

AZEMA

**Modèle mathématique d'ordonnancement  
de fabrication en série**

*Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle. Série verte, tome 4, n° V2 (1970), p. 17-28*

[http://www.numdam.org/item?id=RO\\_1970\\_\\_4\\_2\\_17\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RO_1970__4_2_17_0)

© AFCET, 1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle. Série verte » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## MODELE MATHEMATIQUE D'ORDONNANCEMENT DE FABRICATION EN SERIE

M. AZEMA (\*)

---

Résumé. — *Les caractéristiques de la fabrication considérée sont :*

- 1) *le regroupement des pièces en lots,*
- 2) *le lancement périodique des lots d'une même pièce.*

*La première partie de l'article traite de la décomposition de l'ensemble des pièces en classes de pièces lancées avec la même cadence. La seconde partie, d'un modèle mathématique pour l'ordonnement de la fabrication des pièces d'une même classe.*

### PRESENTATION DU PROBLEME

On considère un atelier qui doit satisfaire des commandes exprimées en termes de taille de lots et de cadence (exemple : une commande de 50 unités livrable par lots de 5 unités à raison de 3 lots par mois).

La nature, le volume, le jalonnement des commandes et les cadences sont essentiellement variables. Par contre les modalités de fabrication [gamme (1) (1), temps opératoire, de préparation des machines, de transit et taux de rebus] sont fixées.

De plus, la majorité des tâches peut être affectée indifféremment à plusieurs machines (i.e. : existence de familles de machines de spécifications comparables).

### Problèmes rencontrés par les gestionnaires de ce type de fabrication

Pour les gestionnaires, le problème essentiel est de planifier la fabrication, c'est-à-dire fixer l'affectation des tâches aux machines et leur jalonnement de manière à respecter les cadences et réduire les en-cours.

Mais ils doivent aussi répondre aux questions suivantes :

— quel est (ou quel sera) le potentiel de fabrication disponible à un instant donné? Et, en conséquence, quelles quantités de tel produit peut-on lancer? avec quelles cadences?

---

(\*) S.N.I.A.S.

(1) La gamme définit la succession des opérations que subit une pièce sur différentes machines.

— quelle embauche de personnel ou achat de matériel permettrait de tirer un meilleur parti du parc de machines existant ?

**Causes de difficultés**

Outre les difficultés classiques dues aux aléas de la fabrication, la coexistence de périodicités de lancement différentes provoque des interférences systématiques entre les fabrications.

L'apparition de telles interférences lors du lancement d'une nouvelle pièce est illustrée dans l'exemple suivant.

Soit la machine *m* utilisée pour l'usinage de lots d'une pièce A. Ces lots sont lancés sur *m* avec une périodicité de 2 semaines et leur succession sur *m* est représentée par le diagramme ci-dessous.

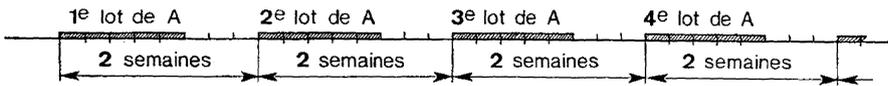


Figure 1

1<sup>er</sup> CAS : On lance sur *m* des lots d'une nouvelle pièce : B avec une périodicité de 2 semaines. Ainsi que le montre le diagramme ci-dessous les lots des pièces A et B sont exécutés avec la cadence souhaitée.

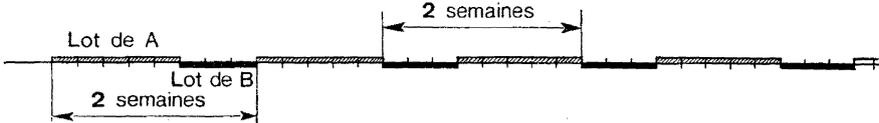


Figure 2

2<sup>e</sup> CAS : On lance des lots de B sur *m* avec une périodicité de 3 semaines. L'exécution du deuxième lot de B ne peut être réalisée à la date souhaitée puisque, à cet instant, la machine *m* est mobilisée par un lot de A.

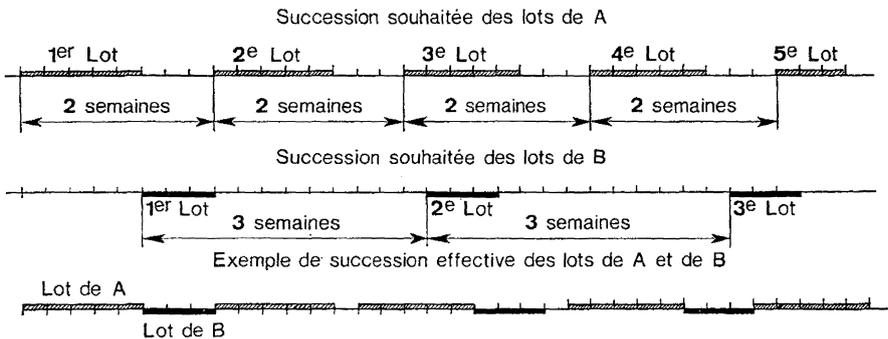


Figure 3 a b c

Dans ce deuxième cas, bien que la machine soit moins chargée que dans le premier, les cadences ne peuvent être respectées. On doit avancer ou retarder l'exécution de certains lots et, en conséquence, modifier les dates de début des usinages de lots de A ou B qui restent à effectuer sur d'autres machines.

Ainsi, bien que les moyens de production soient globalement suffisants, les interférences entraînent des surcharges locales. Et, à moins d'accepter un temps mort important entre deux tâches consécutives sur un même lot, toute nouvelle fabrication remet en question le délai des travaux en cours.

### **Principes d'un remède**

Les interférences entre deux fabrications ne peuvent être complètement résorbées que si deux produits lancés avec des périodes différentes ne sont jamais usinés par la même machine.

En premier lieu il s'agit donc d'établir les affectations des tâches aux machines de manière à éviter ces coexistences.

Mais, bien que nous ayons posé en hypothèse que le parc de machines comprenait plusieurs unités de spécifications comparables, on ne peut en général déconnecter complètement des fabrications asynchrones. Chaque fois qu'une machine est utilisée pour des fabrications de cadences différentes, on doit lui associer un stock de produits semi-finis de manière à réguler sa charge et à éviter la propagation des interférences.

Ces deux mesures, déconnection des fabrications asynchrones et création de stocks intermédiaires, permettent d'éviter les conséquences d'une commande inopinée (non respect des délais des fabrications en cours, surcharges locales...). En effet, ou bien la nouvelle commande peut être synchronisée avec une fabrication en cours ou bien on lui affecte des moyens en propre.

Toutefois ces principes ne sont acceptables que si le coût des en-cours est prépondérant devant le coût de stockage de la matière première et des produits finis et le coût de préparation des machines. En effet, compte tenu de la typologie des parcs de machines habituels, il ne semble pas possible de faire coexister dans un atelier plus de trois cadences différentes (admettre trois possibilités de cadence n'est concevable que si la majorité des familles de machines comportent au moins trois éléments). Or, choisir une cadence de lancement entre trois possibilités revient à choisir entre trois tailles de lots, et celles-ci peuvent être très différentes de la taille économique du point de vue du coût de stockage et de préparation des machines.

### **Modalités d'application de ces mesures**

La recherche d'une affectation des tâches aux machines qui déconnecte au mieux des fabrications asynchrones est un problème ardu. Jusqu'à présent les ateliers que nous avons considéré ont pu être séparés en familles

de machines identiques et nous avons résolu ce problème au moyen d'un graphe que nous décrivons dans l'exemple ci-dessous.

Soit un atelier dont le parc de machines peut être décomposé en cinq familles de machines identiques :

- la famille  $g$  constituée d'un tour vertical,
- —  $h$  — de deux tours horizontaux,
- —  $i$  — d'une perceuse,
- —  $j$  — d'une rectifieuse,
- —  $k$  — de deux fraiseuses.

Dans cet atelier sont usinées deux classes de pièces. Les premières, lancées avec la périodicité  $\theta_1$ , subissent :

- des opérations de tournage horizontal, elles mobilisent un tour,
- — — — — vertical,
- — — — — perçage,
- — — — — fraisage, elles mobilisent une fraiseuse.

Les secondes lancées avec la périodicité  $\theta_2$  subissent :

- des opérations de tournage horizontal, elles mobilisent un tour,
- — — — — de perçage,
- — — — — de fraisage, elles mobilisent une fraiseuse,
- — — — — de rectification.

Cet ensemble d'informations est représenté par le graphe ci-dessous.

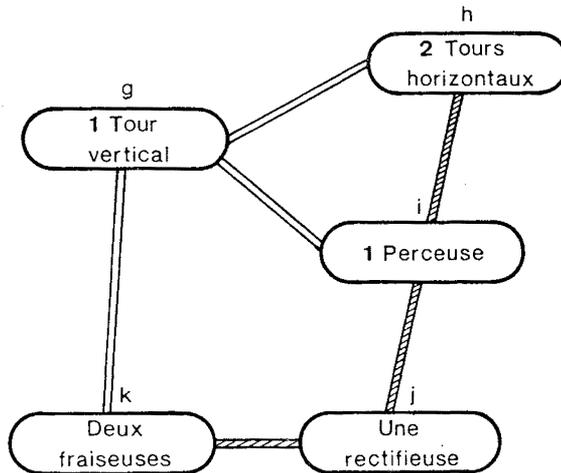


Figure 4

— les sommets représentent les familles de machines,  
 — à chaque classe de pièces est associé un ensemble d'arêtes coloriées.  
 Sur le graphe ci joint les arêtes  $\text{=====}$  correspondent aux pièces de période  $\theta_1$   
 les arêtes  $\text{|||||}$  aux pièces de période  $\theta_2$ .

— l'arête de  $l$  à  $l'$  ( $l$  et  $l' \in \{g, k, i', j', k\}$ ) de couleur  $b$  ( $b \in \{\text{=====}$   
 $\text{|||||}\}$ ) marque la relation : la fabrication dont les arêtes sont de couleur  $b$   
 fait appel aux machines de  $l$  et  $l'$ .

On peut déconnecter complètement deux fabrications si, en chaque sommet, la famille de machines associée peut être séparée en autant de sous-familles qu'il y a d'arcs incidents de couleurs différentes.

Sur l'exemple, on peut séparer  $h$  et  $k$  puisque chacune des classes de pièces ne mobilise qu'une machine de type  $h$  ou  $k$ , mais il n'est pas possible de déconnecter complètement puisque  $i$ , utilisé pour les deux fabrications, ne comporte qu'une machine.

Une fois l'affectation réalisée il s'agit d'ordonnancer les tâches relatives à un ensemble de fabrications synchrones. Nous consacrons la deuxième partie de notre exposé à cette question.

Enfin on doit fixer le niveau des stocks qui isolent les machines utilisées dans des fabrications de périodes différentes. Du fait que l'ordonnancement des tâches sur les autres machines assure des entrées et sorties en stock à date fixe, c'est, à notre avis, un problème secondaire. Sous réserve, bien sûr, de n'être pas astreint à des contraintes cumulatives comme c'est le cas pour les postes de contrôle, d'ajustage (1)... ou des contraintes spéciales telles que les limitations sur la taille des fours dans les traitements thermiques.

### Rappels préalables à la construction du modèle

#### a) Inégalités de potentiel et ordonnancement [cf. (I)]

Une inégalité de potentiel est de la forme  $\mathcal{C}_{i'} - \mathcal{C}_i \geq \mathcal{A}_{ii'}$ .  $\mathcal{C}_i$  et  $\mathcal{C}_{i'}$  sont des variables,  $\mathcal{A}_{ii'}$  une constante ou un paramètre.

Lorsque  $\mathcal{C}_i$  et  $\mathcal{C}_{i'}$  sont les dates de début de deux tâches  $i$  et  $i'$ ,

— si  $\mathcal{A}_{ii'} \geq 0$ , cette relation contraint  $i'$  à commencer au plus tôt  $\mathcal{A}_{ii'}$  heures après  $i$ ,

— si  $\mathcal{A}_{ii'} < 0$ ,  $i$  doit commencer au plus tard  $-\mathcal{A}_{ii'}$  heures après  $i'$ .

Un système d'inégalités de potentiel est souvent représenté par un graphe dont les sommets correspondent aux tâches et l'arc de  $i$  à  $i'$  de longueur  $\mathcal{A}_{ii'}$  à l'inégalité  $\mathcal{C}_{i'} - \mathcal{C}_i \geq \mathcal{A}_{ii'}$

(1) Un poste de contrôle ou d'ajustage comprend plusieurs compagnons.

EXEMPLE :

Système d'inégalité de potentiel

$$\mathcal{C}_2 - \mathcal{C}_1 \geq \mathcal{A}_{12}$$

$$\mathcal{C}_3 - \mathcal{C}_2 \geq \mathcal{A}_{23}$$

$$\mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_3 \geq \mathcal{A}_{31}$$

Un système d'inégalités de potentiel a une solution si et seulement si le graphe associé n'a pas de circuits de longueur positive.

graphe associé

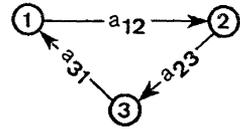


Figure 5

Les contraintes d'un problème d'ordonnancement se réduisent à un système d'inégalités de potentiel si, chaque fois que deux tâches  $i$  et  $i'$  ne peuvent être réalisées simultanément, on fixe leurs positions respectives ( $i$  avant  $i'$  ou  $i'$  avant  $i$ ) ainsi que les durées minimum ou /et maximum qui doivent séparer leurs dates de début.

Du fait qu'une machine ne peut exécuter qu'une tâche à la fois, ceci implique que l'ordre des opérations effectuées par une machine est fixé.

#### b) « En-cours »

Les « en-cours » à l'instant  $\tau$  sont l'ensemble des pièces présentes en  $\tau$  dans l'atelier. La valeur des en-cours correspond, pour chaque pièce, au montant actualisé de la matière première et du travail déjà exécuté. Par suite, cette valeur est une fonction des dates de début des tâches déjà effectuées.

Le coût des en-cours, en tant qu'immobilisation d'un capital, est lié au temps d'attente entre deux opérations consécutives sur une même pièce, et au niveau des stocks intermédiaires. Aussi a-t-on l'habitude de nommer en-cours la rubrique immobilisation d'un capital du coût de fabrication d'une pièce.

Les modèles mathématiques du coût des en-cours comportent deux termes, l'un fonction du niveau des stocks intermédiaires, l'autre des dates de début des tâches. Le plus souvent, dans ce deuxième terme n'interviennent que les durées de fabrication, (i.e. : les dates de début de la première et de la dernière opération de la gamme).

## MODELE MATHEMATIQUE D'ORDONNANCEMENT DE FABRICATIONS SYNCHRONES

Nous venons de voir que de telles fabrications sont caractérisées par une période de lancement (notée  $\theta$ ) et une affectation des tâches aux machines.

L'objectif de l'ordonnancement est la minimisation des en-cours, nous supposons que ceux-ci sont une fonction linéaire croissante des durées de fabrication (i.e. : on ne prend pas en compte le niveau des stocks intermédiaires).

### Les contraintes

Afin de limiter les contraintes de notre problème à des inégalités de potentiel et de pouvoir utiliser les résultats de la théorie correspondante, on fait les deux hypothèses suivantes :

- 1) l'ordre de passage des pièces sur les machines est fixé,
- 2) la gamme définit totalement l'ordre des opérations sur un lot de pièces.

Il est supposé, de plus, que des tâches identiques réalisées sur des lots différents incombent à la même machine, et que leurs dates de début  $\mathcal{C}_i$  sont reliées par l'égalité  $\mathcal{C}_j = \mathcal{C}_i + k_{ij} \theta$   $k_{ij} \in Z$  où  $i$  et  $j$  sont des tâches identiques exécutées sur les lots  $r$  et  $r + k_{ij}$  d'une même pièce (notation  $i \sim j$ ).

De ce fait, la succession des tâches sur les machines est la répétition d'une séquence fixée de tâches. Ainsi, sur le poste de travail  $m$  on a la suite de dates de début suivante :

$$-- \mathcal{C}_{1m}, \mathcal{C}_{2m}, ---, \mathcal{C}_{dm}, (\mathcal{C}_{1m} + \theta), \\ (\mathcal{C}_{2m} + \theta), ---, (\mathcal{C}_{dm} + \theta), (\mathcal{C}_{1m} + 2\theta) --$$

et, ces dates de début doivent satisfaire les contraintes :

$$-- \mathcal{C}_{2m} - \mathcal{C}_{1m} \geq \mathcal{A}_{12m}, ---, \mathcal{C}_{dm} - \mathcal{C}_{(d-1)m} \geq \mathcal{A}_{(d-1)dm}, \\ (\mathcal{C}_{1m} + \theta) - \mathcal{C}_{dm} \geq \mathcal{A}_{d1m}, --$$

Le jalonnement sur la machine  $m$  est donc complètement déterminé par les dates de début d'opérations exécutées pendant une période. Par la suite nous considérerons uniquement la séquence  $1m, 2m, ---, dm$  en supposant que  $0 \leq \mathcal{C}_{1m} < \theta$ . Et, pour mieux différencier les dates de début de ces tâches nous les noterons  $y$ .

En résumé, l'exécution des tâches sur la machine  $m$  est représentée par les variables  $y_{1m}, y_{2m}, ---, y_{dm}$  soumises aux contraintes.

$$0 \leq y_{1m} < \theta, y_{2m} - y_{1m} \geq \mathcal{A}_{12m}, ---, y_{1m} - y_{dm} \geq \mathcal{A}_{d1m} - \theta.$$

En ce qui concerne les gammes :

— tout d'abord on doit décomposer les gammes initiales en sous-gammes ne comportant que des opérations affectées à des « machines synchrones »,

— et, pour chacune de ces sous-gammes traduire la succession des tâches par des contraintes du type  $\mathcal{C}_{i'} - \mathcal{C}_i \geq \mathcal{A}_{ii'}$ .

De manière plus précise :

— pour le premier lot lancé et la sous-gamme  $g$  les contraintes sont :

$$\mathcal{G}_{2g}^{(1)} - \mathcal{G}_{1g}^{(1)} \geq \mathcal{A}_{12g}, \mathcal{G}_{3g}^{(1)} - \mathcal{G}_{2g}^{(1)} \geq \mathcal{A}_{23g}, \dots, \mathcal{G}_{eg}^{(1)} - \mathcal{G}_{(e-1)g}^{(1)} \geq \mathcal{A}_{(e-1)eg}$$

— et pour le  $q$  ème lot lancé :

$$\mathcal{G}_{2g}^{(q)} - \mathcal{G}_{1g}^{(q)} \geq \mathcal{A}_{12g}, \mathcal{G}_{3g}^{(q)} - \mathcal{G}_{2g}^{(q)} \geq \mathcal{A}_{23g}, \dots, \mathcal{G}_{eg}^{(q)} - \mathcal{G}_{(e-1)g}^{(q)} \geq \mathcal{A}_{(e-1)eg}$$

Du fait que

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{ig}^{(q)} &= \mathcal{G}_{ig}^{(q-1)} + \theta = \mathcal{G}_{ig}^{(q-2)} + 2\theta = \dots = \mathcal{G}_{ig}^{(1)} + (q-1)\theta \\ (\text{i.e. : } i_g^{(q)} &\sim i_g^{(q-1)} \sim \dots \sim i_g^{(1)}) \end{aligned}$$

on se borne à l'étude de l'ensemble de variables

$$(\mathcal{G}_{1g}^{(q)}, \dots, \mathcal{G}_{eg}^{(q)})$$

$q$  est choisie de manière que  $1g$  soit exécutée pendant la séquence choisie pour représenter l'ordre sur les machines :  $\mathcal{G}_{1g}^{(q)} = y_{jm}$  ( $j_m$  est l'ordre de  $1g$  sur la machine  $m$ ).

Ici encore, afin de différencier les opérations de la gamme  $q$ , on note  $t$  leurs dates de début.

### Résumé des contraintes, fonction économique

#### 1) Traduction de la périodicité

$$y_j = t_i + k_i \theta \quad i \sim j \quad (i \text{ et } j \text{ sont des usinages identiques}).$$

#### 2) Traduction des gammes

$$\begin{aligned} \frac{t_{2g} - t_{1g}}{\dots} &\geq \mathcal{A}_{12g} & t_{1g} &= y_j & j &\sim 1g \\ \frac{t_{eg} - t_{(e-1)g}}{\dots} &\geq \mathcal{A}_{(e-1)eg}. \end{aligned}$$

#### 3) Traduction de l'ordre sur les machines

$$\begin{aligned} \frac{y_{2m} - y_{1m}}{\dots} &\geq \mathcal{A}_{12m} & 0 &\leq y_{1m} < \theta \\ \frac{y_{1m} - y_{dm}}{\dots} &\geq \mathcal{A}_{d1m} - \theta. \end{aligned}$$

#### 4) Fonction économique

La durée de fabrication de chaque pièce (ou partie de pièce si  $g$  est une sous-gamme) est  $t_{eg} + (\text{durée } (e_g)) - t_{1g}$ . Les fonctions économiques considérées sont de la forme :

$$\sum_{g \in G} c(g)(t_{eg} - t_{1g}), \quad c(g) \geq \theta$$

**Graphe associé aux contraintes**

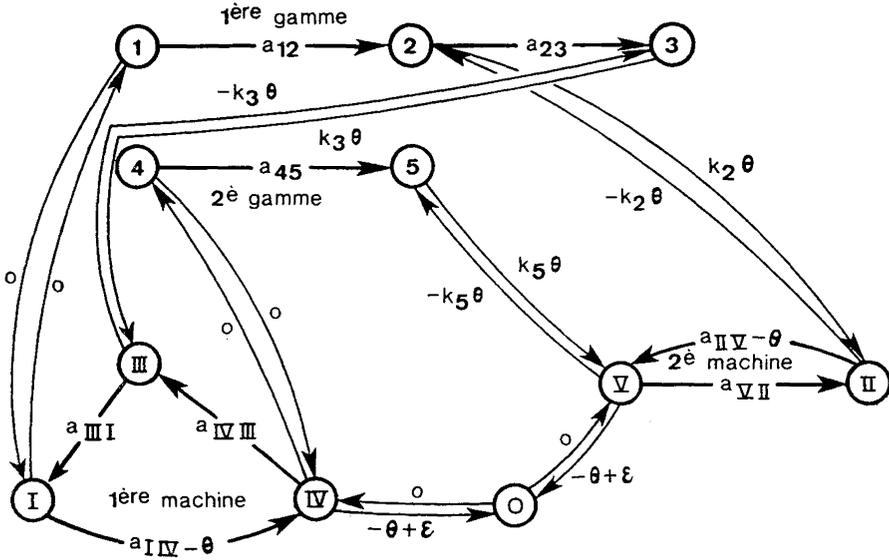


Figure 6

— O est un sommet attaché à une tâche fictive de date de début zéro.  
 $\epsilon$  est un nombre réel positif arbitrairement petit.

**Etat de la résolution du problème**

Rappelons tout d'abord que le cas  $\forall i, k_i = 0$  a été étudié par B. Roy [1], puis R. Cruon, Ph. Hervé [2] et L. Nemeti [3].

Ces auteurs ont donné des procédures pour déterminer un ordonnancement qui minimise la période ou les en-cours.

Et, dernièrement, J. Cervera et B. Sussmann [4] ont fait un bilan précis des méthodes applicables au problème général.

Pour notre part, nous avons essentiellement étudié la situation où le sous-graphe des gammes n'a pas de circuits. La raison étant que dans les problèmes pratiques qui nous ont été soumis les gammes peuvent être représentées par des chemins.

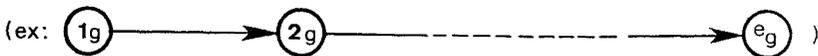


Figure 7

A titre d'exemple de la façon dont le problème a été abordé, nous allons décrire succinctement deux procédures de recherche d'une solution.

### Recherche d'une solution « à la main »

Soit la fabrication de lots de pièces A et B dont les gammes comprennent deux opérations, respectivement A1, A2, et B1, B2.

A1 et B2 sont réalisés sur la machine P, A2 et B1 sur Q.

Avec  $\theta = 12$  segments, le jalonnement des tâches sur P et Q est défini par le diagramme ci-dessous :

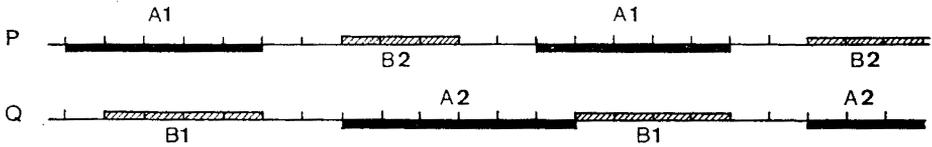


Figure 8

Une solution s'obtient en affectant ces usinages aux lots successifs de manière que les contraintes des gammes soient satisfaites.

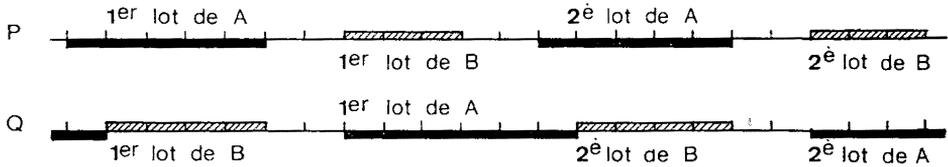


Figure 9

### Implantation sur un ordinateur :

#### Méthode dérivée de la théorie des systèmes de potentiels sur un graphe [cf. (5)]

On cherche un ensemble de nombres entiers  $k_i$  tels que le graphe associé aux contraintes n'ait pas de circuit de longueur positive. Tout système de potentiels sur ce graphe constitue un ensemble de dates de début solution de notre problème.

Or, une condition nécessaire et suffisante pour lier deux sommets  $i$  et  $j$  d'un graphe par un arc de  $i$  à  $j$  de longueur  $k_i \theta$  et un arc de  $j$  à  $i$  de longueur  $-k_j \theta$  est que  $l_{ij} \leq k_i \theta \leq -l_{ji}$  (1).

Il suffit donc de fixer les  $k_i$  dans un ordre tel que  $l_{ij} = -\infty$  à l'étape  $i$  pour obtenir une solution.

(1)  $l_{ij}$  est le plus long chemin de  $i$  à  $j$  du graphe associé aux contraintes.

Un tel ordre est donné par n'importe quel système de niveaux (i.e. : potentiels entiers) attaché aux sommets du sous-graphe des gammes.

Ainsi, pour le problème défini par le graphe ci-dessous, les  $k_i$  sont déterminés dans l'ordre  $k_2, k_3, k_4$ .

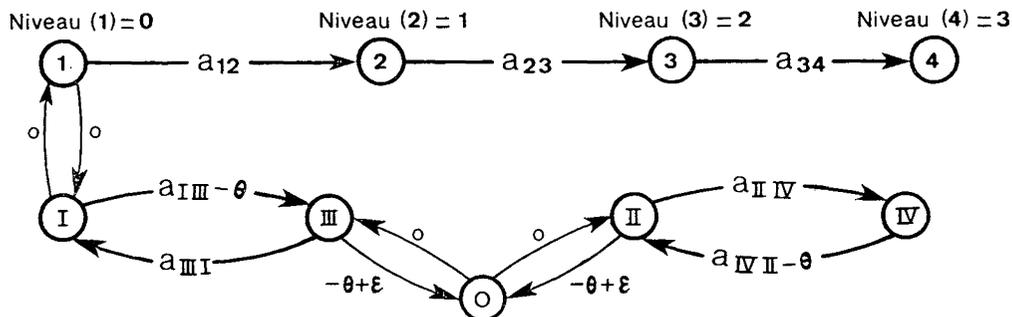


Figure 10

REMARQUE : Il y a bien sûr d'autres méthodes pour automatiser la recherche d'une solution. En particulier J. Cervera et B. Sussmann décrivent dans (4) des procédures heuristiques de construction progressive.

### Recherche de l'optimum

Cette recherche comprend trois phases :

1) *Initialisation* : à partir d'une solution et de bornes inférieures de l'optimum pour des problèmes partiels, on limite l'ensemble des cas possibles.

2) *Réduction de l'ensemble des cas possibles* au moyen de conditions nécessaires pour que  $k_i$  soit la coordonnée de rang  $i$  d'une solution meilleure que celles dont on dispose.

3) *Exploration de cet ensemble réduit de cas possible par une procédure du type S.E.P.*

### Aspects informatiques

Les difficultés résident dans la représentation des graphes en mémoire et le calcul du plus long chemin entre deux sommets. De plus, pour la phase terminale de l'optimisation, on a les difficultés habituelles de la programmation d'une procédure S.E.P.

Dans les programmes prototypes écrits jusqu'à présent, les graphes sont représentés par des matrices. Ceci a l'avantage de simplifier la programmation (exemple : le programme de recherche d'une solution comprend 50 instructions Fortran) mais, en contrepartie on ne peut

traiter que des problèmes de taille modeste (avec une mémoire de 32 000 mots, 160 tâches au maximum pour la recherche d'une solution, 60 tâches pour l'optimum).

Les temps de calcul CDC 3600 pour un problème de 35 tâches sont de 10 s pour la solution, 2 à 3 mn pour l'optimum.

Théoriquement ces temps de calcul doivent croître proportionnellement au cube du nombre de tâches.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] B. ROY, « Cheminement et connexité dans les graphes, application aux problèmes d'ordonnement », *METRA*, série spéciale n° 1, 1962.
- [2] R. CRUON et Ph. HERVÉ, « Quelques résultats relatifs à une structure algébrique et son application au problème central de l'ordonnement », *Revue française de Recherche Opérationnelle*, vol. 9, n° 34, 1965.
- [3] L. NEMETI, « Sur le problème d'ordonnement dans les fabrications en série », *Revue française d'Informatique et de Recherche Opérationnelle*, n° 11, 1968.
- [4] J. CERVERA, B. SUSSMANN, « Une classe de problème d'ordonnement de tâches répétitives », *SEMA*, note de travail n° 101 (Direction Scientifique).
- [5] M. AZEMA, « Ordonnement de fabrication en série », *Étude direction de l'informatique S.N.I.A.S.*