Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle. Série verte

J. Delobel
Y. Ladegaillerie

Problèmes plaisans et délectables. Solution générale d'un problème de pesées

Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle. Série verte, tome 5, n° V3 (1971), p. 105-111
<http://www.numdam.org/item?id=RO_1971__5_3_105_0>

R.I.R.O,
(5e année, V-3, 1971. p. 105-111)

Problèmes plaisans et délectables

SOLUTION GENERALE D'UN PROBLEME DE PESEES

par J. DELOBEL et Y. LADEGAILLERIE

Il y a quelques années Claude Berge posait le problème suivant :

« Dans le pays de X..., n usines fabriquent des pièces de monnaie, certaines de ces pièces sont légales, d'autres non. On suppose que chaque usine a une production régulière : ou bien toutes ses pièces sont justes et pèsent un poids P, ou bien toutes sont fausses et pèsent $P + \varepsilon$. On suppose de plus que la fraude ε est la même pour chaque usine qui triche. Enfin, bien entendu on dispose de pièces justes.

On possède une balance que l'on supposera infiniment précise et fidèle, d'une portée infinie. Elle fournit un poids, lu sur une graduation (ce n'est pas un trébuchet réalisant simplement l'égalité de 2 masses).

On cherche à déterminer en un minimum de pesées quelles sont les usines qui fraudent.

Bien entendu, a priori, on ne connaît ni ε ni son signe.

Ce nombre minimal de pesées est trois, (à l'exception du cas où aucune usine ne fraude qui se résoud en deux pesées), on s'en rend aisément compte en considérant le cas particulier de deux usines.

PREMIERE SOLUTION PARTICULIERE

Une solution a été proposée qui convient pour $n \leqslant 6$, elle consiste à faire les trois pesées suivantes :

1° pesée d'une pièce légale, d'où P;

2° pesée de n pièces : une de chaque usine. En soustrayant nP on connaît alors $q\varepsilon$ où q est le nombre d'usines qui fraudent;

3° pesée de l'ensemble de pièces suivant :

2^i pièces de l'usine numéro $(i + 1)$ $i = 0 \dots (n-1)$

la masse ainsi mesurée est $\sum_{i=0}^{n-1}(P + \varepsilon_i)2^i$ où $\varepsilon_i = 1$ ou 0 selon que l'usine $(i + 1)$ fraude ou non. En soustrayant $\left(\sum_{i=0}^{n-1} 2^i\right) \cdot P$ on obtient $\sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon_i 2^i$ qu'on divise par $q\varepsilon$, nous avons alors le rapport $k = \left(\sum_{i=0}^{n-1} \eta_i 2^i\right)/q$ où $\eta_i = 1$ ou 0 selon que l'usine $(i + 1)$ triche ou non.

A partir de k ainsi obtenu il nous faut déterminer $\sum_{i=0}^{n-1} \eta_i 2^i$. Si cela est possible nous obtiendrons d'un seul coup tous les renseignements.

Le problème revient donc à étudier l'application φ qui à $N = \sum_{i=0}^{n-1} \eta_i 2^i$ associe $N/q(N)$ si l'on note $q(N)$ le nombre de 1 intervenant dans l'écriture de N en binaire.

Si cette application est injective le problème est résolu. Malheureusement ce n'est pas le cas car

69 s'écrit 1000101 en binaire

92 s'écrit 1011100

115 s'écrit 1110011 et on a

$$\frac{69}{3} = \frac{92}{4} = \frac{115}{5}$$

Cependant la restriction de φ aux entiers inférieurs à $2^6 = 64$ est injective, à qui permet de résoudre le problème pour $n \leqslant 6$.

Une généralisation de la méthode précédente consiste à employer un système de numération de base a. On effectuerait alors pour 3^e^ pesée la pesée de : a_i pièces de la $(i + 1)^{\text{eme}}$ usine, $i = 0 \ldots (n - 1)$

Les 3 pesées permettraient alors de connaître le rapport $k = \dfrac{\left(\sum_{i=0}^{n-1} \eta_i a^i\right)}{q}$

(les η_i sont toujours les mêmes; remarquons que $q = \sum_{i=0}^{n-1} \eta_i$). Si l'on note $\mathrm{N}(a)$ l'ensemble des entiers qui en base a s'écrivent avec des zéros et des 1, si pour un tel entier N on note $q(N)$ son nombre de 1 en base a, nous avons alors à examiner l'injectivité de l'application φ qui à N de $\mathrm{N}(a)$ associe $N/q(n)$.

Ce problème n'a pas été résolu, on a cependant vérifié pour $a = 3$ l'injectivité de φ restreinte aux entiers de $\mathrm{N}(3)$ inférieurs à 3^{13} ce qui permet de résoudre par la base 3 le problème jusqu'à 13 usines.

Solution théorique pour chaque cas particulier

Nous allons donner deux théorèmes qui permettent de résoudre le problème, tout au moins dans chaque cas particulier. Le premier est dû à C. F. Picard, (C.N.R.S. Informatique et Questionnaires p. 69), et nous n'en rappelons pas la démonstration.

Théorème. « Soient 3 entiers a, n et N tels que :

1° $a \geqslant n + 1$.

2° $N < a^n$.

3° Dans le système de base a N s'exprime uniquement avec des 0 et des 1 (avec $q(N)$ chiffres 1).

Alors il existe une relation biunivoque entre N et le rapport $N/q(N)$ ».

Le second théorème donne un résultat un peu plus précis :

Théorème. « Soit $a > 2$, entier, et l'application φ de $\mathbf{N}(a)$ dans $\mathbf{Q}$ qui à N associe $N/q(N)$, cette application restreinte aux entiers de $\mathbf{N}(a)$ inférieurs à $a^{(a+1)}$ est injective. »

Démonstration :

Supposons qu'il existe un contre-exemple à l'injectivité de φ : $N/q(N) = N'/q(N)$. (Nous supposerons que l'un des deux nombres, N par exemple n'est pas divisible par a, sinon on effectuerait la division).

Alors, nous avons une égalité du type :

$$q(N')(1 + \varepsilon_1 a \dots + a^\alpha) = q(N)(\varepsilon'_0 + \varepsilon_1 a + \dots + a^\beta).$$

Soit $\gamma = \sup(\alpha, \beta)$. Nous allons montrer que $\gamma > a$ ce qui entraîne le théorème.

Supposons que $\gamma \leqslant a$ alors $q(N)$ et $q(N') \leqslant a + 1$. Il y a trois cas à examiner.

1$^{\text{er}}$ *cas :* $q(N)$ ou $q(N') = a + 1$

α) $q(N') = a + 1$, on a alors

$$(a + 1)(1 + \dots + a^\alpha) = q(N)(1 + a + a^2 + \dots a^a)$$

$q(N) = a$ est impossible (divisibilité par a), donc on a $q(N) < a$ et par suite $q(N) = 1$, (décomposition d'un nombre en base a), ce qui conduit rapidement à la contradiction $(a + 1) = 1 + a + a^2 + \dots a^a$

β) $q(N) = a + 1$, alors

$$q(N')(1 + a + a^2 + \dots + a^a) = (a + 1)(\varepsilon'_0 + \varepsilon'_1 a + \dots + a^\beta).$$

Si $q(N') = a$, alors (divisibilité par a), $\varepsilon'_0 = 0$ et on aurait

$$a(1 + a + a^2 + \dots a^a) = (a + 1)(a + a^2 + \dots a^a),$$

impossible. Si $q(N') < a$ alors $q(N') = 1$ et on aurait

$$1 + a + a^2 + \ldots + a^a = a + 1, \text{ c'est impossible (car } a > 2)$$

2^e *cas* $q(N)$ ou $q(N') = a$

α) $q(N') = a$ d'où $a(1 + \ldots + a^\alpha) = q(N)(\varepsilon'_0 + \ldots a^\beta)$. Or $q(N) < a$ donc $\varepsilon'_0 = 0$ et $q(N) = 1$ d'où une contradiction on aurait $a = a + a^2 + \ldots a^a$.

β) $q(N) = a$ d'où $q(N')(1 + \ldots + a^\alpha) = a(\varepsilon_0 + \ldots a^\beta)$, c'est impossible car le membre de droite est divisible par a et non celui de gauche, car $q(N') < a$.

3^e *cas* $q(N)$ et $q(N') < a$

alors $\Sigma\, q(N')\, \varepsilon_i\, a^i$ est la décomposition en base a d'un entier ainsi que $\Sigma\, q(N)\varepsilon_i a^i$, on en déduit $q(N) = q(N')$ et $N = N'$, ce cas est donc impossible.

Par suite, nous avons montré par l'absurde que $\gamma > a$ et donc le théorème.

Tous ces résultats permettent de résoudre le problème des n usines : lorsque n est supérieur ou égal à 14 on utilise alors la base $a = n - 1$.

Cette solution dépend du nombre d'usines, nous allons maintenant donner une solution générale.

Solution indépendante du nombre d'usines

Considérons une suite S, croissante, d'entiers $(a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots)$ et l'ensemble $\mathbf{N}(S)$ des entiers de la forme $\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon_i a_i$, où les ε_i sont égaux à 0 ou à 1, un nombre fini d'entre eux étant dans ce dernier cas.

On impose à S les conditions suivantes.

*CN*1 « tout entier N de $\mathbf{N}(S)$ s'écrit de façon unique $N = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon_i a_i$ ».

*CN*2 « l'application φ de $\mathbf{N}(S)$ dans φ qui à $N = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon_i a_i$ associe $\dfrac{\sum_{i=0}^{n} \varepsilon_i a_i}{\sum_{i=0}^{n} \varepsilon_i}$ est injective. »

Si on connaît une telle suite S, alors le problème est globalement résolu en faisant les 3 pesées suivantes :

1re pesée : une pièce, juste (d'où P).

2^e pesée : n pièces une de chaque usine, d'où $q\varepsilon$.

3^e pesée : a_0 pièces de la première usine

a_i pièces de l'usine n° $(i + 1)$

a_{n-1} pièces de la n^{eme} usine

en soustrayant $P \cdot \sum_{i=0}^{n-1} a_i$ et en divisant par $q\varepsilon$, comme $q = \Sigma\varepsilon_i$, on obtient le quotient $\dfrac{\sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon_i a_i}{\sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon_i}$ comme φ est injective on en déduit le numérateur qui s'écrit de façon unique $\sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon_i q_i$, d'où ε_i $\forall_i$. Il reste donc à trouver de telles suites.

Lemme 1

« Une condition suffisante pour que S vérifie $CN1$ est :
$\forall n \; v_n > (a_{n-1} + \dots a_i + a_0)$. »

Démonstration .

Supposons que N s'écrive de deux façons différentes :

$$N = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon_i a_i = \sum_{i=0}^{p} \varepsilon'_i a_i \text{ avec } \varepsilon_n = \varepsilon'_p = 1$$

si on avait $n < p$ on aurait

$$N = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon_i a_i \leqslant \sum_{i=0}^{n} a_i < a_p \leqslant \sum_{i=0}^{p} \varepsilon'_i a_i = N$$

d'où une contradiction; de même $p < n$ est impossible et $n = p$ et $\varepsilon_n = \varepsilon'_n = 1$; la démonstration s'achève alors par récurrence après soustraction de a_i aux deux membres.

Lemme 2

« Une condition suffisante pour que φ soit injective est :
$\forall n \; a_n > (n + 1)(a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_0)$ »

Remarquons tout de suite que cette condition entraîne celle du lemme 1 et par suite CN1 et CN2.

Démonstration du lemme 2.

Nous allons faire la démonstration par récurrence : en supposant que φ est injective sur la partie de $\mathbf{N}(S)$ constituée des N s'écrivant $\sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon_i a_i$ nous allons en déduire qu'elle l'est aussi sur la partie de $\mathbf{N}(S)$ formée des sommes

$$\sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon_i a_i$$

Supposons, en effet que l'on ait une égalité du type $\dfrac{\sum_{i=0}^{n} \varepsilon_i a_i}{\sum_{i=0}^{n} \varepsilon_i} = \dfrac{\sum_{i=0}^{n} \varepsilon'_i a_i}{\sum_{i=0}^{n} \varepsilon'_i}$ avec ε_n ou $\varepsilon'_n = 1$ (sinon, si $\varepsilon_n = \varepsilon'_n = 0$, c'est en contradiction avec l'hypothèse de récurrence).

Posons $p = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon_i \qquad q = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon'_i$ il vient :

$$q \sum_{i=0}^{n} \varepsilon_i a_i = p \sum_{i=0}^{n} \varepsilon'_i a_i$$

d'où

$$\sum_{i=0}^{n} (\varepsilon \cdot q - p\varepsilon'_i) a_i = 0$$

Posons $\lambda_i = \varepsilon \cdot q - p\varepsilon'_i$, λ_i est un entier relatif qui vaut q ou $(q - p)$ ou encore $(-p)$, ou zéro.

$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i a_i = 0$ nous conduit à

$$\lambda_n a_n = -\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i a_i$$

or $|\lambda_i| \leqslant n + 1$ et $|\lambda_n| \geqslant 1$

Si bien qu'on en déduit une contradiction avec l'hypothèse $a_n > (n + 1)(a_{n-1} + \ldots + a_0)$ C.Q.F.D.

La suite donnée par l'exploitation stricte de la condition du lemme 2, c'est-à-dire définie par la relation $a_n = 1 + (n + 1)(a_{n-1} + \ldots a_0)$ est

$$\boxed{a_n = \frac{(n + 1)^2 a_{n-1} - 1}{n}}$$

dont les premiers termes pour $a_0 = 1$ sont :

$$a_0 = 1, a_1 = 3, a_2 = 13, a_3 = 69, a_n = 431, a_5 = 3\,103.$$

Les 50 premiers termes sont listés en annexe.

On peut montrer que l'ordre de croissance de la suite $a_n = \dfrac{(n + 1)^2 a_{n-1} - 1}{n}$ est $a_n \simeq (n + 2)a_{n-1}$.

CONCLUSION

Nous avons donc une solution globale de ce problème de pesées; cette solution globale est d'ailleurs bien meilleure quant au nombre de pièces utilisées que les solutions particulières (pour $n \geqslant 14$). Cependant un problème reste à résoudre : celui de l'injectivité de l'application φ pour une suite géométrique de base a, avec $a > 2$.

ANNEXE

Les 50 premiers termes de la suite.

$$a_n = \frac{1}{n}[(n+1)^2 a_{n-1} - 1]$$

1
3
13
69
431
3103
25341
231689
2345851
26065011
315386633
4128697741
58145826519
876660153671
14089181041141
240455356435473
4343224875615731
82776756452911579
1660133837750060001
34950186057896000021
770651602576606800463
17761684554622747210671
427087778608883330656589
10695763499074643411225881
278535507788402172167340651
7531600130598394735404891203
211174480584854990850390987961
6131881214019493067655797576349
184175432178228345353518777203911
5715789274496741752350582740811031
183095783093045627466963667130646693
6048067157654152339553896617476845601
205823285458917871805443544263508901859
7210052060318456357790689005109584562091
259773934526179677596870412684095326134161
9619057689883681776158401566816786933424933
365791388262521120876690326249227258662742591
14275750395975148609349752191996869229972981119
571405693481005290390025607474401002599708007421
23442284860759191400616435178436964209218790048041
985162021273405018610905688373813420892419651768923
42385995256738693971454576446131874986688494285862931
1865992981659758217933797901164234210723500617489537129
84013079360309114184182156666371103068853423150226601901
3866511038741499005067474255668215538964276860891110655671
181811941288378042104950567222087646232186885281013114386663
8730925615348415108909473978121556750584800643168651514785621
428001119526866987466541022246639718156327248550224959363107889
21408972666333492435565937383628790901944619245189377654808792531
1092294523792525124263568233858611780711460165570886615041264925051