adjacents successifs.

Le problème n'est donc intéressant que si certaines interdictions sont imposées.

Pour tenir compte de ces interdictions, il suffit de se restreindre aux circuits n'empruntant jamais deux arcs de carrefour de suite.

En effet, si le circuit passe immédiatement de l'arc de carrefour *ab* à l'arc de carrefour *bc* :

— si *ac* est interdit, l'itinéraire réel contrevient à la règlementation, et il faut l'interdire,

— si *ac* est autorisé, l'arc *ac* existe, et il suffit de changer de circuit en remplaçant les arcs *ab* et *bc* par l'arc *ac*.

Le problème s'énonce, en définitive :

FORMULATION 1. Choisir un ensemble d'arcs de carrefour de façon que le graphe obtenu admette un circuit eulérien tel qu'en le parcourant on ne passe pas par deux arcs de carrefours successifs.

1.2. Graphe des trajets

Dans toute la suite, nous étudierons les graphes obtenus par le choix d'un certain nombre d'arcs de carrefour.

Un tel graphe sera appelé *graphe des trajets*.

C'est un sous-graphe du graphe des trajets possibles.

2. FORMULATION MODIFIEE

2.1. Les circuits de carrefour

On connaît le théorème suivant sur l'existence d'un circuit eulérien dans un graphe orienté ([1] : le problème d'Euler, p. 162).

Un graphe orienté admet un circuit eulérien si, et seulement si :

— il est connexe,

— en chacun de ses sommets, il part autant d'arcs qu'il en arrive.

Dans le graphe des trajets possibles, les arcs bordants forment des circuits qui entourent les îlots et respectent donc en chaque sommet l'équilibre des arcs entrants et des arcs sortants : en chaque sommet du graphe, il entre et il sort un arc de ce type.

Le graphe n'est cependant pas connexe, chaque îlot étant une composante connexe distincte.

L'adjonction des arcs de carrefour a pour but de rendre le graphe connexe. Mais elle doit conserver l'équilibre des arcs entrant et sortant en chaque sommet. Compte tenu de la propriété déjà acquise par les arcs bordants :

En chaque sommet, le nombre des arcs de carrefour entrants doit être égal à celui des arcs de carrefour sortants.

Autrement dit :

A chaque carrefour, les arcs de carrefour doivent former un ou plusieurs circuits.

Un circuit formé par des arcs de carrefour sera appelé *circuit de carrefour*. En un carrefour d'un graphe des trajets, il peut y avoir zéro, un ou plusieurs circuits de carrefour.

Le problème est de choisir un ensemble de circuits de carrefour de façon que le graphe soit connexe (ce qui est trivial), mais ces circuits de carrefour doivent de plus être tels que le graphe admette un circuit eulérien qui ne passe pas par deux arcs de carrefour successivement.

2.2. Les règles de parcours

Nous allons voir ici comment se traduit l'interdiction d'emprunter deux arcs de carrefour successifs lorsqu'on parcourt le circuit eulérien du graphe.

Lemme 1. En un sommet du graphe, il ne peut entrer plus d'un seul arc de carrefour.

En effet, en arrivant en ce sommet par un arc de carrefour, comme il est interdit de reprendre immédiatement un autre arc de carrefour, il faut qu'on passe sur l'arc bordant issu de ce point (voir fig. 5). S'il y a plus d'un arc de carrefour arrivant à ce sommet, l'arc bordant issu de ce sommet sera donc parcouru plus d'une fois.

CQFD

Les sommets d'un circuit d'îlot qui touche un circuit de carrefour seront appelés *points d'incidence.*

Lemme 2. En suivant le circuit eulérien, après être entré dans un îlot, il faut en ressortir par le premier point d'incidence rencontré.

En effet, en restant sur le circuit d'îlot, on doit prendre l'arc bordant issu du point d'incidence. Or, en ce point il entre un arc de carrefour; en venant par cet arc, on doit également passer par l'arc bordant issu du point d'incidence. Cet arc serait donc parcouru plus d'une fois.

CQFD

En particulier, on a le résultat suivant :

Si un îlot a plus d'un point d'incidence, on ne peut entrer dans cet îlot et en ressortir par le même point. En effet, pour sortir par le point où l'on est entré, il faut avoir parcouru tout le circuit d'îlot; or, sur ce circuit il y a des points d'incidence au premier desquels on a dû ressortir.

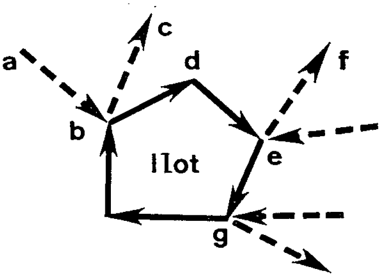


Figure 5

Arcs de carrefour adjacents à un îlot

En entrant par *ab*, on passe obligatoirement en *bd*; on ressort obligatoirement par *ef*.

En fin de compte, les contraintes imposées conduisent à des règles de parcours très strictes qu'on peut résumer ainsi :

RÈGLES DE PARCOURS

Dans un circuit eulérien répondant au problème :

— en arrivant en un sommet par un arc de carrefour, on doit prendre l'arc bordant issu de ce point (c'est la contrainte imposée),

— en arrivant en un sommet par un arc bordant, s'il y a un arc de carrefour issu de ce sommet, il faut prendre cet arc (lemme 2).

Un graphe étant défini par un choix de circuits de carrefour, on ne peut donc, en respectant cette règle, le parcourir que d'une seule façon.

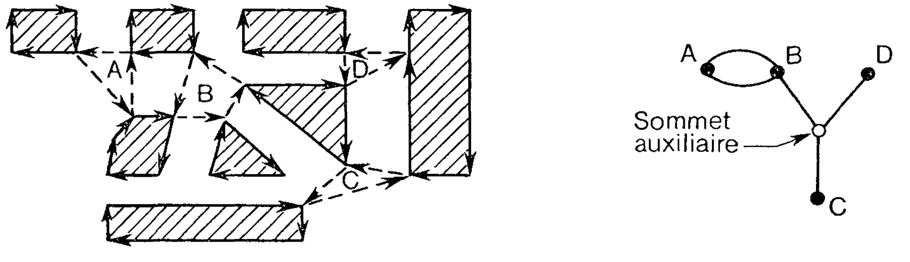
2.3. Le graphe des carrefours

Pour un choix donné de circuits de carrefour, nous allons définir un graphe non-orienté comme suit :

Chaque circuit de carrefour est un sommet du graphe.

Un circuit d'îlot qui touche à deux circuits de carrefour est représenté par une arête joignant les sommets représentatifs de ces derniers.

Un circuit d'îlot qui touche à plus de deux circuits de carrefour sera représenté par un sommet auxiliaire relié par des arêtes aux sommets représentatifs de ces circuits de carrefour.



a. Graphe des trajets *b.* Graphe des carrefours associés

Figure 6

Graphe de carrefour

Ce graphe sera appelé graphe des carrefours. Une illustration en est donnée à la figure 6.

Ce graphe permettra d'exprimer les propriétés du graphe des trajets de façon commode.

3. CIRCUITS PASSANT UNE FOIS ET UNE SEULE PAR CHAQUE ARC

3.0. Définitions

Rappelons tout d'abord quelques définitions concernant les graphes non-orientés (voir : [1]).

Dans un graphe non-orienté, les sommets sont reliés entre eux par des arêtes. Une arête peut être parcourue indifféremment dans les deux sens.

Chaîne. Une chaîne est un ensemble d'arêtes énumérées dans un certain ordre tel que chaque arête est rattachée à celle qui la précède par une de ses extrémités.

Cycle. Un cycle est une chaîne qui part d'un sommet pour revenir au même sommet.

Cycle élémentaire. Un cycle élémentaire est un cycle dans lequel chaque sommet n'est rencontré qu'un fois.

Chaîne élémentaire. Une chaîne élémentaire est une chaîne ne contenant pas de cycle.

Arbre. Un arbre est un graphe sans cycle.

Pour pouvoir nous exprimer simplement par la suite, nous introduirons les définitions qui suivent.

Maillon. Selon notre formulation, les circuits de carrefour sont au centre du problème. Nous appellerons *maillon* le sous-graphe formé par un circuit de carrefour et les arcs des îlots touchant ce circuit.

Maillon-ouvert. Il est quelquefois utile de considérer un maillon dont on a enlevé un îlot. Le sous-graphe ainsi obtenu est appelé *maillon-ouvert.* Le sommet où le circuit de carrefour touche l'îlot qu'on a enlevé sera appelé *point d'entrée* du maillon-ouvert.

Circuit licite. Un circuit ne passant pas par 2 arcs de carrefour successifs sera appelé *circuit licite.* Nous ne nous intéresserons en fait qu'aux circuits licites. Nous les appellerons circuits, sans autre qualificatif, dès lors qu'il n'y aura pas d'ambiguïté possible.

Chemin licite. Un chemin ne passant pas par 2 arcs de carrefour successifs sera appelé *chemin licite.*

Solution. Une solution sera constituée par tout choix des circuits de carrefour qui rende le graphe connexe (Il existe alors un circuit eulérien dans le graphe.)

Solution acceptable. Une solution acceptable est constituée par un choix des circuits de carrefour tel que le graphe obtenu admette un circuit eulérien licite.

3.1. Solutions en arbre

Considérons un maillon qui n'a en commun avec le reste du graphe qu'un seul îlot. Cet îlot sera appelé *îlot de rattachement* du maillon.

Le circuit de carrefour du maillon touche chaque îlot du maillon en un seul point. A part l'îlot de rattachement, les îlots du maillon n'ont pas d'autres points d'incidence.

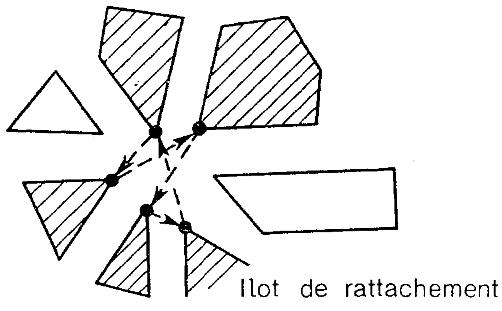


Figure 7

Maillon rattaché par un seul îlot

On a le résultat suivant, qui est évident d'après la figure 7 :

Lemme 3. Soient un maillon ayant avec le reste du graphe un seul îlot commun, et le maillon-ouvert obtenu en enlevant cet îlot. En partant du point d'entrée du maillon-ouvert :

— on y revient après avoir décrit un circuit licite passant par tous les arcs du maillon-ouvert,

— sur ce circuit, les arcs de carrefour sont rencontrés dans le même ordre que sur le circuit de carrefour.

En effet, sur chaque îlot du maillon-ouvert, il n'y a qu'un seul point d'incidence, celui où l'îlot touche le circuit de carrefour. En entrant dans un îlot, la seule possibilité est de parcourir entièrement le circuit d'îlot et de ressortir par le même point où l'on est arrivé. En ressortant ainsi, on utilise l'arc de carrefour adjacent à celui par lequel on est entré; c'est-à-dire qu'on repart sur la suite du circuit de carrefour celui-ci est donc décrit entièrement, et l'on est passé par tous les îlots qu'il touche.

CQFD

Un maillon-ouvert se rattachant au reste du graphe par un seul point peut donc être éliminé du problème; en effet, d'après ce qu'on vient de voir, si la solution est acceptable pour le graphe initial, elle est acceptable pour le graphe dont on a enlevé le maillon-ouvert, et réciproquement.

Le circuit de carrefour d'un tel maillon-ouvert est représenté dans le graphe des carrefours par un sommet pendant (sommet où aboutit une seule arête).

On a alors le résultat suivant :

Théorème 1 (solutions en arbre). Lorsque le graphe des carrefours est un arbre (c'est-à-dire, n'a pas de cycle), la solution représentée par le graphe est acceptable.

Un graphe sans cycle admet toujours au moins un sommet pendant. Ce résultat très intuitif est démontré dans [1] (Chap. 16, Arbres et arborescences, p. 149-150).

On vient de voir qu'un circuit de carrefour représenté par un sommet pendant peut être éliminé, avec son maillon-ouvert, du problème. Le graphe qui reste est toujours connexe et sans cycle. On peut procéder ainsi jusqu'à ce qu'il ne reste plus qu'un seul circuit de carrefour. Pour ce circuit isolé, on peut voir (cf. démonstration du lemme 3) qu'il admet une solution acceptable. L'ensemble du graphe admet donc une solution acceptable.

CQFD

3.2. Propriétés des solutions générales

Il reste à étudier les solutions dont le graphe des carrefours contient des cycles.

Dans ce qui suit, en raisonnant sur le graphe des trajets, nous utiliserons les termes de chaînes, de cycles et d'arbres pour désigner les éléments qui donnent des chaînes, des cycles et des arbres dans le graphe des carrefours associés. Il n'y a pas de risque de confusion, puisque ces termes sont propres aux graphes non-orientés et que le graphe des trajets est orienté.

Dans les figures qui suivent, pour le graphe des trajets, nous représenterons complètement les arcs de carrefour. Les îlots seront représentés par des cercles.

3.2.1. Structure d'un cycle élémentaire

Isolons par la pensée un cycle élémentaire du graphe. L'exemple d'un tel cycle est donné par la figure 8.

Considérons le sous-graphe formé par tous les arcs appartenant aux maillons du cycle.

Dans ce sous-graphe, chaque maillon partage un îlot avec deux autres maillons. Un tel îlot sera appelé *îlot de rattachement*. Les îlots de rattachement sont hachurés sur la figure 8.

Les deux îlots partagés par un maillon avec les maillons voisins sont distincts, sinon ce maillon peut être supprimé du graphe (ce point est évident sur le graphe des carrefours).

Sur chaque îlot de rattachement il y a deux points d'incidence chacun d'eux rattachant l'îlot à un circuit de carrefour différent; ces points seront appelés *points de rattachement.*

Partant d'un point de rattachement, essayons alors de progresser dans le sous-graphe en partant sur l'arc de carrefour.

S'il n'y avait pas un second îlot de rattachement dans le maillon, on reviendrait au point de départ après avoir décrit tous les arcs du maillon-ouvert (lemme 3).

Mais, au cours du trajet, on passe par le second îlot de rattachement. Après y être entré par un point de rattachement, on doit ressortir par l'autre

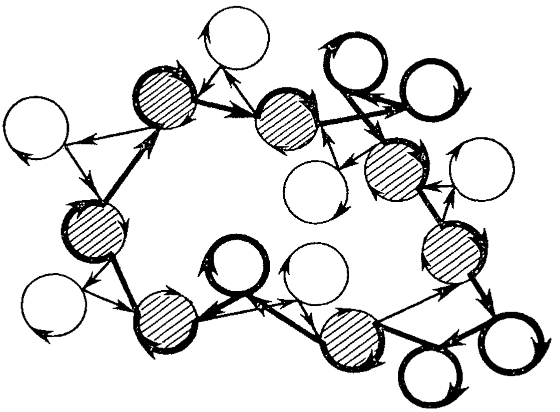


Figure 8

Un cycle élémentaire

point de rattachement (lemme 2). Or ce second point de rattachement touche à un autre circuit de carrefour. On a ainsi quitté le premier maillon-ouvert sans en avoir décrit tous les arcs.

L'îlot de rattachement d'où l'on est parti sera appelé 1er îlot de rattachement; celui que l'on atteint immédiatement après sera appelé 2^{e} îlot, etc...

Le point de rattachement où l'on quitte un maillon-ouvert pour entrer dans un autre sera appelé *point de sortie* pour le premier et *point d'entrée* pour le second.

On est entré dans le second maillon-ouvert dans les mêmes conditions où l'on est entré dans le premier. On va donc quitter le nouveau maillon-ouvert sans en avoir décrit tous les arcs. Ainsi :

La première fois qu'on entre dans un maillon-ouvert, on en ressort sans en avoir décrit tous les arcs.

En continuant la progression, le circuit étant fini, à un moment donné, on doit revenir à un îlot de rattachement déjà rencontré. Celui-ci ne peut être que l'îlot de rattachement d'où l'on est parti, puisque le cycle est élémentaire. On ne peut y arriver par le point de rattachement d'où l'on est parti : en remontant l'arc de carrefour entrant en ce point, on voit qu'il faut être passé par le second îlot de rattachement, contrairement à l'hypothèse. On arrive donc à l'îlot de départ par le point de rattachement différent de celui dont on est parti. En parcourant les arcs bordants de l'îlot, on revient alors au point de départ d'où l'on ne peut partir qu'en prenant l'arc de carrefour qui n'est autre que celui sur lequel on s'est engagé en premier.

Le circuit est donc fermé, et dans ce circuit chaque maillon-ouvert n'a été rencontré qu'une seule fois, c'est-à-dire que tous ses arcs n'ont pas été décrits.

Dans le premier trajet, en arrivant au point de sortie d'un maillon-ouvert, on s'est engagé sur l'arc de carrefour qui quitte l'îlot. Partons maintenant de ce point en empruntant l'arc bordant qui en part. Cet arc bordant n'appartient pas au premier trajet puisque, dans ce trajet, on quitte l'îlot précisément en arrivant à l'origine de cet arc. Cet arc est ainsi la continuation du chemin que l'on suivrait sur le maillon-ouvert lors du premier trajet, s'il n'y avait pas le point de rattachement. En poursuivant le chemin, on arrive donc au point d'entrée du maillon-ouvert après avoir parcouru tous les arcs non encore parcourus lors du premier trajet.

Le point d'entrée du maillon-ouvert qu'on vient de parcourir est le point de sortie du maillon-ouvert qui le précède dans le premier trajet. On continuera donc sur ce maillon-ouvert comme on vient de faire précédemment. En poursuivant, on passe donc sur les différents maillons-ouverts dans l'ordre inverse de celui où on les a rencontrés lors du premier trajet, et sur chaque maillon-ouvert, on décrit tous les arcs laissés de côté la première fois.

On a finalement le résultat suivant :

Théorème 2 (structure d'un cycle élémentaire). Un cycle élémentaire est formé de deux circuits licites disjoints.

Au cours de la démonstration, on a pu faire la constatation suivante :

Théorème 3. Sur un îlot de rattachement, les arcs de carrefour touchant le même point d'incidence appartiennent aux deux circuits différents du cycle. Sur un autre îlot, les arcs de carrefour touchant le même point d'incidence appartiennent au même circuit.

3.2.2. Graphe à deux cycles

Nous allons nous servir des résultats qui précèdent pour voir dans quels cas un graphe général admet une solution acceptable.

Le procédé utilisé sera le suivant : on décompose le graphe en cycles élémentaires puis, partant de l'un d'entre eux, on étudie l'incidence de l'addition de cycles élémentaires successifs.

Remarquons tout de suite que, d'après la démonstration du théorème 1, les excroissances en forme d'arbre qui poussent sur un cycle peuvent être éliminées du problème, ce que nous ferons pour garder une vue claire des choses.

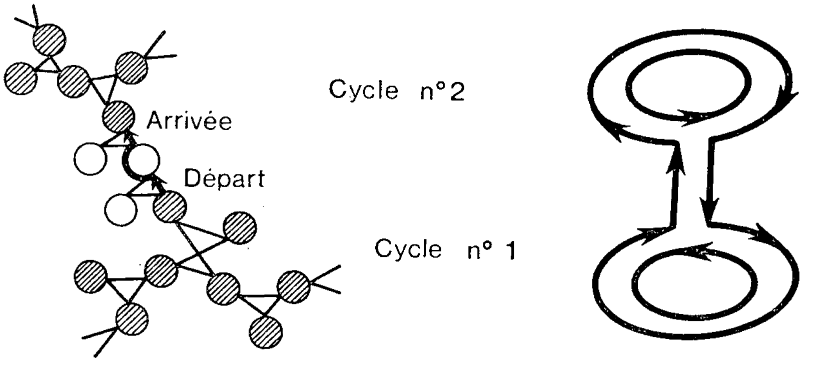
Nous étudierons tout d'abord le cas d'un graphe à 2 cycles.

Soient donc un cycle élémentaire que nous désignerons par cycle n° 1, et un autre cycle élémentaire que nous désignerons par cycle n° 2.

Examinons les différentes positions possibles de ces cycles l'un par rapport à l'autre.

1^er^ CAS. *Les deux cycles n'ont aucun îlot commun* (fig. 9).

Le graphe étant connexe, il existe une chaîne allant d'un cycle à l'autre. En cheminant sur l'un des circuits du cycle n° 1, on s'engage sur cette chaîne pour arriver au cycle n° 2 (fig. 9 *a*).



a. **Eléments du graphe des trajets** *b.* **Représentation simplifiée**

Figure 9

Liaison entre deux cycles sans îlot commun

Les îlots appartenant à l'un ou l'autre cycle sont hachurés. Le chemin allant du cycle n° 1 au cycle n° 2 est en trait épais.

On arrive sur l'un des circuits du cycle n° 2. En s'engageant dans ce circuit, on en fait le tour et revient au point d'arrivée de la chaîne. Celle-ci ramène au cycle n° 1, au point d'où l'on est parti, c'est-à-dire sur le même circuit.

La situation est représentée sur la figure 9 *b*.

L'autre circuit du cycle n° 2 reste isolé. Le graphe a donc trois circuits.

Autrement dit, dans le cas examiné :

L'addition d'un cycle élémentaire ajoute un circuit au graphe initial.

2e CAS. *Les deux cycles ont un îlot commun*

Il y a deux possibilités :

1° *L'îlot commun n'est pas un îlot de rattachement du cycle n° 2.*

Alors, les deux arcs de carrefour du cycle n° 2 incidents à ces îlots appartiennent au même circuit de ce cycle.

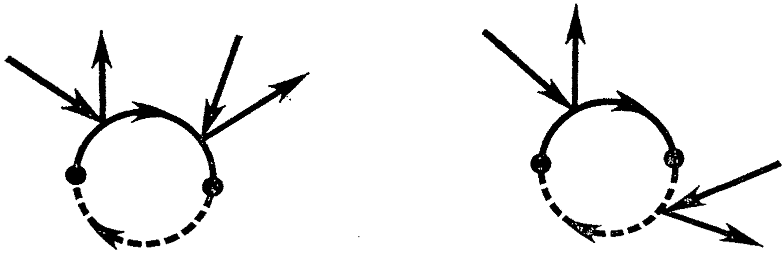
La situation est analogue à celle du premier cas, sauf qu'il n'y a pas de chaîne intermédiaire :

En cheminant sur l'un des circuits du cycle n° 1, on part sur le cycle n° 2 et décrit complètement l'un de ses circuits pour revenir au cycle n° 1, sur le circuit de départ.

Dans cette situation :

L'addition d'un cycle élémentaire ajoute un circuit au graphe initial.

2° *L'îlot commun est un point de rattachement du cycle n° 2* (fig. 10).



a. Retour sur le même circuit du cycle n° 1 *b.* Retour sur un circuit différent du cycle n° 1

Figure 10

Liaison entre deux cycles élémentaires ayant un îlot commun

L'îlot est commun aux deux cycles. Sur l'îlot, les arcs considérés dans le cycle n° 1 sont en traits pleins pour l'un des circuits, en pointillé pour l'autre circuit. Les arcs de carrefour qui figurent sont ceux du cycle n° 2.

Sur l'îlot commun, il y a deux points d'incidence appartenant au cycle n° 2. On a les deux propriétés suivantes :

— en chaque point d'incidence, les deux arcs de carrefour appartiennent aux deux circuits différents du cycle n° 2 (théorème 3);

— en partant sur le cycle n° 2 par l'un des points d'incidence on revient au cycle n° 1 par l'autre point d'incidence (puisque l'arc aboutissant au point de départ appartient à un autre circuit).

Ce sont ces deux propriétés qui sont importantes pour notre propos. Le fait que le point de départ et le point de retour sont sur le même îlot n'intervient pas. La situation où ces deux propriétés sont vérifiées est étudiée avec le 3ᵉ cas ci-dessous.

3ᵉ CAS. *Les deux cycles ont deux îlots communs*

Nous allons tout d'abord démontrer le résultat suivant :

Lemme 4. Lorsque les deux cycles élémentaires ont deux îlots communs :

— en partant du cycle n° 1 vers le cycle n° 2 par un point, on revient au cycle n° 1 par un autre point,

— en chacun de ces points, les deux arcs de carrefour du cycle n° 2 appartiennent aux deux circuits différents de ce cycle.

Les maillons compris entre les deux îlots communs appartiennent en commun aux deux cycles. Nous allons montrer que les îlots de cette partie commune qui touchent aux circuits appartenant en propre au cycle n° 2 sont des îlots de rattachement de ce cycle.

En cheminant sur l'un des circuits du cycle n° 1, on part à un moment donné sur le cycle n° 2. Appelons *îlot de départ* d'où l'on part ainsi (c'est-à-dire d'où l'on passe sur un arc de carrefour appartenant en propre au cycle n° 2). L'îlot de départ appartient aux deux cycles.

Si, au lieu de partir sur le cycle n° 2, on continuait sur le cycle n° 1 (en contrevenant à la règle de parcours), on arriverait au 2ᵉ îlot commun aux deux cycles. Tout le chemin joignant l'îlot de départ au 2ᵉ îlot commun appartient aux deux cycles. En particulier, sur ce chemin, l'arc de carrefour dans lequel on s'engage en quittant l'îlot de départ appartient au cycle n° 2.

L'îlot de départ touche à deux circuits de carrefour différents du cycle n° 2. C'est donc un îlot de rattachement pour ce cycle (il est à noter que l'îlot de départ n'est pas obligatoirement un îlot de rattachement pour le cycle n° 1). Autrement dit :

Au point d'incidence d'où l'on part sur le cycle n° 2, les deux arcs de carrefour qui y touchent appartiennent aux deux circuits différents du cycle n° 2 (théorème 3).

Après avoir cheminé sur le cycle n° 2, on revient donc au cycle n° 1 par un point différent du point de départ (puisque l'arc entrant au point de départ appartient à un circuit différent du cycle n° 2).

L'îlot contenant le point de retour sera appelé *îlot de retour*.

Au point de retour, il existe un arc de carrefour partant vers le cycle n° 2. En prenant le circuit du cycle n° 1 qui permet de partir sur cet arc, on montre que l'îlot de retour est aussi un îlot de rattachement pour le cycle n° 2. Autrement dit :

Au point d'incidence où l'on revient au cycle n° 1, les deux arcs de carrefour appartiennent aux deux circuits différents du cycle n° 2.

Ce qui achève de démontrer le lemme.

Pour pouvoir nous exprimer simplement, nous allons introduire les conventions suivantes :

— les deux circuits de chaque cycle seront appelés, l'un le *circuit extérieur*, l'autre le *circuit intérieur*,

— par convention, les circuits extérieurs, pour notre raisonnement, seront celui dont on part, sur le cycle n° 1, et le premier sur lequel on s'engage, en arrivant sur le cycle n° 2,

— le point d'incidence par lequel on s'engage, pour la première fois, sur le cycle n° 2 sera appelé A; le point d'incidence par lequel on revient, pour la première fois, sur le cycle n° 1 sera appelé B.

Au point A, par définition, il part un arc de carrefour appartenant au circuit extérieur du cycle n° 2. D'après le lemme 4, il y arrive un arc de carrefour appartenant au circuit intérieur de ce cycle. En arrivant en A par cet arc, on passe obligatoirement sur l'arc bordant issu de A. Cet arc n'est autre que celui qui se trouve dans la continuation du chemin extérieur du cycle n° 1, interrompu pour passer sur le cycle n° 2. En arrivant en A par le cycle n° 2, on passe donc sur le circuit exrétieur du cycle n° 1.

Au point B, par définition, il arrive un arc de carrefour appartenant au circuit extérieur du cycle n° 2. D'après le lemme 4, il en part un arc de carrefour appartenant au circuit intérieur du cycle n° 2. L'arc du cycle n° 1 arrivant en B est un arc bordant, puisque les arcs de carrefour appartiennent en propre au cycle n° 2. D'après la règle de parcours, en arrivant en B par le cycle n° 1, on doit donc prendre l'arc de carrefour sortant dont on vient de voir qu'il appartient au circuit intérieur du cycle n° 2.

En partant de B sur le circuit intérieur du cycle n° 2, on passe obligatoirement par A, puisque ce point est sur le même circuit. Entre B et A, il n'y a pas d'arc du cycle n° 1, puisque les deux cycles sont élémentaires.

Examinons maintenant le chemin du cycle n° 2 qui part de A et arrive en B par le circuit intérieur, et celui qui part de B et arrive en A par le circuit extérieur.

On a vu qu'en prenant le chemin intérieur partant de B, on arrive en A, sans avoir touché le cycle n° 1 avant A. En continuant après A par le cycle n° 2, on revient en B en restant sur le circuit intérieur de ce cycle. Or le premier arc partant de A appartient au cycle n° 1. Comme on ne sort de ce cycle que par A ou par B, puisque les cycles sont élémentaires, le chemin qu'on vient de prendre reste sur le cycle n° 1 (en changeant peut-être de circuit sur le cycle n° 1, mais peu importe).

Le circuit intérieur de cycle n° 2 est donc formé par :

— le chemin allant de B vers A, qui appartient en propre au cycle n° 2,

— le chemin allant de A vers B qui appartient aussi au cycle n° 1 (avec la possibilité que certains arcs appartiennent à un circuit et d'autres arcs à l'autre).

On montre de la même façon que le circuit extérieur du cycle n° 2 est formé par :

— le chemin allant de A vers B, qui appartient en propre au cycle n° 2,

— le chemin allant de B vers A, qui appartient aussi au cycle n° 1 (avec la possibilité que certains arcs appartiennent à un circuit et d'autres arcs à l'autre).

Finalement, on peut considérer que le graphe formé par les deux cycles est composé des éléments suivants disjoints entre eux :

— le circuit extérieur du cycle n° 1,

— le circuit intérieur du cycle n° 1,

— le chemin extérieur du cycle n° 2, allant de A à B,

— le chemin intérieur du cycle n° 2, allant de B à A.

Nous pouvons maintenant examiner les deux situations possibles :

— le point B est sur le circuit extérieur du cycle n° 1,

— le point B est sur le circuit intérieur du cycle n° 1.

1° *Point B sur le circuit extérieur du cycle n° 1.*

Partons de A vers le cycle n° 2.

Après avoir parcouru une partie du circuit extérieur de ce cycle, on arrive en B sans avoir bouclé le circuit (B est différent de A). En B, on part sur le circuit extérieur du cycle n° 1 et l'on arrive en A avant de pouvoir revenir en B. Un premier circuit est alors bouclé, laissant de côté le chemin allant de A vers B par le circuit extérieur du cycle n° 1.

Partons maintenant de A et allons vers B par le chemin qui vient d'être laissé de côté.

Comme on arrive en B par le cycle n° 1, on s'engage alors sur le circuit intérieur du cycle n° 2. Ce circuit nous ramène en A. Un deuxième circuit est alors bouclé.

Après ces deux circuits, on a décrit;

— le circuit extérieur du cycle n° 1,

— le chemin extérieur du cycle n° 2 allant de A à B,

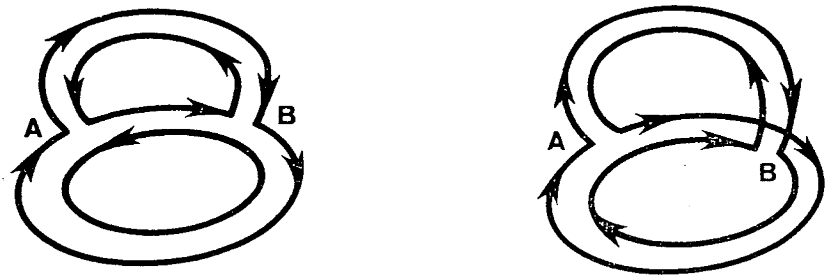
— le chemin intérieur du cycle n° 2 allant de B à A.

Il reste le circuit intérieur du cycle n° 1 qui n'a pas été touché.

On a finalement 3 circuits, comme le montre la figure 11 *a*.

Autrement dit, dans la situation examinée :

L'addition d'un cycle élémentaire ajoute un circuit au graphe initial.



a. **B sur le circuit extérieur du cycle n° 1** *b*. **B sur le circuit intérieur du cycle n° 1**

Figure 11

Deux cycles ayant deux îlots communs

Cette figure représente aussi les situations où deux cycles sont un îlot commun, cet îlot étant îlot de rattachement pour l'un d'eux.

2° *Point B sur le circuit intérieur du cycle n° 1.*

Partons de A vers le cycle n° 2.

On emprunte alors le circuit extérieur du cycle n° 2 et l'on arrive en B. On a décrit le chemin extérieur AB de ce cycle.

En B, on passe sur le circuit intérieur du cycle n° 1. Le point A appartenant au circuit extérieur du cycle, on peut revenir en B après avoir décrit entièrement le circuit intérieur du cycle n° 1.

En B, comme on arrive cette fois par le cycle n° 1, on part sur le circuit intérieur du cycle n° 2. Ce circuit conduit en A. On a alors décrit le chemin intérieur BA du cycle n° 2.

Arrivé en A par le cycle n° 2, on part sur le circuit extérieur du cycle n° 1. circuit qu'on décrit complètement, puisque le point B est sur le circuit intérieur,

Tous les arcs du graphe ont été décrits, et l'on a ainsi fermé la boucle. Le graphe contient donc un seul circuit.

Autrement dit, dans la situation examinée :

L'addition d'un cycle élémentaire a fait diminuer de 1 le nombre des circuits du graphe initial.

La discussion du cas 3 vaut aussi pour la situation du cas 2 où l'îlot commun est un îlot de rattachement pour le cycle n° 2.

Pour résumer l'étude des 3 cas possibles, on peut énoncer le résultat :

Théorème 4 (graphe à 2 cycles élémentaires). Etant donné un graphe formé d'un cycle élémentaire, l'addition d'un autre cycle élémentaire fait augmenter ou diminuer le nombre des circuits licites de 1. Plus précisément :

— si le nouveau cycle est rattaché à deux circuits licites différents du cycle initial, le graphe obtenu a un circuit licite en moins, c'est-à-dire qu'il n'a qu'un seul circuit licite et représente une solution acceptable.

— dans les autres cas, le graphe obtenu a un circuit licite en plus, soit trois, et ne représente pas une solution acceptable.

3.2.3. Graphe général

Dans la démonstration du théorème 4, on n'a pas fait intervenir le nombre de circuits licites du graphe initial. Tout le raisonnement a porté sur le fait qu'en quittant le cycle n° 1 par un circuit, on revient à ce cycle par le même circuit ou par un autre. Le raisonnement vaut donc même lorsque le cycle n° 1 n'est pas élémentaire. Seul le cycle n° 2 doit l'être (le résultat des discussions est d'ailleurs intuitif si l'on représentait chaque circuit par une courbe séparée, au lieu de les mettre l'un dans l'autre).

Théorème 5 (addition d'un cycle élémentaire). L'addition d'un cycle élémentaire à un graphe contenant des cycles fait augmenter ou diminuer le nombre de circuits licites de 1. Plus précisément :

— si le nouveau cycle est rattaché à deux circuits licites différents du cycle initial, le graphe obtenu a un circuit licite de moins,

— dans les autres cas, le graphe obtenu a un circuit licite de plus.

Avant de poursuivre plus avant, il faut, pour respecter la rigueur mathématique, introduire ici la notion de base de cycles et celle de cycle de base.

Nous avons suggéré de reconstituer un graphe en partant d'un cycle élémentaire et en y ajoutant successivement d'autres cycles élémentaires, jusqu'à reconstituer finalement le graphe.

Les cycles élémentaires ainsi rencontrés constituent une *base de cycles* pour le graphe considéré : l'ensemble de ces cycles couvrent tout le graphe. Chaque cycle de la base est appelé *cycle de base.*

Dans ce qui suit, nous parlerons de cycle de base en nous référant implicitement à l'une des bases possibles.

On a vu qu'un graphe ayant un seul cycle élémentaire (qui est aussi le seul cycle de base du graphe) contient 2 circuits licites.

Un graphe ayant deux cycles de base peut en contenir 1 ou 3.

Remarquons tout d'abord que lorsqu'un graphe n'a qu'un seul circuit licite, en ajoutant un cycle élémentaire, on ne peut pas le rattacher à deux circuits différents : la seule possibilité est alors d'ajouter un nouveau circuit licite.

On peut voir qu'un graphe avec 3 cycles de base peut avoir 2 ou 4 circuits licites.

En raisonnant par récurrence, on a le résultat suivant :

Théorème 6 (Nombre de circuits licites dans un graphe). Le nombre de circuits licites dans un graphe peut être :

2, 4, ..., $2k$ si le graphe a $2k - 1$ cycle de base,

1, 3, ..., $2k + 1$ si le graphe a $2k$ cycles de base.

En se rappelant le théorème 1, et en considérant 0 comme un nombre pair, on a :

Corollaire. Une condition nécessaire pour qu'un graphe représente une solution acceptable est qu'il contient un nombre pair de cycles de base.

4. VOIES DE RECHERCHE D'UNE SOLUTION PRATIQUE

Il reste à utiliser les résultats qu'on vient d'établir pour déterminer pratiquement, une ville (ou un quartier) étant donnée, un circuit passant au moins une fois par chaque côté de ses tronçons de rue, si possible exactement une fois (circuit eulérien licite), sinon, en parcourant en plus un ensemble d'arcs dont on cherche à minimiser la longueur totale.

Nous appliquerons ici le résultat fondamental évoqué dans l'introduction de cet article, concernant la résolution d'un problème concret :

— si l'on dispose du temps nécessaire, il faut pousser l'étude du problème sur le plan théorique,

— dans le cas contraire, il faut utiliser les résultats partiels existants en les incluant dans une approche empirique.

Pour le présent exposé, toutes les conditions sont réunies pour recommander le second terme de l'alternative.

Un certain nombre d'idées sont suggérées qui seront suffisantes pour permettre d'imaginer un algorithme heuristique. Celui-ci ne sera pas défini complètement. Il ne nous a pas semblé utile de le faire dans le cadre de cet article. La description d'un algorithme heuristique sera toujours incomplète tant qu'on ne la pousse pas jusqu'à l'analyse d'un programme de calculs : beaucoup des procédés mis en œuvre dans un tel algorithme relève en effet de le technique de programmation.

Nous nous intéressons ici aux deux problèmes qui paraissent les plus importants :

— l'exploration de l'ensemble des solutions, dans le but d'y trouver une solution acceptable,

— la jonction au moindre coût des circuits licites entre eux, lorsqu'on n'a pas trouvé de solution acceptable.

4.1. Jonction des circuits licites

S'il n'est pas possible de choisir les circuits de carrefour de façon à obtenir un graphe admettant un circuit eulérien licite, cela signifie que, pour passer au moins une fois par chaque arc bordant, il faut parcourir l'un de ceux-ci plus d'une fois. Le dédoublement d'un arc bordant est donc un problème intéressant à étudier.

4.1.1. Jonction de deux circuits

Nous commencerons par étudier le problème simple suivant :

Etant donné une solution contenant deux circuits licites, ajouter à cette solution un ensemble d'arcs de longueur minimum et contenant au moins un arc bordant, de façon que le graphe obtenu admette un circuit eulérien licite.

Rappelons qu'une solution est toujours un graphe qui admet un circuit eulérien (licite ou non). Pour que le graphe modifié continue à admettre un circuit eulérien, il faut que l'arc bordant qu'on ajoute appartienne à un circuit. Nous nous restreindrons au cas où ce circuit est licite.

Le circuit licite de longueur minimum passant par un arc bordant peut être l'un des deux suivants :

— le circuit obtenu en partant de cet arc et en prenant toujours l'arc le plus à droite qu'on rencontre; ce circuit n'est autre que le circuit d'îlot sur lequel se trouve l'arc;

— le circuit obtenu en partant de cet arc et en prenant toujours le chemin licite le plus à gauche.

Cette propriété résulte de l'inégalité triangulaire vérifiée par la longueur des arcs.

Ces deux circuits seront appelés des *mailles*; le premier sera appelé *maille à droite*, et le second appelé *maille à gauche* (voir fig. 12).

On peut calculer la longueur de toutes les mailles du graphe des trajets possibles (c'est-à-dire du graphe avec tous les arcs de carrefour).

Considérons alors un graphe des trajets contenant deux circuits licites.

La procédure proposée pour joindre ces deux circuits est la suivante :

On examine les mailles dans l'ordre des longueurs croissantes.

Un arc de carrefour d'une maille peut n'appartenir à aucun des deux circuits, s'il ne fait pas partie de l'un des circuits de carrefour choisis pour construire le graphe; mais un arc bordant appartient à l'un ou à l'autre des deux circuits licites.

La première maille examinée et qui contient des arcs appartenant à l'un des circuits, et d'autres arcs appartenant à l'autre circuit est choisie pour faire la jonction.

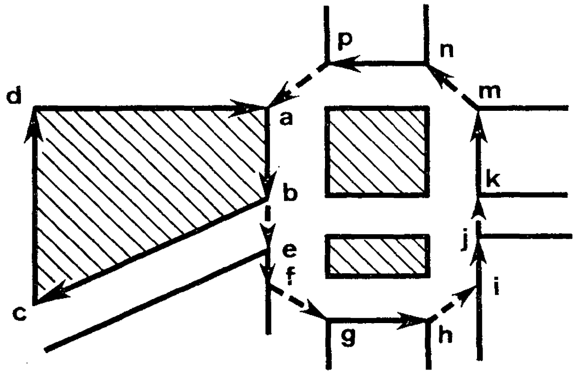


Figure 12

Mailles passant par un arc

Le circuit le plus court passant par l'arc ab peut être soit la maille à droite (circuit d'îlot), soit la maille à gauche de cet arc. Sur la figure, on suppose qu'en b il y a interdiction de tourner à gauche. La maille à gauche de l'arc ab passe par efghijkmnp.

Celle-ci s'effectue de la manière suivante : en partant de l'un des circuits, on arrive à un moment donné sur la maille. On continue alors sur la maille pour arriver sur le second circuit. On reste sur celui-ci jusqu'à ce qu'en ayant fait le tour on revienne sur la maille. On continue alors sur la maille jusqu'à ce qu'on retourne au premier circuit qu'on pourra alors reprendre.

On peut voir que, dans le parcours les arcs de la maille ont été parcourus deux fois, et les autres arcs, une seule fois (une discussion plus complète est faite en 4.1.2 ci-dessous).

Il est facile de voir que la procédure indiquée conduit à l'augmentation minimale du chemin parcouru, pour la classe de solution imposée (à savoir celle qui ajoute un circuit licite).

4.1.2. Jonction d'un nombre quelconque de circuits

Lorsqu'il y a plus de deux circuits, on peut adapter le procédé utilisé dans le cas de deux circuits.

Il est bon d'étudier auparavant de façon rigoureuse la jonction des circuits sur une maille.

Considérons une maille qui contient des arcs appartenant à un certain nombre de circuits différents.

Soit J l'ensemble des circuits contenant des arcs de cette maille et qu'on veut joindre; $\bar{J}$ désignera l'ensemble des autres circuits du graphe, qui peuvent contenir ou non des arcs de la maille.

Parcourons tout d'abord une fois chaque circuit de $\bar{J}$, en sorte qu'au moment où commence la discussion qui suit, les arcs de la maille appartenant à un circuit de $\bar{J}$ (s'il y en a), sont déjà parcourus une fois. Ceci facilitera notre discours.

Essayons maintenant de parcourir les circuits de J.

Soit A_1 le point d'entrée de l'un de ces circuits dans la maille (voir fig. 13).

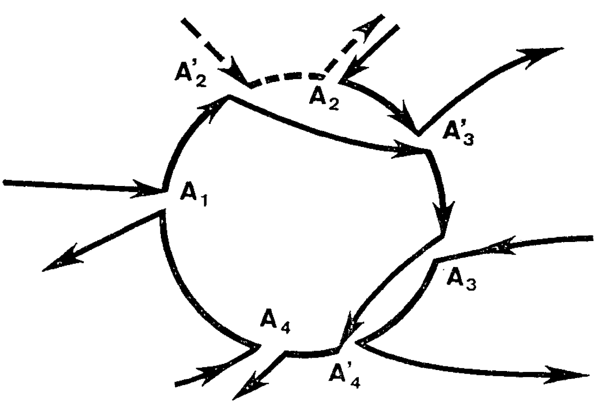


Figure 13

Jonction des circuits par une maille

Appelons ce circuit, circuit n° 1. En partant sur la maille à partir de A_1, soit A_2' le premier point où l'on rencontre le circuit suivant. Si l'arc de la maille arrivant en A_2' est un arc bordant il appartient au circuit n° 1; si c'est un arc de carrefour, il est possible qu'il n'appartienne à aucun circuit (s'il n'a pas été choisi pour construire le graphe considéré), mais alors, l'arc qui le précède, est un arc bordant, appartient au circuit n° 1.

Parcourons alors le circuit n° 1 à partir de A_1. On revient en A_1 après avoir parcouru une fois le chemin de la maille allant de A_1 à A_2' ou au début de l'arc de carrefour arrivant en A_2'. De toutes façons, on a parcouru une fois tous les arcs bordants du chemin qui, sur la maille, va de A_1 en A_2'.

Après avoir fait le tour du circuit n° 1 en revenant en A_1, pour passer en A'_2, il faut parcourir une deuxième fois les arcs bordant du chemin qui, sur la maille, joint les deux points.

L'arc de la maille partant de A'_2 peut avoir été déjà parcouru une fois s'il appartient à un circuit de $\bar{J}$ En partant de A'_2 et en restant sur la maille, soit A_2 le premier point appartenant à un circuit non encore parcouru (A_2 peut être confondu avec A'_2). Dans le cas où A_2 est différent de A'_2, entre A'_2 et A_2, tous les arcs bordants ont été parcouru une première fois, soit parce qu'ils appartiennent à un circuit de $\bar{J}$, soit parce qu'ils appartiennent au circuit n° 1. En arrivant en A_2, on se trouve dans la situation suivante :

— sur le chemin de la maille allant de A_1 à A_2, tous les arcs bordants ont été parcourus deux fois,

— les circuits contenant ces arcs ont été déjà parcourus,

— sur le chemin de la maille allant de A_2 à A_1, il y a des arcs déjà parcourus une fois et des arcs appartenant à des circuits non encore entamés.

Appelons circuit n° 2 le circuit contenant l'arc de la maille issu de A_2. En partant dans le circuit n° 2, on revient en A_2.

On montre par récurrence qu'on progresse sur la maille en partant toujours sur un circuit nouveau par un point A_j ayant exactement les mêmes propriétés que le point A_2.

A un moment, on arrive en un point A_n tel que :

— sur le chemin de la maille allant de A_1 à A_n, tous les arcs bordants ont été parcourus deux fois,

— les circuits contenant ces arcs ont été déjà parcourus,

— sur le chemin de la maille allant de A_n à A_1, tous les arcs ont été parcourus une fois.

En arrivant en A_n, on a parcouru tous les circuits de J, sans être revenu au point de départ A_1. Pour revenir au point de départ, il faut passer de A_n en A_1, ce qu'on peut faire en restant sur la maille. On a alors parcouru tous les arcs bordants de la maille deux fois.

On peut énoncer une règle permettant de joindre un ensemble de circuits à l'aide d'une maille qui contient au moins un arc de chaque circuit, en parcourant en supplément une fois chaque arc bordant de la maille :

Règle de jonction. Pour joindre un ensemble de circuits ayant des arcs sur une maille :

1) en arrivant d'un circuit sur la maille, on passe dans la maille où l'on reste jusqu'au prochain circuit non-encore parcouru,

2) en arrivant dans le nouveau circuit, on le décrit entièrement; étant revenu dans la maille, on applique les consignes du 1.

Soit alors à joindre l'ensemble des circuits d'un graphe.

Nous proposons de joindre les circuits par des mailles, comme il vient d'être dit.

Dans la classe de solutions proposées, il s'agit de choisir un ensemble de mailles permettant de joindre tous les circuits, et dont la longueur totale soit minimum.

Deux circuits seront considérés *équivalents* s'ils font partie d'un ensemble de circuits joints par des mailles.

Chaque maille définit une *classe d'équivalence* contenant tous les circuits ayant un ou plusieurs arcs sur la maille. Nous dirons en abrégé que la maille contient ces circuits.

Le problème est de choisir un nombre suffisant de mailles pour que tous les circuits forment une classe d'équivalence unique.

Nous n'avons pas poussé l'étude de ce problème sur le plan théorique.

Différentes procédures heuristiques sont possibles. Les méthodes arborescentes permettent naturellement une variation infinie sur le sujet (voir [2], [3], [4]).

On peut imaginer une procédure du type suivant :

CHOIX DES MAILLES DE JONCTIONS

Au départ, chaque classe d'équivalence est formée par un seul circuit. L'algorithme vise à fusionner les classes d'équivalence par des choix successifs de mailles.

Une maille sera dite contenue dans une autre maille si tous les circuits qu'elle contient sont contenus dans cette dernière; deux mailles sont dites adjacentes si elles ont des circuits en commun. Plus généralement, une maille sera dite contenue dans une classe d'équivalence si tous ses circuits sont contenus dans cette classe; une maille et une classe d'équivalence seront dites adjacentes si elles ont des circuits en commun.

Au cours de l'algorithme, on examine toutes les mailles *contenant plus d'un circuit*, dans l'ordre des longueurs croissantes. Une itération de l'algorithme consistera en le traitement de chaque maille ainsi rencontrée. Chaque itération est divisée en étapes comme suit :

0. Soit m la maille traitée au cours de l'itération.

Au début de l'itération, on a un ensemble de classes d'équivalences C_1, C_2, ... C_n.

L'ensemble des mailles déjà choisies sera désigné par S.

Etape 1. Examen préliminaire.

1er cas. La maille m n'appartient à aucune des classes d'équivalence C_1, C_2, ... C_n : elle est choisie (et mise dans S), et l'on redéfinit les classes d'équivalence. L'itération est terminée.

2e cas. La maille appartient à l'une des classes d'équivalence C_1, C_2, ..., C_n :

a) Si elle appartient à l'une des mailles de S, elle est rejetée; l'itération est terminée.

b) Si elle n'appartient à aucune des mailles de S, on passe à l'étape 2.

Etape 2. Marquage des mailles.

Soit A l'ensemble des mailles de S appartenant aux classes d'équivalence adjacentes à m. On construit une classe E et l'on marque les mailles de A comme suit :

2.0. Au début de l'étape :

. E contient tous les circuits de m

. aucune maille de A n'est marquée.

2.1. On examine toutes les mailles non-marquées de A, dans l'ordre des longueurs croissantes :

. si une maille est adjacente à E, sans appartenir à E, on la marque du signe $+$, et on l'inclut dans E;

. si une maille est contenue dans E, on la marque du signe —

2.2. Si, au cours de la sous-étape 2.1, aucune maille nouvelle n'a été marquée l'étape est terminée, on passe à l'étape 3. Dans le cas contraire, on recommence la sous-étape 2.1.

Etape 3. Elimination.

On compare la longueur de la maille m, soit $L(m)$, et la longueur totale des mailles marquées —, soit $L(A^-)$:

a) Si $L(m) \leqslant L(A^-)$, on choisit m qu'on inclut dans S, et l'on exclut les mailles marquées — (qui sont enlevées de S); les classes d'équivalence sont redéfinies en conséquence. L'itération est terminée.

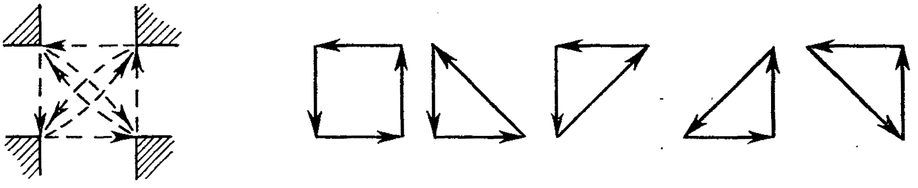
b) Si $L(m) > L(A^-)$, on élimine m; l'itération est terminée.

Fin de l'algorithme. On pourrait arrêter les calculs dès qu'il n'y a plus qu'une seule classe d'équivalence. Il n'est pas garanti qu'ainsi la solution obtenue soit meilleure que toutes celles qu'on pourrait obtenir en poursuivant l'algorithme jusqu'à l'épuisement des mailles. On pourrait donc poursuivre jusqu'à ce point, si l'on veut.

4.2. Exploration de l'ensemble des solutions

Une solution est constituée par le choix d'un ensemble de carrefours qui donne un graphe connexe.

En chaque carrefour, le nombre des choix possibles est fini (voir fig. 14).



a. Trajets possibles *b.* Circuits de carrefour possibles

Figure 14

Choix possibles à l'intersection de 2 rues

Sur la figure, on représente un carrefour recevant 4 voies où il est interdit de faire demi-tour. Il y a 5 circuits de carrefour et 6 possibilités de choix : choisir l'un des circuits de carrefour, ou n'en prendre aucun.

On peut associer à chaque carrefour une variable entière dont la valeur indique l'un des choix possibles. Dès lors, il est possible d'explorer l'ensemble des solutions par une recherche arborescente.

Nous allons développer quelques idées qui pourront constituer l'ébauche d'une méthode utilisant cette technique de recherche.

4.2.0. Sur la recherche arborescente

Nous rappellerons tout d'abord les grandes lignes d'une recherche arborescente telle que nous l'imaginons ici (voir par exemple [3]) :

Considérons un problème dans lequel il s'agit de déterminer la valeur d'un ensemble de variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de façon à satisfaire certaines conditions.

La recherche est faite par itérations au cours de chacune desquelles on donne une valeur à une variable.

Au début d'une itération donnée, les variables du problème sont divisées en deux sous-ensembles :

— le premier, formé des variables qui ont reçu une valeur et qui sera appelé ensemble des *variables assignées,*

— le second, formé des variables qui n'ont pas encore reçu de valeur et qui sera appelé ensemble des *variables libres.*

L'ensemble des variables assignées est divisé en *listes* qui sont entre elles dans un certain ordre.

Une liste peut être *ouverte* ou *fermée*. Une liste fermée contient une variable dite *en cours de modification*, et éventuellement d'autres variables.

De toutes les listes, seule la dernière peut être ouverte. Toutes les autres sont fermées.

Par exemple, au début d'une itération donnée, les variables assignées pourront constituer les 3 listes ci-dessous où l'on indique la valeur assignée à chaque variable, et où la variable en cours de modification est surmontée d'une barre :

1re liste (fermée) : $x_7 = 5$; $x_3 = 0$; $\bar{x}_2 = 1$.

2e liste (fermée) : $x_1 = 2$; $\bar{x}_8 = 1$.

3e liste (ouverte) : $x_5 = 0$; $x_6 = 2$; $x_{11} = 3$.

Une itération s'exécute de la façon suivante :

Mouvement en avant. Si l'on pense pouvoir satisfaire les conditions du problème avec les valeurs déjà assignées, on poursuit la construction de la solution en assignant une valeur à l'une des variables libres.

Cette variable devient alors assignée.

Si la dernière liste était ouverte, on met la variable nouvellement assignée dans cette liste.

Si la dernière liste était fermée, on crée une liste nouvelle où vient se mettre cette variable. La liste ainsi créée est ouverte.

Mouvement en arrière. Si les valeurs assignées aux variables empêchent à coup sûr de satisfaire les conditions imposées par le problème, on modifie la valeur de l'une des variables déjà assignées.

On doit modifier en priorité une variable de la dernière liste.

Si cette liste est ouverte, on peut modifier la valeur de n'importe laquelle de ses variables. La variable modifiée devient une variable en cours de modification, et la liste est fermée.

Si cette liste est fermée, on doit chercher à modifier en priorité la variable en cours de modification. Si celle-ci a déjà pris toutes les valeurs possibles, on la supprime de la liste et la rend libre; on cherche alors à modifier l'une des autres variables de la liste, qui devient la variable en cours de modification de la liste.

Si la dernière liste est fermée et ne contient pas d'autres variables que la variable en cours de modification, et que celle-ci a pris toutes les valeurs possibles, la liste est vide après qu'on en ait supprimée cette variable. On doit alors chercher à modifier une variable de la liste précédente en respectant les mêmes règles.

Fin de l'algorithme. La recherche se termine lorsqu'on a trouvé une solution au problème, ou lorsque, dans un mouvement en arrière, il reste une seule liste avec une seule variable et que celle-ci a pris toutes les valeurs possibles.

Variante. Nous utiliserons la recherche succintement décrite ci-dessus avec une variante : dans un mouvement en avant, si la dernière liste est ouverte, on autorisera la modification de toute variable de la liste, sans que cette variable soit marquée comme variable en cours de modification, et sans fermer la liste. Cette procédure ne conduira pas à un « cyclage », puisque la nouvelle liste diffère de la précédente par la variable nouvellement introduite.

Dans l'exemple ci-dessus, la dernière liste au début de l'itération étant :

$$x_5 = 0; x_6 = 2; x_{11} = 3$$

supposons qu'on ajoute une variable nouvelle $x_4 = 3$; alors, on se permettra de modifier une combinaison quelconque des variables x_5, x_6 et x_{11}. On aura par exemple la nouvelle liste (ouverte) :

$$x_5 = 1; x_6 = 2; x_{11} = 0; x_4 = 3$$

Dans une méthode utilisant une procédure de recherche arborescente, il faut définir :

— la règle de choix de la variable nouvelle dans un mouvement en avant,

— la valeur assignée à cette variable,

— l'utilisation éventuelle de la variante indiquée,

— la règle de choix de la variable à modifier, dans un mouvement en arrière,

— la valeur nouvelle assignée à cette variable.

Nous présenterons succintement quelques idées sur les trois premiers points.

4.2.1. Choix du carrefour

Le choix d'un circuit de carrefour permet de créer un ensemble connexe d'îlots à partir d'îlots isolés.

Une bonne règle semble être de choisir toujours un carrefour touchant à l'ensemble connexe déjà construit.

On peut préciser cette règle en imposant de choisir toujours le carrefour le plus à gauche. Ceci a un sens si l'on se donne un point de départ : le carrefour le plus à gauche est celui où aucun choix n'est encore fait, et où l'on arrive en prenant toujours en chaque sommet du graphe l'arc le plus à gauche.

Cette règle conduit à choisir d'abord les carrefours les plus extérieurs. Sur ces carrefours, on voit souvent des circuits obligatoires (c'est le cas par exemple du carrefour *def* de la figure 4). Il semble bon d'inclure rapidement ces circuits de carrefour dans la solution.

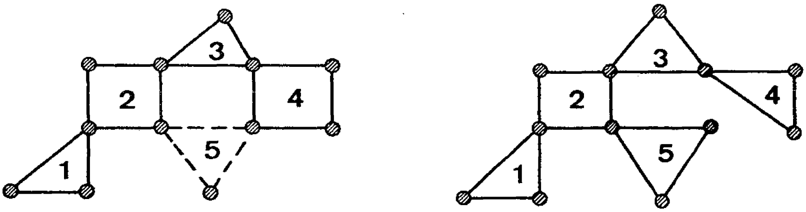
4.2.2. Choix d'un circuit de carrefour

Compte tenu des propriétés d'un graphe en arbre, il est intéressant de choisir les circuits de carrefour de façon que la solution partielle construite à chaque itération reste, autant que possible, un arbre.

Il y a un certain intérêt à prendre, à chaque carrefour, un circuit incluant le maximum de points compatible avec la structure d'arbre. De cette manière, on arrive le plus rapidement à obtenir un graphe connexe.

De plus, le choix du circuit maximal semble être celui qui permet le mieux d'utiliser la possibilité de remettre en cause des choix antérieurs.

Prenons l'exemple de la figure 15 où, dans le mouvement en avant, on a choisi les circuits marqués 1, 2, 3 et 4 (fig. 15 *a*). En 2 et 4 on a choisi le circuit maximal.



a. Situation au début de l'itération *b.* Situation finale possible

Figure 15

Modification d'un choix antérieur

Si, à ce moment, le circuit 5 (en pointillé) est obligatoire, on peut toujours revenir en arrière, et modifier un choix antérieur. Dans l'exemple, on a modifié le choix fait en 4 (on aurait pu aussi modifier le choix fait en 2), pour garder une solution en arbre.

Pour une telle modification, on peut imposer comme règle heuristique de ne pas détruire la connexité du graphe déjà construit.

S'il est impossible, à un moment donné, d'éviter la formation d'un cycle, on continue en cherchant à créer, dès que possible, un deuxième cycle qui ramène le nombre des circuits licites à 1. Si cette opération réussit, la recherche se poursuit avec pour objectif de ne pas créer de cycle nouveau.

4.2.3. Remarques finales

Les idées présentées n'ont pas défini un algorithme.

Il y a tout d'abord l'aspect informatique qui a été passé sous silence. Par exemple, dans un graphe admettant deux circuits licites, nous n'avons pas dit comment distinguer les arcs appartenant à l'un ou l'autre circuit. De même, nous n'avons pas dit comment, en arrivant en un sommet, on y repère l'arc le plus à gauche qui en part. Cet aspect très important dans la pratique n'est pas traité dans cet article.

Mais des éléments de décisions eux-mêmes manquent. En particulier, la question suivante :

Si l'on ne trouve pas la solution idéale (graphe admettant un circuit eulérien licite), à quel moment effectuer un mouvement en arrière ?

Théoriquement, il faut attendre d'avoir fixé le choix à tous les carrefours. Mais dans un problème de quelque importance, les calculs sont peut-être trop longs. Une solution raisonnable serait d'arrêter le mouvement en avant dès qu'on a inclus tous les îlots dans un graphe connexe. A défaut de la solution idéale, on peut alors chercher une solution réalisable par l'introduction des mailles de jonction. Dans la pratique, de nombreuses options sont imaginables.

4.3. Exemples

EXEMPLE 1.

Considérons le réseau de rues et d'îlots représenté par la figure 16.

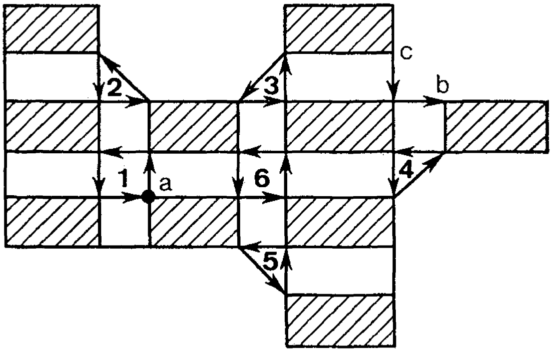


Figure 16

Exemple de problème

Dans ce réseau, il est interdit d'aller de b en c, en sorte que les carrefours se réduisent à ceux numérotés de 1 à 6. Cette numérotation correspond à l'ordre dans lequel les carrefours sont rencontrés lorsqu'on part du point a en prenant toujours le chemin non encore rencontré situé le plus à gauche.

Au carrefour i, faisons correspondre la variable x_i. La correspondance entre un circuit de carrefour et la valeur de la variable associée sera claire d'après les dessins de la figure 17.

Partons du carrefour n° 1 et prenons, pour ce carrefour, le circuit maximal. On a la situation représentée par la figure 17 *a*.

En passant au carrefour n° 2, on voit que la valeur choisie pour x_1 conduit à un cycle. On change alors de valeur de cette variable pour obtenir, par exemple, la situation représentée par la figure 17 *b*.

En prenant les carrefours dans l'ordre de leur numéro, on arrive au carrefour n° 5, avec obligatoirement le situation représentée par la figure 17 *c* où le graphe a un cycle.

A ce moment, on peut essayer, par un choix convenable au carrefour n° 6, d'ajouter un nouveau cycle qui réduise le nombre de circuits licites à 1.

Pour tout circuit à trois arcs choisi au carrefour n° 6 (il y a 4 circuits de carrefour de ce type), on a une situation analogue à celle de la figure 17 *d* où le graphe a 3 cycles, et ne donne donc pas de circuit eulérien licite.

Le choix du circuit à 4 arc au carrefour n° 6 conduit à la situation représentée par la figure 17 *e*. Le graphe a alors 4 cycles. Il n'est pas impossible qu'il admette un circuit eulérien licite. Le graphe sans le carrefour n° 5 est à 3 cycles, avec 2 circuits licites, l'un est représenté en traits épais sur la figure 17 *e*, l'autre est en traits fins. Les arcs propres au 4^e^ cycle, introduit par le carrefour n° 5, sont représentés en pointillé. On voit que le 4^e^ cycle est rattaché au seul circuit en traits épais : le graphe n'a donc pas de circuit eulérien licite.

Il faut alors revenir en arrière.

La seule variable qui puisse changer est x_1.

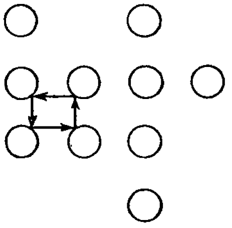
Après avoir donné différentes valeurs à X_1, on s'apercevra que seule la valeur correspondant au circuit à 4 arcs ($x_1 = 1$) donne une solution avec circuit eulérien licite. Cette solution est représentée par la figure 17 *f*. Cette figure montre que le graphe a deux cycles. Le graphe sans le carrefour n° 2 a un seul cycle dont les deux circuits sont, l'un représenté en traits épais, l'autre en traits fins. Les arcs propres au cycle introduit par le carrefour n° 2 sont en pointillé. On voit sur la figure que ce dernier cycle est rattaché à chacun des deux circuits du 1^er^ cycle : le graphe admet un circuit eulérien licite, ainsi qu'on peut le vérifier.

EXEMPLE 2.

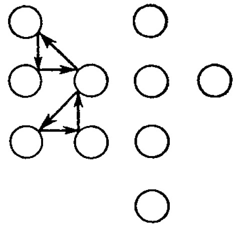
Prenons le réseau de la figure 3.

Ce réseau peut être représenté par le graphe de la figure 18 *a* où les carrefours sont représentés par des aires hachurées, et où l'on n'a pas fait figurer les arcs de carrefour à l'intérieur de ces aires, afin de ne pas embrouiller le dessin.

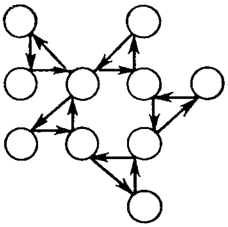
La construction progressive d'une solution en arbre peut être représentée par les figures 18 *b* à 18 *e*.



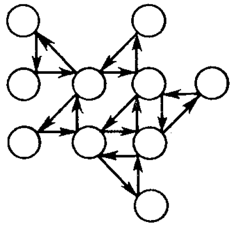
a. 1re itération
Liste: $x_1 = 1$



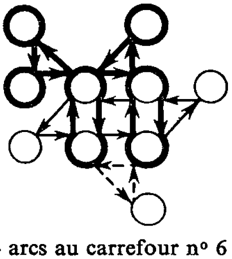
b. 2e itération
Liste: $x_1 = 2$; $x_2 = 1$



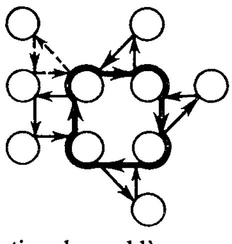
c. 5e itération
Liste : $x_1 = 2$; $x_2 = 1$; $x_3 = 1$;
$x_4 = 1$; $x_5 = 1$



d. 3 arcs au carrefour n° 6
Liste : $x_1 = 2$; $x_2 = 1$; $x_3 = 1$;
$x_4 = 1$; $x_5 = 1$; $\bar{x}_6 = 3$



e. 4 arcs au carrefour n° 6
Liste : $x_1 = 2$; $x_2 = 1$; $x_3 = 1$;
$x_4 = 1$; $x_5 = 1$; $\bar{x}_6 = 5$

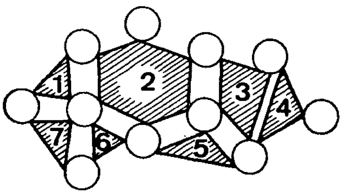


f. solution du problème
Liste 1 : $\bar{x}_1 = 1$
Liste 2 : $x_2 = 1$; $x_3 = 1$; $x_4 = 1$;
$x_5 = 1$; $x_6 = 0$

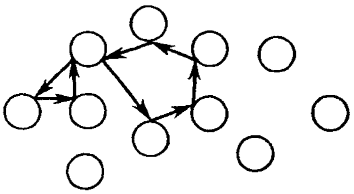
Figure 17

Recherche d'une solution au problème de l'exemple 1

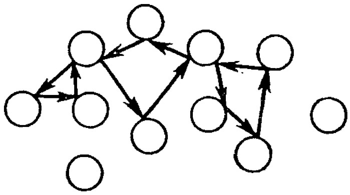
A chaque itération, on a cherché (en modifiant éventuellement les choix antérieurs) à prendre le circuit maximal possible, pour le nouveau carrefour pris en compte.



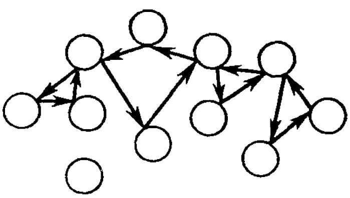
a. Le graphe des trajets possibles



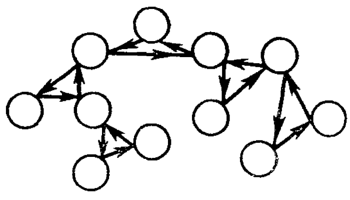
b. Liste :
$x_1 = 1$; $x_2 = 1$



c. Liste :
$x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 1$



d. Liste :
$x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 2$; $x_4 = 1$



e. Liste (solution) :
$x_1 = 1$; $x_2 = 3$ $x_3 = 2$; $x_4 = 1$
$x_5 = 0$; $x_6 = 1$

Figure 18

Solution du problème n° 2

REFERENCES

[1] Berge C., *Théorie des graphes et ses Applications*, Dunod, Paris, 1958.

[2] Hervé Ph., *Les procédures arborescentes d'optimisation*, R.I.R.O., 14, 69-88, 1968.

[3] Lefke L. W., *Progress in Solid Waste Management and Needed Developments*. Proceedings of the 8th Annual Environmental and Water Resources Engineering Conference, June 1969, 107-118.

[4] Nghiem Ph. T., A flexible Tree-Search Method for Integer Programming Poblem. Operations Research, vol. 19, n° 1, 115-119, 1971.

[5] Quon A. M., Charnes A. and Wersan S. J., *Simulation and Analyses of a Refuse Collection System*, Journal of the Sanitary Engineering Division, American Society of Civil Engineers, October 1965.

[6] Ralph Stone and Company, *A study of Solid Waste Collection Systems Comparing One-Man with Multi-Man Crews*, USPHS Publication, 1892, 1969.

[7] Roy B., *Procédures d'Exploration par Séparation et Evaluation (PSEP et PSES)*, R.I.R.O., V. 1, 61-90, 1969.

[8] Shell R. L. and Shupe D. S., *Prediction Work Content for Residential Waste Collection*, Industrial Engineering, Fév. 1973.

[9] Shell R. L. and Shupe D. S., *Pilot Research Projet for the City of Cincinnati*, Division of Waste Collection. University of Cincinnati, 1971.

[10] Shell R. L. and Shupe D. S. *A Study of the Problem of Predicting Future Volume of Wastes*, Solid Wastes Management Refuse Removal Journal, March 1972.

[11] Truitt M. M., Liehman J. C. and Kruse C. W., *Mathematical Modeling of Solid Waste Collection Policies*, Volumes 1 and 2 USPHS Publications 2030, 1970.