REVUE FRANÇAISE D'AUTOMATIQUE, INFORMATIQUE, RECHERCHE OPÉRATIONNELLE. RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

Y. BALASKO

Brève communication. Connexité de l'espace des équilibres d'une famille d'économies

Revue française d'automatique, informatique, recherche opérationnelle. Recherche opérationnelle, tome 7, nº V2 (1973), p. 121-123

<http://www.numdam.org/item?id=RO_1973__7_2_121_0>

R.A.I.R.O.
(7e année, mai 1973, V-2, p. 121-123)

Brèves communications

CONNEXITE DE L'ESPACE DES EQUILIBRES D'UNE FAMILLE D'ECONOMIES

par Y. BALASKO [1]

Résumé. — *On représente dans cette note une économie d'échanges purs par le vecteur de ses ressources initiales et une famille de ces économies par l'ensemble des ressources initiales positives. La correspondance de Walras associe à une économie de la famille l'ensemble de ses vecteurs prix d'équilibre. Nous démontrons dans cette note que le graphe de cette correspondance est connexe.*

Une économie d'échanges purs est définie par la donnée de l biens, de m consommateurs et par le vecteur des ressources initiales ω_i du ième consommateur, i variant de 1 à m (cf. G. Debreu [2] ou E. Malinvaud [3, page 102]). Notons P le cône des vecteurs strictement positifs de $\mathbf{R}^l$ et soit S le sous-ensemble de P formé des vecteurs dont la somme des coordonnées est l'unité. Nous admettrons que les préférences du ième consommateur sont représentées par une fonction de demande continue $f_i : S \times \mathbf{R}_+^* \to P$ qui vérifie la relation de Walras $p \cdot f_i(p, w_i) = w_i$ pour tout couple $(p, w_i) \in S \times \mathbf{R}_+^*$.

Dans ce qui suit, les préférences des consommateurs sont fixées et seules les ressources initiales peuvent varier. Par conséquent, une économie ω est définie par le m-uple $\omega = (\omega_1, \omega_2, ..., \omega_m) \in P^m$. Le vecteur $p \in S$ est par définition un vecteur prix d'équilibre de l'économie ω si, et seulement si, la relation suivante est vérifiée

$$\sum_{i=1}^{m} f_i(p, p \cdot \omega_i) = \sum_{i=1}^{m} \omega_i.$$

(1) E.D.F. Etudes économiques générales.

Notons $W(\omega)$ l'ensemble des vecteurs prix d'équilibre de l'économie ω.

Définition

L'espace des équilibres E de la famille des économies d'échanges purs $\omega \in P^m$ est le graphe de la correspondance $\omega \to W(\omega)$.

Un élément de E est donc le $(m+1)$-uple $(p, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m)$ avec $p \in W(\omega)$. En outre, l'espace E est muni de la topologie induite par $F = \mathbf{R}^{l(m+1)}$.

Une conjoncture non-écrite de J. C. Milleron concernait la connexité de l'espace E. En fait, on montre dans [1] que l'espace E est contractile donc connexe.

C'est une démonstration directe de ce résultat que nous allons établir ici.

Soit $\tilde{E}$ le sous-ensemble de E ayant pour élément les $(m+1)$-uples $(p, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m)$ tels que pour $1 \leqslant i \leqslant m$, on ait $\omega_i = f_i(p, p \cdot \omega_i)$. L'espace $\tilde{E}$ est muni de la topologie induite par E.

Proposition 1

Il existe une application $\varphi : E \to \tilde{E}$ telle que le segment de droite $[x, \varphi(x)]$ défini dans F soit contenu dans E, pour tout $x \in E$.

Soit $x = (p, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m) \in E$. Définissons l'application φ par la relation

$$\varphi(x) = [p, f_1(p, p \cdot \omega_1), f_2(p, p \cdot \omega_2), \ldots, f_m(p, p \cdot \omega_m)].$$

Il est évident que $\varphi(x)$ appartient à $\tilde{E}$. Le segment $[x, \varphi(x)]$ défini dans F est l'image de l'application

$$\psi : [0, 1] \to F$$

telle que

$$\psi(t) = [p, (1-t)\omega_1 + tf_1(p, p \cdot \omega_1), (1-t)\omega_2 + tf_2(p, p \cdot \omega_2), \ldots (1-t)\omega_m + tf_m(p, p \cdot \omega_m)].$$

Il est immédiat que $\psi(t)$ appartient à E.

Par conséquent, tout point de E peut être joint par un segment de droite à un point de $\tilde{E}$. Il suffit donc de démontrer que $\tilde{E}$ est connexe.

Proposition 2

L'espace $\tilde{E}$ est homéomorphe à $\mathbf{R}^{l+m-1}$.

Soit l'application $\alpha : E \to S \times \mathbf{R}_+^{*m}$ telle que

$$\alpha(p, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m) = (p, w_1, w_2, \ldots, w_m)$$

où $w_i = p \cdot \omega_i$, $1 \leqslant i \leqslant m$.

Soit l'application $\beta : S \times \mathbf{R}_+^{*m} \to \tilde{E}$ telle que

$$\beta(p, w_1, w_2, ..., w_m) = [p, f_1(p, w_1), f_2(p, w_2), ..., f_m(p, w_m)]$$

Il résulte de la continuité des fonctions de demande que les applications α et β sont continues. En outre, on déduit des relations de Walras que $\alpha_o \beta =$ identité.

Calculons $\beta_0(\alpha | \tilde{E})$.

Soit $x = (p, \omega_1, \omega_2, ..., \omega_m) \in \tilde{E}$. Par définition, nous avons :

$$\alpha(x) = (p, p \cdot \omega_1, p \cdot \omega_2, ..., p \cdot \omega_m)$$
$$\beta[\alpha(x)] = [p, f_1(p, p \cdot \omega_1), f_2(p, p \cdot \omega_2), ..., f_m(p, p \cdot \omega_m)].$$

Comme $\omega_i = f_i(p, p \cdot \omega_i)$, il en résulte que $\beta[\alpha(x)] = x$.

Par conséquent, l'espace $\tilde{E}$ est homéomorphe à $S \times \mathbf{R}_+^{*m}$, qui lui-même est homéomorphe à $\mathbf{R}^{l-1} \times \mathbf{R}^m = \mathbf{R}^{l+m-1}$, donc connexe par arc.

Théorème

L'espace E est connexe par arc.

Ce résultat est étendu dans [1] au cas des préférences variables.

La signification économique de ce résultat est intéressante. Soient ω et ω' deux m-uples de ressources initiales des m consommateurs et soient $p \in W(\omega)$, $p' \in W(\omega')$ deux vecteurs prix d'équilibre, alors il existe une fonction continue $\omega(t)$ vérifiant les relations $\omega(0) = \omega$, $\omega(1) = \omega'$ et une fonction continue $p(t)$ vérifiant $p(0) = p$, $p(1) = p'$, et telle que $p(t) \in W[\omega(t)]$. Il est donc possible de passer d'une manière continue par une succession d'équilibres $[p(t), \omega(t)]$, $p(t) \in W[\omega(t)]$ de la situation (p, ω), $p \in W(\omega)$ à (p', ω'), $p' \in W(\omega')$.

REFERENCES

[1] Y. Balasko, *Equilibrium space of a family of economies.*

[2] G. Debreu, *Economies with a finite set of equilibria*, Econometrica, vol. 38, nº 3, May 1970, 387-392.

[3] E. Malinvaud, *Leçons de théorie microéconomique*, Dunod, Paris, 1969.