

A. MATHIEU

Techniques de contrôle de prévision à court terme

Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle. Série verte, tome 4, n° V1 (1970), p. 29-47

<http://www.numdam.org/item?id=RO_1970__4_1_29_0>

© AFCET, 1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle. Série verte » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

TECHNIQUES DE CONTROLE DE PREVISION A COURT TERME

par A. MATHIEU (1)

Résumé. — Deux techniques de contrôle sont présentées qui sont fondées sur la définition de variables fonctions de l'écart prévision-réalisation et sur la détermination de limites de confiance pour ces variables à un certain seuil de probabilité :

— Contrôle à partir de la définition d'un tracking signal.

— Contrôle à partir de la courbe cumulée des écarts prévision-réalisation ou courbe CUSUM.

On présente pour chaque technique ses avantages et ses inconvénients ainsi que la procédure de traitement automatique. Enfin, on analyse quelques actions correctives sur le modèle lorsque celui-ci n'est plus « sous contrôle ».

PRESENTATION

L'étude a pour objet la recherche de techniques de contrôle de la prévision. Il ne s'agit donc pas de découvrir de nouvelles techniques de prévision, mais plutôt de mettre au point des tests qui placent la prévision *sous contrôle* par rapport à la réalisation.

Ces tests sont fondés sur la définition de variables fonctions de l'écart prévision-réalisation à chaque période et sur la détermination de limites de confiance pour ces mêmes variables à un certain seuil de probabilité.

Des règles bâties sur ces tests et sur leurs résultats conduisent à la mise en place de *clignotants* : tant que ceux-ci restent éteints, rien ne nous permet d'infirmer l'hypothèse que la prévision est toujours sous contrôle ; lorsqu'un clignotant s'allume la présomption est très forte que le modèle ne se trouve plus en accord avec la réalité.

Il s'agit alors de mettre en œuvre des *procédures d'action* sur le modèle lui-même, ou plus exactement sur les paramètres du modèle — celui-ci-même n'étant pas remis en cause — qui ont pour objectif de faire

(1) Ingénieur à CEGOS-AUROC.

« rentrer » le modèle à l'intérieur des limites de contrôle et donc d'éteindre le clignotant qui a donné l'alerte (si un modèle de prévision est soumis à plusieurs clignotants, la procédure d'action mise en œuvre peut être différente selon le clignotant allumé). Ces procédures d'action sont fondées sur les causes probables qui ont conduit le modèle à échapper au contrôle et ne sont mises en œuvre que temporairement, en général jusqu'à ce que le modèle ait été « reconduit » dans ses limites.

L'étude a été effectuée dans la perspective d'une exploitation sur ordinateur. Les tests, règles ou procédures d'actions proposés peuvent être écrits sous forme d'ordinogrammes et rassemblés sous forme de sous-programmes par rapport à un programme de lissage exponentiel.

EXPOSE DES METHODES

Il existe deux types principaux de méthodes de contrôle de la prévision :

- Les méthodes fondées sur l'utilisation d'un « tracking signal ».
- Les méthodes dites « méthodes CUSOM ».

A. METHODES FONDEES SUR L'UTILISATION D'UN « TRACKING SIGNAL »

Ces techniques consistent à calculer une variable à chaque période de la prévision appelée « tracking signal » — signal de poursuite de la prévision — définie comme une fonction de l'écart prévision-réalisation et dont on a déterminé statistiquement les limites de confiance à un certain seuil de probabilité, c'est-à-dire à un certain nombre d'écarts-types de part et d'autre de la moyenne.

Tant que le tracking signal est à l'intérieur des limites fixées, rien ne permet de penser que le modèle a échappé au contrôle. Une procédure d'intervention est prévue lorsque le clignotant branché sur la valeur du tracking signal s'est allumé.

1. Méthode de Brown [1] [2]

Le modèle présenté par Brown est un modèle de lissage exponentiel où la prévision pour le temps t est une combinaison linéaire de fonctions du temps :

$$\hat{x}_t = \sum_{i=1}^n a_i f_i(t)$$

$$\text{Réalisation } x_t = \hat{x}_t - e_t$$

Les écarts prévision-réalisation e_t sont dus à deux éléments principaux :

- aléas dans les observations,
- erreurs dans le modèle : le modèle peut être faux en ce sens qu'il contient un ensemble faux de fonctions f_i . Et même si l'ensemble de fonctions utilisées est correct, il y aura des erreurs dans l'estimation des coefficients à cause des aléas dans les observations.

a) Définition du tracking signal

Le tracking signal est défini comme le rapport de la somme cumulée Y des écarts prévision-réalisation à l'écart absolu moyen Δ prévisions-réalisations (en anglais Mean absolute deviation ou MAD).

Il s'agit en fait de la forme réduite de la variable Y de moyenne $E(Y)$ et d'écart type σ_Y dans laquelle on a préféré remplacer σ_Y par son expression en fonction de la moyenne des écarts absolus prévision-réalisation, grandeur plus significative quand on a affaire à un grand nombre de prévisions.

On part donc de la variable $\frac{Y_t - E(Y_t)}{\sigma_{Y_t}}$ sous la condition $E(e_t) = 0$ ce qui entraîne $E(Y_t) = 0$.

On remplace alors σ_{Y_t} par une grandeur qui lui est proportionnelle $\Delta_t = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t |e_i|$ pour obtenir le tracking signal : $T_s = \frac{Y_t}{\Delta_t}$

Les limites de confiance de T_s sont fonction du seuil de probabilité que l'on se fixe : en général deux écarts-types de part et d'autre de la moyenne, ce qui détermine deux limites $+K$ et $-K$ pour le tracking signal, soit $|T_s| \leq K$.

Pour le calcul de Δ_t à chaque période, on utilise une méthode de lissage exponentiel.

$$\Delta_t = \alpha' |e_t| + (1 - \alpha')\Delta_{t-1} \quad \text{avec } \alpha' = 0,1 \text{ en général.}$$

La valeur initiale Δ_0 est calculée à partir de l'écart-type σ_x des observations, calculé sur l'historique de départ dont on dispose :

$$\Delta_0 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\frac{2}{2 - \alpha}} \sigma_x$$

α est le coefficient de lissage du modèle de x .

Le calcul de Y_t est facile :

$$Y_t = e_t + Y_{t-1} \quad \text{avec } Y_0 = 0.$$

En conclusion :

A chaque période t , disposant de x_t , \hat{x}_t , Δ_{t-1} et Y_{t-1} , on calcule :

$$\begin{aligned} e_t &= \hat{x}_t - x_t \\ Y_t &= e_t + Y_{t-1} \\ \Delta_t &= \alpha' |e_t| + (1 - \alpha') \Delta_{t-1} \\ Ts_t &= \frac{Y_t}{\Delta_t} \end{aligned}$$

On compare alors $|Ts_t|$ à K :

Si $|Ts_t| \leq K$ rien ne nous permet de conclure à la non conformité du modèle.

Si $|Ts_t| > K$ il y a présomption que quelque élément nouveau est intervenu dans la réalité par rapport à laquelle le modèle a dévié.

Dans l'annexe I, sont portés les calculs donnant la relation entre σ_Y et Δ ainsi que la limite K en fonction de α coefficient de lissage du modèle de x .

b) Clignotant et intervention éventuelle sur les paramètres du modèle

La règle est la suivante : le « clignotant » s'allume lorsque le tracking signal a franchi une de ses limites au cours de deux périodes consécutives. Dans ce cas en effet, le risque de se tromper en concluant à une déviation du modèle par rapport à la réalité est très faible et on peut alors songer à intervenir sur les paramètres du modèle.

Brown énonce les procédures suivantes :

— La première étape consiste à mettre à zéro la somme cumulée des écarts prévision-réalisation car même si le modèle rentre de lui-même dans ses limites de contrôle, la somme cumulée des erreurs fluctuera autour d'un niveau moyen atteint au moment de l'allumage du « clignotant » ce qui risque de produire de nouvelles alarmes non justifiées.

— Rechercher ensuite la cause de déviation du modèle. Si l'on peut trouver la raison d'un changement dans la séquence des observations, on peut alors réestimer les paramètres utilisés dans le modèle et reprendre le modèle avec de nouvelles conditions initiales. Si aucune raison déterminante de procéder à une telle réestimation ne se dégage de la séquence des observations, on peut intervenir sur la « vitesse de réponse » du système aux changements dans les observations en augmentant la valeur du coefficient de lissage pendant un certain nombre de périodes à venir. On prendra par exemple le nombre de périodes nécessaire pour « absorber » 90 % d'un « pas » (c'est-à-dire un changement brutal du niveau moyen des observations) avec une certaine valeur de coefficient de lissage. Brown donne les courbes représentatives d'une telle relation ([2] p. 113) ; pour $\alpha = 0,3$ par exemple le nombre de périodes pour absorber 90 % d'un pas est de l'ordre de 6.

c) Conclusion sur la méthode de Brown

Brown donne peu d'exemples concrets d'application de sa méthode quant à la confiance qu'on peut accorder à son « tracking signal » et aux résultats d'une intervention éventuelle sur le modèle. Un jeu de courbes intéressantes est celui présenté en [2] pages 301 à 304 qui donne les types de réponses du tracking signal à une « impulsion », un « pas » ou une « rampe » comme inputs dans plusieurs types de modèles.

D'un simple point de vue théorique, le tracking signal de Brown présente deux inconvénients que Trigg a soulignés dans un article de l'O.R.Q. [3].

— Le tracking signal de Brown, comme il a été dit, une fois sorti de ses limites, ne rentre pas nécessairement à l'intérieur de celles-ci, même si le système de prévision, lui, revient en accord avec les observations. Ceci provient du fait que toute erreur passée entre dans la somme cumulée avec le même poids et, à la suite d'une forte erreur accidentelle dans un sens non suffisamment compensée par des erreurs dans l'autre sens, il peut se produire un changement de niveau persistant de la somme cumulée.

Si donc à la période t le tracking signal sort de ses limites, il n'y a aucune raison qu'il y rentre à la période $t + 1$ même si en t l'écart était purement accidentel alors qu'en $t + 1$ tout est à nouveau normal. Un tel phénomène produit, sans raison fondée, l'allumage du clignotant.

De plus, une fois le clignotant allumé, il est nécessaire de remettre la somme cumulée à zéro, si l'on veut éviter de fausses alarmes. Trigg souligne que de telles interventions peuvent être fastidieuses ou susceptibles de négligences si l'on traite plusieurs centaines d'articles.

— Paradoxalement, le tracking signal peut sortir de ses limites alors que le modèle donne de (trop) bonnes prévisions. Ainsi si les prévisions sont parfaites, les écarts sont nuls. La somme cumulée des écarts reste constante alors que l'écart absolu moyen diminue ce qui entraîne l'augmentation du tracking signal.

2. Méthode de Trigg et Leach [3] [4] [5]

Trigg part de la méthode de Brown qu'il améliore de façon à éviter les inconvénients cités plus haut.

a) Définition d'un nouveau tracking signal

C'est toujours un rapport dont le dénominateur est la moyenne des écarts absolus prévision-réalisation. Mais au numérateur, on ne porte plus la somme cumulée des écarts, mais un écart lissé par un modèle de lissage exponentiel.

On a donc à chaque période t :

$$Ts'_t = \frac{e'_t}{\Delta_t}$$

avec :

$$e'_t = ae_t + (1 - a)e'_{t-1} \text{ et } e'_0 = 0$$

$$\Delta_t = \alpha' |e_t| + (1 - \alpha')\Delta_{t-1} \text{ et } \Delta_0$$

le même que chez Brown.

Ce nouveau tracking signal est compris entre -1 et $+1$ compte tenu des conditions initiales retenues (si $a = \alpha'$).

Par un calcul analogue à celui de la méthode de Brown et porté dans l'annexe II, on définit des limites de confiance pour Ts'_t . Ces limites sont fonction de a , coefficient de lissage de e'_t .

Pour $a = 0,1$ par exemple et à un seuil de probabilité 5 % (deux écarts-types de part et d'autre de la moyenne, la limite est 0,55 à laquelle on compare $|Ts'_t|$ à chaque période.

Trigg, bien qu'il ait pris dans ses applications un « a » égal à « α' », souligne que cela n'est pas nécessaire. Mais il précise que l'un et l'autre doivent être assez petits (de l'ordre de 0,1) et qu'il est préférable que le coefficient utilisé pour lisser l'erreur absolue (ici α') ne soit pas supérieur à celui utilisé pour lisser l'erreur (ici a) et ce, pour éviter le second inconvénient du tracking signal de Brown (mauvaise réponse devant des prévisions précises).

b) Utilisation de cette nouvelle définition de tracking signal

Bien évidemment, on peut, à partir de ce nouveau tracking signal, appliquer les règles de « clignotement » définies par Brown ainsi que la procédure d'intervention sur le modèle en cas de besoin.

Trigg et Leach ont proposé une exploitation plus intéressante de la nouvelle définition donnée au tracking signal. Lorsque, en effet, celui-ci croît c'est que l'écart augmente entre la réalité et le modèle. Ce dernier aurait donc besoin d'un taux de réponse plus élevé de façon à lui faire « rattraper » les réalisations, donc d'un coefficient de lissage plus élevé. En revanche, l'impératif de stabilité exige un coefficient de lissage suffisamment bas lorsque le modèle s'accorde à la réalité et donc que le tracking signal présente des valeurs relativement basses.

Trigg et Leach ont alors pensé à utiliser comme coefficient de lissage de leurs modèles le module du tracking signal, introduisant ainsi une sorte de régulation automatique à l'intérieur du modèle, processus qu'ils ont appliqué pour plusieurs types de séries et plusieurs types de modèles.

c) Conclusion sur la méthode de Trigg

Le tracking signal, tel qu'il est défini par Trigg, évite les deux inconvénients principaux du tracking signal de Brown. Les expérimentations faites par Trigg montrent en effet le retour du tracking signal à l'intérieur de ses limites lorsqu'à l'occasion d'un « pas », le modèle décalé par rapport à la réalité se raccorde progressivement à celle-ci. L'utilisation de la définition de Trigg semble donc plus sûre et d'usage plus commode que celle de Brown (elle évite en particulier la remise à zéro de la somme cumulée des erreurs).

Quant à l'utilisation du tracking signal comme coefficient de lissage, Trigg obtient des résultats intéressants pour des séries qui présentent des « pas » ou des « rampes » : les réponses à des changements de la sorte sont plus rapides et plus précises. Mais du fait même de la rapidité de cette réponse, la méthode de Trigg n'est pas à conseiller pour des séries présentant de larges fluctuations accidentelles qui entraînent une réaction du modèle plus importante que dans le cas classique, ce qui n'est pas souhaitable dans ce cas.

Une solution pour éviter une trop grande réaction a été préconisée par Shone [5]. Elle consiste à utiliser comme coefficient de lissage à chaque période t , non pas le tracking signal de cette période, mais celui calculé à la période précédente, c'est-à-dire celui de la période $t - 1$. Une réaction excessive à l'impulsion est évitée puisque la forte valeur du tracking signal due à l'impulsion est utilisée pour lisser l'observation « normale » de la période suivante et non l'impulsion elle-même. Cette méthode apporte des résultats équivalents à ceux de Trigg dans les cas de pas ou rampe.

Une application intéressante de la méthode de Trigg concerne le démarrage des prévisions. Si les valeurs initiales ont été mal choisies, l'utilisation du tracking signal comme coefficient de lissage permet un raccordement rapide du modèle à la réalité.

Notons enfin la marge de manœuvre offerte par le choix du coefficient de lissage de l'écart algébrique ou de l'écart absolu, une réduction de ce taux conduisant à une moins grande « sensibilité » du tracking signal par rapport aux changements dans la série des observations donc à une plus grande stabilité du tracking signal à l'intérieur de ses limites, mais aussi à une plus grande fiabilité lorsque celui-ci dépasse les seuils fixés.

B. METHODES CUSOM [6] [7] [8]

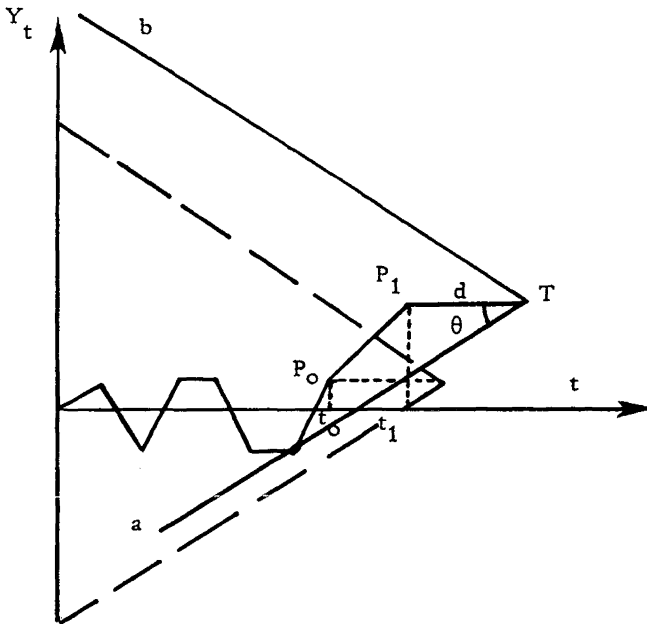
Le principe de ces méthodes consiste à s'intéresser, non plus à la valeur atteinte en une période par la somme cumulée des erreurs, mais à la variation de cette variable, autrement dit à la pente de la courbe représentative de cette somme cumulée en fonction du temps ou « courbe CUSOM ». Le contrôle de la prévision s'effectue par un test sur cette pente selon certaines modalités que l'on va préciser et on peut, à partir des résultats du test, définir des règles de « clignotement » qui décideront d'une intervention sur les paramètres du modèle.

1. Mise en œuvre du test

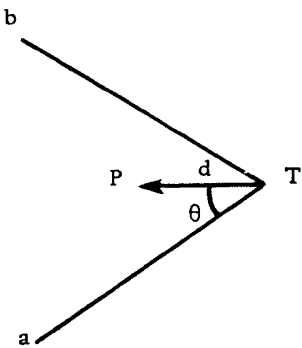
a) Définition (fig. 1)

Le test consiste à plaquer sur la CUSOM à chaque période t un calque sur lequel est porté un « cache en V » caractérisé par deux paramètres d et θ .

Soit P le point de la CUSOM en t , d'ordonnée Y_t . A une distance d horizontale dans la direction du temps, on porte le point T , sommet d'un angle d'ouverture 2θ , limité par les droites Ta , Tb .



1ère Figure



2ème Figure

Figure 1

Si Ta ou Tb coupe la CUSOM en un certain point, le test est positif (cas du point $P_1(Y_n, t_1)$ sur la courbe exemple).

Si toute la CUSOM est située strictement à l'intérieur de l'angle (Ta , Tb), le test est négatif, c'est-à-dire que rien ne permet de dire que le modèle a « décroché » de la réalité (cas du point $P_0(Y_{t_0}, t_0)$ sur l'exemple).

Ceci revient en fait à tester la « pente » de la CUSOM, du dernier point atteint à chaque point déjà porté sur la courbe, compte tenu d'un certain « délai de réaction » de la CUSOM à un changement survenu dans la série des réalisations.

Dans l'annexe III on a exposé la justification théorique de la mise en œuvre d'un test CUSOM ainsi que l'organigramme à suivre pour effectuer le test à l'aide d'un programme d'ordinateur, et rendre ainsi automatique le contrôle à chaque période.

b) Détermination des paramètres d et θ [7]

Les propriétés d'un « cache en V » dépendent des paramètres d et θ . Qualitativement, plus grands sont la distance d et l'angle θ d'ouverture du cache, plus rares sont les résultats positifs du test. Il s'agit donc de trouver un équilibre de façon à détecter suffisamment vite les changements importants et durables survenant dans le processus, tout en évitant la détection de fluctuations réellement dues au hasard.

L'I.C.I. Monograph n° 3 [7] donne des valeurs de d et θ en fonction du choix initial de deux valeurs L_0 et L_1 appelés « longueurs moyennes de runs » (average run lengths).

Une longueur moyenne de run L est le nombre moyen de points qui sont portés sur un tableau de contrôle avant qu'un signal d'action soit donné. On choisit une forte valeur de L , L_0 , de l'ordre de plusieurs centaines, correspondant à un processus bien suivi et une basse valeur de L , L_1 , de l'ordre de 3 à 15, correspondant à un processus dont la moyenne se déplace d'un certain niveau égal à un multiple de l'écart-type.

Pour des séries issues d'une distribution normale de variance σ^2 et à l'aide de méthodes de Monte-Carlo, l'I.C.I. Monograph [7] construit des courbes caractérisées chacune par un d et un θ , dans le plan $\bar{L}, n\sigma$ ($n = 0, 1, 2$ ou 3) (fig. 2).

S'étant fixé L_0 pour 0σ et L_1 pour un, deux ou trois σ , on repère la courbe dont on s'approche le plus et on en déduit d et $t_g\theta$.

L'usage de telles courbes appelle quelques remarques supplémentaires.

— Le choix des deux valeurs L_0 et L_1 rappelle le choix des risques de première espèce et de deuxième espèce α , β dans un test statistique classique.

— Pour des problèmes de standardisation, on ne peut pas choisir n'importe quelle échelle dans le plan (Y_t, t) quand on utilise pour le

contrôle de la prévision un cache en V dont les paramètres d et θ ont été déterminés par la méthode ci-dessus. La règle est la suivante : considérant comme égal à 1 l'intervalle horizontal entre deux points consécutifs t et $t + 1$ portés sur la CUSOM, ce même intervalle doit représenter approximativement 2σ sur l'échelle verticale Y_t .

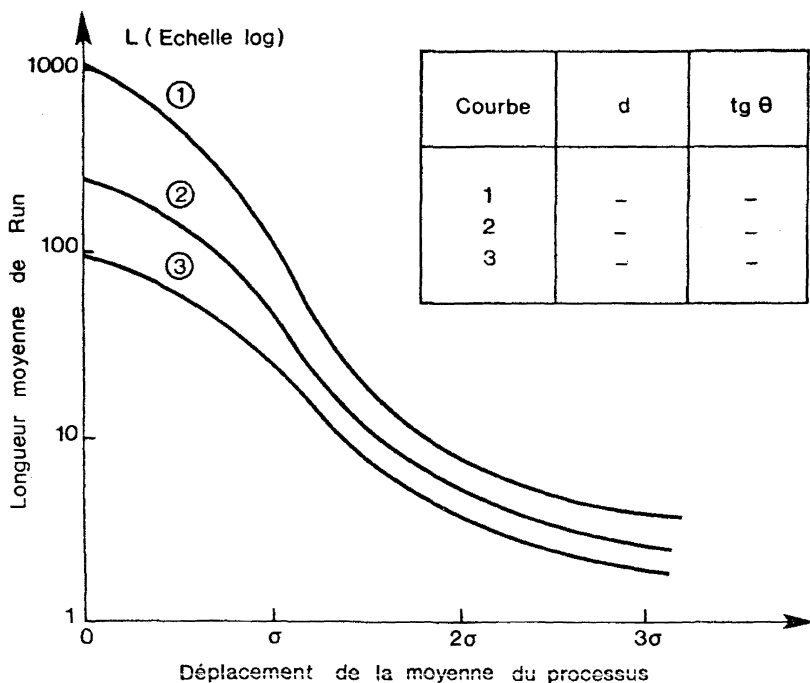


Figure 2

L'écart-type σ dont on a parlé jusqu'ici, est l'écart-type des e_t , c'est-à-dire des écarts prévision-réalisation.

— La plupart des processus industriels présentent une certaine auto-corrélation. De ce fait, les hypothèses faites ne sont plus vérifiées. La longueur L_1 est à peine affectée par cette corrélation. Mais pour conserver au test son efficacité, il est nécessaire de modifier la valeur de L_0 (accroissement pour une corrélation négative, diminution pour une corrélation positive).

2. Intervention sur le modèle

Lorsque le test CUSOM s'est révélé positif (ou lorsqu'un clignotant s'est allumé selon une règle semblable à celle pour le tracking signal par exemple), il est nécessaire d'intervenir sur les paramètres du modèle.

Comme il est dit dans l'annexe III, le test CUSOM permet la connaissance de la période de début de dérèglement (correspondant au point où le cache coupe la CUSOM) ainsi qu'une estimation du changement de niveau dans le processus.

Si $M_0 (Y_0, t_0)$ est le point où le cache coupe la CUSOM pour un point courant $M_1 (Y_1, t_1)$, on peut estimer la nouvelle moyenne des erreurs, anciennement nulle, à

$$\frac{Y_1 - Y_0}{t_1 - t_0}$$

et modifier les paramètres du modèle en utilisant cette estimation.

La connaissance de la période t_0 de début de dérèglement, permet un retour en arrière de la prévision en cette période de façon à recommencer le calcul de prévision avec un coefficient de lissage plus élevé, c'est-à-dire un meilleur taux de réponse. Cette procédure doit conduire à un meilleur ajustement en t_1 et donc à de meilleures prévisions pour des périodes postérieures à t_1 . Dans ce cas on doit aussi définir un certain nombre de règles relatives au choix du coefficient de lissage et selon le comportement du modèle dans les nouveaux calculs de t_0 à t_1 .

3. Jugements sur la methode CUSOM

Par rapport aux méthodes utilisant un tracking signal, la méthode CUSOM offre l'avantage de fournir deux informations supplémentaires (la période de début de dérèglement et l'estimation du changement) ce qui permet des interventions sans doute plus précises sur le modèle.

En revanche, des difficultés certaines se posent dans l'estimation de d de θ et de σ et une certaine lourdeur subsiste dans le traitement sur ordinateur par rapport à la simplicité du calcul du tracking signal.

En outre, l'usage de la somme cumulée des erreurs comme variable-test, provoque l'inconvénient déjà signalé à propos de la définition du tracking signal par Brown : la nécessité de remettre à zéro la somme cumulée des erreurs (dans l'organigramme, de réinitialiser) lorsque une intervention a été faite sur le modèle.

D'autres auteurs [8] ont proposé d'autres tests sur la somme cumulée des écarts qui font intervenir les sommes des écarts sur 1, 2, etc... n périodes antérieures à la période courante ainsi que des méthodes permettant d'essayer de distinguer si un changement dans le processus est dû à un changement de moyenne ou un changement de tendance, toutes méthodes peu fiables et difficilement applicables sur ordinateur.

CONCLUSION

Rien ne permet de dire la supériorité *a priori* de l'une des deux méthodes précédentes sur l'autre. Chacune d'elles présente un ensemble d'avantages et un ensemble d'inconvénients qui peuvent prendre des importances respectives diverses selon le type du modèle et la série réelle que celui-ci prévoit.

D'une façon générale, dans le cas où le modèle de prévision est un modèle de lissage exponentiel, on peut dire que l'utilisation du tracking signal de Trigg comme test de contrôle de la prévision offre, par sa simplicité de calcul et sa fiabilité, un avantage sur le tracking signal de Brown ou le test du cache en V.

Quant aux procédures d'intervention sur le modèle en cas de manifestation du test, elles doivent combiner toutes les méthodes exposées ici : augmentation du coefficient de lissage, indexation de ce coefficient sur le tracking signal, idée de retour en arrière pour refaire ou parfaire l'ajustement, estimation d'un changement de niveau par la mémoire des écarts passés.

Des expérimentations sont actuellement en cours qui mettent en œuvre les différents résultats de cette étude et sont donc appelées à compléter son caractère théorique.

ANNEXE I

TRACKING SIGNAL DE BROWN. CALCULS

Pour les calculs, on fait l'hypothèse qu'il n'y a pas de corrélation entre les observations (inputs du modèle) et en outre que, les inputs étant distribués normalement, il en est de même des écarts prévision-réalisation.

Notations : x_t : réalisation,

\hat{x}_t : prévision faite pour la période t ,

e_t : écart prévision réalisation $e_t = \hat{x}_t - x_t$,

ϵ_t : aléa dans les réalisations,

Y_t : somme cumulée des e_t : $Y_t = \sum_{i=1}^t e_i$,

$\sigma_x, \sigma_x^A, \sigma_e, \sigma_\epsilon, \sigma_Y$ écart-types des variables correspondantes.

On a $\sigma_x = \sigma_\epsilon$,

Δ_t : écart absolu moyen des e_t : $\Delta_t = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t |e_i|$,

α : coefficient de lissage du modèle de lissage exponentiel de x : $\alpha = 1 - \beta^n$, n étant le nombre de degrés de liberté.

L'étude du modèle de lissage exponentiel conduit aux résultats suivants :

$$\sigma_{\hat{x}} = \sqrt{\frac{\alpha}{2-\alpha}} \sigma_e$$

$$\sigma_e = \sqrt{\frac{2}{2-\alpha}} \sigma_\varepsilon$$

$$\Delta = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma_e \text{ (loi normale) d'où } \Delta = f(\alpha)\sigma_\varepsilon,$$

$$\sigma_Y \simeq \sqrt{\frac{1}{1-\beta^{2n}}} \sigma_\varepsilon = g(\alpha)\sigma_\varepsilon$$

Des relations $\begin{cases} \Delta = f(\alpha)\sigma_\varepsilon \\ \sigma_Y = g(\alpha)\sigma_\varepsilon \end{cases}$ on déduit des courbes qui expriment le rapport σ_Y/Δ en fonction de α et du modèle choisi (n).

Le test consiste à comparer $\left(\frac{Y}{\sigma_Y}\right)$ à 2. On compare plutôt $\left(\frac{Y}{\Delta}\right)$ à une valeur K tirée du raisonnement précédent.

Pour un modèle constant par exemple, on a :

$n = 1 \quad \alpha = 0,1$	$n = 1 \quad \alpha = 0,2$
$\frac{\sigma_Y}{\Delta} = 3$	$\frac{\sigma_Y}{\Delta} = 2$
$K = 6$	$K = 4$

En fait les hypothèses précédentes ne sont pas parfaitement vérifiées et une certaine liaison s'introduit entre les résidus e_t , liaison systématique du fait même de l'utilisation d'un modèle de lissage exponentiel pour la prévision de x . On recalcule à chaque période un nouveau Δ_t par un modèle constant de lissage exponentiel avec un α de l'ordre de 0,1, comme il est indiqué au cours de l'étude.

ANNEXE II

TRACKING SIGNAL DE TRIGG. CALCULS

Soit e_t l'écart prévision-réalisation à la période t .

Faisons l'hypothèse que ces écarts ne présentent pas de corrélation entre eux et sont purement aléatoires.

Soit σ_e l'écart type des e_t .

Soit e'_t l'écart lissé $e'_t = a e_t + (1-a)e'_{t-1}$.

σ_e son écart-type.

Soit Δ_t , l'écart absolu moyen obtenu par lissage (coefficient a par exemple).

$$\Delta_t = a|e_t| + (1-a)\Delta_{t-1} \quad \Delta_t = \frac{\sigma_e}{1,2} \text{ si } a \text{ est suffisamment petit.}$$

Le modèle constant de lissage exponentiel permet d'écrire e'_t comme une fonction de toutes les erreurs passées.

$$e'_t = \sum_{i=0}^{\infty} a(1-a)^i e_i$$

$$\sigma_{e'}^2 = \sum_{i=0}^{\infty} [a\sigma_e(1-a)^i]^2$$

série convergente de raison $(1-a)^2$ et de somme

$$\frac{a^2\sigma_e^2}{1-(1-a)^2} = \sigma_e^2 \frac{a}{2-a}$$

e'_t est donc une variable normale de moyenne 0 et d'écart-type $\sigma_e \sqrt{\frac{a}{2-a}}$
ou $1,2 \Delta \sqrt{\frac{a}{2-a}}$.

Les limites de confiance à deux écarts-types, pour le tracking signal tel qu'il est défini, s'écrivent :

$$|Ts'| = \left| \frac{e'_t}{\Delta_t} \right| \leq 2 \cdot 1,2 \sqrt{\frac{a}{2-a}} = 2,4 \sqrt{\frac{a}{2-a}}$$

Pour $a = 0,1$, cette limite est égale à 0,55.

Le calcul précédent n'est pas parfaitement valable dans le cas d'un modèle de lissage exponentiel puisque celui-ci introduit une liaison systématique entre les écarts successifs. Néanmoins, si le coefficient utilisé dans le modèle est suffisamment bas, la correction qu'il serait nécessaire d'apporter aux limites de confiance est petite.

ANNEXE III

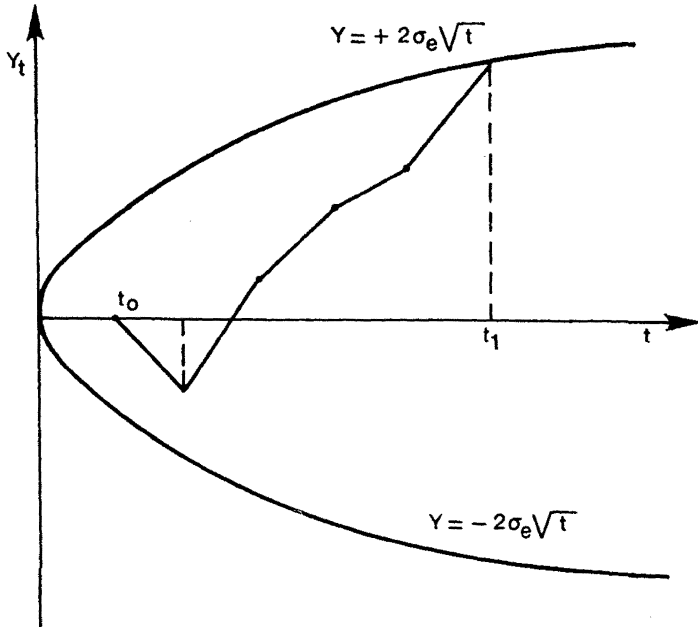
METHODE CUSOM. JUSTIFICATION THEORIQUE ET EXPLOITATION SUR ORDINATEUR

Soit e_t , l'écart prévision-réalisation : loi normale $(0, \sigma_e^2)$.

La variable mise sous contrôle est $Y_t = \Sigma e_t$.

Les e_t sont supposés indépendants. Y_t est alors une variable normale non stationnaire de variance $\sigma_Y^2 = \sigma_e^2 \cdot t$.

Mettre sous contrôle Y_t à deux écarts-types revient à construire 2 branches de parabole d'équation $Y = \pm 2 \sigma_e \sqrt{t}$ à l'intérieur desquelles doit se situer la CUSOM ; le test est positif quand la CUSOM coupe la parabole.



Supposons qu'à l'instant t_0 un dérèglement se produise. Si h est le délai moyen de détection après dérèglement, le test devient positif au temps $t_1 = t_0 + h$ si

$$|Y_{t_1}| \geq 2\sigma\sqrt{t_0 + h}$$

Soit Δ la valeur de ce dérèglement (supposé permanent) :

$$Y_{t_1} = \sum_{i=0}^{t_1} e_i = \sum_{i=0}^{t_0} e_i + \sum_{i=t_0}^{t_0+h} e_i = h\Delta$$

d'où

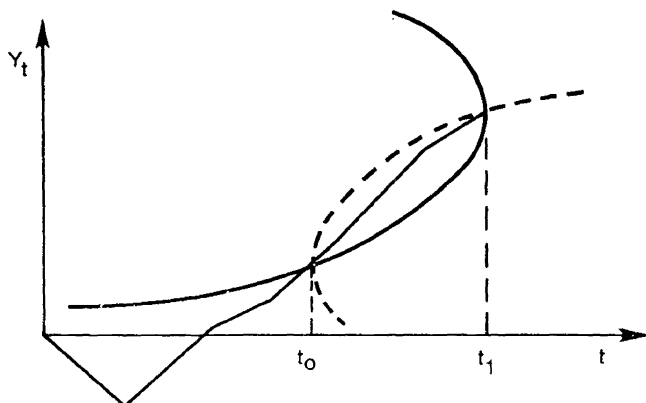
$$h \Delta \geq 2\sigma\sqrt{t_0 + h}$$

Pour l'égalité

$$h = \frac{2 + 2\sqrt{1 + t_0(\Delta/\sigma)^2}}{(\Delta/\sigma)^2}$$

c'est-à-dire que h , délai moyen de réaction, dépend de la période de début de dérèglement t_0 .

Pour remédier à cet inconvénient, on retourne la parabole en plaçant son sommet sur la dernière valeur de Y_t , l'axe restant horizontal et la concavité maintenant tournée vers le passé. Cette procédure revient à faire $t_0 = 0$ dans la formule précédente, soit $h = 4 \left(\frac{\sigma}{\Delta} \right)^2$.



Le délai varie en fonction inverse de la grandeur de la perturbation et est d'autant plus grand que les fluctuations des écarts sont grandes.

L'idée de remplacer la parabole par un « cache en V » dont l'utilisation est fondée sur le même principe permet l'exploitation de la méthode CUSOM par un calcul automatique sur ordinateur : il s'agit de faire le test avec le moins de « mémoires » possible, c'est-à-dire de résumer les informations de la courbe CUSOM.

Le principe de l'organigramme est le suivant : on résume toute la courbe CUSOM par une seule valeur, celle qui est la cause de la manifestation du test (fig. 3).

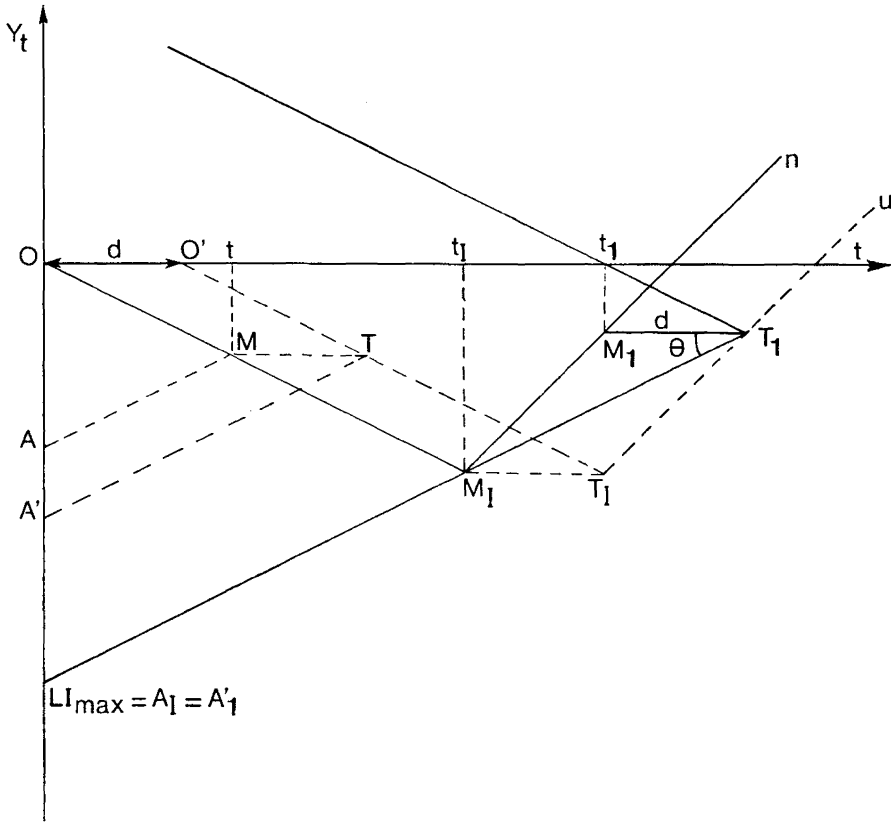
Dans le plan (Y_t, t) soit OMn la courbe CUSOM de point courant M .
soit $O'Tu$ la courbe suivie par le point T sommet
du cache en V de point courant T .

θ et d sont les paramètres du cache en V.

A = projection de M sur l'axe des ordonnées selon θ .

A' = projection de T sur l'axe des ordonnées selon θ .

La figure est construite de telle sorte que c'est la branche inférieure du cache qui coupe la CUSOM en (M_I, t_I) pour un point courant (M_1, t_1) . Les points M_1 et M_I sont tels alors que les points A'_1 et A_I sont confondus et que A_I représente l'ordonnée la plus faible atteinte jusqu'ici par le point A dans la séquence des écarts prévision-réalisation.



Figure

A chaque période t , la position des points A et A' se calcule facilement.

$$OA_t = Y_t - t \cdot tg\theta.$$

$$OA'_t = Y_t - (t + d) tg\theta$$

On conserve à chaque période la valeur LI_{max} qui représente la valeur inférieure la plus faible de OA_t , et que l'on compare avec OA'_t .

Si $OA'_t \geq LI_{max}$, le test est positif.

Un raisonnement analogue pour le domaine supérieur du cache conduit à des résultats semblables.

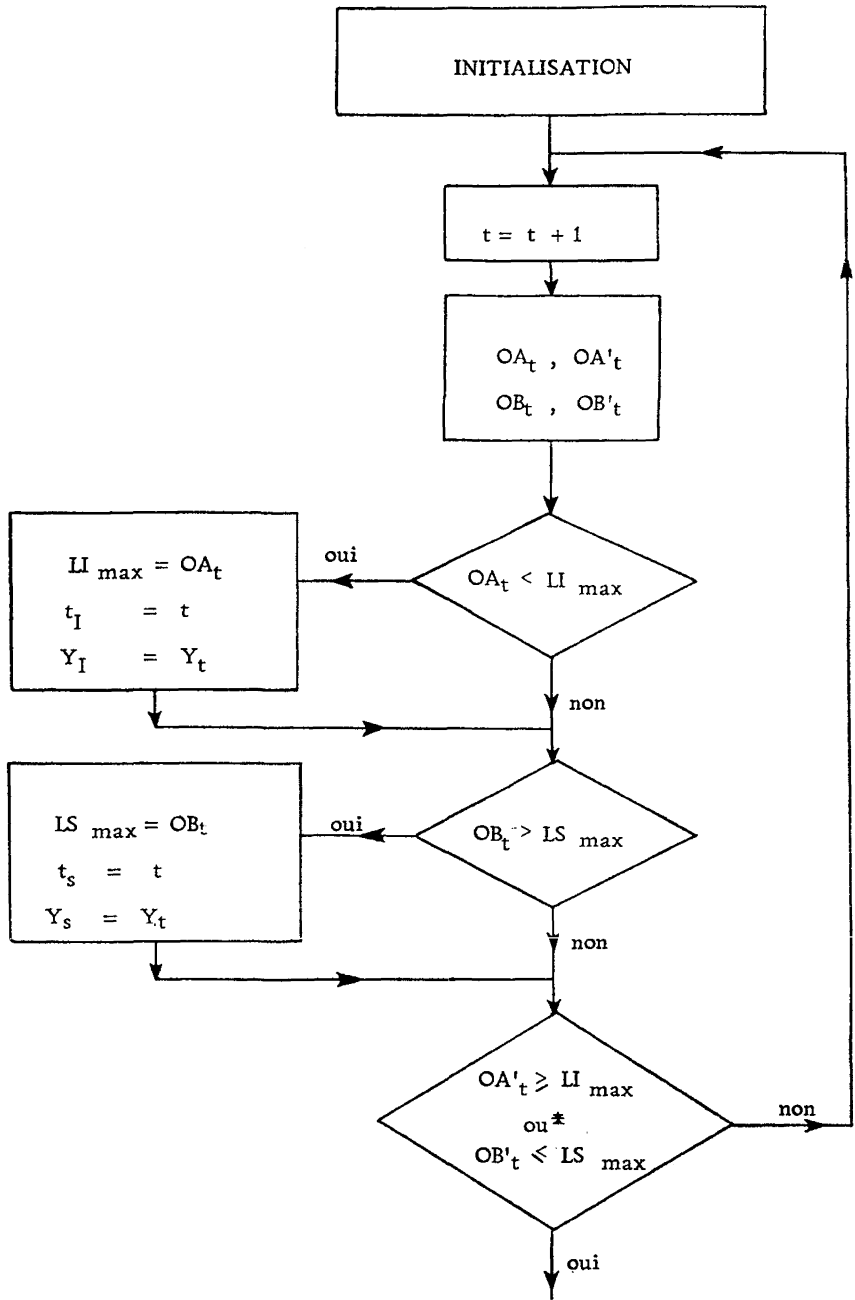
$$B = \text{projection de } M \text{ sur } OY_t \text{ selon } \theta : OB_t = Y_t + t \cdot tg\theta.$$

$$B' = \text{projection de } T \text{ sur } OY_t \text{ selon } \theta : OB'_t = Y_t + (t + d) tg\theta.$$

$$LS_{max} = \text{limite supérieure la plus forte déjà atteinte par } B.$$

On peut de plus dans l'organigramme repérer les valeurs Y_t et t_t , Y_s et t_s qui correspondent aux points M_t et M_s , donnant LI_{max} et LS_{max} .

L'organigramme du test complet est décrit ci-après.



Test positif

* Table " ou "

V	+	V	→	V
V	+	F	→	V
F	+	V	→	V
F	+	F	→	F

ANNEXE IV

LISTE DES REFERENCES

- [1] R. G. BROWN, *Statistical Forecasting for Inventory Control* (1959).
- [2] R. G. BROWN, *Smoothing, Forecasting and Prediction of Discrete Time Series* (1963).
- [3] D. W. TRIGG, *Monitoring a Forecasting System*, *Operational Research Quaterly*, vol. 15, n° 3 p. 271 à 274, 1964.
- [4] D. W. TRIGG and A. G. LEACH, *Exponential smoothing with an Adaptive Response Rate*, *Operational Research Quaterly*, vol. 18, n° 1 p. 53-59, 1967.
- [5] M. L. SHONE, *Exponential smoothing with an adaptive Response Rate*, *Operational Research Quaterly*, vol. 18, n° 3, p. 318-319, 1967.
- [6] H. KAUFMAN, J. L. GROBOILLOT, *La prévision économique à court terme*, Dunod, 1968.
- [7] I.C.I. Monograph n° 3, O. Boyd, Londres, 1964.
- [8] P. J. HARRISON and O. L. DAVIES, *The use of cumulative sum techniques for the control of routine forecasts of product demand (1964)*. *Opérations Research*, vol. 2, n° 2, mars-avril 1964, p. 325 à 333.
- [9] E.G.F. van WINKEL, *Developments in short-term Forecasting*. European Meeting on Statistics, Econometrics and Management Science, Amsterdam, septembre 1968.