Revue française d'automatique, informatique, recherche opérationnelle. Recherche opérationnelle

Alain Martel

# Programme stochastique pour les plans hommes-machines à moyen terme

*Revue française d'automatique, informatique, recherche opérationnelle. Recherche opérationnelle*, tome 8, nº V1 (1974), p. 5-18

<http://www.numdam.org/item?id=RO_1974__8_1_5_0>

R.A.I.R.O.
8e année, V-1, 1974, p. 5-18)

# PROGRAMME STOCHASTIQUE POUR LES PLANS HOMMES-MACHINES A MOYEN TERME

par Alain MARTEL (1)

Résumé. — *Pour planifier leur besoin en main-d'œuvre, les chefs d'entreprise doivent tenir compte de la disponibilité de l'équipement requis par les travailleurs. En général, le niveau d'équipement optimal est déterminé indépendamment, puis considéré comme une contrainte lors de la planification du personnel. Dans cet article, nous proposons un modèle global pour la planification hommes-machines à moyen terme. Les aspects dynamique et probabilistique du problème sont pris en ligne de compte en utilisant des règles de décisions dans le contexte de la programmation en univers aléatoire. Nous obtenons ainsi un programme convexe séparable. Nous présentons ensuite deux méthodes de résolution approximative qui aboutissent à des programmes linéaires. Une analyse détaillée est incluse pour le cas où la demande prédite est une variable aléatoire suivant la loi normale.*

## 1. INTRODUCTION

Avec le développement de la technologie moderne, la planification à moyen terme devient un outil de gestion industrielle de plus en plus important. L'acquisition de machines complexes requiert temps et capital et, en plus, elle peut impliquer l'entraînement d'opérateurs spécialisés. Si tel est le cas, le temps requis pour entraîner ces spécialistes force l'entreprise à reléguer la décision sur les niveaux du personnel aux plans à moyen terme (i. e. à horizon d'environ 5 ans) plutôt qu'aux plans à court terme (i. e. à horizon d'environ 12 mois). De plus, l'utilisation du personnel pour absorber les fluctuations de la demande est devenue très difficile, en partie à cause des effets néfastes d'une telle tactique sur les relations ouvrières, mais aussi à cause du coût croissant de l'embauche et du licenciement de personnel. Cette remarque s'applique à une variété de problèmes de planification industrielle, allant des plans de capacité en machines-outils dans un atelier, jusqu'à la détermination de la grosseur optimale d'une flotte de transport. Les plans hommes-machines à moyen terme apportent une solution à ces divers problèmes.

---

(1) Recherches : Department of Engineering Production University of Birmingham, Angleterre. Actuellement : Collège militaire royal de Saint-Jean, Canada.

Dans cet article, nous présentons un modèle de programmation mathématique en univers aléatoire, qui peut être utilisé pour la planification hommes-machines à moyen terme. Comme il arrive qu'un travail puisse être exécuté à l'aide de plusieurs types de machines, trois situations différentes peuvent se présenter :

*a*) il se peut que tous les travailleurs (ou équipe de travailleurs) puissent utiliser n'importe quelle sorte de machines pour faire le travail ;

*b*) il est possible que les travailleurs puissent utiliser seulement le type de machines sur lequel ils ont été entraînés, et enfin,

*c*) on peut rencontrer une combinaison de *a*) et *b*).

Nous nous limitons au premier cas, toutefois le modèle présenté peut facilement être adapté aux deux autres situations.

Après avoir discuté l'estimation des principaux paramètres du modèle, nous décrivons le problème par un programme dynamique et probabilistique. En utilisant des « règles de décisions » linéaires et d'ordre zéro, nous le transformons en « programme stochastique avec recours simple », puis nous réduisons ce dernier à un programme convexe séparable. Nous décrivons ensuite deux techniques d'approximation qui permettent la résolution du problème à l'aide de l'algorithme du Simplexe. La première remplace la partie convexe de la fonction économique par des lignes brisées, et la seconde impose un seuil de probabilité sur les contraintes aléatoires. Une méthode pour optimiser le seuil de probabilité utilisé est présentée, et enfin, nous définissons des coûts implicites et nous étudions leur signification. Une analyse détaillée est incluse pour le cas où la demande est une variable aléatoire normale.

## 2. LE PROBLEME

Regardons une entreprise qui veut déterminer une politique hommes-machines optimale pour un horizon de planification de $n$ périodes. Ils ont besoin de $t$ périodes pour entraîner leur personnel (explicitement ou implicitement) et de $\tau_i$, $i = 1, \ldots, m$, périodes pour acquérir des machines de type $i$, lesquelles ont une vie économique de $e_i$ périodes. Au début de l'horizon, ils ont $x_{io}$ hommes (ou équipes) travaillant avec des machines du type $i$ et, $v_j^+$ recrues qui commencerons à travailler au début de la période $j = 1, \ldots, t$. Ils savent que si aucune décision n'est prise, ils auront $b_{ij}$ machines de type $i$ au début de la période $j$. Ils ont déjà commandé $u_{ij}$ machines de type $i$, lesquelles doivent arriver pour le début de la période $j = 1, \ldots, \tau_i$.

L'embauche et l'entraînement de recrues, pour qu'elles puissent commencer à travailler au début des périodes $j = t + 1, \ldots, n$, coûtent $h_j^+$, et le licenciement d'un travailleur au début de la période $j$ coûte $h_j^-$. Le coût marginal d'un travailleur est $c_j$ et les dépenses opérationnelles pour une machine de type $i$, dans la période $j$, sont $o_{ij}$. Le modèle se base sur l'hypothèse que l'achat d'équipement peut être considéré comme un investissement à entrée en cascade et à sortie en cascade (stream input-stream output), de sorte que le coût, dans les périodes $j = \tau_i + 1, ..., n$, résultant de l'obtention d'une machine de type $i$ au début de la période $k$ est de $w_{ijk}$. La direction peut aussi louer des machines à un coût de $w_{ij}^+$ et, un coût de $w_{ij}^-$ est récupéré (un coût négatif résultant de la location des machines non utilisées, par exemple) lorsqu'une machine de type $i$ n'est pas utilisée dans la période $j$. Le temps supplémentaire et/ou sous-contrat coûte $g_j^+$ et un coût $g_j^-$ peut être récupéré lorsqu'un ensemble hommes-machines n'est pas utilisé dans la période $j$.

Le coefficient d'actualisation pour la période $j$ est de $\alpha_j$. On estime que $a_i$ unités de capacité, ajustées d'après une machine référence, sont acquises par le travail d'un homme sur une machine de type $i$. La direction désire que l'entreprise opère avec un rapport machine/hommes de $q_{ij}$. Enfin, la demande en capacité prédite pour la période $j$ est une variable aléatoire $\xi_j$ avec une fonction de distribution de probabilité (f.d.p.) connue, $f_j(\xi_j)$.

Le problème consiste à établir le niveau d'activité optimal pour les variables suivantes :

$x_{ij}$ : les hommes travaillant sur des machines de type $i$ dans la période $j$;

$v_j^+$ : les recrues qui doivent être entraînées pour le début des périodes $j = t + 1, ..., n$;

$v_j^-$ : les travailleurs licenciés au début de la période $j$;

$u_{ij}$ : les machines de type $i$, commandées pour le début de la période $j = \tau_i + 1, ..., n$;

$u_{ij}^+$ : les machines de type $i$ louées pour la période $j$;

$u_{ij}^-$ : les machines de type $i$ qui ne sont pas utilisées dans la période $j$;

$y_j^+$ : variable aléatoire représentant le temps supplémentaire et/ou sous-contrat requis dans la période $j$;

$y_j^-$ : variable aléatoire représentant la capacité disponible qui n'est pas utilisée dans la période $j$.

## 3. ESTIMATION DES PARAMETRES

La validité du modèle exposé dans la prochaine section dépendra naturellement de la méthode d'estimation de ses paramètres. Nous débutons donc par l'examen des principaux paramètres que nous venons de définir.

### 3.1. La vie économique des machines : $e_i$

La vie économique des machines de type $i$ doit être déterminée indépendamment du modèle, soit à l'aide de la théorie des remplacements, ou à l'aide de toute autre considération qui pourrait prévaloir dans l'entreprise.

### 3.2. Les machines disponibles : $b_{ij}$

Ce nombre doit ignorer les machines de type $i$ qui ont déjà été commandées. Il doit, toutefois, tenir compte des machines qui pourraient être obtenues sans être commandées et des machines qui arriveront au terme de leur vie économique pendant l'horizon. Si des machines supplémentaires sont requises en cas de panne, elles doivent être soustraites de $b_{ij}$.

### 3.3. Le coût d'achat de la machinerie : $w_{ijk}$

Même si la machinerie est un facteur durable, nous ne croyons pas qu'il convienne ici de la considérer comme un investissement à entrée fixe (point input). Plutôt, nous adoptons le point de vue du comptable, i. e., une méthode de dépréciation, qui répartirait le coût de la machinerie tout au long de sa vie économique. Cette façon de voir a plusieurs avantages :

— elle justifie le fait qu'un horizon infini n'est pas utilisé,

— elle nous dispense de calculer des valeurs terminales pour la machinerie, et

— elle fournit une structure appropriée pour l'addition d'autres coûts, tel le coût d'entretien, qui naturellement ont une entrée en cascade.

Le coût $w_{ijk}$ est donc la somme des coûts suivants :

*a*) La dépréciation encourue dans la période $j$ pour une machine de type $i$, achetée au début de la période $k$. Nous réalisons qu'il n'y a pas de technique de dépréciation parfaite, toutefois, celle qui est la plus proche de la courbe de vie utile de la machine devrait être employée.

*b*) Le coût, au début de la période $k$, de l'entretien dans la période $j$ d'une machine de type $i$ achetée au début de la période $k$.

*c*) Le coût des occasions perdues, évalué au début de la période $k$, i. e., le montant perdu pour ne pas posséder dans la période $j$ le capital qui pourrait être obtenu en vendant une machine de type $i$, achetée au début de la période $k$.

### 3.4. Le rendement des machines : $a_i$

Si on utilise le type de machines le plus populaire comme « machine référence », l'indice de performance, $A_i$, peut être défini en comparant le rendement des machines de type $i$ avec la machine référence, i. e.,

$$A_i = \frac{\text{rendement des machines de type } i}{\text{rendement du type de la machine référence}}$$

Le facteur $a_i$ peut alors être obtenu en multipliant l'indice de performance pour les machines de type $i$, $A_i$, par le temps de travail efficace fourni par un homme dans une période.

### 3.5. Le rapport machine/hommes : $q_{ij}$

Ce paramètre est l'inverse du nombre d'hommes que la direction peut faire travailler avec une seule machine. Par exemple, si dans la période $j$, l'entreprise emploie deux groupes de main-d'œuvre, travaillant chacun huit heures par jour, ils ont besoin d'une machine par deux hommes et $q_{ij} = \frac{1}{2}$ pour tout $i$.

### 3.6. La demande en capacité : $\xi_j$

La variable aléatoire $\xi_j$ est la capacité requise pour la période $j$, en unité de temps-étalon, pour le type de la machine référence. Ce temps-étalon doit inclure le temps « normal », les allocations pour repos, et le temps d'installation tel que répartit aux membres des lots.

Le fait que nous préparons un plan à moyen terme affecte l'évaluation de $f_j(\xi_j)$ de deux façons :

*a*) A cause de la longueur de chacune des périodes, les effets de la fluctuation de la demande, de l'ordonnancement imparfait, etc., à l'intérieur d'une période donnée, ne peuvent pas être négligés. Ils doivent être considérés en multipliant la capacité requise par un facteur correctif, estimé en comparant le temps pris dans le passé pour satisfaire la demande, avec le temps-étalon nécessaire pour faire le travail.

*b*) A cause de la longueur de l'horizon, les méthodes de prédiction basées seulement sur l'analyse de séries temporelles, ne suffisent pas. Des modèles impliquant l'environnement et l'action de l'entreprise doivent être utilisées (par exemple, un modèle économétrique à variables explicatives). Ce problème est discuté à fond par Salomon [7].

Si $f_j(\xi_j)$ ne peut pas être estimé directement, il peut être remplacé par la distribution de probabilité de ses constituants, $f_j(\delta_j, \omega)$. Les variables aléatoires $\delta_j$ et $\omega$ représentent respectivement les tâches prédites pour la période $j$, et le temps-étalon requis pour accomplir une tâche avec une machine référence.

### 3.7. Les coûts de surplus et de pénurie : $g_j^-$ et $g_j^+$

Le coût $g_j^-$ ne doit pas inclure le coût des hommes et des machines non utilisés. Il doit toutefois inclure le coût qui peut être récupéré lorsqu'un homme et/ou une machine sont utilisés pour une tâche secondaire pendant les moments de relâche.

Si une pénurie de capacité peut être comblée par du temps supplémentaire ou sous-contrat, $g_j^+$ est alors le coût unitaire correspondant à l'action corrective appropriée. Si les deux actions peuvent être utilisées en même temps, $g_j^+$ est une combinaison pondérée des deux coûts impliqués.

## 4. FORMULATION MATHEMATIQUE

Si nous posons comme hypothèse que l'objectif de l'entreprise est de minimiser la valeur actuelle espérée de ses coûts pour l'horizon de planification, le problème dynamique et probabilistique auquel nous faisons face peut être décrit par le programme suivant :

$$\min E \sum_{j=1}^{n} \left\{ \alpha_j \sum_{i=1}^{m} \left[ (c_j + o_{ij}q_{ij})x_{ij} + \sum_{\substack{k=j-e_i+1 \\ k>0}}^{j} \alpha_k w_{ijk} u_{ik} + \alpha_j (w_{ij}^+ u_{ij}^+ + w_{ij}^- u_{ij}^-) \right] + \alpha_j (h_j^+ v_j^+ + h_j^- v_j^- + g_j^+ y_j^+ + g_j^- y_j^-) \right\} \tag{1}$$

satisfaisant

1. les contraintes sur la demande,

$$\sum_{i=1}^{m} a_i x_{ij} + y_j^+ - y_j^- = \xi_j, \forall j$$

2. les contraintes sur la main-d'œuvre :

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} - \sum_{i=1}^{m} x_{i,j-1} + v_j^- - v_j^+ = 0, \forall j$$

3. les contraintes sur la machinerie,

$$q_{ij} x_{ij} - \sum_{\substack{k=j-e_i+1 \\ k>0}}^{j} u_{ik} - u_{ij}^+ + u_{ij}^- = b_{ij}, \forall i,$$

4. les contraintes de non négativité,

$$x_{ij}, u_{ij}, u_{ij}^+, u_{ij}^-, v_j^+, v_j^-, y_i^+, y_j^- \geqslant 0, \forall i, j$$

où $E$ dénote l'espérance mathématique.

Les variables $\xi_j, j = 1, \ldots, n$ étant aléatoires, comment pouvons-nous utiliser la notion de compatibilité des contraintes qui est inhérente dans tous les programmes mathématiques ? Nous pouvons y arriver grâce aux principes de la programmation en avenir aléatoire, lesquels sont résumés dans un article par Carton [1]. Toutefois, avant d'aller plus loin sur ce sujet, examinons la dynamique du problème. Si les décisions sur la main-d'œuvre doivent être prises $T$ périodes à l'avance, ou $n \geqslant T \geqslant \max(t, \tau_i)$, $x_{ij}$ dépend de $x_{ik}^*$ et $\xi_k^*$, $k = 1, \ldots, j - T - 1$, ou $x_{ik}^*$ est la décision prise pour la période $k$ et $\xi_k^*$ la demande qui sera observée pour la période $k$. Ceci s'applique aussi aux autres décisions, de sorte que, $x_{ij}$ $u_{ij}, u_{ij}^+, u_{ij}^-, v_j^+, v_j^-, j = T + 2, \ldots, n$ et $y_j^+, y_j^-$, $j = 1, \ldots, n$ doivent être considérées comme des « règles de décisions » plutôt que comme des variables de décisions. La détermination de règles de décisions optimales est un problème pratiquement impossible à résoudre. Toutefois, une solution approximative peut être obtenue en faisant l'hypothèse que ces règles de décisions sont linéaires (e. g. $x = D\xi + r$), ou, que les décisions prises ne sont pas une fonction explicite de la demande. Dans le premier cas, les coefficients de la matrice $D$ peuvent être considérés comme fixes ou comme variables à déterminer, et le vecteur $r$ contient des variables de décisions.

Examinons tout d'abord les règles de décisions $x_{ij}, j = T + 2, \ldots, n$. Faisant l'hypothèse que $x_{ij}$ est linéaire, si nous considérons les éléments de $D$ comme des variables de décisions, nous obtenons un programme avec des contraintes quadratiques. Nous croyons que les efforts de calculs supplémentaires ainsi occasionnés ne seraient pas justifiés, et nous définissons donc les éléments de $D$ constants. Soit $p_i$ la proportion des machines disponibles qui sont de type $i$, au début de l'horizon, de sorte que $p_i\xi j$ représente la proportion de la capacité requise fournit par les machines de type $i$. Divisant ceci par $a_i$ nous obtenons une estimation du nombre d'hommes qui seront requis sur les machines de type $i$ dans la période $j$. Partant de ce raisonnement, la règle suivante est proposée pour la main-d'œuvre :

$$x_{ij} = r_{ij} - \sum_{k=1}^{j-T-1} p_i \xi_k^* / a_i \quad ; \quad \xi_k^* = 0 \text{ pour } k \leqslant 0 \tag{2}$$

où une négation est utilisée pour que la variable $r_{ij}$ soit toujours positive. La valeur optimale de $r_{ij}$ est obtenue en substituant la règle de décisions dans le programme (1), ce qui introduit des variables aléatoires dans toutes les contraintes qui contiennent $x_{ij}$. Ceci implique que les contraintes de non négativité ne seront pas nécessairement satisfaites. Toutefois, étant donné que le niveau optimal de la main-d'œuvre ne sera jamais zéro, nous pouvons oublier la contrainte $x_{ij} \geqslant 0$ et la remplacer simplement par $r_{ij} \geqslant 0$. Cette remarque ne s'applique pas aux autres décisions et, pour cette raison, nous supposons qu'elles ne sont pas une fonction explicite de la demande passée. Cette hypothèse est d'ailleurs justifiée par le structure des contraintes du programme (1).

Pour simplifier la notation, définissons les variables $Z$, $D_l$, $\Delta_l$, $Y_l^+$ et $Y_l^-$ et les coûts $d_l^+$ et $d_l^-$,

$$Z = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \sum_{i=1}^{m} (c_j + o_{ij} q_{ij}) r_{ij} + \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=t+1}^{n} \sum_{\substack{j=k \\ j<n}}^{k+ei-1} \alpha_k w_{ijk} u_{ik}$$

$$D_l = \begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_i r_{ij} & , \ l = j \quad , \ \forall j \\ \sum_{i=1}^{m} r_{ij} - \sum_{i=1}^{m} r_{i,j-1} & , \ l = n + j \quad , \ \forall j \\ q_{ij} r_{ij} - \sum_{\substack{k=j-ei+1 \\ k>0}}^{j} u_{ik} & , \ l = (1 + i)n + j \quad , \ \forall i, j \end{cases} \tag{3}$$

$$\Delta_l = \begin{cases} \xi_j + \sum_{k=1}^{j-T-1} \xi_k & , \ l = j & , \ \forall j \\ \sum_{i=1}^{m} \frac{p_i}{a_i} \left\{ \sum_{k=1}^{j-T-1} \xi_k - \sum_{k=1}^{j-T-2} \xi_k \right\} & , \ l = n + j & , \ \forall j \\ b_{ij} + \frac{q_{ij} p_i}{a_i} \sum_{k=1}^{j-T-l} \xi_k & , \ l = (1 + i)n + j & , \ \forall i, j \end{cases}$$

$$Y_l^{\pm} = \begin{cases} y_j^{\pm} & , \ l = j & , \ \forall j \\ v_j^{\mp} & , \ l = n + j & , \ \forall j \\ u_{ij}^{\mp} & , \ l = (1 + i)n + j & , \ \forall i, j \end{cases}$$

$$d_l^{\pm} = \begin{cases} \alpha_j g_j^{\pm} & , \ l = j & , \ \forall j \\ \alpha_j h_j^{\mp} & , \ l = n + j & , \ \forall j \\ \alpha_j w_{ij}^{\mp} & , \ l = (1 + i)n + j & , \ \forall i, j \end{cases}$$

Enlevant les termes constants dans la fonction économique, le problème à résoudre peut maintenant s'écrire :

$$\min Z + E \left\{ \sum_{l=1}^{(2+m)n} (d_l^+ Y_l^+ + d_l^- Y_l^-) \right\} \tag{4}$$

satisfaisant

$$D_l + Y_l^+ - Y_l^- = \Delta_l \quad ; \quad Y_l^+, Y_l^- \geqslant 0 \quad ; \quad \forall \, l$$

Etant donné que pour la plupart des contraintes, $\Delta_l$ est une variable aléatoire, toutes les variables dans ces contraintes sont aussi aléatoires, à l'exception des $r_{ij}$ que nous avons définis déterministiques dans (2). Afin d'obtenir un programme soluble, nous adoptons une règle de décision d'ordre zéro pour $u_{ij}$, i. e., nous faisons l'hypothèse que le nombre de machines à acheter doit être calculé pour tout l'horizon. Ainsi les seules variables à déterminer qui peuvent être aléatoires sont $Y_l^+$ et $Y_l^-$.

Nous pouvons maintenant résoudre le programme (4) en le considérant comme un modèle « complet » de programmation en univers aléatoire à deux étapes (aussi appelé programme stochastique avec recours simple). L'idée est que la direction de l'entreprise, quoiqu'elle doive choisir $D_l$ « a priori », pourra prendre une décision « a posteriori » pour corriger l'erreur introduite par le choix de $D_l$. Une fois que la valeur de $\Delta_l$ aura été observée, si $\Delta_l > D_l$, elle pourra prendre une décision $Y_l^+$ à un coût de $d_l^+$ et, si $\Delta_l < D_l$, une décision $Y_l^-$ pourra être prise à un coût de $d_l^-$. Utilisant cette approche, le programme à résoudre devient :

$$\min Z + E[Q(D_l, \Delta_l)]$$

satisfaisant $r_{ij}$, $u_{ij} \geqslant 0$, pour tout $i$ et $j$, et où $Q(D_l, \Delta_l)$ est le programme de deuxième étape

$$\min \sum_{l=1}^{(2+m)n} (d_k^+ Y_l^+ + d_l^- Y_l^-)$$

satisfaisant

$$Y_l^+ - Y_l^- = \Delta_l - D_l \quad ; \quad Y_l^+, Y_l^- \geqslant 0 \quad ; \quad \forall l$$

où les variables de deuxième étape sont définies comme suit :

$$Y_l^+ = \max(0, \Delta_l - D_l) \quad ; \quad Y_l^- = \max(0, D_l - \Delta_l)$$

Wets [10] a prouvé que dans ces conditions, et lorsque $Y_l^+ Y_l^- = 0$ et $d_l^+ + d_l^- \geqslant 0$, pour tout $l$,

$$E[Q(D_l, \Delta_l)] = \sum_{l=1}^{(2+m)n} E[Q_l(D_l)]$$

où $E[Q_l(D_l)]$ est la fonction convexe

$$d_l^+ \bar{\Delta}_l - d_l^+ D_l + (d_l^+ + d_l^-) \int_{\Delta_l > D_l} (D_l - \Delta_l) dF_l(\Delta_l) \tag{5}$$

$\bar{\Delta}_l$ est la valeur espérée de $\Delta_l$ et, faisant l'hypothèse que les $\xi_j$ sont mutuellement indépendants,

$$F_l(D_l) = P(D_l \geqslant \Delta_l) = \int_{\Delta_l \geqslant D_l} \cdots \int \prod_{j=1}^{n} f_j(\xi_j) \prod_{j=1}^{n} d\xi_j$$

où $P$ veut dire « probabilité ». Le premier terme de (5) étant constant, nous n'avons pas besoin de l'inclure dans la fonction économique. Le programme déterministe équivalent à (4) est donc,

$$\min Z + \sum_{l=1}^{2(+m)n} E[Q_l(D_l)] \tag{6}$$

satisfaisant les équations définies par (3) et $r_{ij}$, $u_{ij} \geqslant 0$ pour tout $i$ et $j$, ce qui est un programme convexe séparable.

## 5. SOLUTION DU PROGRAMME

West [10] a proposé une méthode exacte pour résoudre ce genre de problème. Elle constitue un algorithme spécialisé peu répandu, et qui peut être difficile à programmer. Nous décrivons donc deux méthodes approximatives qui permettent la résolution du problème à l'aide de l'algorithme du Simplexe.

### 5.1. Approximation par des lignes brisées

Parce que l'ensemble des solutions possibles est convexe, nous pouvons remplacer les $E[Q_l(D_l)]$ par des lignes brisées, et ainsi, obtenir un programme linéaire ordinaire. Pour y arriver, définissons une grille de points $D_{kl}$ dans la région $0 \leqslant D_{kl} \leqslant D_l^*$ pour tout $l$, où $D_l^*$ est une borne supérieure sur $D_l$, déterminée d'après les caractéristiques du problème. Si les points $z_{kl} = E[Q_l(D_{kl})]$ sont calculés pour tout $l$, puis joints par $s_l$ lignes droites, les lignes brisées requises sont obtenues. Nous pouvons alors remplacer $D_l$ dans la $l^{\text{ième}}$ contrainte par

$$D_l = \sum_{k=0}^{sl} D_{kl}\lambda_{kl}$$

et remplacer la partie non-linéaire de la fonction économique par

$$E[Q_l(D_l)] = \sum_{k=0}^{sl} z_{kl}\lambda_{kl}$$

où $0 \leqslant \lambda_{kl} \leqslant 1, \sum_{k=0}^{sl} \lambda_{kl} = 1$, pour tout $l$, à condition que pas plus que deux $\lambda_{kl}$ soit positif, et cela seulement si ils sont adjacents. Hadley [5] (p. 124) a démontré que la solution optimale d'un programme de ce genre peut être obtenue en le résolvant directement comme un programme linéaire, oubliant les restrictions que nous venons de mentionner pour les variables de base. Le programme linéaire approximatif à résoudre serait donc,

$$\min Z + \sum_{j=1}^{T+1} \alpha_j \left\{ \sum_{i=1}^{m} [w_{ij}^+ u_{ij}^+ + w_{ij}^- u_{ij}^-] + h_j^+ v_j^+ + h_j^- v_j^- \right\} + \sum_l \sum_{k=0}^{sl} z_{kl}\lambda_{kl} \quad (7)$$

satisfaisant

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{m} a_i r_{ij} - \sum_{k=0}^{sl} D_{kl}\lambda_{kl} = 0 && ; \ l = j, \forall\, j \\
&\sum_{i=1}^{m} r_{ij} - \sum_{i=1}^{m} r_{i,j-1} + v_j^- - v_j^+ = 0 && ; \ j = 1, \ldots, T+1 \\
&\sum_{i=1}^{m} r_{ij} - \sum_{i=1}^{m} r_{i,j-1} - \sum_{k=0}^{sl} D_{kl}\lambda_{kl} = 0 && ; \ l = n + j, \ j = T+2, \ldots, n \\
&q_{ij} r_{ij} - \sum_{\substack{k=j-e_i+1 \\ k>0}}^{j} u_{ik} + u_{ij}^- - u_{ij}^+ = b_{ij} && ; \ j = 1, \ldots, T+1, \forall\, i \\
&q_{ij} r_{ij} - \sum_{\substack{k=j-e_i+1 \\ k>0}}^{j} u_{ik} - \sum_{k=0}^{sl} D_{kl}\lambda_{kl} = 0 && ; \ l = (1+i)n + j, j = T+2, \ldots, n, \forall\, i \\
&\sum_{k=0}^{sl} \lambda_{kl} = 1 && ; \ \forall\, l \\
&r_{ij}, u_{ij}, u_{ij}^+, u_{ij}^-, v_j^+, v_j^- \geqslant 0, \forall\ i, j && ; \ \lambda_{kl} \geqslant 0, \forall\ k, l
\end{aligned}$$

où $z_{kl}$ est défini par

$$z_{kl} = (d_l^+ + d_l^-) \int_{\Delta_l \geqslant D_{kl}} (D_{kl} - \Delta_l) dF_{kl}(\Delta_l) - d_l^+ D_{kl} \tag{8}$$

Si les $\xi_j$ sont des variables aléatoires indépendantes, distribuées selon la loi normale avec une moyenne $\mu_j$ et une variance $\sigma_j^2$, alors les variables aléatoires $\Delta_l$ seront aussi distribuées selon la loi normale, avec les moyennes et variances suivantes :

$$\mu_l = \begin{cases} \mu_j + \sum_{k=1}^{j-T-1} \mu_k & , \ l = j \quad , \ \forall j \\ \sum_{i=1}^{m} \frac{p_i}{a_i} \mu_{j-T-1} & , \ l = n + j \quad , \ \forall j \\ b_{ij} + \frac{q_{ij} p_i}{a_i} \sum_{k=1}^{j-T-1} \mu_k & , \ l = (1+i)n + j \quad , \ \forall i, j \end{cases}$$

$$\sigma_l^2 = \begin{cases} \sigma_j^2 + \sum_{k=1}^{j-T-1} \sigma_k^2 & , \ l = j \quad , \ \forall j \\ \left( \sum_{i=1}^{m} \frac{p_i}{a_i} \right)^2 \left\{ \sum_{k=1}^{j-T-1} \sigma_k^2 + \sum_{k=1}^{j-T-2} \sigma_k^2 \right\} , & l = n + j \quad , \ \forall j \\ \left( \frac{q_{ij} p_i}{a_i} \right)^2 \sum_{k=1}^{j-T-1} \sigma_k^2 & , \ l = (1+i)n + j \quad , \ \forall i, j \end{cases}$$

où $\mu_k = 0, \sigma_k^2 = 0$ pour $k \leqslant 0$. Dans ce cas, l'intégrale dans l'équation (8) devient

$$I(D_{kl}) = \sigma_l \varphi\left( \frac{D_{kl} - \mu_l}{\sigma_l} \right) + (D_{kl} - \mu_l) \Phi\left( \frac{D_{kl} - \mu_l}{\sigma_l} \right) \tag{9}$$

où $\varphi(.)$ et $\Phi(.)$ sont respectivement l'ordonnée et la surface sous la queue gauche de la distribution normale réduite, tel que disponible dans les tables mathématiques. Une expression analytique pour l'intégrale, lorsque $f_j(\xi_j)$ est remplacé par $f_j(\delta_j, \omega)$ où $\delta_j$ est distribué selon la loi normale et $\omega$ selon la loi exponentielle a été dérivée par Martel et Al-Nuaimi [6]. De telles expressions peuvent être dérivées seulement si les lois de probabilité sont relativement simples. Toutefois, même si $F_l(\Delta_l)$ est complexe, l'intégrale peut toujours être évaluée en utilisant des méthodes numériques.

## 5.2. Seuil de probabilité sur les contraintes

Comme on pourra le constater, si $T$ est petit, le programme linéaire (7) peut avoir des dimensions prohébitives. Nous proposons donc une seconde approche approximative. Celle-ci, prenant avantage de l'expérience des gestionnaires, n'augmente pas la dimension du problème outre mesure.

Puisque le choix « a priori » de $D_l$ ne permet pas que toutes les contraintes soient satisfaites, la direction de l'entreprise peut spécifier à l'avance la probabilité $\beta_l$ avec laquelle elles doivent l'être. Dans ce cas, les variables d'écarts $Y_l^+$ et $Y_l^-$ et les coûts correspondants, $d_l^+$ et $d_l^-$, peuvent être oubliés pour toutes les contraintes qui ont un côté droit aléatoire, pourvu que ces contraintes soient remplacées par $P(D_l \geqslant \Delta_l) = \beta_l$ ce qui est équivalent à $F_l(D_l) = \beta_l$ d'où $D_l = F_l^{-1}(\beta_l)$. Le programme déterministe équivalent sous cette hypothèse est donc,

$$\min Z + \sum_{j=1}^{T+1} \alpha_j \left\{ \sum_{i=1}^{m} (w_{ij}^+ u_{ij}^+ + w_{ij}^- u_{ij}^-) + h_j^+ v_j^+ + h_j^- v_j^- \right\} \tag{10}$$

satisfaisant

$$\sum_{i=1}^{m} a_i r_{ij} = F_l^{-1}(\beta_l) \quad , \quad l = j \quad , \quad \forall j$$

$$\sum_{i=1}^{m} r_{ij} - \sum_{i=1}^{m} r_{i,j-1} + v_j^- - v_j^+ = 0 \quad , \quad j = 1, \ldots, T+1$$

$$\sum_{i=1}^{m} r_{ij} - \sum_{i=1}^{m} r_{i,j-1} = F_l^{-1}(\beta_l) \quad , \quad l = n + j \quad , \quad j = T+2, \ldots, n$$

$$q_{ij} r_{ij} - \sum_{\substack{k=j-e_i+1 \\ k>0}}^{j} u_{ik} + u_{ij}^- - u_{ij}^+ = b_{ij} \quad , \quad j = 1, \ldots, T+1, \forall i$$

$$q_{ij} r_{ij} - \sum_{\substack{k=j=e_i+1 \\ k>0}}^{j} u_{ik} = F_l^{-1}(\beta_l) \quad , \quad l = (1+i)n + j \quad ,$$

$$j = T+2, \ldots, n, \forall i$$

$$r_{ij}, u_{ij}, v_j^+, v_j^-, u_{ij}^+, u_{ij}^- \geqslant 0 \quad , \quad \forall i, j$$

Pour le cas où $\Delta_l$ est distribué normalement avec une moyenne $\mu_l$ et une variance $\sigma_l^2$, nous avons $F_l^{-1}(\beta_l) = \mu_l + \Phi^{-1}(\beta_l)\sigma_l$ où $\Phi^{-1}(\beta_l)$ est le quantile d'ordre $\beta_l$ pour la loi normale réduite. Le programme ci-haut pourrait être résolu par n'importe quel code de programmation linéaire.

Un soin attentif doit être accordé à l'évaluation des facteurs de sécurité $\beta_l$, car ils peuvent introduire des biais importants. Si les coûts d'écarts, $d_l^+$ et $d_l^-$, sont disponibles, l'erreur induite peut être estimée. Soit $\pi_l$, $l = 1, \ldots, (2+m)n$, la valeur optimale des variables duales obtenues en résolvant le programme (10). Partant du travail de Williams [9] sur les formules d'approximations, nous voyons que, si $-d_l^- \leqslant \pi_l \leqslant d_l^+$, pour tout $l$; la différence entre la solution optimale du programme (10) et du programme (6) est plus petite ou égale à,

$$\sum_l \left\{ (\pi_l - d_l^+)(F_l^{-1}(\beta_l) - F_l^{-1}(\hat{\beta}_l)) + (d_l^+ + d_l^-) \int_{F_l^{-1}(\hat{\beta}_l)}^{F_l^{-1}(\beta_l)} F_l(\Delta_l) d\Delta_l \right\}$$

où $\hat{\beta}_l = (d_l^+ - \pi_l)/(d_l^+ + d_l^-)$, pour tout $l$. Si $\Delta_l$ est distribué normalement avec une moyenne $\mu_l$ et une variance $\sigma_l^2$, l'expression devient

$$\sum_l \{ [(\pi_l - d_l^+)(\Phi^{-1}(\beta_l) - \Phi^{-1}(\hat{\beta}_l))\sigma_l] + (d_l^+ + d_l^-)[I(\mu_l + \Phi^{-1}(\beta_l)\sigma_l) - I(\mu_l + \Phi^{-1}(\hat{\beta}_l)\sigma_l)] \}$$

où $I(.)$ est défini par l'équation (9). Malheureusement, même si nous résolvons le programme (10) une deuxième fois avec $\hat{\beta}_l$ au lieu de $\beta_l$, il n'y a aucune garantie que l'erreur en sera diminuée. Toutefois, si l'erreur est significative, une meilleure approximation peut être obtenue en résolvant un programme linéaire contenant une combinaison convexe de $F_l^{-1}(\beta_l)$ et $F_l^{-1}(\hat{\beta}_l)$, soit

$$\min Z + \sum_{j=1}^{T+1} \alpha_j \left\{ \sum_{i=1}^{m} (w_{ij}^+ u_{ij}^+ + w_{ij}^- u_{ij}^-) + h_j^+ v_j^+ + h_j^- v_j^- \right\} + z^+ \lambda^+ + z^- \lambda^-$$

satisfaisant

$$\sum_{i=1}^{m} r_{ij} - \sum_{i=1}^{m} r_{i,j-1} + v_j^- - v_j^+ = 0 \quad , \quad j = 1, \dots, T+1$$

$$q_{ij} r_{ij} - \sum_{\substack{k=j-e_i+1 \\ k>0}}^{j} u_{ik} + u_{ij}^- - u_{ij}^+ = b_{ij} \quad , \quad j = 1, \dots, T+1 \quad , \quad \forall\, i$$

$$D_l - \lambda^+ F_l^{-1}(\beta_l) - \lambda^- F_l^{-1}(\hat{\beta}_l) = 0 \quad , \quad \forall\, l$$

$$\lambda^+ + \lambda^- = 1$$

$$r_{ij}, u_{ij}, v_j^+, v_j^-, u_{ij}^+, u_{ij}^-, \forall\, i, j \quad , \quad \lambda^+, \lambda^- \geqslant 0$$

où

$$z^+ = \sum_l \left\{ (d_l^+ + d_l^-) \int_{\Delta_l \leqslant F_l^{-1}(\beta_l)} F_l(\Delta_l) d\Delta_l - d_l^+ F_l^{-1}(\beta_l) \right\}$$

$$z^- = \sum_l \left\{ (d_l^+ + d_l^-) \int_{\Delta_l \leqslant F_l^{-1}(\hat{\beta}_l)} F_l(\Delta_l) d\Delta_l - d_l^+ F_l^{-1}(\hat{\beta}_l) \right\}$$

Si nous continuons de cette façon, nous résolvons en fait le programme (6) en utilisant la méthode de programmation convexe générale de Dantzig [3].

Dans certaines situations réelles, l'évaluation des coûts d'écarts $d_l^+$ ou $d_l^-$, peut être très difficile. Dans de tels cas, l'utilisation des facteurs de sécurité $\beta_l$ est des plus pratique, toutefois, il n'est plus possible d'estimer l'erreur induite directement. Néanmoins, si nous faisons l'hypothèse que les $\beta_l$ utilisés sont optimaux, nous pouvons calculer le coût implicite, $d_l^+$ ou $d_l^-$, associé avec la violation de la $l^{\text{ième}}$ contrainte, i. e.,

$$d_l^+ = (d_l^- \beta_l + \pi_l)/(1 - \beta_l) \quad \text{pour } l \text{ tel que} \quad \pi_l + d_l^- \geqslant 0$$

$$d_l^- = (d_l^+(1 - \beta_l) - \pi_l)/\beta_l \quad \text{pour } l \text{ tel que} \quad \pi_l - d_l^+ \leqslant 0$$

Si le coût implicite est hors proportion, la valeur donnée à $\beta_l$ devrait être reconsidérée.

## BIBLIOGRAPHIE

[1] Carton D., *Programmes linéaires stochastiques*, Électricité de France, Bulletin de la direction des études et recherches, Série C, n° 1, 1968, pp. 43-60.

[2] Charnes A. and Cooper W. W., *Deterministic equivalents for optimizing and satisficing under chance constraints*, Opns. Res., vol. 11, 1963, pp. 18-39.

[3] Dantzig G. B., *Applications et prolongements de la programmation linéaire*, Dunod, 1966.

[4] Fetter R. B., *A linear programming model for long range capacity planning*, Man. Sci., vol. 7, n° 4, July 1961, pp. 372-378.

[5] Hadley G., *Non linear and Dynamic Programming*, Addison-Wesley, 1964.

[6] Martel A. and Al-Nuaimi A., *Tactical manpower planning via programming under uncertainty*, Operat. Res. Quart., vol. 24, 1973, pp. 571-585.

[7] Salomon M., *La prévision et les plans à moyen terme*, Métra, vol. 10, 1, 1971, pp. 7-25.

[8] Symonds G. H., *Chance-constrained equivalents for some stochastic programming problems*, Opns. Res., vol. 16, n° 6, 1968, pp. 1152-1159.

[9] Williams A. C., *Approximation formulas for stochastic linear programming*, J. Siam Appl. Math., vol. 14, n° 4, 1966, pp. 668-77.

[10] Wets R., *Programming under uncertainty : the complete problem*, Z. Wahrsch-theorie, vol. 4, 1966, pp. 316-339.