REVUE FRANÇAISE D'AUTOMATIQUE, INFORMATIQUE, RECHERCHE OPÉRATIONNELLE. RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

J. GRASSIN

M. MINOUX

Variations sur un algorithme de DANTZIG : application à la recherche des plus courts chemins dans les grands réseaux

Revue française d'automatique, informatique, recherche opérationnelle. Recherche opérationnelle, tome 7, n° V1 (1973), p. 53-61

<http://www.numdam.org/item?id=RO_1973__7_1_53_0>

R.A.I.R.O.
(7e année, V-1, 1973, p. 53-62)

VARIATIONS SUR UN ALGORITHME DE DANTZIG
APPLICATION A LA RECHERCHE DES PLUS COURTS CHEMINS DANS LES GRANDS RESEAUX

par J. GRASSIN et M. MINOUX (1)

Résumé. — *L'algorithme étudié concerne le calcul des plus courts chemins dans un graphe non orienté. La méthode employée s'inspire de celle de Dantzig mais la réduction du nombre de couples de points examinés, engendre une diminution du temps calcul d'autant plus grande que le graphe est important.*

I. INTRODUCTION

La recherche de tous les plus courts chemins dans un graphe non orienté est un problème fréquent dans le domaine des télécommunications. Les réseaux étudiés comportent très souvent un grand nombre de nœuds ($N > 200$) et ne sont pas complets. Par ailleurs, les arcs ont tous une longueur positive.

L'utilisation d'un algorithme général tel que celui de Floyd [1], de Yen [2] ou de Dantzig [3] est trop coûteuse car le nombre d'additions et de comparaisons nécessaires varie comme n^3.

L'algorithme de Hu [4], qui utilise une méthode de décomposition, est intéressant pour les graphes faiblement connexes, néanmoins l'algorithme présenté ci-après semble donner de meilleurs résultats.

Par ailleurs, il est souhaitable de pouvoir recalculer rapidement les longueurs des plus courts chemins après modification de la longueur d'un arc. Or l'algorithme de Dantzig semble particulièrement bien se prêter à l'analyse post optimale.

C'est pourquoi nos efforts se sont portés sur une amélioration de l'algorithme de Dantzig. Nous allons tout d'abord rappeler le principe de cet algorithme.

---

1) Centre National d'Études pour les Télécommunications.

II. RAPPEL SUR L'ALGORITHME DE DANTZIG

La méthode est basée sur l'adjonction successive d'un nœud supplémentaire à un sous ensemble S de nœuds pour lesquels les plus courts chemins ont été calculés.

Initialement l'ensemble S est constitué du seul nœud 1. Après $N - 1$ itérations, S contient tous les nœuds du graphe et on possède donc la matrice des plus courts chemins entre tous les couples de points de S.

Soit D la matrice des distances du graphe, $D(i, j)$ la longueur de l'arc (i, j) si il existe. Si i et j ne sont pas reliés alors $D(i, j) = \infty$. On supposera $D \geqslant 0$ ce qui exclut l'existence de cycles négatifs.

Désignons par $\bar{D}$ la matrice des plus courts chemins relative à

$$S = \{ 1, 2, ..., p - 1 \}.$$

La matrice D^* des plus courts chemins relative à $S \cup \{p\}$ est obtenue de la façon suivante :

Phase 1 :

Pour $i = 1, ... p - 1$

(1) $D^*(p, i) = \underset{j \in S}{\text{Min}} [D(p, j) + \bar{D}(j, i)]$

(2) $D^*(i, p) = \underset{j \in S}{\text{Min}} [\bar{D}(i, j) + D(j, p)]$

(3) $D^*(p, p) = 0.$

Phase 2 :

Pour $i = 1, ... p - 1$ et $j = 1, ..., p - 1$

(4) $D^*(i, j) = \text{Min} [\bar{D}(i, j) \quad ; \quad D^*(i, p) + D^*(p, j)].$

Initialement on pose $\bar{D}(1, 1) = 0.$

En (1) et (2), on calcule les plus courts chemins entre p et les nœuds de S.

En (4), on calcule les modifications éventuelles des plus courts chemins entre éléments de S, après introduction du nœud p.

III. LES BASES THÉORIQUES DE L'AMÉLIORATION PROPOSÉE

1° Modification de la phase 1

Dans ce qui va suivre nous allons examiner plus particulièrement le cas des graphes non orientés tels que : $D(i,j) = D(j,i)$.

L'algorithme est modifié comme suit.

Pour $i = 1, ..., p - 1$

(1') $D^*(p, i) = D^*(i, p) = \underset{j \in S}{\text{Min}} [D(p, j) + \bar{D}(j, i)]$

(2') $D^*(p, p) = 0.$

Pour $i = 1, ..., p - 1$ et pour $j = 1, ..., i$

(3') $D^*(i, j) = D^*(j, i) = \text{Min} [\bar{D}(i, j) \quad ; \quad D^*(i, p) + D^*(p, j)].$

2° Modification de la phase 2

Définition de sous-ensembles K_i :

Dans le cas d'un graphe non complet, la recherche du minimum dans (1') peut se limiter aux points de S effectivement reliés à p par un arc. Soit k_1, k_2, ..., k_m les points de S tels que $D(k_i, p) < \infty$.

Il est clair que le plus court chemin d'un point $j \in S$ à p passe par l'un des k_i.

Soit $H = \{ k_1, ... k_m \}$, $H \subset S$, on peut modifier (1') de la façon suivante :

(1") $$D^*(p, i) = D^*(i, p) = \underset{j \in H}{\text{Min}} [D(p, j) + \bar{D}(j, i)].$$

D'autre part, à chaque nœud k_i on peut associer l'ensemble K_i des nœuds j de S tels que le plus court chemin de j à p passe par k_i en utilisant l'arc direct (k_i, p). On obtient ainsi une partition de S en m sous-ensembles K_i (dont certains peuvent être vides).

Cette partition est obtenue au cours du calcul de $D^*(p, i)$ dans (1"). On remarquera qu'une condition nécessaire et suffisante pour que K_j soit vide est qu'il existe un k_i tel que :

$$D(k_j, p) > \bar{D}(k_j, k_i) + D(k_i, p)$$

auquel cas aucun plus court chemin de $\alpha \in S$ à p ne pourra utiliser l'arc direct (k_j, p).

La suite de la procédure de Dantzig consiste à examiner les modifications induites par l'introduction de p sur la longueur des plus courts chemins entre couples de points de S.

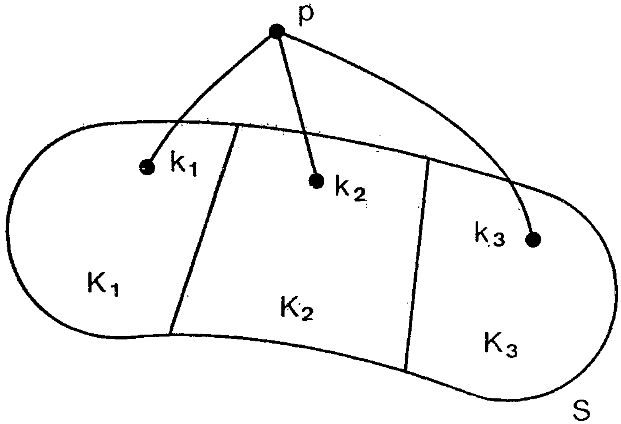

Figure 1

Au lieu d'examiner tous les couples (i, j), $i, j \in S$ et $i \leqslant j$ on peut réduire cet examen à l'aide des propriétés suivantes :

Théorème 1 :

Si j_1 et j_2 appartiennent au même ensemble K_i on a

$$D^*(j_1, j_2) = D^*(j_2, j_1) = \bar{D}(j_1, j_2).$$

La longueur du plus court chemin est inchangée.

Preuve : Les anciens plus courts chemins vérifient dans S l'inégalité triangulaire :

$$\bar{D}(j_1, j_2) \leqslant \bar{D}(j_1, k_i) + \bar{D}(k_i, j_2)$$

comme :

$$D^*(p, j_1) = \bar{D}(i_1, k_i) + D(k_i, p)$$

$$D^*(p, j_2) = \bar{D}(j_2, k_i) + D(k_i, p).$$

On a a fortiori :

$$\bar{D}(j_1, j_2) \leqslant D^*(p, j_1) + D^*(p, j_2)$$

et par conséquent à l'aide de (3')

$$D^*(j_1, j_2) = \bar{D}(j_1, j_2).$$

CQFD

Théorème 2 :

Soit k_1 et k_2 et les ensembles associés K_1 et K_2 non vides. Si

$$D^*(k_1, k_2) = \bar{D}(k_1, k_2).$$

alors $\forall j_1 \in K_1$ et $\forall j_2 \in K_2$

$$D^*(j_1, j_2) = \bar{D}(j_1, j_2)$$

Preuve : On sait que :

$$D^*(j_1, p) = \bar{D}(j_1, k_1) + D(k_1, p)$$

de même :

$$D^*(p, j_2) = D^*(j_2, p) = \bar{D}(j_2, k_2) + D(k_2, p).$$

Donc :

$$D^*(j_1, p) + D^*(p, j_2) = \bar{D}(j_1, k_1) + \bar{D}(j_2, k_2) + D(k_1, p) + D(k_2, p).$$

Par hypothèse :

$$D^*(k_1, k_2) = \bar{D}(k_1, k_2) \leqslant D(k_1, p) + D(k_2, p)$$

et on sait en outre que :

$$\bar{D}(j_1, j_2) \leqslant \bar{D}(j_1, k_1) + \bar{D}(k_1, k_2) + \bar{D}(k_2, j_2).$$

Donc :

$$D^*(j_1, p) + D^*(p, j_2) \geqslant \bar{D}(j_1, j_2).$$

Et en reportant dans (3′)

$$D^*(j_1, j_2) = \bar{D}(j_1, j_2).$$

CQFD

Théorème 3 :

Soit k_1 et k_2 et les ensembles K_1 et K_2 associés non vides. Supposons que :

$$D^*(k_1, k_2) = D(k_1, p) + D(p, k_2) < \bar{D}(k_1, k_2)$$

alors pour tous les points $j_1 \in K_1$ tels que $D^*(j_1, k_2) = \bar{D}(j_1, k_2)$ on a aussi :

$$D^*(j_1, j_2) = \bar{D}(j_1, j_2) \; \forall \, j_2 \in K_2.$$

De même pour tous les points $j_2 \in K_2$ tels que

$$D^*(j_2, k_1) = \bar{D}(j_2, k_1)$$

on a aussi :

$$D^*(j_2, j_1) = \bar{D}(j_2, j_1) \; \forall \, j_1 \in K_1.$$

Preuve : Par hypothèse on a :

$$\bar{D}(j_1, k_2) \leqslant D^*(j_1, p) + D(p, k_2).$$

On sait en outre que :

$$D^*(j_2, p) = \bar{D}(j_2, k_2) + D(k_2, p).$$

Donc on en déduit :

$$\bar{D}(j_1, k_2) + \bar{D}(k_2, j_2) \leqslant D^*(j_1, p) + D^*(j_2, p).$$

On a aussi :

$$\bar{D}(j_1, j_2) \leqslant \bar{D}(j_1, k_2) + \bar{D}(k_2, j_2) \leqslant D^*(j_1, p) + D^*(j_2, p).$$

Donc en utilisant (3′)

$$D^*(j_1, j_2) = \bar{D}(j_1, j_2).$$

On démontre de même la deuxième partie du théorème.

CQFD

IV. CONSÉQUENCES PRATIQUES SUR LE CODAGE DE L'ALGORITHME

Le gain par rapport à l'algorithme de Dantzig classique réside dans les faits suivants :

1° Les plus courts chemins entre couples de points d'un même ensemble K_i ne sont pas modifiés par l'introduction du point p. Ceci résulte du théorème 1.

2° Le théorème 2 nous dit que si le plus court chemin d'un point k_1 à un point k_2 (auxquels correspondent des ensembles K_1 et K_2 non vides) n'est pas modifié par l'introduction de p alors aucun plus court chemin entre couples de points j_1, j_2 (tels que $j_1 \in K_1$ et $j_2 \in K_2$) n'est modifié.

3° Du théorème 2 on déduit donc que les seuls couples de points à examiner appartiennent à des ensembles K_i et K_j non vides tels que le plus court chemin de k_i à k_j soit modifié.

Toutefois le théorème 3 permet une réduction du nombre de couples à envisager. Les seuls couples (j_1, j_2) à examiner, $j_1 \in K_i$ et $j_2 \in K_j$, sont tels que à la fois le plus court chemin de j_1 à k_j et celui de j_2 à k_i sont modifiés.

4° Dans le cas où $m = 1$, il n'y a qu'un seul ensemble K_1 qui est identique à S. Par conséquent, on déduit du théorème 1 qu'aucun plus court chemin entre éléments de S n'est modifié.

5° Dans un graphe complet on a $m = p - 1$ et le nombre d'ensembles K_i non vides est en général important; dans ce cas le gain par rapport à la procédure de Dantzig est plus faible.

V. ORDRE D'INTRODUCTION DES POINTS

Il faut introduire des points qui perturbent le moins possible les plus courts chemins entre éléments de S. En particulier on a remarqué que l'introduction systématique du point le plus proche de S donnait de bons résultats.

On voit donc une similitude avec la construction de l'arbre minimal du graphe dans laquelle on relie à une composante connexe S, le point le plus proche de S.

Il suffit donc d'introduire les points dans le même ordre que lors de la construction de l'arbre minimal.

VI. ANALYSE POST-OPTIMALE

Supposons que l'on modifie la longueur d'un ou de plusieurs arcs issus d'un nœud i ou que l'on crée de nouveaux arcs entre ce nœud et d'autres nœuds auxquels il n'était pas relié.

Considérons l'ensemble $S = X - \{ i \}$ où X désigne l'ensemble des nœuds du graphe.

Pour calculer les nouveaux plus courts chemins, il suffit de recommencer la dernière itération de l'algorithme dans laquelle on ajoute le nœud i à l'ensemble S.

Pour le cas où l'on modifie plusieurs arcs issus de points différents, il faut commencer par déterminer le nombre minimal de nœuds tels que tout arc modifié ait au moins une extrémité dans cet ensemble.

La procédure consiste ensuite à introduire successivement chacun de ces nœuds.

VII. RÉSULTATS

Nous avons considéré cinq graphes symétriques et testé l'algorithme de Floyd, celui de Dantzig et le nôtre sur ces graphes. A titre indicatif, nous avons indiqué le nombre d'arcs (non orientés) de chacun des graphes. Les temps calculs sont exprimés en 1/10 000 d'heure et le calculateur employé est un GE 635. Tous les programmes ont été écrits en FORTRAN et le codage de notre algorithme peut certainement être amélioré.

Les algorithmes de Floyd et de Dantzig ont été programmés en tenant compte de la symétrie du graphe et de l'absence de cycles négatifs ce qui divise le temps de calcul par un facteur 2 au moins, par rapport à un algorithme écrit pour un graphe quelconque.

Tous les temps indiqués incluent le temps de lecture des données et celui de l'écriture des résultats. Cela masque donc pour les petits réseaux la différence de performance entre les algorithmes.

Nombre de nœuds	Nombre d'arcs	Floyd	Dantzig	Notre algorithme
20	98	5	5	5
50	525	14	13	9
100	1 077	62	53	22
140	1 591	162	138	39
200	2 200	398	350	69

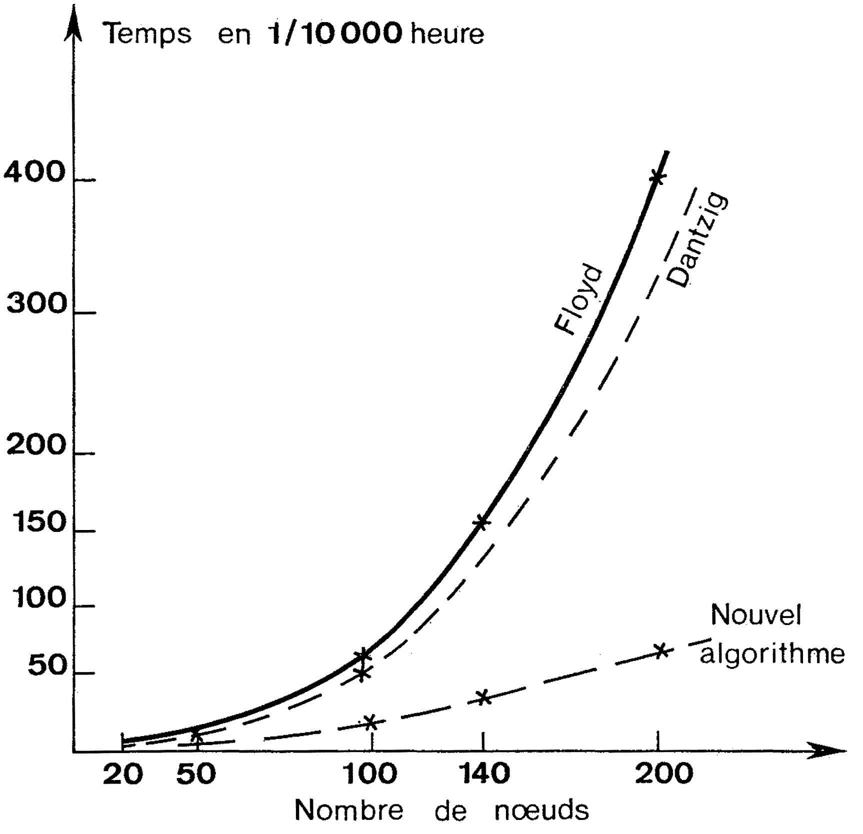

Figure 2

En outre notre algorithme comme celui de Dantzig se prête très bien au traitement des gros réseaux. En effet la matrice D ne tient pas en mémoire centrale mais on remarquera qu'il suffit d'avoir deux ou trois colonnes de cette matrice en mémoire à un instant donné.

Nous terminerons cet article en mentionnant l'importance toute particulière que revêt le calcul de plus courts chemins dans les problèmes concernant la gestion des réseaux de télécommunications.

REFERENCES

[1] FLOYD R. W., *Algorithm 97 : Shortest path*, CACM 5 (6), 1962, 345.

[2] YEN Jin. Y., *Finding the lengths of all shortest paths in N-Node Non-negative-Distance Complete Networks using* $^1/_2\ N^3$ *additions and* N^3 *Comparisons*, J.A.C.M., vol. 19, n° 3, july 1972, pp. 423-424.

[3] DANTZIG G. G., *All shortest routes in a graph*, Tech. Rep. n° 66-3, november 1966, Stanford Univ. California.

[4] HU T. C., Integer programming and network flows, pp. 161-168, Addison Wesley 1969.