

R. CHARRETON

**La décentralisation des choix économiques
vue à travers une méthode de résolution de
programmes linéaires par décomposition**

Revue française d'automatique, informatique, recherche opérationnelle. Recherche opérationnelle, tome 7, n° V2 (1973), p. 53-76

http://www.numdam.org/item?id=RO_1973__7_2_53_0

© AFCET, 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue française d'automatique, informatique, recherche opérationnelle. Recherche opérationnelle » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**LA DECENTRALISATION
DES CHOIX ECONOMIQUES
VUE A TRAVERS UNE METHODE
DE RESOLUTION DE PROGRAMMES LINEAIRES
PAR DECOMPOSITION (*)**

par R. CHARRETON (1)

Résumé. — Dans une première partie, on donnera la description d'un type de problème rencontré par les compagnies pétrolières et qui consiste à déterminer au mieux un programme à moyen terme de transport et de raffinage de pétrole. Modélisation sous forme de programme linéaire. Facteurs explicatifs de la grande taille de ce programme. Remarques diverses au sujet de la résolution par la méthode simpliciale.

Dans une deuxième partie, on présentera une méthode de résolution approchée, par décomposition, méthode orientée vers une décentralisation effective.

— Impossibilité d'une décentralisation fondée sur une transmission d'information limitée à des prix.

— Rappel de résultats obtenus par divers économistes.

— Efficacité de diverses voies possibles de résolution par décomposition.

— Description d'une méthode combinant diverses voies.

— Son interprétation économique.

EXTRAITS

Une compagnie pétrolière doit établir, de temps à autre, un programme de ses opérations à réaliser durant telle période, c'est-à-dire essayer de décider

— Quelles quantités de pétrole brut produire ?

— Quelles quantités de pétrole brut transporter et raffiner ?

— Quelles quantités de produits finis (essence, gas oil, combustibles, carburéacteurs, etc...) fabriquer et comment ?

— Quelles quantités de produits finis transporter et stocker ?

(*) Ce texte est extrait d'une conférence donnée, à Paris, le 15 mai 1972 par l'auteur.

(1) Chargé de la Direction Recherche Opérationnelle de la Compagnie Française des Pétroles.

Ces opérations ne peuvent pas être étudiées indépendamment les unes des autres.

Mon propos n'est pas d'analyser les différents types de programmes utiles ou nécessaires, leur finesse descriptive, leur périodicité, leur portée, leur objet, leur réalisation, mais de donner quelques indications sur la modélisation de ce problème industriel, dans un cas où le modèle résultant est particulièrement compliqué, ou, en termes de programmation linéaire, de taille particulièrement grande.

Soit un modèle relatif à la recherche d'un plan d'opérations en raffinerie pour une période déterminée; les variables de choix représenteront presque toutes des flux, flux de pétrole brut vers la distillation, flux de charges vers diverses unités de traitement, flux de semi-produits et de produits finis. Les contraintes peuvent être regroupées en quelques classes représentant respectivement :

- | | | |
|---------|---|--|
| Classes | } | a) Limitation de la capacité de traitement, pour chaque unité, et des capacités de stockage, pour divers groupes de produits. |
| | | b) Bilan matières exprimant que pour tout produit ou semi-produit les quantités utilisées sont égales aux quantités disponibles. C'est, dans cette classe, que seront caractérisées les performances des unités de traitement. |
| | | c) Obligation de remplir les spécifications exigées pour les produits finis. |
| | | d) Engagements commerciaux et obligations résultant de la distribution des produits finis et de l'approvisionnement en pétrole brut. |

(Spécificité de chacune de ces classes : Classe a), la raffinerie considérée; Classes b) et c), la technologie actuelle; Classe d), le problème particulier considéré.)

La recherche du plan des opérations à faire dans une raffinerie et pour une période déterminée, c'est-à-dire le choix des activités en vue de réaliser le bénéfice maximum avec des moyens limités et des obligations diverses, cette recherche d'un maximum lié se transforme par l'intermédiaire du modèle en un problème mathématique, en fait un programme linéaire.

La programmation linéaire peut être efficace lorsque les problèmes étudiés mettent en jeu des activités nombreuses et interdépendantes, autrement dit des problèmes complexes du fait de l'interdépendance des variables de choix. C'est le cas de ces problèmes de raffinage et de transport où la complexité naît de ce que j'appellerai

l'interdépendance technique

et

l'interdépendance spatiale.

Par interdépendance technique, je vise celle qui résulte des procédés de raffinage, lesquels consistent à fractionner, transformer et mélanger des produits divers pour en faire d'autres produits sans qu'il y ait de fraction abandonnée, du moins en règle générale. Ainsi, tout choix relatif à la fabrication d'un produit particulier a des conséquences sur la fabrication d'autres produits.

Pour prendre un exemple, dans telle raffinerie, la technique permet de fabriquer du carburéacteur en quantité quelconque jusqu'à 6 ou 7 % de la charge de pétrole brut à la distillation. Il faut donc choisir quelles quantité de carburéacteur il convient de fabriquer; mais la quantité produite de gas oil et d'essence dépend aussi de la fabrication du carburéacteur puisqu'une même matière première sera répartie entre ces produits. D'où l'amorce d'une grande complexité car, de fil en aiguille, on s'aperçoit que presque toutes les activités de la raffinerie sont interdépendantes.

Par interdépendance spatiale, je vise celle qui résulte des possibilités pratiques de transport, soit d'un même pétrole brut vers diverses raffineries, soit d'un même produit, demandé en une région déterminée, à partir de diverses raffineries.

Interdépendance spatiale

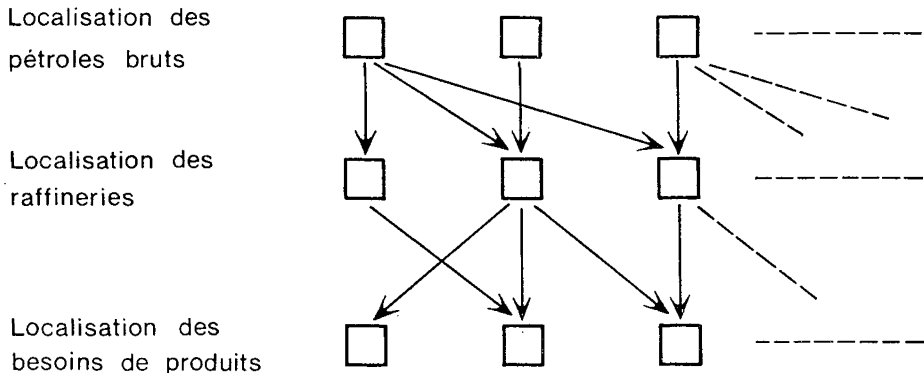


Figure 1]

Outre l'interdépendance technique et l'interdépendance spatiale, il y a une troisième cause de complexité, que j'appellerai l'interdépendance temporelle.

Considérons, en effet, une raffinerie dont on cherche à définir le plan de fabrication pour le mois prochain. Les opérations envisagées pour le mois prochain, disons M , peuvent avoir des conséquences sur les opérations du mois $M + 1$. Par exemple, si on remplit durant le mois M , les réservoirs de stockage affectés à un produit, il faudra limiter, durant le mois $M + 1$, la

fabrication de ce produit aux enlèvements mêmes du mois $M + 1$, On ne cherche pas, lorsqu'on établit le plan du mois M , à déterminer aussi le plan du mois $M + 1$, mais du fait de l'interdépendance temporelle, la détermination du plan du mois M implique une codétermination des plans des mois M et $M + 1$.

On voit apparaître une difficulté, la succession sans fin des périodes. On peut surmonter cette difficulté en observant que l'influence réciproque entre les opérations relatives à deux périodes devient faible, puis nulle au fur et à mesure que ces périodes sont plus éloignées l'une de l'autre dans le temps, pour divers motifs, mais en particulier du fait que l'actualisation diminue l'impact de ce qui est éloigné dans l'avenir.

IV. Structure type de la matrice a_j^i

Dans les zones colorées, les coefficients matriciels a_j^i sont nuls.

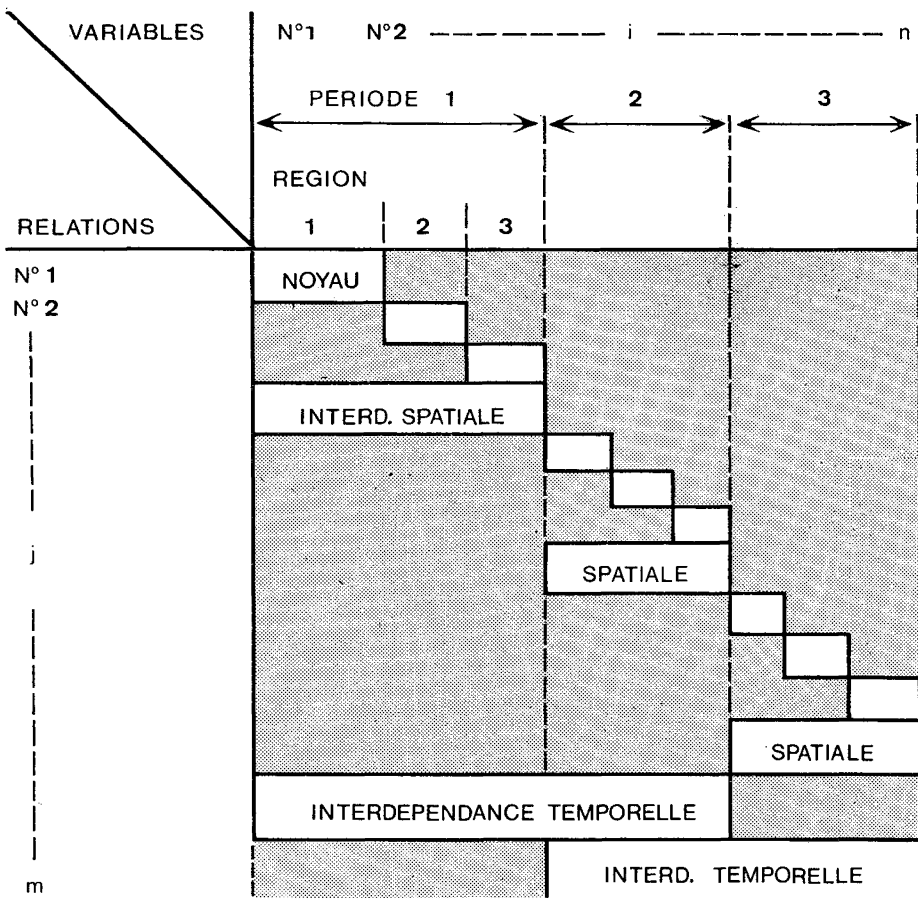


Figure 2

Toutes ces causes d'interdépendance donnent au modèle mathématique l'aspect du schéma IV ci-contre.

* * *

La programmation linéaire promet le succès du fait qu'elle peut prendre en compte la complexité provenant de l'interdépendance des variables de choix, à condition toutefois que la complexité ne soit pas si grande qu'elle dépasse les moyens de calcul.

EXEMPLE :

Soit à établir les opérations d'une raffinerie pour une prochaine période. Les contraintes technologiques s'expriment par, disons, 200 relations entre les variables de choix. L'interdépendance spatiale conduit à codéterminer les opérations de, disons, 10 autres raffineries. L'interdépendance temporelle conduit à codéterminer les opérations des 11 raffineries sur, disons, 4 périodes successives.

Le modèle porte alors sur $200 \times 11 \times 4 = 8\ 800$ relations.

Il y a 4 ou 5 ans, un tel modèle était pratiquement insoluble et aujourd'hui sa résolution par la méthode simpliciale reste incertaine et de toute façon fort coûteuse, disons de l'ordre de 500 000 francs.

En 1969 et 1970, nous avons utilisé un modèle de grande taille, à la limite des possibilités de résolution, mais dès 1968 nous nous étions orientés vers des méthodes de décomposition non pas seulement pour faire face aux difficultés croissantes de résolution, mais aussi en vue de décentraliser effectivement les tâches et les responsabilités de modélisation, calcul et réalisation des programmes.

Caractéristiques diverses d'un programme type

— nombre de relations	5 316
— nombre de variables (non compris des variables artificielles)	10 134
— nombre de coefficients matriciels non nuls (second membre non compris)	51 687

Structure matricielle 3 périodes, 2 régions avec des provinces dans chaque région.

	Nombre de :		
	Relations	Variabiles	Coefficients non nuls
	—	—	—
Région Sud, une période	1 284	2 380	9 956
Région Nord, une période	488	996	7 224

Cadrage des coefficients matriciels	principalement entre 0,01 et 1
Ordre de grandeur des seconds membres non nuls .	100
Ordre de grandeur des coefficients non nuls de la fonction objectif	- 30 à + 30
Cadrage des variables duales	autour de 20 pour la plupart

Résolution du programme type

Code MPS, ordinateur IBM 360/65, 512 000 octets.

Recherche d'une base

Résolution de 9 sous-modèles.

	Nombre d'itérations	Valeur de la fonction économique	Temps de calcul	Temps pour une inversion
Sud, 1 période avec base de départ	1 372	39 000	(1 ^{re} solution réalisable)	
	2 337	8 788		
	2 437	8 713		
	2 537	8 692	4 h 20'	30" à 60"
Nord, 1 période avec base de départ	1 034	19 703	(1 ^{re} solution réalisable)	
	1 134	12 632		
	1 547	11 203		
	1 647	11 197	53'	5" à 15"
Nord et Sud, 1 période avec base de départ	1	19 500		
	1 067	18 600		
	2 442	13 851		
	2 542	13 785		
	2 642	13 773	1 h 15	45"

Taille du problème Nord et Sud pour une période

$$\left\{ \begin{array}{l} 1\ 772 \text{ relations,} \\ 3\ 377 \text{ variables,} \\ 17\ 216 \text{ coefficients matriciels non nuls.} \end{array} \right.$$

Tous ces calculs préliminaires sont à multiplier par 3, nombre de périodes.

Résolution à partir de la base ainsi calculée du programme type

1	95 820		
100	95 766		
2 646	95 196		
4 125	94 014		
4 225	94 004		
4 325	93 999	6 h 18'	6'

Temps total approximatif : 26 heures.

Coût total approximatif : 75 000 francs.

(On notera que le coût estimé précédemment à 500 000 francs se rapporte à un problème beaucoup plus grand, 8 800 relations au lieu de 5 300, à traiter sans indication particulière relative à la recherche d'une base de départ.)

Voici 2 ou 3 remarques qui sont, certes, banales ou à peu près évidentes, mais aussi confirmées par l'expérience et qu'on aurait tort de négliger lorsqu'on utilise des modèles de grande taille.

— La détection d'une erreur dans un modèle de grande taille peut être longue, coûteuse et difficile. Pour cette raison, on est conduit à constituer tout modèle de grande taille par agrégation de modèles de petite taille ou par modification de modèles de grande taille déjà vérifiés sans erreur.

— Le repérage des variables et des contraintes doit être organisé avec soin (classement divers, ordre). Qu'on imagine la difficulté de retrouver une variable dans une liste de 10 000 si l'on n'a pas d'indications particulières quant à sa place dans la liste !

— La recherche d'une bonne base de départ pour la résolution par la méthode simpliciale est, selon notre expérience, avantageuse. Elle nous amène à estimer que le temps de calcul peut être réduit ainsi de moitié ou même des 2/3.

Nous avons parlé jusqu'ici de l'approche centralisatrice qui peut être suivie dans l'industrie pétrolière pour la recherche des programmes d'activités.

En résumé, dans cette approche, on inclut dans le modèle toutes les activités interdépendantes jusqu'au point où l'influence de l'interdépendance est jugée négligeable. Le modèle est trop vaste pour être traité pratiquement. On le simplifie alors dans toutes ses parties aussi également que possible. Cette simplification est, pour une part, subjective et elle demande certainement de l'expérience et du jugement. Simplifier, cela peut vouloir dire faire quelques choix *a priori* mais, le plus souvent, cela signifie regrouper des activités distinctes mais analogues dans une même classe d'activités et modéliser ensuite les classes d'activités et non les activités elles-mêmes. Par exemple, s'il s'agit de simplifier l'interdépendance technologique, les « activités », fabrication du carburant ordinaire et du carburant super seront regroupées dans une même classe, la fabrication du carburant auto. Autre exemple relatif à la simplification de l'interdépendance spatiale : des régions dont les distances économiques d'accès ne sont pas trop différentes seront regroupées en une seule région. De même, s'il s'agit d'interdépendance temporelle, des périodes voisines seront fusionnées en une seule période. L'idée sous-jacente est, pour faire image, de ne pas abandonner la première décimale dans une partie dans le même temps qu'on conserverait la seconde décimale dans une autre partie. Quant au degré de précision lui-même, ainsi unifié, qu'il convient d'atteindre, c'est celui qui assure un bon compromis entre l'avantage d'une gestion plus

parfaite et le coût de résolution des problèmes mathématiques sur lesquels s'appuie cette gestion. Cette voie d'approche est très centralisée puisque, d'une part, elle exige une collecte d'informations diverses sur des activités interdépendantes mais le plus souvent éloignées l'une de l'autre et d'autre part, elle ne confie aux gestionnaires locaux de ces activités qu'un rôle d'informateur et d'exécutant. Ce sont bien là des caractéristiques d'un système centralisé. Elle est donc d'autant plus facile à mettre en œuvre que les structures juridiques dans lesquelles s'insèrent ces activités sont elles-mêmes plus centralisées mais je ne fais que mentionner cet aspect en passant.

Abordons maintenant l'autre approche, décentralisatrice.

A. Impossibilité de décentralisation fondée sur une transmission d'information limitée à des prix

Ce qu'on entend par décentralisation a été précisé par divers économistes. Pour résumer très sommairement, soit un agent économique, connaissant une technique de production s'il est producteur, connaissant ses désirs si c'est un consommateur. Existe-t-il un système de prix unique, un prix par bien, tel que chaque agent en s'appuyant sur ce système de prix puisse déterminer un programme de production ou de consommation optimum localement, l'ensemble des programmes de tous les agents étant mutuellement compatibles ?

Soit un programme linéaire P correspondant au schéma suivant dans lequel on distingue des activités X_i et X_k . Supposons que ce problème P ait une solution unique au regard d'une fonction de préférence particulière F . Peut-on confier la gestion des activités X_i à un agent décentralisé qui connaîtra les contraintes A mais non les contraintes B et à qui l'on demandera de déterminer la partie X_i de la solution optimale de P en s'appuyant sur un système de prix p_i qu'on lui fournira également ? Ceci est-il possible ? Quel est ce système de prix p_i ?

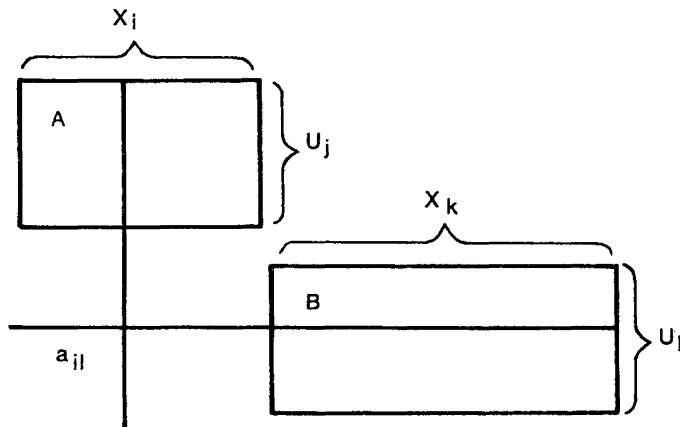


Figure 3

CONVENTION : Tout indice en position supérieure indique qu'il faut sommer pour toutes les valeurs que peut prendre cet indice.

EXEMPLE : Si $i = 1, 2 \dots n$

$$f^i X_i = f_i X^i = \sum_{i=1}^n f_i X_i$$

$f_i X_i$ est le produit de f_i par X_i sans sommation.

— Problème P .

— Objectif : maximum lié de F avec $F = f^i X_i + f^k X_k$.

— Structure des liaisons (égalités).

i est un indice de colonne pour la matrice A

j — — ligne — — A

k — — colonne — — B

l — — ligne — — B

Pour chaque indice i , il y a au plus 1 coefficient $a_{il} \neq 0$.

— — l , — — 1 — — $a_{il} \neq 0$.

Si tous les coefficients a_{il} sont nuls, les 2 problèmes A et B sont indépendants.

Supposons que $a_{il} \neq 0$ pour au moins un couple i, l . Existe-t-il une fonction de préférence $p^i X_i$ telle que la résolution du « problème A », avec cette fonction, permette d'établir des valeurs de X_i et U_j qui appartiennent respectivement aux solutions supposées uniques, directe et duale, du problème P ?

Soit $\bar{X}_i, \bar{X}_k, \bar{U}_j, \bar{U}_l$, ces solutions de P .

On a pour tout i ,

$$\left. \begin{aligned} a_i^l \bar{U}_l + A_i^l \bar{U}_j &\geq f_i \\ \bar{X}_i (a_i^l \bar{U}_l + A_i^l \bar{U}_j - f_i) &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{selon la signature de} \\ \text{l'optimum du problème } P \end{array}$$

Si p_i répond à la question, on a également pour tout i ,

$$\left. \begin{aligned} A_i^l \bar{U}_j &\geq p_i \\ \bar{X}_i (A_i^l \bar{U}_j - p_i) &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{selon la signature de l'optimum} \\ \text{du problème } A \text{ avec la fonction} \\ \text{économique } p^i X_i. \end{array}$$

Prenons

$$p_i = f_i - a_i^l \bar{U}_l$$

On vérifie alors aisément que les conditions caractéristiques de l'optimum pour le problème A figurent toutes parmi les conditions caractéristiques de l'optimum pour le problème P , donc \bar{X}_i est une solution du problème A avec la fonction de préférence $p^i X_i$.

Malheureusement, il n'est pas certain que \bar{X}_i soit la seule solution du problème A avec cette fonction de préférence. S'il y a plusieurs solutions distinctes, le choix de la fonction de préférence ne permet, en aucune façon de repérer une solution particulière autre qu'un sommet. Donc, il est impossible de « décentraliser », en ce sens, en s'appuyant uniquement sur un système de prix.

Le raisonnement précédent n'est concluant que si le cas envisagé peut exister. Nous avons supposé, en effet, que le problème P avait une solution unique et le problème A plusieurs solutions possibles ; montrons sur un exemple que c'est parfaitement possible.

Fonction de préférence

$$F = X_1 \qquad \qquad \qquad + X_3$$

$X_1 \geq 0$	<div style="display: flex; justify-content: space-between; align-items: center;"> <div style="border-bottom: 1px solid black; width: 80%;">$X_1 \leq 1$</div> <div style="border-right: 1px solid black; width: 15%; text-align: center;">A</div> </div> <div style="display: flex; justify-content: center; align-items: center; margin-top: 10px;"> <div style="border-right: 1px solid black; width: 80%;">$X_2 \leq 5$</div> </div>			
$X_2 \geq 0$		X_2	U_1	U_2
$X_3 \geq 0$				

	<div style="display: flex; justify-content: space-between; align-items: center;"> <div style="border-bottom: 1px solid black; width: 80%;">$-X_3 = 0$</div> <div style="border-right: 1px solid black; width: 15%; text-align: center;">B</div> </div> <div style="display: flex; justify-content: center; align-items: center; margin-top: 10px;"> <div style="border-right: 1px solid black; width: 80%;">$X_3 \leq 1$</div> </div>		
	X_3	U_3	U_4

Solution du problème direct : $X_1 = 1 \quad X_3 = 1 \quad X_2 = 1$

— — — dual : $U_1 = 1 \quad U_2 = 0 \quad U_3 = 0 \quad U_4 = 1$

$p^i X_i \equiv X_1$

Solution du problème A avec la fonction de préférence X_1

$$\begin{cases} X_1 = 1 \\ X_2 \text{ quelconque entre } 0 \text{ et } 5. \end{cases}$$

Aucune fonction $p^i X_i$ ne peut conduire à isoler la solution $X_2 = 1$.

NOTA : Ce résultat est à rapprocher de l'algorithme de décomposition de Dantzig et Wolfe par lequel on détermine une solution optimale du problème P comme combinaison linéaire convexe de sommets du problème A , optimaux pour des fonctions économiques analogues à $p_i X_i$. Dans la méthode de décomposition que nous allons présenter, on procède tout à fait autrement en ce sens qu'on ne retient jamais qu'un sommet du problème A et non pas une combi-

naison linéaire convexe mais on déforme le problème *A* par l'adjonction de variables et de relations auxiliaires.

Rappel de résultats obtenus par les économistes

Le résultat précédent est un peu surprenant à première vue au regard de la théorie économique. Faisons un peu d'histoire. C'est Walras qui le premier a caractérisé l'équilibre économique concurrentiel par un système de prix, chaque agent économique faisant ses choix en s'appuyant sur ce système de prix considéré par lui comme invariant.

Dans l'entre-deux-guerres, divers économistes, Cassel, Zeuthen et surtout Wald, précisent le modèle et tentent de démontrer l'existence d'une situation d'équilibre. Puis, ces travaux sont poursuivis, notamment par Allais, Mc Kenzie, Scarf, Shapley.

Arrow et Debreu s'appuient sur un théorème de point fixe pour démontrer l'existence d'un état d'équilibre caractérisé par un système de prix (Cf. *Econometrica*, juillet 1954, pages 265 à 290). En 1959, Debreu publie sa théorie de la valeur, ouvrage dans lequel il traite le problème avec la plus grande rigueur. Il démontre l'existence, sous certaines conditions d'un équilibre auquel est associé un système de prix. Plus précisément, il ne démontre pas que, si chaque agent, consommateur limité dans ses choix par une contrainte budgétaire, ou producteur, maximise sa satisfaction ou son profit compte tenu de ce système de prix, les programmes, optimum localement, établis ainsi par chaque producteur ou consommateur, sont globalement compatibles. Il ne le démontre pas et, pour cause, puisque ceci est faux. Il démontre qu'il existe pour chaque agent, consommateur ou producteur, un programme optimum localement, tel que tous ces programmes soient globalement compatibles.

Je souligne ceci parce qu'on voit parfois exprimer l'idée que pour déterminer un état d'équilibre, une fois trouvé un système de prix associé à cet état, il suffit de rechercher des optimums locaux en se laissant guider par ce système de prix. Or ceci n'est pas suffisant dans tous les cas; c'est même faux en général dans le cas linéaire et l'on n'est pas assuré par cette méthode d'obtenir un état réalisable. Démontrer l'existence d'un état d'équilibre est une chose, calculer un état d'équilibre en est une autre.

Si l'économie de marché détecte et réalise un état d'équilibre, elle fait appel nécessairement à des échanges d'information un peu plus riches que ceux qui peuvent être assurés par un système de prix et je me pose la question de savoir quels sont les mécanismes ou les supports des échanges complémentaires d'information. Je reviendrai sur ce point après avoir exposé la méthode que nous avons développée pour résoudre de grands programmes linéaires par décomposition.

B. Revenons au programme linéaire particulier déjà schématisé avec son classement des variables et des relations en 2 catégories *A* et *B*. Distinguons,

pour plus de commodité, les variables X_r de liaison et les variables X_i . Le problème est schématisé ainsi :

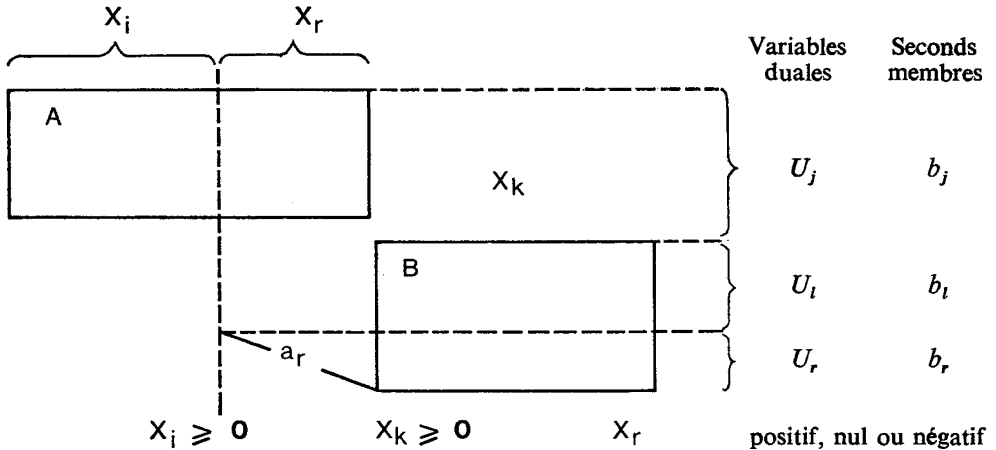


Figure 4

On cherche le minimum lié d'une fonction objectif F

$$F = F_A + F_B \quad \text{avec} \quad F_A = C^i X_i$$

$$F_B = C^k X_k$$

Ce problème sera, par la suite, appelé le problème P.

On aperçoit deux voies particulières de résolution s'appuyant sur la décomposition A, B.

1. Fixer les valeurs de X_r , soit $X_r = \bar{X}_r$, puis rechercher les solutions des problèmes A' et B' définis par

$$pb \ A' \left\{ \begin{array}{l} \min F_A \\ A_j^i X_i + A_j^r X_r = b_j \\ X_r = \bar{X}_r \quad X_i \geq 0 \end{array} \right. \quad pb \ B' \left\{ \begin{array}{l} \min F_B \\ B_l^k X_k = b_l \quad X_k \geq 0 \\ B_r^k X_k = b_r - a_r \bar{X}_r \end{array} \right.$$

enfin, rechercher le minimum par rapport à \bar{X}_r de $\min F_A + \min F_B$.

2. Fixer la valeur de U_r , soit $U_r = \bar{U}_r$, puis rechercher les solutions des problèmes A'' et B'' définis par

$$pb \ A'' \left\{ \begin{array}{l} \min (F_A - f^r X_r) \\ \text{où} \quad f_r = a_r \bar{U}_r \\ A_j^i X_i + A_j^r X_r = b_j \\ X_i \geq 0 \end{array} \right. \quad pb \ B'' \left\{ \begin{array}{l} \min [F_B + \bar{U}'(Y_r - Z_r)] \\ B_l^k X_k = b_l \\ B_r^k X_k + Y_r - Z_r = 0 \\ Y_r \geq 0 \quad Z_r \geq 0 \quad X_k \geq 0 \end{array} \right.$$

enfin, rechercher le minimum par rapport à \bar{U}_r , d'une norme de

$$(\bar{Y}_r - \bar{Z}_r + b_r - a_r \bar{X}_r)$$

en désignant par \bar{X}_r , \bar{Y}_r et \bar{Z}_r les valeurs de X_r , Y_r et Z_r , obtenues en résolvant les problèmes A'' et B'' .

Les 2 voies se ressemblent par certains côtés :

Dans les 2 cas, on procède par cycles successifs et, à chaque cycle, il faut déterminer dans quelle direction modifier soit \bar{X}_r , soit \bar{U}_r , et de combien pour que le processus soit convergent.

Avec la première voie, on peut être amené à distinguer 2 phases, l'une de recherche de valeurs particulières X_r , pour lesquelles les 2 problèmes élémentaires A' et B' aient chacun une solution réalisable, l'autre de recherche d'optimum.

Avec la deuxième voie, on peut être amené également à distinguer 2 phases, l'une de recherche de valeurs particulières \bar{U}_r , pour lesquelles les 2 problèmes élémentaires A'' et B'' aient chacun un optimum fini, l'autre de recherche d'optimum.

Nous avons été guidés en partie dans le choix d'une méthode par l'observation suivante. Si les contraintes A imposent, pour une variable particulière de liaison X_r , une valeur comprise entre deux limites assez rapprochées, il semble *a priori* que la deuxième voie sera plus efficace car dès le premier cycle et quelle que soit la valeur plus ou moins arbitraire attribuée à \bar{U}_r , on va déterminer une valeur satisfaisante de la variable de liaison X_r , c'est-à-dire assez proche de la valeur optimale. De même, si les contraintes B imposent à la variable duale correspondant à une relation particulière de liaison une valeur comprise entre deux limites assez rapprochées, il semble *a priori* que la première voie sera plus efficace, puisque dès le premier cycle, elle permettra de déterminer une valeur satisfaisante de cette variable duale. Mais, bien entendu, telle variable de liaison peut entraîner un préjugé favorable pour l'une des voies de résolution et telle autre variable pour l'autre voie. On ne pourra donc profiter de toutes les indications en faveur de telle ou telle voie qu'en mettant en œuvre une méthode qui combine les deux voies à chaque cycle.

Voici la description schématique de notre méthode.

Étant donné le problème original, c'est-à-dire le problème P décrit page 64

A chaque variable de liaison, on associe d'une part, 2 contraintes auxiliaires

$$X_r \leq BS_r \quad (\text{variable duale } DS_r)$$

$$X_r \geq BI_r \quad (\quad \quad \quad DI_r)$$

qui expriment que la variable de liaison est comprise entre une borne inférieure BI_r et une borne supérieure BS_r ,

d'autre part, un supplément de coût $-f_r$ dans la fonction objectif dont je suppose que l'on recherche le minimum lié.

A chaque relation de liaison, on associe 2 variables auxiliaires Y_r, Z_r qui transforment la relation de liaison r en

$$a_r X_r + Y_r - Z_r + B_r^k X_k = b_r$$

et on ajoute à la fonction objectif les termes $g_r \cdot Y_r - h_r \cdot Z_r$.

La résolution va se faire par cycle et repérons un cycle par l'indice t . Au cycle t , on résout successivement les problèmes A_t et B_t

$$A_t \left\{ \begin{array}{l} f_{rt}, BS_{rt}, BI_{rt} \text{ étant donnés, trouver } X_i \text{ et } X_r \text{ tels que Min } F_{A_t} \text{ avec} \\ F_{A_t} = C^i X_i - f_r^i X_r \\ A_j^i X_i + A_j^r X_r = b_j \\ X_r \leq BS_{rt} \quad \text{Soit } \bar{X}_{rt} \text{ la valeur trouvée pour } X_r \\ X_r \geq BI_{rt} \\ X_i \geq 0 \end{array} \right.$$

$$B_t \left\{ \begin{array}{l} g_{rt}, h_{rt}, \bar{X}_{rt} \text{ étant donnés, trouver } X_k, Y_r, Z_r \text{ tels que Min } F_{B_t} \text{ avec} \\ F_{B_t} = C^k X_k + g_r^i Y_r - h_r^i Z_r \\ B_r^k X_k = b_i \\ B_r^k X_k + Y_r - Z_r = b_r - a_r \bar{X}_{rt} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Soit } \bar{U}_{rt} \text{ la valeur duale trouvée pour} \\ \text{cette relation } r \end{array} \right. \\ \sum_r (Y_r + Z_r) \leq M \quad (M \text{ assez grand}) \\ X_k \geq 0 \quad Y_r \geq 0 \quad Z_r \geq 0 \end{array} \right.$$

Supposons les problèmes A_t et B_t du cycle t résolus. On commence par vérifier si les conditions d'optimalité pour le problème d'origine sont ou non satisfaites par la solution $\bar{X}_{it}, \bar{X}_{rt}, \bar{X}_{kt}, \bar{U}_{jt}, \bar{U}_{lt}, \bar{U}_{rt}, \bar{DS}_{rt}, \bar{DI}_{rt}$ trouvée, du moins à une certaine tolérance près.

C'est-à-dire si

$$\left\{ \begin{array}{l} f_{rt} + \bar{DS}_{rt} + \bar{DI}_{rt} = a_r \bar{U}_{rt} \quad \text{à } \varepsilon_{rt} \text{ près} \\ a_r \bar{X}_{rt} + B_r^k \bar{X}_{kt} = b_r, \quad \text{ou} \quad \bar{Y}_{rt} - \bar{Z}_{rt} = 0, \quad \text{à } \eta_{rt} \text{ près} \end{array} \right.$$

(Il est facile de voir que toutes les autres conditions caractéristiques de l'optimum du problème P sont elles-mêmes des conditions caractéristiques de l'optimum soit du problème A_t , soit du problème B_t . Elles sont donc vérifiées.)

Si ces conditions d'optimalité approchée sont satisfaites, cela signifie qu'on a déterminé, non pas une solution approchée du problème d'origine mais une solution exacte d'un problème proche du problème d'origine, en fait identique quant à la matrice des coefficients mais pouvant différer, au maximum de ϵ_{rt} , pour le coefficient de X_r dans la fonction objectif, et au maximum de η_{rt} pour le second membre b_r .

Mais ce résultat est, en pratique, pour ce qui nous concerne, aussi intéressant qu'une solution approchée du problème d'origine ; c'est d'ailleurs, sans doute le plus souvent, une solution approchée du problème d'origine.

Si les conditions d'optimalité approchée ne sont pas satisfaites, on engage un nouveau cycle, $t + 1$ avec d'autres valeurs pour f_{rt} , BS_{rt} , BI_{rt} , g_{rt} et h_{rt} .

Le changement de f_{rt} est simple.

On prend $f_{r,t+1} = a_r \bar{U}_{rt}$.

Le changement des autres termes ne peut être présenté complètement sans entrer dans beaucoup de détails car il dépend, dans certains cas, de

$$\bar{Y}_{rt}, \bar{Z}_{rt}, \overline{DS}_{rt}, \overline{DI}_{rt}, \epsilon_{rt}, \eta_{rt}, f'_{rt}, f''_{rt}$$

en désignant par f'_{rt} et f''_{rt} les valeurs limites de f_{rt} à l'intérieur desquelles la solution trouvée pour le problème direct A_t reste optimale.

On peut essayer, néanmoins, de donner les règles principales retenues pour passer du cycle t au cycle $t + 1$.

— Les bornes supérieures et inférieures d'une variable de liaison X_r vont encadrer la valeur \bar{X}_{rt}

$$BI_{r,t+1} \leq \bar{X}_{rt} \leq BS_{r,t+1}$$

— L'intervalle $BS_{r,t+1} - BI_{r,t+1}$ est toujours supérieur à

$$\left| \frac{\bar{Y}_{rt} - \bar{Z}_{rt}}{a_r} \right|.$$

Si $|\bar{Y}_{rt} - \bar{Z}_{rt}|$ est grand comparé à η_{rt} ,

$$BS_{r,t+1} - BI_{r,t+1} = \left| \frac{\bar{Y}_{rt} - \bar{Z}_{rt}}{a_r} \right| + \rho \cdot \eta_{rt} \quad \text{avec} \quad \rho \ll 1$$

Si

$$\bar{Y}_{rt} + \bar{Z}_{rt} = 0, BS_{r,t+1} - \bar{X}_{rt} = \bar{X}_{rt} - BI_{r,t+1}$$

et l'intervalle $BS_{r,t+1} - BI_{r,t+1}$ est proportionnel à η_{rt} et inversement proportionnel à \bar{U}_{rt} , à condition toutefois d'être compris entre certaines limites.

On peut observer, au passage, que la solution optimale trouvée du problème direct A_t est une solution réalisable pour le problème direct A_{t+1} . De

même que les bornes de X_r au cycle $t + 1$ encadrent la valeur obtenue pour X_r au cycle t , les valeurs $g_{r,t+1}$ et $h_{r,t+1}$ qui bornent la variable duale $U_{r,t+1}$ encadrent $\bar{U}_{r,t}$.

Considérons le cycle t .

Les valeurs de g_{rt} et h_{rt} dépendent de la position de \bar{X}_{rt} dans l'intervalle BS_{rt}, BI_{rt} .

Convenons de classer ainsi f_{rt}, f'_{rt} et $f''_{rt} : f'_{rt} \geq f_{rt} \geq f''_{rt}$.

Si \bar{X}_{rt} est éloigné de ses bornes, c'est-à-dire si

$$\begin{aligned} \bar{X}_{rt} &< BS_{rt} - k \cdot \eta_{rt} / |a_r| \\ \bar{X}_{rt} &> BI_{rt} + k \cdot \eta_{rt} / |a_r| \end{aligned}$$

avec k de l'ordre de 1, alors g_{rt} et h_{rt} sont choisis de façon à encadrer $a_r \bar{U}_{rt}$ dans l'intervalle

$$f'_{rt} + \varepsilon_{rt}, f''_{rt} - \varepsilon_{rt}.$$

Si \bar{X}_{rt} est proche de ses 2 bornes, alors g_{rt} et h_{rt} sont choisis de façon à encadrer $a_r \bar{U}_{rt}$ dans l'intervalle $f_{rt} + \lambda \cdot \varepsilon_{rt} + \lambda', f_{rt} - \lambda \cdot \varepsilon_{rt} + \lambda''$, avec,

λ de l'ordre de $\frac{1}{2}$

$$\lambda' = \overline{DS}_{rt} + \overline{DI}_{rt} \quad \text{si} \quad \lambda \cdot \varepsilon_{rt} + \overline{DS}_{rt} + \overline{DI}_{rt} > 0$$

$$\lambda' = 0 \quad \text{si} \quad \lambda \cdot \varepsilon_{rt} + \overline{DS}_{rt} + \overline{DI}_{rt} \leq 0$$

$$\lambda'' = \overline{DS}_{rt} + \overline{DI}_{rt} \quad \text{si} \quad -\lambda \cdot \varepsilon_{rt} + \overline{DS}_{rt} + \overline{DI}_{rt} < 0$$

$$\lambda'' = 0 \quad \text{si} \quad -\lambda \cdot \varepsilon_{rt} + \overline{DS}_{rt} + \overline{DI}_{rt} \geq 0$$

Si \bar{X}_{rt} est proche d'une borne et éloignée de l'autre, les valeurs retenues pour g_{rt} et h_{rt} combinent les deux règles précédentes.

Ces valeurs et ces règles ont été fixées à la suite de divers essais, car on peut en concevoir beaucoup et il est clair qu'elles ont une grande importance sur l'efficacité de la méthode de résolution.

Elles se comprennent plus aisément au travers de l'interprétation économique de l'ensemble de la méthode.

Nous avons noté avec 2 indices r et t , les seuils de précisions ε et η .

Il y a tout intérêt à pouvoir fixer la précision désirée selon la variable ou la relation de liaison considérée, d'où la présence de l'indice r . On peut, bien entendu, se ramener au choix d'un seuil de précision commun, ε ou η quel que soit r , par des changements d'unité des variables directes ou duales. L'évolution dynamique des seuils de précision avec l'indice t a un tout autre rôle. Il s'agit de l'efficacité de la méthode de résolution. Au début du calcul, au pre-

mier cycle, les seuils ε et η sont fixés à des valeurs élevées, disons 100 fois ou davantage encore, les seuils ultimes de précision avec lesquels on se propose de vérifier les conditions d'optimalité. Le domaine exploré dans les premiers cycles est découpé en tranches épaisses tant pour le problème A que le problème B , puisque les intervalles encadrant les variables X_r et U_r sont ou proportionnels à η et ε ou plus grands encore. L'exploration se faisant à grands pas, on trouve relativement vite une solution optimale approchée au sens où nous l'entendons, c'est-à-dire avec des conditions d'optimalité vérifiées à ε et η près. A ce point du calcul, on diminue les tolérances ε et η . Ou bien les conditions d'optimalité restent vérifiées avec ces tolérances diminuées et on les diminue à nouveau, ou bien elles ne sont plus vérifiées et on poursuit la résolution à partir de l'optimum approché précédemment atteint. (En pratique, nous avons adopté pour règle, chaque fois qu'un optimum approché est réalisé, de diviser par 2 toutes les tolérances ε_r si l'une au moins des conditions d'optimalité dépendant de ε_r et vérifiée avec ε_r ne l'est plus avec $\varepsilon_r/2$, ainsi que toutes les tolérances η_r si l'une au moins des conditions d'optimalité dépendant de η_r et vérifiée avec η_r ne l'est plus avec $\eta_r/2$. Dans le cas où toutes les conditions d'optimalité, vérifiées par hypothèse avec ε_r et η_r , le sont également avec $\varepsilon_r/2$ et $\eta_r/2$, alors on divise par 2 toutes les tolérances et on recherche s'il y a ou non des conditions d'optimalité non vérifiées avec $\varepsilon_r/4$ ou $\eta_r/4$ et ainsi de suite. Nous essayons, cependant, d'autres règles, assez différentes, sur ce point.)

En résumé, pour passer d'un problème A_t au problème A_{t+1} , on est guidé dans le choix de la fonction objectif par la solution duale du problème B_t , mais l'importance du pas qu'on peut faire dans la direction indiquée par la fonction objectif est d'autant plus petite qu'on estime être plus près de la solution. De même, pour passer d'un problème B_t au problème B_{t+1} , on est guidé dans le choix du second membre par la solution directe du problème A_{t+1} , mais le pas qu'on peut faire dans cette direction, objectif du problème dual, est lui aussi d'autant plus petit qu'on estime être plus près de la solution.

C'est essentiellement cette réduction progressive des différences entre solutions obtenues lors de 2 cycles successifs, qui permet de n'utiliser, pour passer d'un cycle au suivant, qu'une partie de l'information accumulée depuis le début de la résolution, en fait seulement l'information apportée par la résolution du dernier cycle. Or, c'est là un point important, pour le traitement par ordinateur, mais aussi et surtout pour l'interprétation économique.

* * *

Généralité de la méthode

Au cours de cet exposé, je me suis appuyé sur un schéma matriciel particulier, au moins en apparence, ce qui appelle quelques remarques.

— Il n'y a qu'un seul coefficient a_r par variable de liaison et par ligne de liaison. On peut toujours présenter le problème sous cette forme, en ajoutant au besoin quelques variables ou relations auxiliaires.

EXEMPLE : Plusieurs coefficients de liaison pour une variable X_r .

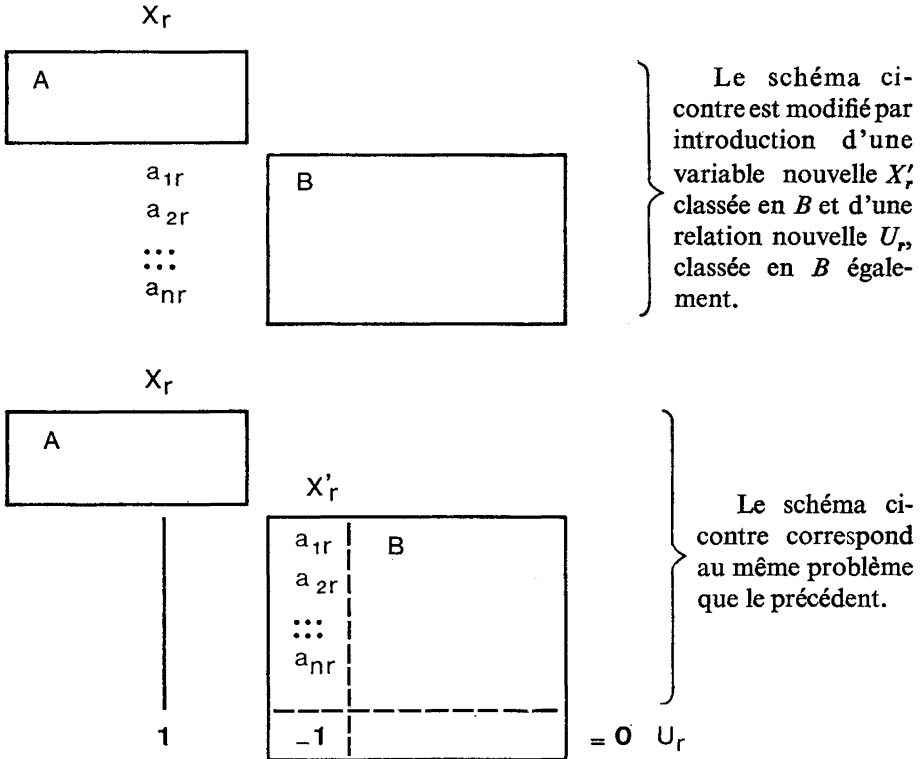


Figure 5

On peut donc envisager soit d'organiser la méthode de résolution pour un schéma matriciel d'apparence particulière et, avant toute application, mettre le problème à résoudre sous cette forme, soit d'organiser la méthode de résolution pour un schéma matriciel général.

Nous avons retenu, pour notre part, la première solution pour des raisons de simple commodité, mais il existe peut-être quelques avantages mineurs en faveur de la seconde.

— Les coefficients de liaison sont dans l'angle Sud-Ouest.

Ce point est important puisque c'est par là que se différencient les traitements effectués sur A et B . Si l'on échange les positions de A et B par un autre classement des lignes et des colonnes, les coefficients a_r se retrouvent

dans l'angle Nord-Est. Mais on peut, à volonté, placer un coefficient de liaison dans l'angle Nord-Est ou dans l'angle Sud-Ouest, au besoin à l'aide de relations et variables auxiliaires. (Ainsi, sur le 2^e schéma de la page précédente, il suffit pour cela de classer la ligne U , soit au début, soit à la fin.) C'est cette possibilité qui permet de tirer réellement parti de la connaissance préalable que l'on peut avoir du problème pour faciliter sa résolution. (On mettra, dans l'angle Sud-Ouest, les coefficients de liaison correspondant à une variable directe assez étroitement limitée par A ou à une variable duale assez étroitement limitée par B ; dans l'angle Nord-Est, les coefficients de liaison correspondant à une variable duale assez étroitement limitée par A ou à une variable directe assez étroitement limitée par B . Des indications contradictoires seraient le signe que le problème d'origine est soit impossible, soit constitué de sous-problèmes indépendants qu'on peut traiter dans n'importe quel ordre.)

— La décomposition du problème d'origine peut comporter plus de 2 sous-problèmes.

Domaine d'efficacité

Cette dernière remarque me conduit à dire quelques mots du domaine d'efficacité d'une telle méthode.

Les codes de résolution des programmes linéaires, codes disponibles actuellement et pour des grands ordinateurs en service, permettent théoriquement de résoudre des problèmes jusqu'à 8 000 relations. Mais, pour des problèmes de cette taille, ils sont loin d'être sûrs. Au-delà de 8 000 relations, les méthodes de décomposition s'imposent. Sont-elles intéressantes pour des problèmes de taille inférieure? C'est une question d'économie qui peut dépendre des moyens de calcul dont on dispose. Nous n'avons pas encore assez d'expérience avec notre méthode pour donner des indications précises sur les termes de ce bilan économique. Nous estimons, aujourd'hui, mais ce sont des estimations encore très fragiles, que le nombre total d'itérations nécessaire avec notre méthode de décomposition est supérieur de 20 % environ au nombre d'itérations nécessaire par la méthode simpliciale. Or, le temps de calcul moyen d'une itération, y compris le temps nécessaire aux inversions lorsque la matrice inverse sous forme de produit devient trop étendue, augmente très rapidement à partir d'une certaine dimension du problème, dimension que je situe entre 1 500 et 3 000 lignes pour les matrices creuses rencontrées en pratique et pour un ordinateur ayant 500 000 octets disponibles en mémoire centrale. Je ne sais pas quel est ce seuil pour un ordinateur moyen dont la mémoire centrale disponible serait, par exemple, de 50 000 octets mais on peut penser qu'il est bien inférieur, peut-être de l'ordre de quelques centaines.

Nous estimons également, aujourd'hui, mais c'est une estimation tout aussi fragile, que le nombre de cycles nécessaire est de l'ordre d'une vingtaine, parfois nettement moins, même pour un grand problème; la position favo-

TABLEAU I

PROBLÈME	NOMBRE DE				NOMBRE DE SOUS-PROBLÈMES	RÉSOLUTION PAR DÉCOMPOSITION			RÉSOLUTION DIRECTE	
	Relations	Variables	Coefficients	Liaisons		Nombre de cycles	Nombre d'itér.	Fonction de préférence	Nombre d'itér.	Fonction de préférence
1	55	99	267	23	2	{ 23 48 }	353 625	- 427,72 - 427,65	54	- 427,676
2	10	20	40	2	2	{ 4 2 }	20 14	57,00 57,00	10	57,00
3	216	428	1 030	6	3	{ 21 3 }	343 308	3 441,4 3 441,3	272	3 440,6
4	144	285	685	3	2	22	249	2 231,98	147	2 231,94
5	4 144	10 993	35 027	100	3	22	10 371	—	?	?
	Temps de résolution (I.B.M. 360/65) ----->					10 heures environ				

nable ou défavorable des coefficients de liaison, soit dans l'angle Sud-Ouest, soit dans l'angle Nord-Est, peut jouer beaucoup pour certains problèmes. Or, le temps de calcul entre la fin de la résolution d'un sous-problème et le début de la résolution du problème suivant est assez important du fait que toutes les informations nécessaires sont lues ou inscrites hors de la mémoire centrale de façon à laisser celle-ci disponible en totalité pour chaque résolution de chaque sous-problème. Il y a donc intérêt de ce fait, considéré isolément, à diminuer le nombre de sous-problèmes par cycles.

En résumé, la décomposition la plus efficace serait telle que la dimension de chaque sous-problème soit à peine inférieure au seuil à partir duquel la durée d'inversion se met à croître très rapidement avec la dimension de la matrice à inverser. Si les sous-problèmes apparents sont de dimension nettement plus petite que ce seuil, il y a donc intérêt à les regrouper eux-mêmes et diminuer ainsi le nombre de sous-problèmes.

Voici, à titre indicatif, quelques résultats d'essais divers (voir tableau I).

N.B. — Les problèmes 1, 2, 3, 4 sont des problèmes d'essai, seul le problème 5 est réel.

— Problème n° 1

Le nombre élevé d'itérations, 353 pour une précision moyenne, 625 pour une précision élevée, par rapport au nombre d'itérations 54 de la méthode directe, provient de ce que les 23 coefficients ont tous été placés dans l'angle Sud-Ouest ou Nord-Est en contre-indication.

— Problème n° 3

Les 2 résolutions, l'une en 3 cycles, l'autre en 21 cycles, correspondent chacune à une localisation particulière des liaisons.

* * *

C. Interprétation économique

Considérons le schéma matriciel suivant, descriptif d'un programme linéaire.

Tous les coefficients en dehors des rectangles sont nuls.

Les colonnes A_i et A_r sont distinguées en ce sens que tous les coefficients d'une colonne A_i dans les lignes de L sont nuls, au moins 1 coefficient d'une colonne A_r dans les lignes de L n'est pas nul. De même, pour B_j , B_r ; etc...

Supposons que les activités A_i , A_r , soient gérées par un opérateur A , les activités B_j , B_r , par un opérateur B , les activités N_k par un opérateur N et comme ce dernier ne joue pas le même rôle que les autres, nous appellerons les premiers opérateurs particuliers A , B ..., et le dernier N opérateur central. Supposons, enfin, que les activités A_r , B_r ..., correspondent à des achats ou

des ventes de biens économiques tels que des produits et que les relations L expriment simplement l'équilibre quantitatif du marché pour ces produits.

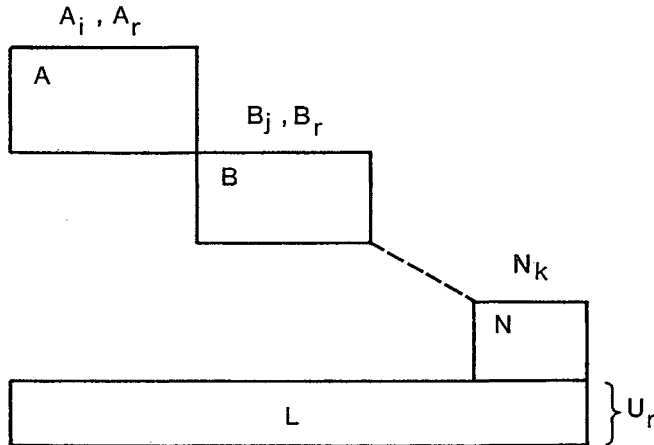


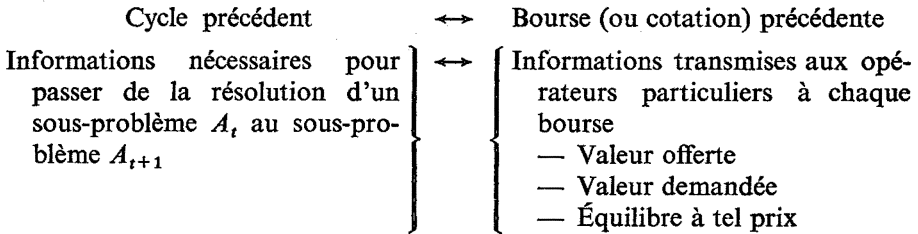
Figure 6

On connaît l'interprétation économique des programmes linéaires par la dualité et le sens des coefficients, que nous avons désignés par $f_r = \bar{a}_r U_r$, est bien clair, il s'agit de prix attribués à ces produits. Quelle est l'interprétation économique de notre méthode de décomposition, c'est-à-dire que représentent les tolérances ε et η , les bornes supérieures et inférieures des variables de liaison directes et duales, tous éléments qui jouent le rôle essentiel dans notre méthode?

L'opérateur central est celui qui établit et diffuse les prix \bar{U}_r . Comme le fait un agent de change dans une bourse de valeurs, il rapproche les offres et les demandes et éventuellement annonce un prix qui les équilibre. Mais, rien n'empêche de supposer qu'il ait simultanément une activité de spéculateur, de producteur ou de consommateur, N_k . Les opérateurs particuliers A, B, \dots , font des offres ou des demandes des produits r à des conditions de prix limite fixées, ce sont les bornes des variables duales que nous avons désignées par g_r et h_r , et pour des quantités limitées s'ajoutant à leurs achats ou ventes cumulés depuis l'origine. Ce supplément d'achat ou de vente $\bar{A}_{r,t} - \bar{A}_{r,t+1}$ est limité par le seuil η_{rt} , et est commandé par le prix $f_{r,t+1}$ que l'opérateur particulier connaît. La description d'un marché parfait dans un manuel d'économie politique fait apparaître un prix unique équilibrant une offre croissante et une demande décroissante et ne mentionne pas des limites de prix ou de quantités; mais, poursuivons notre comparaison avec un marché réel tel qu'une bourse de valeurs. Il n'y a pas toujours un prix qui équilibre les offres et les demandes et les valeurs, dans ce cas, sont déclarées « offertes » ou « demandées ». Ceci correspond très exactement dans notre méthode de décomposition au fait

qu'une variable auxiliaire Y_r ou Z_r peut avoir une valeur non nulle qui représente alors la quantité offerte ou demandée n'ayant pas trouvée de contrepartie. Dans ce cas, la variable duale U_r a pour valeur précisément soit g_r , soit h_r , selon que $Y_r > 0$ ou $Z_r > 0$ et l'information transmise par l'opérateur central aux opérateurs particuliers n'est pas seulement le prix coté g_r ou h_r , déjà connu par certains d'entre eux, mais aussi la quantité Y_r ou Z_r qui n'a pas trouvé de contrepartie. Ainsi l'information transmise par un marché réel à un opérateur particulier, concernant les actions des autres opérateurs ne se transmet pas toujours et uniquement par l'intermédiaire d'un système de prix, mais aussi et parfois, par des indications quantitatives. Je pense, pour ma part, qu'il y a là un point important quant à l'explication de la contradiction apparente entre l'impossibilité théorique de la décentralisation fondée sur une transmission d'information par un système de prix et le fonctionnement observable et décentralisé d'une économie de marché.

Plus important encore est le mécanisme de découverte du système de prix, système d'approximations successives dans notre méthode de décomposition analogue aux cotations successives d'une valeur dans une bourse. Les éléments en parallèle apparaissent très clairement :



On pourrait entrer dans plus de détails; par exemple, à propos de l'amplitude maximum des variations de cours, liée à ϵ dans notre méthode de décomposition, ou de l'amplitude maximum d'une transaction, liée à η dans notre méthode; ainsi, sans être un spécialiste de la bourse, je crois savoir que sur certaines places, l'écart maximum de cotation d'une bourse à l'autre est plafonné; si l'amplitude maximum d'une transaction n'est pas réglementée, on connaît, en pratique, l'ordre de grandeur des offres d'achat ou de vente qui peuvent trouver une contrepartie.

En résumé, l'interprétation économique de notre méthode de résolution des programmes linéaires par décomposition la fait apparaître, non pas comme une méthode de décentralisation où chaque opérateur n'est guidé que par un système de prix, ce qui est impossible, mais bien comme une décentralisation s'appuyant sur un mécanisme de marché.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

1. *Au sujet de la programmation linéaire et de ses extensions*

- L. LASDON, *Optimization theory for large systems*, MacMillan Cy, 1970 (Synthèse de divers travaux, Benders, Rosen, Abadie, etc...).
- A. GEOFFRION, *Elements of large-scale mathematical programming*, Management Science, juillet 1970.
- G. DANTZIG et P. WOLFE, *The decomposition algorithm for linear programs*, Econometrica, octobre 1961, p. 767-777.

2. *Au sujet de la théorie économique*

- K. ARROW et G. DEBREU, *Existence of an equilibrium for a competitive economy*, Econometrica, juillet 1954, p. 265-290.
- G. DEBREU, *Théorie de la valeur*, Dunod, 1966 (original en anglais, John Wiley, 1959).
- R. J. AUMANN, *Markets with a continuum of traders*, Econometrica, janvier 1964, p. 39-50.
- W. HILDENBRAND, *Existence of equilibria for economies with production and a mesure space of consumers*, Econometrica, septembre 1970, p. 608-623.