

A. HAURIE

A. M. DUSSAIX

**Un modèle dynamique de négociation sous
forme d'un jeu semi-différentiel**

Revue française d'automatique, informatique, recherche opérationnelle. Recherche opérationnelle, tome 6, n° V1 (1972), p. 65-86

http://www.numdam.org/item?id=RO_1972__6_1_65_0

© AFCET, 1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue française d'automatique, informatique, recherche opérationnelle. Recherche opérationnelle » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

UN MODELE DYNAMIQUE DE NEGOCIATION SOUS FORME D'UN JEU SEMI-DIFFERENTIEL (1)

par A. HAURIE (2) et A. M. DUSSAIX (3)

Sommaire. — Les négociations syndicales ont une structure de jeux dynamique. La théorie des jeux différentiels développée par Isaacs [12], Blaquièrre et Leitmann [3] et Case [6] n'est pas directement utilisable pour résoudre de tels jeux (cf. Case [7]).

Dans cette étude, nous proposons un modèle de négociation à deux joueurs E et S où S peut faire évoluer ses exigences dans le temps cependant que E décide seul de l'instant d'acceptation des revendications de S. Le gain des deux joueurs dépend alors du point d'accord et de l'instant où cet accord est intervenu. Nous montrons que la notion d'équilibre de Nash est un critère d'optimalité réaliste, que la notion de point efficace par contre est irréaliste. Nous donnerons ensuite une définition précise du type de jeu illustré par cette négociation et nous établirons rigoureusement certains résultats obtenus en utilisant la terminologie des jeux différentiels.

1^{re} PARTIE : UN MODELE DYNAMIQUE DE NEGOCIATION

I. Introduction

Les théories classiques de la négociation ne tiennent pas compte de l'influence du temps. Elles indiquent, s'il y a accord, ce que sera cet accord (Nash, Shapley) et les propriétés qu'il doit avoir. Ces théories ne considèrent pas la durée de la négociation ni l'influence de cette durée sur le résultat final.

Quelques auteurs se sont intéressés récemment à ce problème. On a alors construit des modèles où les demandes des joueurs évoluent dans le temps et où il y a accord quand ces demandes sont compatibles (Hicks-Case [7]).

La variation des demandes d'un joueur peut être considérée comme autonome, c'est-à-dire suivre une certaine courbe d'apprentissage (cf. Ashenfelter et Johnson [1]), cependant, il est certain qu'il y a interdépendance entre les concessions de chacun des joueurs et que la demande de chaque joueur va

(1) Cette étude a bénéficié du soutien financier du Conseil des Arts du Canada (Fonds n° S70 1491) et de l'École des Hautes Etudes Commerciales de Montréal.

(2) Professeur à l'École des Hautes Etudes Commerciales de Montréal.

(3) Actuellement à l'E.S.S.E.C., M^{me} Dussaix était professeur à l'École des Hautes Etudes Commerciales de Montréal lors de la réalisation de cette étude.

dépendre de la façon dont il perçoit le comportement, c'est-à-dire le degré de résistance, de son adversaire (cf. J. G. Cross [10]). Dans un modèle dynamique de négociation, le problème important est l'évaluation par chaque joueur du taux de concession de l'adversaire.

Le modèle que nous présentons décrit une négociation entre un syndicat et la direction d'une entreprise lors d'une grève. L'entreprise E ne formule pas d'offres de salaire mais refuse ou accepte les demandes du syndicat S . Dans ce dernier cas, la grève cesse. Nous nous trouvons dans un cas où seulement un joueur peut concéder de façon « continue » par une réduction de ses revendications, tandis que l'autre joueur, lorsqu'il concède, met un terme au jeu.

II. Un modèle élémentaire à gain terminal pour chaque joueur

Nous considérons une entreprise E dont tous les employés sont groupés dans un syndicat S . Le nombre d'employés et l'équipement de l'entreprise étant fixés, cette entreprise a une production potentielle, engendrant un revenu potentiel net des coûts de production autres que celui de la main-d'œuvre, de \$ y par jour.

Le syndicat S va revendiquer une part d de ce revenu potentiel quotidien, comme masse de salaires versés aux employés. L'entreprise E peut accepter ou refuser cette revendication. Il existe une période de temps fixée $0 \leq t \leq T$, où T est l'horizon commun aux deux parties.

Si, à l'instant t^f , la revendication syndicale d^f est acceptée par E alors les deux parties auront pour gains respectifs :

$$g_S = d^f(T - t^f)$$

$$g_E = (y - d^f)(T - t^f).$$

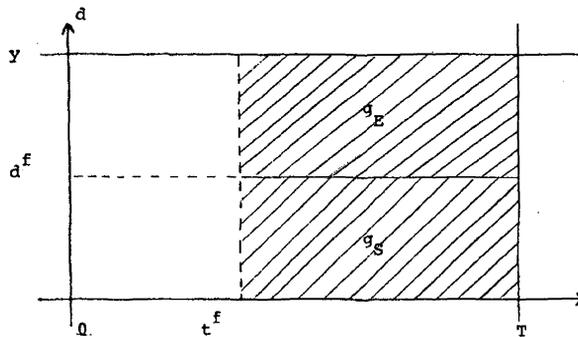


Figure 1

Nous voyons alors que ce gain dépend explicitement de t^f , instant de l'accord.

En l'absence de tout autre composante dans les gains des deux joueurs, le choix d'un point (t^f, d^f) représentant un arbitrage « optimal » est un problème comportant toutes les difficultés d'un problème classique de marchandage.

Il est facile de constater que, en l'absence de contraintes, chaque partie, pour une revendication d^f fixée a intérêt à ce que l'accord intervienne au plus tôt. En particulier, l'ensemble des points (t^f, d^f) « non dominés », c'est-à-dire tels qu'il soit impossible de trouver un autre accord améliorant le gain de chaque joueur est défini par :

$$C \triangleq \{ (0, d^o) : 0 \leq d^o \leq y \}$$

De façon normative, on a l'habitude de requérir l'optimalité parétienne pour les solutions d'un problème de marchandage; dans ce jeu dynamique cela paraît impossible.

En effet, toute négociation prend du temps. Ceci se traduit par un coût et, si l'entreprise refuse la demande d^o du syndicat au début de la négociation, un accord ne sera plus pareto-optimal. Même si on renonce à cette condition, on aura beaucoup de difficulté à découvrir les points (t^f, d^f) acceptables par les deux parties.

Nous pourrions considérer que chaque joueur procède à des évaluations subjectives de ses degrés de conviction quant à l'acceptabilité d'une revendication d avant une date $\tau \leq T$. Le problème fondamental est évidemment celui de définir des procédures d'évaluation de ces degrés de conviction (cf. [9]).

Dans les paragraphes suivants, nous montrerons que l'adjonction de contraintes temporelles sur le comportement de S ainsi que la prise en compte de l'histoire de la négociation dans la fonction d'utilité de S permettent de bâtir un modèle beaucoup plus intéressant, faisant apparaître des solutions bien définies au problème de négociation.

III. Modèle dynamique de négociation sous forme d'un jeu semi-différentiel

3.1 Contraintes dynamiques et influence de l'histoire de la négociation sur l'utilité de S

L'histoire d'une négociation sera représentée par une fonction

$$(d(t); 0 \leq t \leq t^f)$$

décrivant l'évolution dans le temps des revendications syndicales.

Nous supposerons que les syndiqués déterminent deux revendications :

d^o revendication initiale

d^* revendication minimale au-dessous de laquelle les dirigeants syndicaux ne peuvent descendre en aucun cas.

Les dirigeants syndicaux, chargés de la négociation avec E , peuvent réduire la revendication des syndiqués suivant un processus d'apprentissage représenté par l'équation différentielle suivante :

$$(1) \quad \dot{d}(t) = -u(d(t) - d^*).$$

Selon cette relation la variation instantanée de la revendication des syndiqués est proportionnelle à l'écart existant entre la revendication actuelle $d(t)$ et la revendication minimale d^* . Le coefficient de proportionnalité, $-u$, est une variable permettant aux dirigeants syndicaux de contrôler l'apprentissage des syndiqués.

La courbe d'apprentissage n'est donc pas une donnée institutionnelle mais représente un comportement « intelligent » du syndicat.

Nous supposons que la variable de contrôle u est soumise aux contraintes suivantes :

$$(2) \quad 0 \leq u \leq \tau$$

où τ est le coefficient d'apprentissage maximal des syndiqués.

Les relations (1) et (2) constituent des contraintes dynamiques sur le comportement de S .

L'histoire d'une négociation sera alors définie par la donnée de la revendication initiale d^0 , d'une politique de contrôle de l'apprentissage des syndiqués, décrite par la fonction :

$$(u(t); 0 \leq t \leq t^f),$$

engendrant la fonction $(d(t); 0 \leq t \leq t^f)$ solution de (1) avec la condition initiale $d(0) = d^0$. L'instant t^f , date d'intervention d'un accord, est choisi par l'entreprise E .

L'histoire de la négociation peut être représentée graphiquement ainsi :

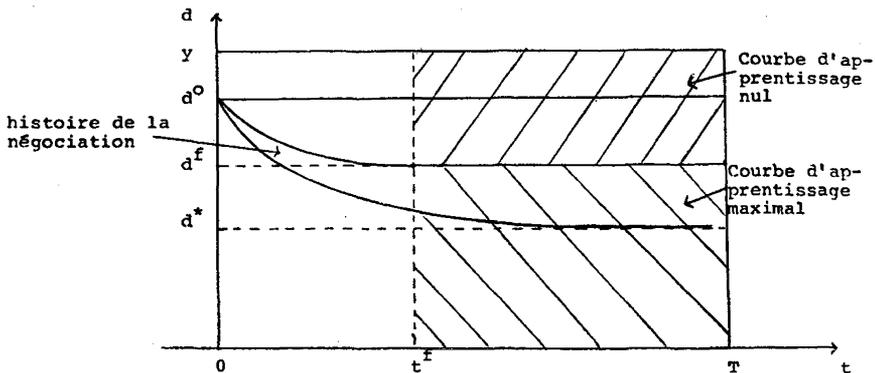


Figure 2

Le graphe de la fonction $(d(t) ; 0 \leq t \leq t^f)$ est compris entre deux courbes d'apprentissage : celle d'apprentissage nul, correspondant à $u \equiv 0$, et celle d'apprentissage maximal correspondant à $u \equiv \tau$. La première courbe est représentée par la droite.

$$d \equiv d^{\circ},$$

nul

la seconde est représentée par l'exponentielle :

$$d(t) - d^* = (d^{\circ} - d^*) e^{-\tau t}.$$

min

Nous appellerons K_{d_0} l'ensemble fermé délimité par ces deux courbes : c'est l'ensemble des points d'accord possibles, étant donnée une demande initiale d° .

Il est important de constater que, dans ce processus de négociation, les décisions du syndicat sont représentées par d° , puis par la fonction $u(t)$, cependant que la décision de E est représentée par le choix de t^f et donc par l'acceptation de la revendication $d^f = d(t^f)$ à l'instant t_f .

Nous pourrions préciser l'histoire de la négociation si cette histoire a une influence sur l'utilité de S .

Nous supposons que le fait de s'éloigner de la revendication initiale comporte une désutilité pour S (preuve de faiblesse, etc...). Cela peut être traduit par la considération du gain suivant pour S :

$$(3) \quad g_S = d(t^f)(T - t^f) + \alpha \int_0^{t^f} (d(t) - d^{\circ}) dt \quad ; \quad \alpha > 0$$

ou, un peu plus généralement :

$$(4) \quad g_S = d(t^f)(T - t^f) + \alpha \int_0^{t^f} \varphi_S(d(t) - d^{\circ}) dt \quad ; \quad \alpha > 0$$

où $\varphi_S(\cdot)$ est une fonction monotone croissante.

Dans l'optique de J. H. Case [7] on peut considérer que g_S traduit les préférences agrégées des deux groupes distincts que sont les syndiqués d'une part et les chefs syndicaux d'autre part. L'objectif des chefs syndicaux est de maximiser le gain $(T - t^f)d^f$ résultant de l'accord final (sinon, une fois la négociation terminée, les syndiqués pourraient leur reprocher de ne pas avoir conclu l'accord au bon moment). Les membres du syndicats sont d'autre part hostiles à toute concession.

3.2 Construction de l'ensemble des points d'accord acceptables pour E

Considérons donc le modèle de négociation défini par le jeu suivant :

i) fonctionnelles de gain :

$$(3') \quad g_S = d(t^f)(T - t^f) + \alpha \int_0^{t^f} (d(t) - d^0) dt$$

$$(5) \quad g_E = (y - d^f)(T - t^f)$$

ii) contraintes :

$$\dot{d}(t) = -u(d(t) - d^*)$$

$$0 \leq u \leq \tau$$

$$d(0) = d^0$$

$$d(t^f) = d^f$$

$$t^f \leq T$$

iii) Variable de contrôle à la disposition de S :

$(u(t); t \geq 0)$: coefficient d'apprentissage.

iv) Variable de contrôle à la disposition de E :

t^f : instant de l'accord entre les parties.

Un point (t^f, d^f) sera acceptable pour E seulement si le gain marginal de E quand il attend dt jours de plus s'annule. En effet E est seul à choisir l'instant terminal donc, seules des considérations relative au gain de E permettent de déterminer t^f .

Nous avons, en dérivant l'expression (5) :

$$(6) \quad \frac{dg_E}{dt} = (d^f - y) - \dot{d}(t^f)(T - t^f)$$

et nous constatons que pour trouver le lieu des points où $\frac{dg_E}{dt}$ s'annule, nous devons supposer que E connaît le taux de concession final $\dot{d}(t^f)$. Pour cela, il suffit de supposer que E connaît le coefficient d'apprentissage maximal, τ , ainsi que la forme générale de l'influence de l'histoire de la négociation sur l'utilité de S . Si E sait que la fonction de gain de S a la forme donnée en (4), il en conclura que nécessairement $\dot{d}(t^f) = -\tau(d(t^f) - d^*)$.

En effet, pour passer de la revendication initiale à la revendication d^f au temps t^f , S choisira une courbe d'apprentissage admissible (compatible avec

les contraintes (1) et (2)) rendant minimale la surface $\Sigma(d)$ comprise entre la droite : $d \equiv d^o$ et le graphe de $d(t)$.

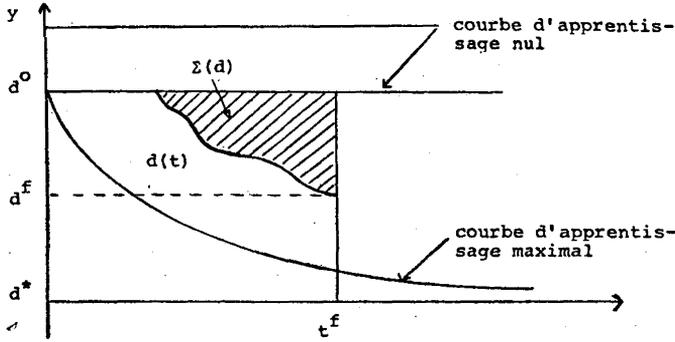


Figure 3

Un calcul variationnel simple nous montre que la fonction $(u(t); 0 \leq t \leq t^f)$ engendrant la fonction $(d(t); 0 \leq t \leq t^f)$ rendant minimale la surface $\Sigma(d)$ est nécessairement de la forme suivante :

$$(7) \quad \begin{cases} u(t) = 0 & \text{si } 0 \leq t \leq t^c \\ u(t) = \tau & \text{si } t^c \leq t \leq t^f \end{cases}$$

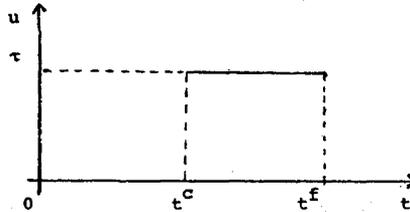


Figure 4

On en conclut donc que S adoptera nécessairement une politique d'intransigeance entre les instants 0 et t^c puis une politique de concession maximale à partir de l'instant de commutation t^c .

E connaît donc le taux de variation des exigences de S en tout point (t^f, d^f) ou d^f est inférieur à d^o :

$$(8) \quad \dot{d}(t^f) = -\tau(d^f - d^*).$$

En portant (8) dans l'expression (6) nous obtenons :

$$\frac{dg_E}{dt} = d^f - y + \tau(d^f - d^*)(T - t^f)$$

et le lieu des points acceptables pour E est alors défini par

$$\Xi^* \triangleq \left\{ (t^f, d^f) : \frac{dg_E}{dt} = 0 \right\}$$

c'est-à-dire l'hyperbole d'équation :

$$(9) \quad \theta^*(t^f, d^f) \triangleq T - t^f - \frac{y - d^f}{\tau(d^f - d^*)} = 0$$

Nous appellerons l'ensemble Ξ^* la cible de S . Nous l'avons illustrée sur la figure suivante :

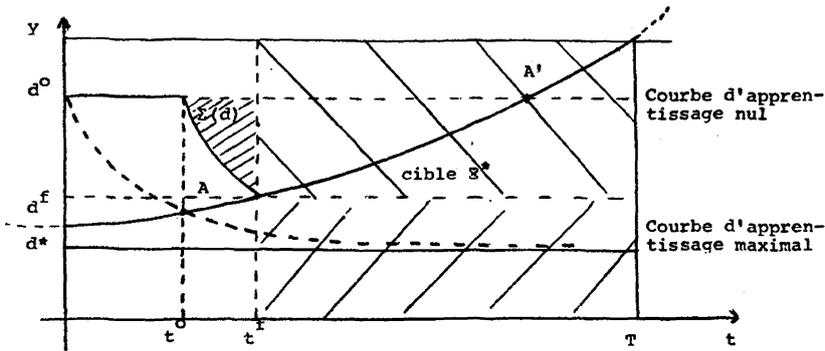


Figure 5

L'arc ouvert AA' de l'hyperbole Ξ^* est la partie utile de la cible. Les points situés sur cet arc peuvent définir un accord possible, acceptable par E .

Il est intéressant de remarquer que E construit cette cible sans avoir complètement déterminé la stratégie de S . E sait seulement que la « commande » adoptée par S pour réduire ses revendications sera de type « Bang-Bang ».

La cible Ξ^* peut s'interpréter comme étant une stratégie de E . En effet, il s'agit d'un plan d'action définissant la décision de E en fonction de l'état (t, d) du système. L'ensemble des stratégies possibles pour E correspond à un ensemble ζ_E de fonctions $\theta : (t, d) \rightarrow \theta(t, d) \forall t \in [0, T], \forall d \in [d^*, y]$.

Une stratégie $\theta \in \zeta_E$ peut se « lire » : « Accepter l'accord (t^f, d^f) si $\theta(t^f, d^f) = 0$ ».

Pour définir la stratégie θ^* donnée en (9), E suppose que S a adopté aussi une stratégie sous forme d'une fonction $s : (t, d) \rightarrow u = s(t, d) \in [0, \tau]$ définissant le taux de concession à partir de l'état du système. Comme S est seul à contrôler l'histoire de la négociation et que cette histoire influe sur sa fonction d'utilité, E peut en déduire que S cherchera en tout état de cause à rendre la négociation moins préjudiciable et donc sera intransigeant sur une partie

de l'ensemble des états (t, d) possibles et au contraire conciliant sur un sous ensemble de l'ensemble complémentaire de cette partie. Pour pouvoir définir la cible Ξ^* , E est obligé de supposer que S a une stratégie de concession maximale au voisinage de l'arc ouvert AA' . Pour une demande initiale d° fixée, cette condition va être remplie. Au point A , E connaît encore la valeur de \dot{d} cependant qu'au point A' on ne peut rien dire. En effet, s'il est extrêmement coûteux pour S de s'éloigner de d° , S aura une politique d'intransigeance absolue et E aurait avantage à accepter l'accord en $(0, d^\circ)$. Nous ne considérons donc pour l'instant que l'arc ouvert AA' que nous avons appelé la partie utile de la cible.

3.3 Construction d'une stratégie optimale pour S

La cible Ξ^* a été déterminée par le souci de chaque joueur d'obtenir un gain maximal.

Étant donné d° , S va chercher un point sur l'arc AA' de la cible, qui rende maximal son gain.

En tout point (t^f, d^f) de AA' , nous pouvons calculer le gain de S résultant de la négociation ayant débuté en $t = 0$ avec une revendication d° .

Puisqu'on connaît la forme de « L'histoire de la négociation », on peut calculer en remontant le temps la valeur de la fonctionnelle de gain, et on obtient :

$$g_s \triangleq V_s(t^f, d^f) = d^f(T - t^f) + \alpha \int_0^{t^f} [d(t) - d^\circ] dt$$

Or, d'après (7) :

$$\int_0^{t^f} [d(t) - d^\circ] dt = \int_{t^c}^{t^f} [d(t) - d^\circ] dt$$

d'autre part, puisque, entre les instants t^c et t^f :

$$\dot{d}(t) = -\tau(d(t) - d^*)$$

on en déduit que :

$$d(t) = K e^{-\tau t} + d^* \quad \text{si} \quad t^c \leq t \leq t^f.$$

K est une constante, et

$$d^f = K e^{-\tau t^f} + d^*$$

$$d(t^c) = d^\circ = K e^{-\tau t^c} + d^*$$

d'où :

$$t^f = -\frac{1}{\tau} \text{Log} \frac{d^f - d^*}{K}$$

$$t^c = -\frac{1}{\tau} \text{Log} \frac{d^f - d^*}{d^o - d^*}$$

ce qui permet d'écrire :

$$\int_{t^o}^{t^f} [d(t) - d^o] dt = \int_{t^o}^{t^f} (K e^{-\tau t} + d^* - d^o) dt$$

$$= (d^* - d^o)(t^f - t^o) - \frac{1}{\tau} (K e^{-\tau t^f} - K e^{-\tau t^o})$$

$$= -\frac{1}{\tau} (d^* - d^o) \text{Log} \frac{d^f - d^*}{d^o - d^*} - \frac{1}{\tau} (d^f - d^o)$$

d'où :

$$g_s = d^f(T - t^f) - \frac{\alpha}{\tau} (d^* - d^o) \text{Log} \frac{d^f - d^*}{d^o - d^*} - \frac{\alpha}{\tau} (d^f - d^o)$$

ou encore, en posant :

$$\begin{cases} A = \frac{\alpha}{\tau} (d^o - d^*) \text{Log} (d^o - d^*) & A \geq 0 \\ B = \frac{\alpha}{\tau} (d^o - d^*) & B \geq 0 \end{cases}$$

$$(10) \quad g_s \triangleq V_s(t^f, d^f)$$

$$= -A + B \text{Log} (d^f - d^*) + \frac{\alpha}{\tau} (d^o - d^f) + d^f(T - t^f).$$

S'il existe un point « intérieur » à l'arc AA' rendant $V_s(t^f, d^f)$ maximal, nous devons avoir en ce point les conditions :

$$\begin{cases} \frac{\partial V_s}{\partial t^f} + \nu \frac{\partial \theta^*}{\partial t^f} = \frac{\partial V_s}{\partial d^f} + \nu \frac{\partial \theta^*}{\partial d^f} = 0 \\ \theta^*(t^f, d^f) = 0 \end{cases}$$

où ν est un multiplicateur de Lagrange associé par S à la cible. Ces conditions s'écrivent aussi :

$$(11) \quad -d^f - \nu = 0$$

$$(12) \quad \frac{B}{d^f - d^*} - \frac{\alpha}{\tau} + T - t_f + \nu \left[\frac{1}{\tau(d^f - d^*)} + \frac{\nu - d^f}{\tau(d^f - d^*)^2} \right] = 0$$

$$(13) \quad T - t^f - \frac{y - d^f}{\tau(d^f - d^*)} = 0$$

Remarquons que la relation (11) définit simplement le multiplicateur de Lagrange ν comme égal à la variation marginale de g_s quand il faut attendre un peu plus longtemps pour atteindre l'accord.

De (11)-(13), on tire la relation :

$$\frac{B}{d^f - d^*} - \frac{\alpha}{\tau} + \frac{y - d^f}{\tau(d^f - d^*)} - d^f \left[\frac{y - d^*}{\tau(d^f - d^*)^2} \right] = 0$$

soit :

$$\tau B(d^f - d^*) - \alpha(d^f - d^*)^2 + (y - d^f)(d^f - d^*) - d^f(y - d^*) = 0$$

ce qui s'écrit :

$$\tau B(d^f - d^*) - \alpha(d^f - d^*)^2 - (d^f - d^*)^2 + d^*(d^* - y) = 0$$

ou encore :

$$(14) \quad -(1 + \alpha)(d^f - d^*)^2 + \tau B(d^f - d^*) + d^*(d^* - y) = 0$$

qui est une équation du second degré en $(d^f - d^*)$, déterminant d^f .

L'existence et le nombre des racines de (14) dépendront du signe de l'expression :

$$(15) \quad \alpha^2(d^o - d^*)^2 - 4(1 + \alpha)d^*(y - d^*)$$

Si on a :

$$(16) \quad \frac{\alpha^2}{1 + \alpha} < \frac{4(y - d^*)d^*}{(d^o - d^*)^2}$$

il n'existe pas de point intérieur à la partie utile de la cible maximisant g_s .

Le second membre de (16) est positif; nous voyons donc que l'inégalité (16) sera vérifiée pour α suffisamment grand. Cela revient à dire que, si le coût des concessions augmente, S ne pourra jamais concéder et donc ne pourra pas atteindre la partie utile de la cible. Nous reviendrons plus tard sur ce type de comportement.

Si on a :

$$\frac{\alpha^2}{1 + \alpha} > \frac{4(y - d^*)d^*}{(d^o - d^*)^2}$$

alors, il existe deux racines positives de (14) données par :

$$d^f - d^* = \frac{B\tau \pm \sqrt{B^2\tau^2 - 4(1 + \alpha)d^*(y - d^*)}}{2(1 + \alpha)}$$

Ces racines sont toutes deux intérieures à l'intervalle (d^0, d^*) .

En effet, on montre facilement que, si d^f vérifie l'équation (14), on a toujours : $d^f < d^0$.

On obtient donc deux points extrémaux (t_1^f, d_1^f) et (t_2^f, d_2^f) où on a supposé : $t_1^f < t_2^f$.

Remarquons que le gain de E est supérieur en (t_1^f, d_1^f) mais que seules des considérations relatives au gain de S déterminent le point d'accord sur la cible; ce sera celui des deux points extrémaux correspondant au maximum de $V_S(t^f, d^f)$.

Ce point d'accord que nous venons d'obtenir a les propriétés caractéristiques d'un équilibre de Nash. Le gain de chaque joueur est en effet rendu maximal étant donné le comportement de l'adversaire.

La notion d'équilibre de Nash a souvent été contestée comme critère d'optimalité ayant une valeur opérationnelle. Dans ce modèle, il semble cependant que l'équilibre de Nash soit une solution « naturelle » de ce type de jeu. En effet, il y a une hiérarchie dans les joueurs puisque le syndicat « joue le premier » en concédant, cependant, que l'entreprise n'intervient que pour mettre fin au jeu.

3.4 Intransigeance de S

Supposons que α soit suffisamment grand pour que le gain de S aille en croissant quand le point d'accord décrit l'arc AA' . Le point A' ne correspond pas à un équilibre de Nash. En effet, pour E , étant donnée l'intransigeance de S , le mieux est d'accepter d^0 dès l'instant initial. Remarquons cependant que E peut ne pas connaître précisément la valeur de α et espérer une concession de S . Quand le point A' est atteint, E sait que S est intransigeant et accepte l'accord.

3.5 Recherche des points efficaces

Le syndicat effectue sa demande d^0 . Un point efficace sera alors un point $(t_E^f, d_E^f) \in K_{d^0}$ tel qu'il n'existe pas (t^f, d^f) vérifiant les conditions :

$$g_S = V_S(t^f, d^f) \geq V_S(t_E^f, d_E^f)$$

$$g_E = V_E(t^f, d^f) \geq V_E(t_E^f, d_E^f)$$

une des conditions au moins étant une inégalité stricte.

Une courbe d'indifférence pour E sera l'ensemble des points (t^f, d^f) tels que :

$$(T - t^f)(y - d^f) = K_1$$

c'est-à-dire :

$$(19) \quad d^f = y + \frac{K_1}{t^f - T}$$

De la même façon, une courbe d'indifférence pour S sera l'ensemble des points (t^f, d^f) tels que :

$$(T - t^f)d^f - \alpha \int_{t^f}^{t^0} [d^0 - d(t)]dt = K_2$$

soit, d'après (10) :

$$d^f(T - t^f) - A + B \text{Log}(d^f - d^*) + \frac{\alpha}{\tau}(d^0 - d^f) = K_2$$

ou encore :

$$t^f = T - \frac{\alpha}{\tau} - \frac{K_2 + A - \frac{\alpha}{\tau}d^0}{d^f} + B \frac{\text{Log}(d^f - d^*)}{d^f}$$

Considérons le point A , point d'intersection de la cible et de la courbe d'apprentissage maximal de S . Les coordonnées (t_A^f, d_A^f) de ce point vérifient l'équation de la cible, soit :

$$T - t_A^f - \frac{y - d_A^f}{\tau(d_A^f - d^*)} = 0$$

c'est-à-dire :

$$(20) \quad d_A^f = d^* + \frac{y - d^*}{1 + \tau(T - t_A^f)}$$

et l'équation de la courbe d'apprentissage maximal, soit :

$$d_A^f = (d^0 - d^*)e^{-\tau t_A^f} + d^*$$

D'autre part, la courbe d'indifférence de E passant par A est telle que :

$$d^f = y + \frac{K_A}{t^f - T} \quad \text{d'où :} \quad K_A = (d_A^f - y)(t_A^f - T)$$

ou, d'après (20) : $K_A = \frac{-\tau(d^* - y)(T - t_A^f)^2}{1 + \tau(T - t_A^f)}$

Les tangentes en A à cette courbe d'indifférence et à la courbe d'apprentissage maximal ont pour pente :

$$\pi = -\frac{K_A}{(t_A^f - T)^2} = \frac{\tau(d^* - y)}{1 + \tau(T - t_A^f)}$$

et $\pi' = -\tau(d_A^f - d^*)$ respectivement
 or, d'après (20),

$$\pi' = -\tau \frac{(y - d^*)}{1 + \tau(T - t_A^f)} = \pi.$$

En A , la courbe d'indifférence de E passant par A et la courbe d'apprentissage maximal de S sont donc tangentes. Étant donnée la forme des courbes d'indifférence de E , on a :

$$\begin{aligned} \text{Max}_{K_{A0}} V_E(t^f, d^f) &= \text{Max}_{K_{A0}} (T - t^f)(y - d^f) \\ &= (T - t_A^f)(y - d_A^f) = V_E(t_A^f, d_A^f). \end{aligned}$$

D'autre part, l'étude des courbes d'indifférence de E et S montre que l'ensemble C des points efficaces est l'ensemble des points de la courbe d'apprentissage maximale compris entre le point $(0, d^0)$ et le point A . (Il est facile de le voir en étudiant le maximum du gain de S (resp. E), étant donné un gain de E (resp. S) constant.)

Une fois que le syndicat a effectué sa demande d^0 , les théories classiques de la négociation conduiraient alors à un point d'accord sur C .

Un tel point n'est pas acceptable étant données les hypothèses du modèle concernant le processus de négociation. En effet, si le syndicat adopte une politique de conciliation, c'est-à-dire adopte un taux de concession maximal, l'entreprise peut refuser son accord le plus longtemps possible.

Un point d'accord sur C n'est donc pas stable, s'il diffère du point A .

IV. Conclusion de la première partie

Le modèle que nous venons d'étudier présente de trop nombreuses imperfections pour pouvoir prétendre être opérationnel. Cependant nous avons pu montrer que la considération du processus de négociations dans son aspect essentiellement dynamique permet de faire apparaître une solution bien définie et ayant un certain sens économique à ce jeu.

La théorie des jeux a un aspect normatif qui l'a desservie auprès des économistes appliqués. Nous croyons cependant qu'un grand nombre des difficultés actuelles rencontrées dans l'application de la théorie des jeux aux problèmes concrets provient du manque d'intérêt porté jusqu'à ces dernières années à l'étude de la valeur du temps dans les processus de négociation. Les travaux de Cross, Case et Contini constituent une base solide pour donner un élan nouveau à la théorie des jeux de négociation.

Bien que nous ayons proposé une solution à ce problème de négociation il nous semble important de revenir sur la structure de ce type de jeu de façon à en généraliser les possibilités d'application.

**2^e PARTIE : EQUILIBRE DE NASH
DANS UN JEU SEMI-DIFFERENTIEL**

I. Introduction

Dans la première partie de cette étude nous avons présenté un modèle de négociations industrielles que nous avons traité par une méthode adaptée à sa structure particulière. Dans cette seconde partie nous donnerons une définition générale de ce type de jeu que nous appellerons jeu semi-différentiel. Dans un jeu différentiel, plusieurs joueurs pilotent de façon conflictuelle un certain système. Dans un jeu semi-différentiel, seul un joueur pilote le système cependant que le second joueur n'a qu'une seule décision à prendre, celle de mettre fin au jeu.

La terminologie que nous adopterons est en grande partie celle que A. Blaquière et G. Leitmann ont utilisée dans leurs travaux ([3], [4], [13]). Nous établirons un résultat donnant une condition nécessaire d'optimalité propre à ce type de jeu que nous appliquerons au modèle déjà présenté.

II. Equation, d'état, gains, stratégies

Nous considérerons un système dynamique régi par l'équation d'état :

$$(1) \quad \dot{x} = f(x, u)$$

où $x \in E^n$ est la variable d'état, $u \in E^m$ la variable de commande. Nous supposons que la n-ième composante de la variable

$$x \triangleq (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E^n$$

représente le temps ($x_n = t$).

Soient G et U des domaines de E^n et E^m respectivement, nous supposons que les composantes de la fonction f ,

$$f \triangleq (f_1, f_2, \dots, f_n) \quad ; \quad f_n(x, u) \equiv 1$$

sont de classe C^1 sur $G \times U$.

La variable de commande u est à la disposition d'un joueur J_1 .

Soit :

$$x_0 \in R$$

une variable réelle repérant un gain accumulé par ce joueur.

L'équation d'accumulation du gain de J_1 est donnée par :

$$(2) \quad \dot{x}_0 = f_0(x, u)$$

où f_0 est aussi de classe C^1 sur $G \times U$.

Soit x° un état initial, on a :

$$x_n^\circ = t_0.$$

A cet état initial et à une commande

$$\tilde{u} : t \rightarrow u = \tilde{u}(t) \in U, \quad t_0 \leq t \leq t_1$$

mesurable sur $[t_0, t_1]$ correspond une solution unique de l'équation (1) :

$$\tilde{x} : t \rightarrow x = \tilde{x}(t) \in E^n, \quad \tilde{x}(t_0) = x^\circ.$$

Si, $\forall t \in [t_0, t_1]$, on a :

$$\tilde{x}(t) \in G$$

on dit que \tilde{x} est une réponse admissible du système, engendrée à partir de x° , par la commande \tilde{u} .

Alors que le joueur J_1 pilote le système un second joueur, J_2 , définit seul l'instant terminal t_f . On aura évidemment :

$$t_f \geq t_0.$$

Considérons enfin deux fonctions :

$$\Phi_i : G \rightarrow R; i = 1, 2$$

respectivement de classe C^1 et C^2 sur G , appelées fonctions de gain terminal de chaque joueur $J_i; i = 1, 2$.

Si \tilde{x} est une réponse admissible engendrée à partir de x° par la commande \tilde{u} , définie sur l'intervalle $[t_0, t_1]$ et si l'instant final est $t_f \in [t_0, t_1]$ alors le joueur J_1 obtient un gain :

$$(3) \quad G_1(x^\circ, t_f, \tilde{x}, \tilde{u}) \triangleq \Phi_1(\tilde{x}(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} f_0(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t)) dt$$

et le joueur J_2 obtient un gain :

$$(4) \quad G_2(x^\circ, t_f, \tilde{x}, \tilde{u}) \triangleq \Phi_2(\tilde{x}(t_f)).$$

Étant donné que le gain de chaque joueur est affecté par la décision de l'adversaire et que ce problème est de nature dynamique, chaque joueur doit adopter une stratégie liant sa décision à l'état du système.

$\zeta_1 \triangleq \{s_1\}$ est l'ensemble des stratégies du joueur J_1 . Les s_1 sont des fonctions sur un domaine $X \subset G$:

$$(5) \quad s_1 : X \rightarrow U, \quad x \rightarrow u = s_1(x)$$

qui sont soumises à des contraintes du type général suivant :

$$(6) \quad s_1(x) \in K_1(x) \subset U \quad \forall x \in X.$$

Ces stratégies satisfont aux règles de composition habituelles données dans [3] par exemple. $\zeta_2 \triangleq \{\theta_2\}$ est l'ensemble des stratégies du joueur J_2 . Les θ_2 sont des fonctions définies sur le domaine G , à valeurs réelles et telles que les ensembles :

$$\Xi_2 = \theta_2^{-1}(0) \triangleq \{x \in G : \theta_2(x) = 0\}$$

soient non vides et fermés. Ξ_2 joue alors le rôle d'une cible. Quand, au cours d'une réponse, l'état atteint la cible, le jeu est terminé.

III. Couple stratégique jouable. Equilibre de Nash

Soit $(s_1, \theta_2) \in \zeta_1 \times \zeta_2$ un couple stratégique où s_1 est une fonction définie sur X .

Définition 1 : « Le couple (s_1, θ_2) est jouable en $x^i \in X$ s'il existe une fonction

$$\tilde{x} : t \rightarrow x = \tilde{x}(t) \in X \quad \forall t \in [t_i, t_j] \quad ; \quad t_i = x_n^i$$

vérifiant, presque partout sur $[t_i, t_j]$, l'équation différentielle :

$$(7) \quad \frac{d\tilde{x}(t)}{dt} = f(\tilde{x}(t), s_1(\tilde{x}(t)))$$

et la condition initiale :

$$\tilde{x}(t_i) = x^i$$

et telle que pour un instant $t_f \in [t_i, t_j]$ on ait :

- (a) $\tilde{x}(t_f) \in \Xi_2$
- (b) $\tilde{x}(t) \in G - \Xi_2 \quad \text{si} \quad t \in [t_i, t_f).$

Nous dirons alors que \tilde{x} est une réponse complète de (7) engendrée par s_1 .

Nous noterons :

$$(8) \quad V_1(x^i, \Xi_2, s_1) \triangleq \Phi_1(\tilde{x}(t_f)) + \int_{t_i}^{t_f} f_0(\tilde{x}(t), s_1(\tilde{x}(t))) dt$$

le gain du joueur J_1 obtenu le long de la réponse \tilde{x} et engendré par le couple stratégique (s_1, θ_2) . (Nous supposons que l'intégrale est définie pour tout $s_1 \in \zeta_1$.)

De même façon nous noterons :

$$(9) \quad V_2(x^i, \Xi_2, s_1) \triangleq \Phi_2(\tilde{x}(t_f))$$

le gain du joueur J_2 engendré par le couple (s_1, θ_2) . Remarquons que les expressions (8) et (9) sont imprécises puisque, a priori, plusieurs réponses peuvent être engendrées par une même stratégie (cf. [3]). Néanmoins nous conserverons ces notations pratiques pour définir la notion d'optimalité au sens de Nash.

Définition 2 : « Le couple stratégique (s_1^*, Ξ_2^*) est un équilibre sur X si :

(i) l'ensemble $X^* \subset X$ des points où (s_1^*, Ξ_2^*) est jouable est non vide.

(ii) $\forall x^i \in X^*, \forall \theta_2 \in \zeta_2$ tel que (s_1^*, θ_2) soit jouable en x^i on a :

$$(10) \quad V_2(x^i, \Xi_2, s_1^*) \leq V_2(x^i, \Xi_2^*, s_1^*)$$

(iii) $\forall s_1 \in \zeta_1$ tel que (s_1, θ_2^*) soit jouable en x^i on a :

$$(11) \quad V_1(x^i, \Xi_2^*, s_1) \leq V_1(x^i, \Xi_2^*, s_1^*).$$

REMARQUE : Les conditions (ii) et (iii) font que les gains $V_j(x^i, \Xi_2^*, s_1^*)$, $j = 1, 2$, sont uniquement définis.

IV. Une condition nécessaire concernant la cible Ξ_2^* .

Soit (s_1^*, θ_2^*) un équilibre sur X et $x^i \in X^*$, un état initial donné. Soit :

$$\tilde{x}^* : t \rightarrow x = \tilde{x}^*(t) \quad \forall t \in [t_i, t_j]$$

une réponse complète de (7), engendrée par s_1^* . On a

$$(a) \quad \tilde{x}^*(t_i) = x^i$$

$$(b) \quad \exists t_f \in [t_i, t_j] \text{ tel que } \tilde{x}^*(t_f) \in \Xi_2^* \text{ et}$$

$$x^*(t) \notin \Xi_2^* \quad \forall t \in [t_i, t_f].$$

Nous ferons un certain nombre d'hypothèses sur la nature des stratégies des deux joueurs.

Hypothèse 1 : « Il existe un voisinage $\Delta(\tilde{x}^*(t_f))$ de $\tilde{x}^*(t_f)$ dans X dans lequel s_1^* est continue et θ_2^* est de classe C^1 . »

Hypothèse 2 : « Il existe un voisinage $\Delta(\tilde{x}^*(t_f))$ tel que pour tout $x \in \Delta(\tilde{x}^*(t_f)) \cap \Xi_2^*$ on ait :

$$(12) \quad \text{Grad } \theta_2^*(x) \cdot f(x, s_1^*(x)) \neq 0 \cdot »$$

Hypothèse 3 : « L'ensemble de stratégies ζ_2 est tel que, dans un voisinage $\Delta(\tilde{x}^*(t_f))$, pour tout point $x^f \in \Delta(\tilde{x}^*(t_f))$ il existe une cible Ξ_2 contenant ce point :

$$x^f \in \Xi_2 \cdot »$$

Ces hypothèses jouent les rôles suivants :

L'hypothèse 1 nous permet de considérer que l'instant terminal t_f est intérieur au segment $[t_i, t_j]$:

$$t_f \in (t_i, t_j).$$

L'hypothèse 2 nous permet d'éviter le cas où la trajectoire représentée par $\tilde{x}^* : t \rightarrow x = \tilde{x}^*(t) \quad \forall t \in [t_i, t^f]$ atteint Ξ_2^* tangentiellement.

L'hypothèse 3 enfin nous permet de supposer que le joueur J_2 peut interrompre le jeu en n'importe quel point de $\Delta(\tilde{x}^*(t_f))$.

Nous sommes alors en mesure d'établir le résultat suivant :

Proposition : Si les hypothèses 1-3 sont vérifiées alors il existe un voisinage $\Delta(\tilde{x}^*(t_f))$ tel que l'on ait :

$$(13) \quad \begin{aligned} \Xi_2^* \cap \Delta(\tilde{x}^*(t_f)) &\subset \{ x \in \Delta(\tilde{x}^*(t_f)) : \\ &\text{grad } \Phi_2(x) \cdot f(x, s_1^*(x)) = 0 \}. \end{aligned}$$

Démonstration : Soit $\Delta(x^*(t_f))$ un voisinage de $x^*(t_f)$ dans X tel que les trois hypothèses soient vérifiées. Soit un point :

$$x^f \in \Xi_2^* \cap \Delta(\tilde{x}^*(t_f)).$$

D'après l'hypothèse 1 il existe une solution $\tilde{x}(\cdot)$ de l'équation (7), engendrée par s_1^* , définie sur un intervalle $[t_i, t_k]$ et telle que l'on ait :

$$\begin{aligned} \tau_f &\stackrel{\Delta}{=} x_n^f \in (t_i, t_k) \\ \tilde{x}(\tau_f) &= x^f. \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse 2 on peut choisir t_l de telle façon que l'on ait pour tout instant $t \in [t_l, \tau_f]$ la relation :

$$(14) \quad x(t) \in \Delta(\tilde{x}^*(t_f)) - \Xi_2^*$$

D'après l'hypothèse 3, pour tout $\tilde{x}(t)$, $t \in [t_l, t_k]$, il existe une stratégie $\theta_2 \in \zeta_2$ telle que :

$$\tilde{x}(t) \in \Xi_2.$$

Comme le couple (s_1^*, Ξ_2^*) est un équilibre sur X , d'après la définition 2 nous devons avoir :

$$(15) \quad \begin{aligned} V_2(\tilde{x}(t_l), \Xi_2^*, s_1^*) &= \Phi_2(x^f) \geq \\ V_2(\tilde{x}(t_l), \Xi_2, s_1^*) &= \Phi_2(\tilde{x}(t)). \end{aligned}$$

pour tout instant $t \in (t_l, t_k)$.

En dérivant $\Phi_2(\tilde{x}(\cdot))$, par rapport à t , à l'instant $\tau_f \in (t_l, t_k)$ nous obtenons la condition nécessaire :

$$(16) \quad \text{grad } \Phi_2(x^f) \cdot f(x^f, s_1^*(x^f)) = 0$$

qui établit la proposition.

V. Conditions nécessaires d'optimalité pour le joueur J_1

D'après la définition 2, la stratégie s_1^* est une stratégie de commande optimale, relativement à la fonctionnelle de gain du joueur J_1 , étant donnée la cible Ξ_2^* , sur l'ensemble X^* . On peut appliquer alors les résultats classiques de la théorie de la commande optimale pour obtenir des conditions nécessaires d'optimalité sous la forme d'un principe du maximum ou d'une équation de type programmation dynamique.

VI. Application au modèle de négociations

Considérons la variable d'état $x \in \mathbf{R}$, la variable de commande $u \in [0, \tau] \subset \mathbf{R}$, et l'équation d'état :

$$(17) \quad \dot{x} = -u(x - d^*)$$

ainsi que l'équation d'accumulation de gain de J_1 :

$$(18) \quad \dot{x}_0 = -\alpha(d^\circ - x)$$

où d° et d^* sont des nombres réels donnés vérifiant :

$$(19) \quad d^\circ - d^* > 0.$$

Soient d'autre part les fonctions de gain terminal :

$$(20) \quad \Phi_1(x, t) = x(T - t)$$

$$(21) \quad \Phi_2(x, t) = (y - x)(T - t)$$

où y et T sont des nombres réels vérifiant :

$$(22) \quad \begin{cases} y - d^0 \geq 0 \\ T - t \geq 0 \end{cases}$$

L'état initial du système est :

$$(23) \quad x^0 = d^0 \quad t_0 = 0.$$

Soit (s_1^*, θ_2^*) un équilibre de Nash sur un domaine X engendrant à partir de $(d_2^0, 0)$ une réponse $\tilde{x}^* : t \rightarrow x = \tilde{x}^*(t) \forall t \in [0, t_f]$ telle que $\tilde{x}^*(t_f)$ soit contenu dans la cible Ξ_2^* à un instant $t_f \in (0, t_1)$.

Supposons que les hypothèses 1-3 soient vérifiées et que le long de la réponse \tilde{x}^* on puisse utiliser le principe du maximum. Le long de cette réponse considérons une fonction :

$$\tilde{\lambda} : t \rightarrow \lambda = \tilde{\lambda}(t) \in \mathbf{R} \quad \forall t \in [0, t_f]$$

vérifiant l'équation variationnelle adjointe :

$$(24) \quad \dot{\lambda} = -\alpha + u\lambda$$

et les conditions de transversalité (cf. [5] ou [13]).

$$(25) \quad \tilde{\lambda}(t_f) = \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + v \frac{\partial \theta_2^*}{\partial x} \Bigg|_{\substack{x = \tilde{x}^*(t_f) \\ t = t_f}}$$

$$(26) \quad 0 = \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} + v \frac{\partial \theta_2^*}{\partial t} - \tilde{\lambda}(t_f) s_1^*(x)(x - d^*) - \alpha(d^0 - x) \Bigg|_{\substack{x = \tilde{x}^*(t_f) \\ t = t_f}}$$

où v est un multiplicateur de Lagrange associé à la cible.

Si nous formons l'hamiltonien :

$$(27) \quad H(u) = -\alpha(d^0 - x) - \tilde{\lambda}(t)u(\tilde{x}^*(t) - d^*)$$

nous devons alors avoir nécessairement :

$$(28) \quad H(s_1^*(\tilde{x}^*(t))) = \text{Max}_{u \in [0, \tau]} H(u)$$

presque partout sur $[0, t_f]$.

Les relations (23)-(28) constituent le principe du maximum le long d'une réponse optimale à partir de l'état initial $(x^0, 0)$ et étant donnée la cible Ξ_2^* . D'après la proposition établie au paragraphe précédent cette cible elle-même est définie au voisinage de $\tilde{x}^*(t_f)$ par la relation :

$$(29) \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} s_1^*(x)(x - d^*) = 0$$

satisfaite en tout point de Ξ_2^* dans ce voisinage. Nous avons posé le problème dans les termes classiques de la théorie de la commande optimale et des jeux différentiels. La résolution des équations (17) et (24) soumises aux conditions (23), (25)-(29) nous permet de caractériser une réponse optimale de façon équivalente à celle proposée dans la première partie de cet article.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] O. ASHENFELTER and G. E. JOHNSON, « Bargaining Theory, Trade Unions, and Industrial Strike Activity », *American Economic Review*, 1969, pp. 35, 49.
- [2] R. L. BISHOP, « A Zeuthen-Hicks Theory of Bargaining », *Econometrica*, 1964, pp. 410-417.
- [3] A. BLAQUIERE et G. LEITMANN, *Jeux quantitatifs*, Memorial des Sciences Mathématiques. Gauthier-Villars, Paris, 1969.
- [4] A. BLAQUIERE, « Quelques aspects géométriques des processus optimaux », Cours tenu à Bressanone en juin 1966. Éditions Cremonèse, Rome.
- [5] A. E. BRYSON et Y. C. HO, *Applied Optimal Control*, G. Blaisdell, 1969.
- [6] J. CASE, « Towards a Theory of Many Player Differential Games », *Siam J. Control*, vol. 7, n° 2, 1969.
- [7] J. H. CASE, « A Bargaining Model for Industrial Wage Disputes », *Econometric Research Program-Research Memorandum*, n° 113, Princeton University, juin 1970.
- [8] B. CONTINI, « The Value of Time in Bargaining Negotiations : some experimental Evidence », *American Economic Review*, 1968, pp. 374-393.
- [9] B. CONTINI, « The Value of Time in Bargaining Negotiations : A dynamic Model », *Kyklos*, 1970, pp. 255-271.
- [10] J. G. CROSS, « A Theory of the Bargaining Process », *American Economic Review*, 1965, pp. 67-94.
- [11] A. HAURIE, « Jeux quantitatifs à M joueurs », Thèse (3^e cycle), Paris, 1970.
- [12] R. ISAACS, *Differential Games*, J. Wiley, New-York, 1965.
- [13] G. LEITMANN, *An Introduction to Optimal Control*, McGraw-Hill, 1966.