R. ALEMANY

A. DIEGO

Brève communication. Application de la théorie des potentiels au projet d'un barrage

Revue française d'automatique, informatique, recherche opérationnelle. Recherche opérationnelle, tome 6, n° V1 (1972), p. 87-90

<http://www.numdam.org/item?id=RO_1972__6_1_87_0>

R.A.I.R.O.
(6e année, N° V-1, 1972, p. 87-89)

Brèves communications

APPLICATION DE LA THEORIE DES POTENTIELS AU PROJET D'UN BARRAGE

par R. ALEMANY et A. DIEGO (1)

Résumé. — *La détermination de la capacité minimum d'un barrage et des paramètres associés qui règlent les livraisons périodiques d'eau, a été étudiée sous la forme d'un problème de programmation linéaire. Pour le résoudre, nous utilisons les résultats de la théorie des potentiels dans les graphes.*

1. Présentation du problème

Le problème de la détermination de la capacité minimum d'un barrage et des paramètres associés qui règlent les livraisons périodiques d'eau, a été étudié sous la forme d'un problème de programmation linéaire (voir [1]) du type suivant.

Minimiser y, en respectant les contraintes sur les variables $y, x_0, x_1, ..., x_n$:

a) $p_i \leqslant x_i - x_{i-1} \leqslant q_i \quad , \qquad x_0 = x_n \, (1 \leqslant i \leqslant n),$

b) $a_i + \alpha y \leqslant x_i \leqslant b_i + y \quad , \qquad (0 \leqslant i \leqslant n)$;

c) $a'_0 + \beta y \leqslant x_0 \leqslant b'_0 + \beta y.$

Dans cette formulation, y signifie la capacité du barrage, et les livraisons correspondantes à l'intervalle $(i - 1, i)$ sont données par la différence entre le volume à l'instant $i - 1$ et la quantité x_i; l'année hydrologique étant divisée en n intervalles. D'autre part p_i, q_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ a_i, b_i $(0 \leqslant i \leqslant n$, $a_0 = a_n$, $b_0 = b_n)$ α, β $(0 < \alpha < \beta < 1)$ et a'_0, b'_0 sont des constantes fixées par les conditions physiques et économiques du projet.

Pour résoudre un problème de ce type qui nous a été posé par le Département de Génie Civil de l'Université Nationale du Sud, nous avons utilisé certains résultats de la théorie des potentiels dans les graphes, dus principalement à B. Roy.

(1) Universidad del Sur, Argentina.

2. Solution du problème

Nous pouvons penser chaque $x = (x_0, x_1, ..., x_n)$, avec $x_0 = x_0$ comme un potentiel dans un circuit de sommets 0, 1, 2, ..., $n - 1$. Nous noterons S l'ensemble des potentiels qui vérifient a). Nous supposerons $S \neq \varnothing$ c'est-à-dire, que la condition de consistance est vérifiée ([2]). Dans ce cas elle est simplement : $\sum_1^n p_i \leqslant 0 \leqslant \sum_1^n q_i$. Nous savons que S est un réticulé ([2]), qu'il existe parmi tous les potentiels $x \in S$ tels que $x \leqslant c$ (resp. $x \geqslant c$) un potentiel maximum Ec (resp. un potentiel minimum Fc), et que $E(c + \lambda e) = Ec + \lambda e$, $F(c + \lambda e) = Fc + \lambda e$, avec $e = (1, 1, ..., 1)$. Voir [3].

D'après ce qui précède, si x satisfait a) et b) pour y fixée, alors

$$a + f(y)e \leqslant Fa + f(y)e \leqslant Eb + g(y)e \leqslant b + g(y)e \tag{1}$$

Ici nous substituons à αy et y respectivement $f(y)$, $g(y)$, parce que le raisonnement qui suit est valable pour les fonctions continues quelconques d'argument y réel.

D'ailleurs, si $Fa + f(y)e \leqslant Eb + g(y)e$, le système a), b) est compatible pour la valeur de y fixée.

Il s'en suit que *le système a), b) a des solutions x pour la valeur y fixée si et seulement si*

$$K = \max_{0 \leqslant i \leqslant n-1} \{ (Fa)_i - (Eb)_i \} \leqslant g(y) - f(y). \tag{2}$$

Dans ce cas, $Fa + f(y)e$, $Eb + g(y)e$ *sont respectivement les solutions minimum et maximum associées à la valeur y donnée.*

En conséquence, la valeur minimum de y cherchée est :

$$\bar{y} = \min \{ y \mid g(y) - f(y) \geqslant K \}. \tag{3}$$

Pour $f(y) = \alpha y$, $g(y) = y$, on obtient immédiatement :

$$\bar{y} = \frac{K}{1 - \alpha}, \tag{4}$$

et les deux solutions extrêmes :

$$\underline{x} = Fa + \frac{K \cdot \alpha}{1 - \alpha} \cdot e \quad , \quad \bar{x} = Eb + \frac{K}{1 - \alpha} \cdot e. \tag{5}$$

Il nous reste à examiner la compatibilité des solutions obtenues avec la condition c).

Pour ceci, considérons les intervalles

$$A = [a'_0 + \beta\bar{y}, b'_0 + \beta\bar{y}] \quad \text{et} \quad B = [\underline{x}_0, \bar{x}_0].$$

i) Si $A \cap B \neq \varnothing$, il existe des solutions de *a*), *b*), *c*) avec le même $y = \bar{y}$. Ainsi, si $\underline{x}_0 \in A$, alors $(\underline{x}, \bar{y})$ est solution; de même si $\bar{x}_0 \in A$, $(\bar{x}, \bar{y})$ est solution. Dans le cas $A \subset B$, $\underline{x}_0, \bar{x}_0 \notin A$, $x = \lambda \underline{x} + (1 - \lambda)\bar{x}$, avec λ telle que $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, $x_0 \in A$ détermine des solutions $(x, \bar{y})$.

ii) Si $A \cap B = \varnothing$, ou $b'_0 + \beta\bar{y} < \underline{x}_0$ ou $\bar{x}_0 < a'_0 + \beta\bar{y}$. Dans le premier cas, on obtient immédiatement y minimum égal à

$$\bar{y}_1 = \frac{(Fa)_0 - b'_0}{\beta - \alpha} \text{ et } x = Fa + \alpha\bar{y}_1 e.$$

dans le deuxième cas $\bar{y}_2 = \dfrac{a'_0 - (Eb)_0}{1 - \beta}$, $x = Ea + \bar{y}_2 e$.

3. Calculs

On peut faire le calcul de *Eb* et *Fa* par des méthodes générales, comme celle de Cruon-Hervé [4] ou bien de la façon suivante :

Pour $b = (b_0, b_1, ..., b_n)$, nous définirons $Lb = b'$, $Rb = b''$ et Mb par :

i) $b'_n = b_n$, et récursivement

$$b'_k = \min\{b_k, b'_{k+1} - p_{k+1}\} \text{ pour } k \text{ décroissant, } 0 \leqslant k < n.$$

ii) $b''_0 = b_0$, et récursivement

$$b''_k = \min\{b_k, b''_{k-1} + q_k\} \text{ pour } k \text{ croissant, } 0 < k \leqslant n.$$

iii) $Mb = (\min(b_0, b_n), b_1, b_2, ..., b_{n-1}, \min(b_0, b_n))$

Il n'est pas difficile de voir que

$$Eb = RLMRLb. \tag{6}$$

La détermination de *Fa* est analogue et l'on peut la déduire facilement de l'égalité :

$$Fa = -E'(-a) \tag{7}$$

ou $E'a$ a la même signification que E mais avec $p' = -q$, $q' = -p$.

Des expressions alternatives de (6) sont :

$$Eb = RMRLMLb = \min(RMRb, LMLb).$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] Ch. REVELLE, E. JOERES and W. KIRBY, « The linear decision rule in reservoir management and design », *Water Resources Research*, vol. 5, n° 4 (1969), p. 767.

[2] B. ROY, « Cheminement et connexité dans les graphes : application aux problèmes d'ordonnancement », *Metra*, série spéciale, n° 1 (1962).

[3] B. ROY, *Algèbre Moderne et Théorie des Graphes*, Dunod, Paris (1970).

[4] R. CRUON et Ph. HERVÉ, « Quelques résultats relatifs à une structure algébrique et à son application au problème central de l'ordonnancement », *Revue Française de Recherche Opérationnelle*, n° 34 (1965), pp. 3-19.