REVUE FRANÇAISE D'INFORMATIQUE ET DE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE. SÉRIE VERTE

C. HENRY

Quasi-noyau pour une économie d'échanges comprenant des biens indivisibles

Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle. Série verte, tome 4, nº V3 (1970), p. 53-66

<http://www.numdam.org/item?id=RO_1970__4_3_53_0>

R.I.R.O.
(4e année, V-3, 1970, p. 53-66)

QUASI-NOYAU POUR UNE ECONOMIE D'ECHANGES COMPRENANT DES BIENS INDIVISIBLES

par C. HENRY (1)

Résumé. — *L'auteur considère une économie d'échanges où sont disponibles des biens tant indivisibles que divisibles. Le noyau d'une pareille économie peut être vide, même dans des cas satisfaisant des conditions sévères. D'où l'intérêt d'introduire la notion de quasi-noyau, lequel jouit de propriétés très proches de celles du noyau, dès que le nombre de participants à l'économie est grand.*

Il est démontré, dans une seconde partie de l'article, que, sous des hypothèses raisonnables, le quasi-noyau n'est pas vide ; la démonstration se fonde sur un théorème, dû à H. E. Scarf, relatif au noyau d'un jeu balancé à n joueurs. Dans une troisième et dernière partie, la demande en excès qui peut apparaître au sein du quasi-noyau est interprétée en termes de crédit.

Depuis longtemps déjà, G. Debreu [1] et L. W. McKenzie [5] ont établi l'existence d'un équilibre concurrentiel pour certaines économies comprenant un nombre fini d'agents consommateurs ou producteurs. Ces deux auteurs supposent notamment que l'ensemble des consommations possibles de chaque agent est convexe ; les économies qu'ils considèrent ne peuvent donc comporter que des biens infiniment divisibles.

Dans un précédent article [2], nous avons montré que, sous certaines conditions, une économie d'échanges ne comportant que deux biens, dont l'un est infiniment divisible et l'autre n'est disponible que par valeurs entières, possède un équilibre concurrentiel. Cette propriété n'est plus vraie, même sous des conditions très restrictives, lorsque le nombre des biens disponibles excède deux ; il n'est alors même plus vrai — nous le montrons sur un contre-exemple dans la première partie du présent article — que le noyau de l'économie comporte au moins un élément.

---

(1) Laboratoire d'Économétrie de l'Ecole Polytechnique.

Aux professeurs R. J. Aumann, E. Malinvaud et J. C. Milleron, dont les critiques et suggestions ont grandement contribué à améliorer son travail, l'auteur exprime toute sa reconnaissance.

Dans la seconde partie, nous nous intéressons, pour une économie d'échanges comportant un bien divisible et un nombre quelconque m de biens disponibles seulement par valeurs entières, aux allocations jouissant des propriétés suivantes :

1) elles ne peuvent être bloquées par aucune coalition de consommateurs ;

2) elles réalisent l'équilibre emplois = ressources pour chacun des m biens indivisibles ;

3) la quantité de bien divisible que chacune d'entre elles répartit entre tous les consommateurs excède les ressources totales en ce bien d'un montant inférieur à une borne dépendant de m, mais non des ressources totales ni du nombre de consommateurs ; lorsque ce dernier croît, l'excès des emplois sur les ressources en bien divisible peut donc, pour ces allocations, devenir arbitrairement petit par rapport à la taille de l'économie.

Nous appelons quasi-noyau l'ensemble des allocations jouissant des trois propriétés énoncées au paragraphe précédent ; le théorème central de la seconde partie peut alors être résumé dans les termes suivants : dès qu'elle satisfait certaines conditions — que nous précisons et discutons — notre économie d'échanges possède un quasi-noyau non vide. Pour le montrer, nous utilisons un théorème d'existence relatif au noyau d'un jeu balancé, théorème dû à H. E. Scarf [6]. La troisième partie de notre article est un essai d'interprétation des propriétés particulières du bien divisible, et de la manière dont on peut envisager de combler le déficit de la balance emplois-ressources en ce bien.

PREMIERE PARTIE

Nous considérons ici une économie d'échanges E entre trois consommateurs, dans laquelle sont disponibles un bien infiniment divisible B et deux biens $K^{(1)}$ et $K^{(2)}$ disponibles seulement par valeurs entières. Chaque consommateur a le même ensemble de consommations possibles

$$X = \{ x \in R^3 \mid x \geqslant 0, x_{K^{(1)}} \in N_+, x_{K^{(2)}} \in N_+ \}$$

1.1. Caractéristiques respectives des trois consommateurs

1.1.1. Le premier consommateur a pour ressources initiales les coordonnées du vecteur $\omega_1 = (b_1, 1, 2)$, avec $b_1 \geqslant 3\sqrt{2}$; son préordre des préférences est tel que la classe d'indifférence du point $P_1(u_1) = (b_1 + a + \sqrt{2} + u_1, 0, 0)$ est la réunion de

1° tous les points $x \in X$ tels que $x_{K^{(1)}} \leqslant x_{K^{(2)}}$ et satisfaisant à l'équation

$$x_B + (\sqrt{2} - a)x_{K^{(1)}} + ax_{K^{(2)}} = b_1 + a + \sqrt{2} + u_1 ;$$

2° tous les points $x \in X$ tels que $x_{K^{(1)}} \geqslant x_{K^{(2)}}$ et satisfaisant à l'équation

$$x_B + ax_{K^{(1)}} + (\sqrt{2} - a)x_{K^{(2)}} = b_1 + a + \sqrt{2} + u_1,$$

où $0 < a < \frac{\sqrt{2}}{2}$

Désignons par d la droite d'équations $x_{K^{(1)}} = x_{K^{(2)}} = 0$; à tout point x de X, nous pouvons faire correspondre l'unique point $P_1(u_1)$, appartenant à d, qui soit indifférent à x ; donc une et une seule valeur de u_1, qui apparaît ainsi comme une fonction d'utilité définissant sur X le préordre des préférences du premier consommateur.

1.1.2 Le deuxième consommateur a pour ressources initiales les coordonnées du vecteur $\omega_2 = (b_2, 2, 1)$, avec $b_2 \geqslant 3\sqrt{2}$; son préordre des préférences est tel que la classe d'indifférence du point $P_2(u_2) = b_2 + a + \sqrt{2} + u_2, 0, 0)$ est la réunion de

1° tous les points $x \in X$ tels que $x_{K^{(1)}} \leqslant x_{K^{(2)}}$ et satisfaisant à l'équation

$$x_B + (\sqrt{2} - a)x_{K^{(1)}} + ax_{K^{(2)}} = b_2 + a + \sqrt{2} + u_2 ;$$

2° tous les points $x \in X$ tels que $x_{K^{(1)}} \geqslant x_{K^{(2)}}$ et satisfaisant à l'équation

$$x_B + ax_{K^{(1)}} + (\sqrt{2} - a)x_{K^{(2)}} = b_2 + a + \sqrt{2} + u_2$$

u_2 apparaît comme une fonction d'utilité définissant sur X le préordre des préférences du deuxième consommateur.

1.1.3 Le troisième consommateur a pour ressources initiales les coordonnées du vecteur $\omega_3 = (b_3, 1, 1)$, avec $b_3 \geqslant 3\sqrt{2}$; son préordre des préférences est tel que la classe d'indifférence du point $P_3(u_3) = (b_3 - 2a + 2\sqrt{2} + u_3, 0, 0)$ est la réunion de

1° tous les points $x \in X$ tels que $x_{K^{(1)}} + x_{K^{(2)}} \leqslant 3$ et satisfaisant à l'équation

$$x_B + (\sqrt{2} - a)(x_{K^{(1)}} + x_{K^{(2)}}, = b_3 - 2a + 2\sqrt{2} + u_3 ;$$

2° tous les points $x \in X$ tels que $x_{K^{(1)}} + x_{K^{(2)}} \geqslant 3$ et satisfaisant à l'équation

$$x_B + a(x_{K^{(1)}} + x_{K^{(2)}}) = b_3 + 4a - \sqrt{2} + u_3$$

u_3 apparaît comme une fonction d'utilité définissant sur X le préordre des préférences du troisième consommateur.

1.2. Le noyau de E est vide

Considérons l'un quelconque des trois consommateurs, et supposons qu'il dispose du complexe de biens $(x_B, x_{K^{(1)}}, x_{K^{(2)}})$ conférant la valeur u à sa fonction d'utilité. On voit immédiatement qu'en ajoutant ou retranchant une quantité quelconque à x_B, sans modifier $x_{K^{(1)}}$ ni $x_{K^{(2)}}$, on augmente ou diminue u de la même quantité. L'économie E est par conséquent un jeu à utilité transférable pour lequel on calcule sans difficulté que

1° aux ressources initiales de chacun des trois joueurs correspond la valeur nulle de sa fonction d'utilité ;

2° avec leurs seules ressources initiales, deux quelconques des trois joueurs peuvent, au mieux, faire en sorte que la somme de leurs fonctions d'utilité atteigne $\sqrt{2} - 2a$;

3° aucune allocation assurant l'équilibre emplois = ressources pour chacun des trois biens ne permet à la somme des fonctions d'utilité des trois joueurs de dépasser $\sqrt{2} - 2a$

Nous avons donc affaire à un jeu à trois joueurs essentiel (1) et de somme constante ; or on sait que, pour tout jeu de ce type, le noyau est vide (voir par exemple à ce sujet R. D. Luce and H. Raiffa [4], pages 194 et 195).

DEUXIEME PARTIE

Soit une économie d'échanges E dans laquelle $1 + m$ biens, B, $K^{(1)}$, ..., $K^{(m)}$, sont disponibles ; B est infiniment divisible, alors que $K^{(1)}$, ..., $K^{(m)}$ ne sont disponibles que par valeurs entières. n consommateurs participent aux échanges, avec $n > m$. Soient $\omega = (b, k^{(1)}, ..., k^{(m)}) \gg 0$ le vecteur des ressources initiales totales et, $\forall\, i \in \{ 1, ..., n \}$, $\omega_i = (b_i, k_i^{(1)}, ..., k_i^{(m)}) > 0$ (2) le vecteur des ressources initiales du consommateur i. Désignons par X l'ensemble des consommations possibles pour i, avec

$$X = \{ x \in R^{1+m} \mid x_B \geqslant 0 \text{ et}, \forall\, r \in \{ 1, ..., m \}, x_{K^{(r)}} \in N_+ \}.$$

Les préférences de chaque consommateur i s'expriment à travers un préordre $\overset{i}{\geqslant}$ complet sur X (3) dont on suppose qu'il vérifie les quatre hypothèses suivantes :

Hypothèse 1 : *continuité :* $\forall\, x \in X$, $\{ z \in X \mid z \overset{i}{\geqslant} x \}$

et $\{ z \in X \mid x \overset{i}{\geqslant} z \}$ sont fermés

pour la topologie induite sur X par la norme euclidienne dans R^{1+m}.

---

(1) « Essentiel » signifiant qu'il existe au moins une coalition de joueurs susceptible d'assurer il chacun de ses membres un niveau d'utilité supérieur à celui que, réduit à ses seules ressources, à est capable d'atteindre.

(2) Puisque $K^{(1)}$, ..., $K^{(m)}$ sont indivisibles, il n'est pas réaliste de supposer $\omega_i \gg 0$.

(3) Deux consommateurs différents peuvent évidemment avoir des préordres différents.

Hypothèse 2 : *convexité* : $\forall\, x \in X,\ \delta_i(x) = \widehat{\delta_i(x)} \cap X$

$$\text{où} \begin{cases} \delta_i(x) = \{ z \in X \mid z \overset{i}{\geqslant} x \} \\ \widehat{\delta_i(x)} \end{cases}$$

désigne le plus petit convexe fermé dans R^{1+m} contenant $\delta_i(x)$.

Remarque : de l'hypothèse 2, il résulte que, $\forall\, x \in X$, $\{ z \in X \mid z \overset{i}{\geqslant} x \}$ est fermé pour la topologie induite sur X par la norme euclidienne dans R^{1+m} ; il y a donc redondance avec une partie de l'hypothèse précédente ; si nous n'avons pas cherché à éliminer cette redondance, c'est pour conserver à l'hypothèse 1 une forme traditionnelle.

Hypothèse 3 : *désirabilité du bien divisible B :*

$$\forall\, x \in X, \forall\, z \in X \text{ tels que } \begin{cases} \forall\, r \in \{ 1, \ldots, m \},\ x_{k^{(r)}} = z_{K^{(r)}} \\ x_B \geqslant z_B \end{cases}$$

on a $x \overset{i}{\geqslant} z$.

Hypothèse 4 : *substituabilité du bien divisible aux biens indivisibles :*

$$\left.\begin{matrix} \forall\, s \in \{ 1, \ldots, m \} \\ \forall\, x \in X, \forall\, z \in X \end{matrix}\right\} \text{tels que} \begin{cases} x_B = z_B \\ \forall\, r \in \{ 1, \ldots, m \},\ r \neq s,\ x_{K^{(r)}} = z_{K^{(r)}} \\ z \overset{i}{\geqslant} x \end{cases}$$

$$\exists\, x^* \in X \qquad \text{tel que} \begin{cases} x^*_B \leqslant x_B + \beta \\ \forall\, r \in \{ 1, \ldots, m \},\ x^*_{K^{(r)}} = x_{K^{(r)}} \\ x^* \overset{i}{\geqslant} z \end{cases}$$

où β est un scalaire positif indépendant de s, x et z. Cette hypothèse signifie que la perte d'utilité qui, pour un consommateur i, peut résulter d'une variation du nombre des unités qui lui sont attribuées d'un quelconque $K^{(s)}$ des biens indivisibles peut toujours être compensée par une variation, au plus égale à β, de la quantité qui lui est attribuée du bien divisible B.

Désignons par S le parallélipipède

$$S = \{ x \in R^{1+m} \mid 0 \leqslant x_B \leqslant b \text{ et}, \forall\, r \in \{ 1, \ldots, m \}, 0 \leqslant x_{K^{(r)}} \leqslant k^{(r)} \}$$

Lemme 1 : la restriction à $X \cap S$ du préordre $\overset{i}{\leqslant}$ est définie par une fonction d'utilité u_i, continue sur $X \cap S$.

Considérons en effet l'ensemble fini $\{x \in X \cap S \mid x_B = 0\}$; en vertu de l'hypothèse 3, cet ensemble contient un point x_0 tel que

$$\forall\, x \in X \cap S,\ x \overset{i}{\geqslant} x_0$$

En vertu d'un théorème dû à G. Debreu [1], la restriction du préordre $\overset{i}{\leqslant}$ à l'ensemble connexe

$$E_0 = \{ x \in X \cap S \mid \forall\, r \in \{1, \ldots, m \},\ x_{K^{(r)}} = x_{0k^{(r)}} \}$$

est définie par une fonction d'utilité u_i, continue sur E_0. Deux cas peuvent alors se présenter :

1° $\forall\, x \in X \cap S,\ x \overset{i}{\leqslant} x'_0 = (b, x_{0K^{(1)}}, \dots, x_{0K_{(m)}})$;
alors le lemme est démontré ;

2° $\exists\, x \in X \cap S$ tel que $x \overset{i}{>} x'_0$; considérons alors l'ensemble $\{ x \in (X \cap S) - E_0 \mid x \overset{i}{\geqslant} x'_0 \}$; en vertu des hypothèses 1 et 3, cet ensemble est la réunion d'un nombre fini de segments (1) et contient un point x_1 tel que

$$\forall\, x \in \{ x \in (X \cap S) - E_0 \mid x \overset{i}{\geqslant} x'_0 \},\ x \overset{i}{\geqslant} x_1.$$

En vertu du théorème de G. Debreu déjà cité, la restriction du préordre $\overset{i}{\leqslant}$ à l'ensemble connexe

$$E_1 = \{ x \in X \cap S \mid x \overset{i}{\geqslant} x_1 \text{ et}, \forall\, r \in \{ 1, \dots, m \}, x_{K^{(r)}} = x_{1K^{(r)}} \}$$

est définie par une fonction d'utilité u_i, continue sur E_1, qu'on peut choisir de telle manière que

— si $x_1 \overset{i}{\sim} x'_0$, $u_i(x_1) = u_i(x'_0)$

— si $x_1 \overset{i}{>} x'_0$, $u_i(x_1) > u_i(x'_0)$.

Deux cas peuvent alors se présenter :

1° $\forall\, x \in X \cap S,\ x \overset{i}{\leqslant} x'_1 = (b, x_{1K^{(1)}}, \dots, x_{1K_{(m)}})$;

alors le lemme est démontré ;

2° $\exists\, x \in X \cap S$ tel que $x \overset{i}{>} x'_1$; considérons alors l'ensemble $\{ x \in (X \cap S) - (E_0 \cup E_1) \mid x \overset{i}{\geqslant} x'_1 \}$, et refaisons à son endroit le raisonnement déjà fait à propos de l'ensemble

$$\{ x \in (X \cap S) - E_0 \mid x \overset{i}{\geqslant} x'_0 \}.$$

On peut ainsi, puisque $\{x \in X \cap S \mid x_B = 0\}$ est fini, définir de proche en proche u_i en tout point de $X \cap S$, comme fonction d'utilité, continue sur $X \cap S$, engendrant le préordre $\overset{i}{\leqslant}$. Q.E.D.

$$\forall\, i \in \{ 1, \dots, n \}, \forall\, y \in S, \text{ définissons}$$

$$\Delta_i(y) = \{ x \in X \cap S \mid y \in \delta_i(x) \cap S \}.$$

Lemme 2 : $\forall\, i \in \{1, \dots, n\}, \forall\, y \in S, \Delta_i(y) \neq \varnothing$.

Tout point y dans S s'écrit en effet comme combinaison linéaire finie de points de $X \cap S$:

$$y = \sum_{j=1}^{\varphi} t_j x_j$$

(1) Nous réservons le terme segment aux intervalles fermés de la droite.

avec, $\forall\, j \in \{1, \ldots, \nu\},\ \ 0 < t_j \leqslant 1$

$$\text{et} \sum_{j=1}^{\nu} t_j = 1.$$

De l'ensemble $\{x_1, \ldots, x_\nu\}$, extrayons x_{j_0} tel que, $\forall\ j \in \{1, \ldots, \nu\}$, $x_{j_0} \overset{i}{\leqslant} x_j$; on a alors

$$\forall\ j \in \{ 1, \ldots, \nu \},\ x_j \in \delta_i(x_{j_0}) \cap S,$$

donc $y \in \widehat{\delta_i(x_{j_0}) \cap S}$,

donc $x_{j_0} \in \Delta_i(y)$. Q.E.D.

Lemme 3: $\forall\ i \in \{1, \ldots, n\}$, $\forall\ y \in S$, $\Delta_i(y)$ est fermé.

Considérons en effet une suite quelconque de points x_n appartenant tous à $\Delta_i(y)$, et supposons qu'elle converge vers un point x_0 ; il suffit de démontrer que

$$y \in \widehat{\delta_i(x_0) \cap S}$$

— S'il existe un point x_n de la suite tel que $x_n \overset{i}{\geqslant} x_0$, le résultat est immédiat.

— Si, par contre, pour tout point x_n de la suite, $x_n \overset{i}{<} x_0$, nous allons montrer que

$$\bigcap_n \widehat{\delta_i(x_n) \cap S} \subset \widehat{\delta_i(x_0) \cap S}\ ;$$

puisque, pour tout point x_n de la suite,

$y \in \widehat{\delta_i(x_n) \cap S}$, il en résultera que $y \in \widehat{\delta_i(x_0) \cap S}$.

Remarque : nous pouvons, sans restreindre la généralité du raisonnement, supposer que la suite des points x_n est strictement croissante par rapport au préordre $\overset{i}{\geqslant}$; c'est ce que nous ferons dans la suite de la démonstration.

Montrons qu'on a bien

$$\bigcap_n \widehat{\delta_i(x\ ) \cap S} \subset \widehat{\delta_i(x_0) \cap S}.$$

Considérons à cet effet un point $x_1 = (0, x_{1K(1)}, \ldots, x_{1K(m)})$. appartenant à $X \cap S$, et le point correspondant $x_1' = (b, x_{1K(1)}, \ldots, x_{1K(m)})$. En vertu des hypothèses 1 et 3, l'intersection de l'ensemble $\delta_i(x_0)$ avec le segment $[x_1, x_1']$ est elle-même, pour autant qu'elle ne soit pas vide, un segment, dont l'extrémité inférieure est la limite des extrémités inférieures des intersections (elles aussi des segments) de $[x_1, x_1']$ avec les ensembles $\delta_i(x_n)$; il en résulte que, ε étant un nombre positif aussi petit que l'on veut, pour tout n suffisamment grand, tout point appartenant à $[x_1, x_1'] \cap \delta_i(x_n)$ est distant de moins de $\varepsilon/2$ d'un point appartenant à $[x_1, x_1'] \cap \delta_i\,(x_0)$. Comme, en outre, il n'y a dans S qu'un nombre fini de segments tels que $[x_1, x_1']$; il existe donc un entier positif n_0 tel que, $\forall\, n \geqslant n_0$, tout point appartenant à $\delta_i(x_n) \cap S$ est distant de moins de $\varepsilon/2$ d'un point, de mêmes coordonnées $K^{(1)}, \ldots, K^{(m)}$, appartenant à $\delta_i(x)_0 \cap S$; plus généralement, tout point appartenant à $\delta_i(x_n) \cap S$ est distant de $\varepsilon/2$, ou moins de $\varepsilon/2$, d'un appartenant à $\delta_i(x_0) \cap S$.

Appliquons le résultat précédent à un point z quelconque dans $\bigcap \overline{\delta_i(x_n) \cap S}$: il existe dans $\overline{\delta_i(x_0) \cap S}$ un point dont la distance à z est inférieure à ε. Comme ε peut être choisi aussi proche de 0 que l'on veut, cela revient à dire que tout voisinage de z contient un point de $\overline{\delta_i(x_0) \cap S}$, donc que z est adhérent à $\overline{\delta_i(x_0) \cap S}$. Mais $\overline{\delta_i(x_0) \cap S}$ est fermé ; donc

$$z \in \overline{\delta_i(x_0) \cap S}$$

et

$$\bigcap_n \overline{\delta_i(x_n) \cap S} \subset \overline{\delta_i(x_0) \cap S}. \quad \text{Q E.D.}$$

Comme l'ensemble $\Delta_i(y)$ est non vide et fermé, et que toute fonction continue sur un compact y atteint sa borne supérieure, $\Delta_i(y)$ continet un point w tel que

$$\forall\, x \in \Delta_i(y),\ w \overset{i}{\geqslant} x.$$

Nous sommes donc en mesure de prolonger à S la fonction d'utilité u_i définie sur $X \cap S$, et donc le préordre $\overset{i}{\leqslant}$, en posant $u_i(y) = u_i(w)$.

Remarque : il s'agit bien d'un prolongement puisque, en vertu de l'hypothèse 2, $\forall\, w \in x \cap S, \Delta_i(w) = \{x \in X \cap S \mid w \in \overline{\delta_i(x)}\}$.

Lemme 4 : $\forall\, w \in X \cap S,\ \{ y \in S \mid y \geqslant w \} = \overline{\delta_i(w) \cap S}$

En effet : 1° $\forall\, y \in \overline{\delta_i(w) \cap S}$, on a $w \in \Delta_i(y)$
donc $u_i(w) \leqslant u_i(y)$.

2° $\forall\, y$ tel que $u_i(y) \geqslant u_i(w)$,
$\exists\, x \in \Delta_i(y)$ tel que $u_i(y) = u_i(x)$
donc que $u_i(x) \geqslant u_i(w)$;

$$\Rightarrow \delta_i(x) \subset \delta_i(w)$$
$$\Rightarrow \delta_i(x) \cap S \subset \delta_i(w) \cap S$$
$$\Rightarrow \overline{\delta_i(x) \cap S} \subset \overline{\delta_i(w) \cap S}.$$

Or $y \in \overline{\delta_i(x) \cap S}$, donc $y \in \overline{\delta_i(w) \cap S}$. Q.E.D.

Corollaire : $\forall\, z \in S,\ \{ y \in S \mid y \overset{i}{\geqslant} z \}$ est convexe.

En effet, $\exists\, x \in X \cap S$ tel que $x \overset{i}{\sim} z$; donc

$$\{ y \in S \mid y \overset{i}{\geqslant} z \} = \{ y \in S \mid y \overset{i}{\geqslant} x \} = \overline{\delta_i(x) \cap S}.$$

De ce corollaire, il résulte que la fonction d'utilité u_i est quasi-concave sur S.

Considérons maintenant l'économie d'échanges E_S, dans laquelle $1 + m$ biens $B, K^{(1)}, \dots, K^{(m)}$, tous infiniment divisibles, sont disponibles. Les participants à E_S sont les participants à E, et chacun y dispose des mêmes ressources initiales dont il dispose dans E ; nous continuerons donc à les identifier au moyen des éléments de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$. Dans E_S, pour chaque consommateur $i \in \{1, \dots, n\}$, S est l'ensemble des consommations possibles ; quant aux préférences de i, elles s'expriment au moyen de la fonction d'utilité quasi-concave u_i définie sur S. L'économie E_S est par conséquent un jeu balancé à n joueurs, dont le noyau, en vertu d'un théorème dû à H. E. Scarf [6], n'est pas vide ; soient $\{y_i \mid i = 1, \dots, n\}$ un élément de ce noyau et $C = \{j_1, \dots, j_p\} \subset \{1, \dots, n\}$ une coalition quelconque.

Lemme 5 : $\forall\, C \subset \{1, \dots, n\}$

$$\forall \left\{ x_{j_1}, \dots, x_{j_p} \;\middle|\; \begin{array}{l} \forall\, j \in C,\ x_j \in X \\ \sum_{j=j_1}^{j_p} x_j \leqslant \sum_{j=j_1}^{j_p} \omega_j \end{array} \right\},$$

$$\exists\, j \in C \text{ tel que } y_j \overset{i}{\geqslant} x_j.$$

En effet, $\forall\, j \in C$, $x_j \in S$; le lemme résulte alors immédiatement du fait que $\{y_i \mid i = 1, \dots, n\}$, en tant qu'élément du noyau de E_S, ne peut être bloqué par la coalition C. Q.E.D.

Théorème : $\exists\, \{ x_i^* \in X \mid i = 1, \dots, n \}$ **tel que**

1° $\forall\, C \subset \{1, \dots, n\}$

$$\forall \left\{ x_{j_1}, \dots, x_{j_p} \;\middle|\; \begin{array}{l} \forall\, j \in C,\ x_j \in X \\ \sum_{j=j_1}^{j_p} x_j \leqslant \sum_{j=j_1}^{j_p} \omega_j \end{array} \right\},$$

$\exists\, j \in C$ tel que $x_j \overset{j}{\geqslant} x_j^*$;

2° $$\forall\, r \in \{1, \dots, m\},\ \sum_{i=1}^{n} x_{iK^{(r)}}^* = \sum_{i=1}^{n} k_i^{(r)} = k^{(r)} ;$$

3° $$\sum_{i=1}^{n} x_{iB}^* \leqslant \sum_{i=1}^{n} b_i + (1 + m)^2 \beta = b + (1 + m)^2 \beta.$$

Remarque : il apparaît bien que l'excès de $\sum_{i=1}^{n} x_{iB}^*$ sur b est indépendant de b et de n.

Démonstration : soit $\{y_i \mid i = 1, \dots, n\}$ un élément du noyau de E_S ; on a $\sum_{i=1}^{n} y_i = \omega$. D'autre part, en vertu des lemmes 3 et 4,

$\forall\, i \in \{1, \dots, n\}, \exists\, x_i \in X \cap S$ tel que $y_i \overset{i}{\sim} x_i$,

donc que $y_i \in \delta_i(x_i) \cap S$.

Il en résulte que ω appartient au plus petit convexe fermé contenant la somme vectorielle des ensembles compacts $\delta_i(x_i) \cap S$; par conséquent, en vertu d'un théorème dû à J. H. Folkman, S. Karlin et L. S. Shapley [3] [7] [8], ω peut s'écrire

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} z_i$$

avec, pour tout consommateur i,

$$z_i \in \widehat{\delta_i(x_i) \cap S},$$

et, pour au moins $n - (1 + m)$ parmi les n consommateurs i,

$$z_i \in \delta_i(x_i) \cap S.$$

Supposons que les consommateurs i pour lesquels $z_i \notin \delta_i(x_i) \cap S$ soient au nombre de $n_0 \leqslant 1 + m$; nous pouvons, sans restreindre la généralité du raisonnement, supposer qu'ils sont identifiés par les éléments de l'ensemble $\{1, \ldots, n_0\}$.

Soit $i \in \{1, \ldots, n_0\}$; comme $z_i \in \widehat{\delta_i(x_i) \cap S}$, aussi petit que soit le nombre positif d, $\exists\, w_i \in \delta_i(x_i) \cap S$ tel que $w_{iB} < z_{iB} + d$. Considérons maintenant l'ensemble

$$E(z_i) = \{ x \in X \mid x_B = z_{iB} \text{ et}, \forall\, r \in \{ 1, \ldots, m \}, | x_{K^{(r)}} - z_{iK^{(r)}} | < 1 \} ;$$

$E(z_i) \subset S$; en vertu de l'hypothèse 4, à tout point x de $E(z_i)$, nous pouvons faire correspondre un point x'_i de X tel que

$$\forall\, r \in \{ 1, \ldots, m \}, x'_{iK^{(r)}} = x_{K^{(r)}},$$

$$\text{et } x'_{iB} \leqslant w_{iB} + m\beta \Rightarrow x'_{iB} < z_{iB} + d + m\beta \leqslant z_{iB} + (1 + m)\beta,$$

$$\text{et } x'_i \overset{i}{\geqslant} w_i \Rightarrow x'_i \overset{i}{\geqslant} x_i ;$$

désignons par $E'(z_i) \subset C$ l'ensemble de ces points x'.

Soit un ensemble $\{ x^*_i \in X \mid i = 1, \ldots, n \}$ tel que $\forall\, i \in \{ 1, \ldots, n_0 \}$, $x^*_i \in E'(z_i)$,

$$\text{et } \forall\, r \in \{ 1, \ldots, m \}, \sum_{i=1}^{n_0} x^*_{iK^{(r)}} = \sum_{i=1}^{n_0} z_{iK^{(r)}},$$

$$\text{et}, \forall\, i \in \{ n_0 + 1, \ldots, n \}, x^*_i = z_i ;$$

de la définition de $E'(z_i)$ à partir de celle de $E(z_i)$, il résulte immédiatement qu'existe au moins un pareil ensemble $\{ x^*_i \in X \mid i = 1, \ldots, n \}$. Montrons que l'ensemble $\{ x^*_i \in X \mid i = 1, \ldots, n \}$ présente bien les trois propriétés annoncées dans l'énoncé du théorème :

1° la première propriété résulte du lemme 5 et de ce que

$$\forall\, i \in \{ 1, \ldots, n \}, x^*_i \overset{i}{\geqslant} x_i \overset{i}{\sim} y_i ;$$

$$2^0 \qquad \forall\, r \in \{1, \ldots, m\},\ \sum_{i=1}^{n} x^*_{iK^{(r)}} = \sum_{i=1}^{n_0} x^*_{iK^{(r)}} + \sum_{i=n_0+1}^{n} z_{iK^{(r)}}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} z_{iK^{(r)}} + \sum_{i=n_0+1}^{n} z_{iK^{(r)}}$$

$$= \sum_{1=1}^{n} k_i^{(r)} = k^{(r)}\ ;$$

$$3^0 \quad \sum_{i=1}^{n} x^*_{iB} = \sum_{i=1}^{n_0} x^*_{iB} + \sum_{i=n_0+1}^{n} z_{iB} \leqslant$$

$$< \sum_{i=1}^{n_0} (z_{iB} + (1+m)\beta) + \sum_{i=n_0+1}^{n} z_{iB}$$

$$= b + n_0(1+m)\beta \leqslant b + (1+m)(1+m)\beta. \text{ Q.E.D.}$$

TROISIEME PARTIE

Nous nous proposons, dans cette troisième partie, d'interpréter les vecteurs $\overset{*}{x}_i$ — et, en particulier, l'excès de $\sum_{i=1}^{n} \overset{*}{x}_{iB}$ sur b — en introduisant la possibilité, pour chaque consommateur, d'obtenir du crédit en le bien divisible B.

Nous considérons ici que l'issue des échanges auxquels se livrent les n participants à l'économie E détermine, pour chacun d'entre eux, le complexe de biens qu'il peut consommer pendant une période de temps déterminée. Au terme de cette période, de nouvelles ressources seront allouées aux participants et de nouveaux échanges auront lieu entre eux, qui conduiront aux n complexes de biens qui seront consommés pendant une seconde période. Et ainsi de suite, étant entendu que le préordre des préférences d'un consommateur peut varier d'une période à une autre, et qu'existent des marchés de l'occasion pour chacun des biens indivisibles de façon qu'un consommateur puisse, au début d'une période, en revendre certains qu'il avait précédemment acquis.

Nous considérons en outre qu'aux côtés des n consommateurs existe un agent économique ayant pour seule fonction, une fois les échanges terminés, de leur consentir des prêts en bien B, à échéance d'une période et au taux d'intérêt r. Par conséquent, la quantité totale x_{iB} de bien B que le consommateur i peut consommer pendant une période est susceptible d'inclure un montant $c_i \geqslant 0$ dont, au début de la période suivante, il aura à rembourser le produit par $1 + r$; si r_i est son taux d'intérêt psychologique, le crédit c_i contribue à sa satisfaction comme le ferait la quantité

$$c_i - \frac{c_i(1+r)}{1+r_i} = c_i \frac{r_i - r}{1+r_i}$$

mise sans contrepartie à sa disposition, tous échanges terminés, pendant la période pour laquelle le crédit lui est consenti.

Dans ces conditions, pour un consommateur i auquel serait consenti le crédit c_i, nous pouvons interpréter x^*_{iB} comme une somme de deux termes :

1° la quantité $c_i \dfrac{r_i - r}{1 + r_i}$, que nous désignerons par d_i ;

2° la quantité de bien B dont, tous échanges terminés, i dispose, sans contrepartie future, pour sa consommation pendant la période considérée ; soit $x^*_{iB} - d_i$.

Pendant cette période, i peut donc consommer la quantité

$$x_{iB} = x^*_{iB} - d_i + c_i = x^*_{iB} + c_i \frac{1 + r}{1 + r_i},$$

incluant le crédit c_i, du bien B, et les quantités

$$\begin{gathered} x_{iK^{(1)}} = x^*_{iK^{(1)}} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{iK^{(m)}} = x^*_{iK^{(m)}} \end{gathered}$$

des biens $K^{(1)}, \ldots, K^{(m)}$; soit x_i le vecteur de coordonnées $x_{iB}, x_{iK^{(1)}}, \ldots, x_{iK^{(m)}}$; i retire de la consommation de x_i la même satisfaction que, libéré de toute dette, il retirerait de la consommation de x^*_i.

Supposons qu'existent un nombre positif ρ et un ensemble non vide E de consommateurs tel que

1° $$\sum_{i \in E} x^*_{iB} \geqslant \sum_{i=1}^{n} x^*_{iB} - b ;$$

2° $\forall\, i \in E, r_i \geqslant r + \rho$.

Choisissons n nombres d_i de telle manière que

1° $\forall\, i \notin E, d_i = 0$;

2° $$\forall\, i \in E, 0 \leqslant d_i \leqslant x^*_{iB} ;$$

3° $$\sum_{i=1}^{n} d_i = \sum_{i=1}^{n} x^*_{iB} - b.$$

En vertu du théorème énoncé et démontré à la fin de la 2e partie, on a

$$\sum_{i=1}^{n} x^*_{iB} - b \leqslant (1 + m)^2 \beta,$$

donc

$$\sum_{i=1}^{n} d_i \leqslant (1 + m)^2 \beta.$$

Choisissons maintenant n nombres c_i tels que

$$\forall\, i \in \{1, \dots, n\},\ d_i = c_i \frac{r_i - r}{1 + r_i}.$$

On a

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \frac{r_i - r}{1 + r_i} = \sum_{i \in E} c_i \frac{r_i - r}{1 + r_i} \geqslant \sum_{i \in E} c_i \frac{\rho}{1 + r + \rho},$$

puisque $\dfrac{x - r}{1 + x}$ est une fonction croissante de x ;

donc $$\sum_{i \in E} c_i \frac{\rho}{1 + r + \rho} \leqslant (1 + m)^2 \beta,$$

donc $$\sum_{i=1}^{n} c_i = \sum_{i \in E} c_i \leqslant \frac{(1 + m)^2 \beta (1 + r + \rho)}{\rho}.$$

Dans ces conditions, x_i étant le vecteur consommé par le consommateur i pendant la période considérée, on a les propriétés suivantes :

1° aucune coalition de consommateurs ne peut, par ses seuls moyens, assurer à chacun de ses membres, soit i, un niveau de satisfaction supérieur à celui que lui assure x_i :

2° $$\forall\, r \in \{1, \dots, m\},\ \sum_{i=1}^{n} x_{iK^{(r)}} = \sum_{i=1}^{n} x^*_{iK^{(r)}} = k^{(r)} ;$$

3° $$\sum_{i=1}^{n} x_{iB} = \sum_{i=1}^{n} x^*_{iB} - \sum_{i=1}^{n} d_i + \sum_{i=1}^{n} c_i =$$

$$= b + \sum_{i=1}^{n} c_i \leqslant b + \frac{(1 + m)^2 \beta (1 + r + \rho)}{\rho} ;$$

nous aboutissons ainsi, moyennant la masse totale de crédit

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \leqslant \frac{(1 + m)^2 \beta (1 + r + \rho)}{\rho}.$$

indépendante de b et de n, à un système $\{x_i \mid i = 1, \dots, n\}$ d'allocations stables eu égard aux préférences et aux ressources initiales des n consommateurs.

BIBLIOGRAPHIE

[1] G. Debreu, *Theory of value*. New York, Wiley, 1959.

[2] C. Henry, « Indivisibilités dans une économie d'échanges », *Econometrica* 38, 542-558, 1970.

[3] S. Karlin and L. S. Shapley, « Geometry of moment spaces », *A.M.S.*, Memoir nº 12, 1953.

[4] D. R. Luce and H. Raiffa, *Games and decisions : introduction and critical survey.* New York, Wiley, 1958.

[5] L. W. McKenzie, « On the existence of general equilibrium for a competitive market », *Econometrica*, 27, 54-71, 1959.

[6] H. E. Scarf, « The core of an *n* person game », *Econometrica*, 35, 50-69, 1967.

[7] L. S. Shapley and J. H. Folkman, *Starr's problem.* Unpublished, 1966.

[8] R. M. Starr, « Quasi-equilibria in markets with non convex preferences », *Econometrica*, 37, 25-38, 1969.