REVUE FRANÇAISE D'INFORMATIQUE ET DE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE. SÉRIE VERTE

R. BENAYOUN
J. TERGNY

# Critères multiples en programmation mathématique : une solution dans le cas linéaire

*Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle. Série verte*, tome 3, nº V2 (1969), p. 31-56
<http://www.numdam.org/item?id=RO_1969__3_2_31_0>

R.I.R.O.
(3e année, N° V-2, 1969, p. 31-56)

# CRITERES MULTIPLES EN PROGRAMMATION MATHEMATIQUE : UNE SOLUTION DANS LE CAS LINEAIRE

par R. BENAYOUN et J. TERGNY (1)

---

Résumé. — *Les auteurs décrivent une méthode (la méthode P.O.P. : Procédure d'Orientation Progressive) pour résoudre le problème de programmation linéaire en présence de fonctions économiques multiples données simultanément et ceci en utilisant un code standard. Il s'agit d'une procédure séquentielle permettant d'organiser rationnellement l'exploration des solutions en fonction des choix partiels effectués par le décideur aux étapes intermédiaires, afin de dégager l'information nécessaire à la décision finale.*

## I. GENERALITES ET DEFINITIONS

### 1. Le problème $P$

C'est celui du choix d'un vecteur $X$ dans un domaine d'admissibilité $D$ de $R^n$ défini par les solutions du système linéaire :

$$(1.1) \qquad A \cdot X \leqslant b, \qquad X = (x_1, ..., x_n)$$
$$x_i \geqslant 0, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n$$

dans lequel $A$ est une matrice $(p \times n)$ et $b \in R^p$,
le vecteur choisi devant donner « satisfaction » relativement à plusieurs critères numériques, en nombre $m$ et notés $C^1, C^2, ..., C^j, ..., C^m$.

La valeur prise par une solution $X$ selon le critère $C^j$ correspond à la valeur prise par la forme linéaire :

$$y^j(X) = \sum_{i=1}^{n} c_i^j x_i \quad , \quad j = 1, 2, ..., m.$$

---

(1) Ingénieurs Chargés de Recherches à la Société d'Économie et de Mathématiques Appliquées.
Nous remercions B. Roy et H. Le Boulanger pour leurs suggestions et B. Sussmann pour nous avoir encouragés à travailler dans ce domaine.

Nous désignerons par $y(X)$ le vecteur de composantes :

$$(y^1(X), y^2(X), ..., y^m(X)).$$

On supposera que plus $y^j(X)$ est grand, plus la solution $X$ est satisfaisante sur le critère $C^j$.

Connaissant $X$ et $y(X)$, pour achever de poser le problème, il reste à préciser comment l'on décide que $X$ donne « satisfaction » relativement à l'ensemble des critères $C$ ?

On se place ici, précisément dans le cas où on ne peut pas répondre complètement à cette question a priori : la réponse dépendant en particulier de ce que permet $D$ comme vecteurs $y$. On ne peut donc préciser celle-ci qu'en explorant $D$, et autant conduire cette exploration de manière à avancer dans la résolution du problème en même temps qu'on achève de le poser. C'est à cette situation que nous ferons référence sous le nom de problème $P$.

## 2. Utilisation de l'information a priori sur l'importance relative des critères

Compte tenu de l'information, a priori, sur la manière dont il convient de faire intervenir les critères, on simplifie fréquemment le problème $P$ en le transformant en un problème d'optimisation sur la base d'une pondération ou d'une hiérarchisation des critères. Après avoir rappelé l'une et l'autre de ces deux approches nous reviendrons au cas où elles ne sont pas acceptables.

*a*) Premier cas : on peut traduire l'importance relative des critères $C^j$ au moyen de coefficients $(\pi^j)$ ($\pi^j$ traduisant le « poids » du $j^{\text{ième}}$ critère). Une solution « satisfaisante » sera alors fournie par la valeur optimale de la fonction économique résultante :

$$F(X) = \sum_{j=1}^{m} \pi^j \cdot y^j(X) = \sum_i d_i \cdot x_i$$

avec $d_i = \sum_j \pi^j \cdot c_i^j \quad , \quad i = 1, 2, ..., n$

Dans ce cas nous ne sommes plus réellement en présence de critères multiples.

C'est l'approche retenue par exemple dans la première version du modèle schématique de Gestion Prévisionnelle des Cadres (voir [2]) où dans la fonction économique du programme linéaire construit, figuraient des éléments aussi variés que l'efficacité des cadres, leur satisfaction, les coûts d'embauches, et les coûts d'écarts aux besoins en effectifs.

*b*) Deuxième cas : les critères sont strictement hiérarchisés selon un ordre total. Il en résulte un ordre lexicographique sur les vecteurs $y(X)$. Le processus de recherche d'une solution « satisfaisante » est alors évident. Si par exemple on a deux critères $y^1(X)$ et $y^2(X)$, le premier étant prioritaire par rapport au second, on résoudra tout d'abord le problème $P_1'$ :

$$(P_1') \qquad \underset{X \in D}{(\max)}\ z = y^1(X)$$

soit alors $H$ le demi-espace des solutions de l'inéquation (1.2) :

$$(1.2) \qquad y^1(X) \geqslant f^1 - \varepsilon^1$$

avec

$$f^1 = \max_{X \in D} y^1(X)$$

où $\varepsilon^1$, positif ou nul, représente la dégradation maximale consentie sur le premier critère.

La solution cherchée sera alors la solution, si elle existe, du problème $P'_2$ ,

$$(P'_2) \qquad \underset{X \in D \cap H}{(\max)}\, z = y^2(X)$$

*c*) La notion de solution « satisfaisante » n'est plus aussi évidente et le problème $P$ aussi précis, dans le cas le plus général où l'on ne peut se ramener sans arbitraire à l'un des deux cas limites précédents : soit parce que les rapports entre critères, de nature souvent très différente, sont trop complexes, ou parce que l'information est insuffisante, soit parce que le système de valeur du décideur est trop « lâche ». Ici le problème $P$ est effectivement celui d'un choix en présence de plusieurs critères ayant chacun son originalité. C'est à ce cas que nous consacrons l'article.

Pour résoudre ce difficile problème, l'attitude classique a consisté jusqu'à présent à effectuer successivement plusieurs optimisations en prenant comme fonctions économiques des combinaisons linéaires des critères initiaux, la pondération étant remaniée de façon empirique à chaque passage, au vu des résultats antérieurs. Les réoptimisations sont généralement accompagnées d'adjonctions au système (1.1) de contraintes additionnelles de type (1.2). Cette méthode de tâtonnement aléatoire conduit à une exploration peu rigoureuse de l'ensemble des solutions. A cette attitude s'opposent les méthodes de choix complètement automatique se substituant au décideur, et, par là même, n'utilisant pas l'information complémentaire qu'il peut apporter (voir G. Boldur, V. Ionescu, I. Stancu [4]).

L'approche P.O.P. (Procédure par Orientation Progressive) proposé ici est différente des deux précédentes : il s'agit toujours d'une procédure séquentielle mais destinée surtout à l'organisation rationnelle de l'exploration des solutions en fonction de choix partiels effectués par le décideur à certaines étapes intermédiaires, au vu des résultats antérieurs de l'exploration. Sans chercher à lui faire expliciter son système de pondération, on intègre donc le décideur dans un système homme-machine, les travaux de celle-ci étant à chaque étape orientés par celui-là, lequel d'ailleurs au vu des résultats de l'exploration peut modifier ou sera contraint de modifier son système de jugement. Ainsi la notion de solution « satisfaisante » ne sera précisée que progressivement lors du déroulement du processus « choix-exploration » que nous proposons pour résoudre le problème.

Les concepts de base seront définis aux paragraphes 3, 4 et 5 qui suivent et le principe général de la procédure posé au paragraphe 6, l'objectif majeur étant de dégager l'information nécessaire à la décision finale en effectuant aussi peu d'itérations, (donc d'optimisations), que possible (dans la mesure où le coût de celles-ci est souvent non négligeable).

### 3. Les solutions « efficaces » du problème *P*

Une solution $X^1$ est évidemment préférable à une solution $X^2$ si

α) $$\sum_{l=1}^{n} c_l^j x_l^1 \geqslant \sum_{l=1}^{n} c_l^j x_l^2 \qquad 1 \leqslant j \leqslant m$$

β) L'une au moins des inégalités précédentes est une égalité c'est-à-dire que $X^1$ est au moins aussi bonne que $X^2$ sur tous les critères, et meilleure sur au moins un des critères : on dira que $X^1$ *domine uniformément* $X^2$ sur l'ensemble des critères.

Cette préférence définit un ordre partiel sur les solutions admissibles. On appelle solution *efficace* toute solution maximale au sens de cet ordre (voir Bod [3], S. Rudeanu [7]). Les solutions non efficaces sont, par définition, améliorables et ne peuvent constituer des décisions satisfaisantes pour le problème *P*.

Remarque : l'ensemble des solutions efficaces est non vide, dès que $D$ est borné non vide. En outre, dès que les formes linéaires $y^j(X)$ sont linéairement indépendantes (1) les solutions efficaces appartiennent à la frontière de $D$ (l'une au moins des inégalités (1.1) devient une égalité).

En effet à tout point $X_0$ du domaine d'admissibilité $D$ on peut faire correspondre le cône non vide $\mathcal{C}_0$ défini par les solutions du système (1.3) :

(1.3) $$y^j(X) \geqslant y^j(X_0), \quad j = 1, 2, \ldots, m$$

Tout point du cône est alors préférable au sommet $X_0$.

Ainsi, si $X_0$ est strictement intérieur à $D$ il ne peut être efficace puisque alors l'ensemble : $\mathcal{C}_0 \cap D$ n'est pas réduit à $X_0$ et que tout $X' \in \mathcal{C}_0 \cap D$, $X' \neq X_0$ est préférable à $X_0$ (fig. 1).

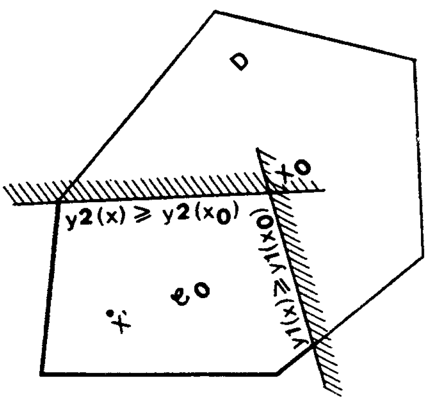



**Figure 1**

(1) C'est le cas le plus général, cette hypothèse étant pratiquement toujours vérifiée dans les problèmes concrets.

Lorsque les critères sont dépendants, on notera que toutes les solutions admissibles peuvent être efficaces (fig. 2). C'est le cas si et seulement si il existe des scalaires, tous strictement positifs $(\lambda j)$ tels que (voir démonstration dans M. Desplas [5], p. 90) : $\sum_j \lambda j y^j(X) = 0$.

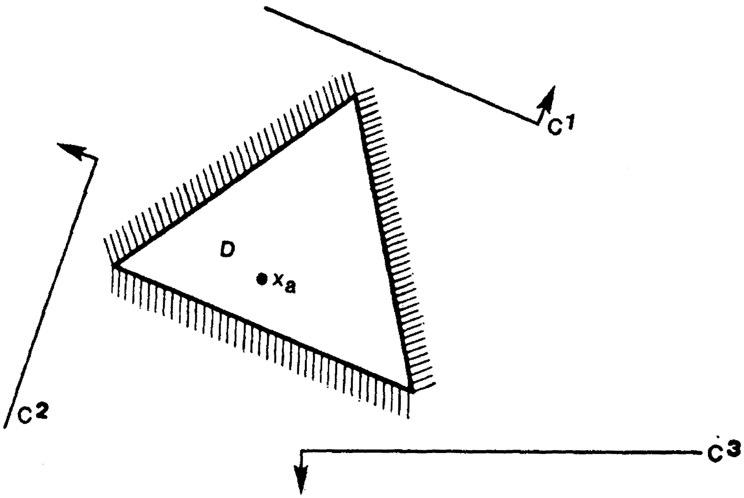



**Figure 2**
**Exemple dans $R^2$**

Ainsi, lorsque les $y^j$ sont linéairement indépendants, la réunion de l'ensemble des points de certaines des faces à $(n - 1)$ dimensions du polyèdre $D$ constitue l'ensemble des solutions efficaces ; en particulier les sommets de ces faces sont les sommets efficaces de $D$. Il existe des procédures pour constituer la liste de ces sommets (voir Bod [3]), mais le nombre de tels sommets peut devenir considérable dès que le nombre de variables du problème est relativement important ($n > 50$). La constitution de la liste des sommets efficaces devient alors trop coûteuse, de plus l'étendue et la diversité de l'ensemble des solutions efficaces en font un mauvais instrument de décision (sauf si l'on se trouve en présence de seulement deux critères, auquel cas on obtiendra la liste des sommets efficaces par paramétrisation de la fonction économique :

$$(\max)\ z = y^1(X) + \mu y^2(X)$$

avec $0 \leqslant \mu \leqslant 1$).

**Aussi proposons-nous de ne construire à chaque étape exploratoire du processus qu'une suite partielle de solutions efficaces, mais qui contiendra uniquement celles susceptibles de retenir l'attention du décideur, au cours d'une procédure itérative (voir § 6) où, à chaque pas, les choix effectués par lui entre les solutions qui lui sont proposées permettent de guider la recherche de nouvelles solutions efficaces.**

### 4. Les solutions « marginales » du problème $P$. Le tableau des gains. Les solutions « mixtes ».

— *Solutions marginales :*

Le point $Z^j$ sera dit solution *marginale* relativement au $j^{\text{ieme}}$ critère s'il est solution du problème $P^j$ :

$$(P^j) \qquad (\max)\, z = y^j(X)$$
$$A \cdot X \leqslant b$$
$$X \geqslant 0$$

et l'on pose $f^j = y^j(Z^j)$.

— *Tableau des gains :*

*Le tableau des gains*, correspondant à un ensemble fini de solutions admissibles, est constitué par les valeurs de ces solutions relativement à chacun des critères. Lorsque l'ensemble des solutions est constitué par les solutions marginales ($Z^j$) (fig. 3), les coefficients du tableau seront notés $y_{ij}$ avec :

$$y_{ij} = y^j(Z^i)$$

Ce tableau comporte $m$ colonnes et $m$ lignes ($m$ : nombre de critères). Dans la colonne ($j$) figure la valeur de chacune des solutions marginales relativement au $j^{\text{ieme}}$ critère. On a par construction :

$$f^j = y_{jj} \geqslant y_{ij} \text{ pour tout } i \neq j$$

Donc dans ce tableau, la valeur figurant dans la case diagonale est le maximum des valeurs de chaque colonne.

$$\begin{array}{cc|ccc|}
 & & \multicolumn{3}{c}{\overbrace{\qquad\qquad\qquad}^{\text{Critères}}} \\
 & & C^1\ C^2 & & C^m \\
\hline
\text{Solutions} & Z^1 & y_{11} y_{12} & & y_{1m} \\
\text{marginales} & Z^2 & y_{21} y_{22} & & y_{2m} \\
 & & & & \\
 & Z^m & y_{m1} y_{m2} & & y_{mm} \\
\hline
\end{array}$$

**Figure 3. Tableau des gains.**

— *Solutions mixtes :*

Étant donné une suite finie de solutions *réalisables* (1), que nous noterons ici

$$S^1, S^2, \ldots, S^p$$

(1) Définies par le fait qu'elles appartiennent au domaine d'admissibilité $D$ ; nous n'avons pas voulu utiliser le qualificatif d'admissible pour éviter l'ambiguïté quant à l'admissibilité du point de vue du décideur.

On appelle solution *mixte* associée à cette suite, toute solution $X$ de la forme :

$$X = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k S^k$$

avec

$$\sum_{k=1}^{p} \lambda_k = 1 \text{ et } 0 \leqslant \lambda_k < 1 \text{ pour } 1 \leqslant k \leqslant p$$

Soit $\mathcal{T}(S^1, \ldots, S^p)$ le plus petit convexe contenant les points $S^1, \ldots, S^p$. Les solutions mixtes représentent alors l'ensemble des points de ce polyèdre à l'exclusion des sommets. Les solutions mixtes associées à une suite de solutions réalisables sont évidemment réalisables étant donné la convexité du domaine d'admissibilité $D$.

Les valeurs, relativement à chacun des critères, des solutions mixtes attachées à la suite des solutions marginales $(Z^1, Z^2, \ldots, Z^m)$ se déduisent immédiatement du tableau des gains :

Si $X = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k Z^k$ on a en effet :

$$y^j(X) = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k y_{kj} \quad , \quad j = 1, 2, \ldots, m$$

— *Intérêt du tableau des gains :*

*a*) Le tableau des gains constitue ainsi l'information initiale indispensable pour éclairer un choix tenant compte de l'ensemble des critères. On a vu que l'obtention de l'optimum pour chaque critère — un coefficient par colonne — nécessite la résolution d'un programme linéaire. Si donc, l'on dispose d'un code permettant d'optimiser successivement plusieurs fonctions économiques, cette information sera obtenue à un coût raisonnable. Le coût de calcul des produits scalaires correspondant aux autres coefficients étant toujours négligeable.

*b*) Le nombre de lignes du tableau peut être réduit dans les deux cas suivants :

— Lorsque plusieurs problèmes $P^j$ ont une solution commune.

— Lorsqu'une solution marginale est au moins aussi bonne qu'une autre selon tous les critères (ceci ne peut advenir que si, pour au moins un critère. l'optimum n'est pas unique).

En particulier s'il se trouvait qu'une solution marginale $Z$ dominait uniformément toutes les autres, c'est-à-dire soit au moins aussi bonne que chacune des autres sur tous les critères, le problème $P$ serait évidemment terminé et $Z$ constituerait la solution la plus « satisfaisante », et ce quelque soit le système de pondérations du décideur.

*c*) Soulignons que l'information apportée par le tableau des gains peut remettre en cause les idées qu'on pourrait avoir *a priori* sur l'importance relative des différents critères. Ce sera le cas, notamment, lorsque pour le $i^{\text{ieme}}$ critère, considéré comme important, un nombre suffisant de solutions marginales prennent des valeurs $y_{ki}$ considérées comme satisfaisantes ou proches de l'optimum, alors que pour le $j^{\text{ieme}}$ critère, dont on pouvait initialement penser qu'il était peu important, on obtient un maximum $y_{jj}$ assez médiocre, et de nombreuses valeurs $y_{kj}$ inadmissibles. Dans ces conditions, l'ordre relatif des deux critères sera inversé : le $j^{\text{ieme}}$ critère prendra le pas sur le $i^{\text{ieme}}$.

## 5. Efficacité des solutions marginales

Une solution marginale $Z^j$ sera efficace dès que l'optimum du problème $(P^j)$ est unique. Sinon il peut éventuellement exister $Z'^j$ telle que :

$$y^j(Z'^j) = y^j(Z^j) = f^j$$
$$y^i(Z'^j) \geqslant y^i(Z^j) \qquad i \neq j$$

Une au moins des inégalités précédentes étant vérifiée strictement. Nous appellerons solution *extrême* une solution marginale efficace.

Exemple : dans $R^2$ supposons $D$ défini par le système :

$$x_1 + x_2 \leqslant 7$$
$$x_1 + 2x_2 \leqslant 10$$
$$x_2 \leqslant 4$$
$$x_1, x_2 \geqslant 0$$

Les deux critères choisis étant :

$$y^1(X) = x_1$$
$$y^2(X) = x_2$$

le domaine d'admissibilité est représenté sur la figure suivante :

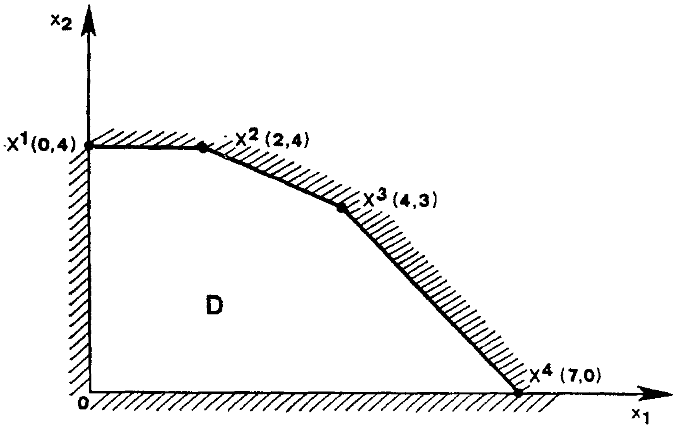



**Figure 4**

Tous les points du segment $(X^1, X^2)$ sont solutions marginales relativement au 2e critére. alors que $X^4$ est solution marginale unique relativement au premier critère. Les points $X^2$ et $X^4$ sont les solutions *extrêmes*. L'ensemble des points des segments $(X^2X^3)$ et $(X^3X^4)$ représentent les solutions efficaces ; ceux des segments $(X^1X^4)$, $(X^2X^4)$ sont des solutions mixtes (ce ne sont pas les seules).

Les solutions marginales $Z^j$ obtenues par la résolution des programmes linéaires $P^j$ peuvent, théoriquement du moins, ne pas être toujours efficaces. En fait, compte tenu de la remarque qui suit, il est possible d'assurer qu'elles le seront, à condition d'introduire une perturbation dans les fonctions économiques $y^j(X)$.

Remarque :

Tout point admissible $\bar{X}$ vérifiant :

$$F(\bar{X}) = \max_{X \in D} F(X)$$

avec

$$F(X) = \sum_{k=1}^{m} \mu_k y^k(X) \quad ; \quad \mu_k > 0 \quad , \quad k = 1, \ldots, m$$

est une solution efficace.

Sinon en effet, il existerait $X' \in D$ et $j_0 \in (1, 2, \ldots, m)$ tels que :

$$\begin{aligned} &y^{j_0}(X') > y^{j_0}(X) \\ &y^j(X') \geqslant y^{j_0}(X) \qquad j \neq j_0 \end{aligned}$$

dans ces conditions on aurait :

$$F(X') = \sum_{k=1}^{m} \mu_k y^k(X') > \sum_{k=1}^{m} \mu_k y^k(\bar{X}) = F(\bar{X})$$

ce qui est contraire à l'hypothèse.

Ainsi on pourra constituer le tableau des gains à partir d'une suite de solutions marginales efficaces $Z^j$, dites extrêmes, obtenues comme solutions des problèmes $P'^j$.

$$(P'^j) \qquad \begin{cases} \max Z^j = y^j(X) + \varepsilon \cdot \sum_{i \neq j} y^i(X) \\ A \cdot X \leqslant b \\ X \geqslant 0 \end{cases}$$

avec $\varepsilon$ positif suffisamment petit.

(Ainsi dans l'exemble de la figure 4, la solution marginale efficace $X^2$ est obtenue en optimisant $y^1(X) + \varepsilon \cdot y^2(X)$, avec par exemple $\varepsilon = 10^{-5}$.)

## 6. **L'approche proposée:** P.O.P. (Procédure par Orientation Progressive)

Ainsi que le lecteur a pu progressivement l'appréhender dans ce qui précède, il s'agit d'une méthode itérative dont chaque *itération* est décomposée en deux phases :

1) Dans la phase $A$ (*phase de choix*), on part de l'examen du tableau des gains associé à un ensemble de solutions efficaces $X^1, X^2, \ldots, X^p$. Cette phase conduit à la sélection d'un sous-ensemble de solutions $\mathfrak{T}'$, contenu dans le polyèdre $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}(X^1, X^2, \ldots, X^p)$. On pourra toujours arrêter la procédure, à l'issue de cette phase, si dans l'ensemble $\mathfrak{T}'$ des solutions sélectionnées (ou plutôt non rejetées) figure une solution jugée à tout point de vue satisfaisante par le décideur. Sinon on aborde la phase $B$.

2) La phase $B$ est une *phase de réoptimisation* sur un domaine d'admissibilité restreint obtenu en adjoignant au système (1.1) des contraintes

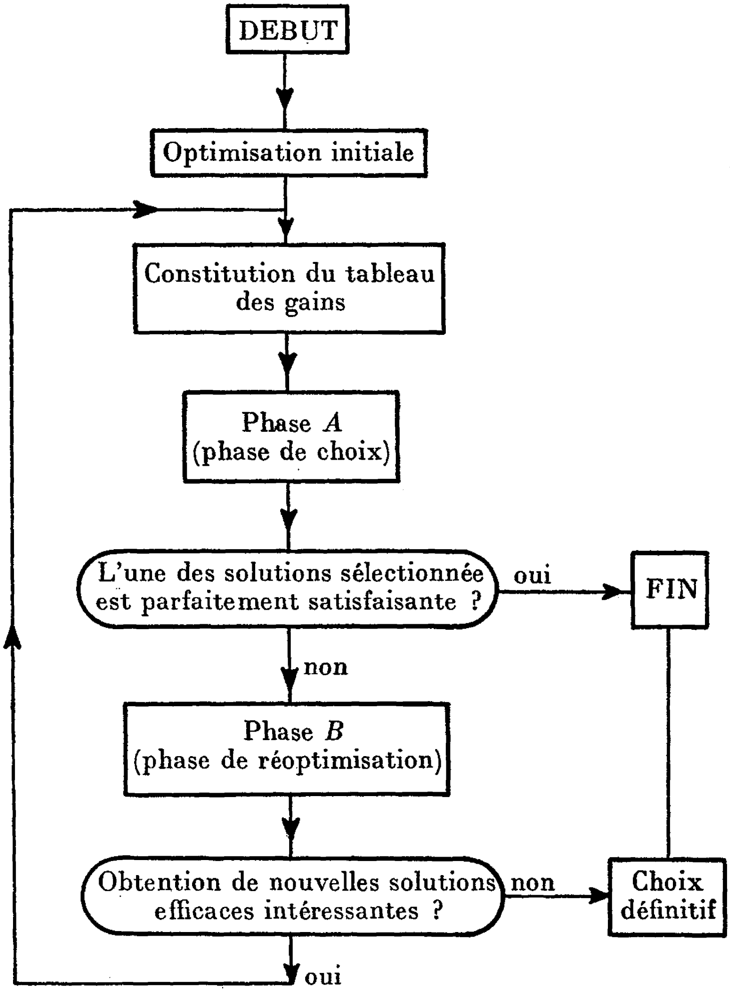



**Figure 5.** ORGANIGRAMME GENERAL

additionnelles, ces contraintes étant fonction du choix $\mathcal{T}'$ effectué par le décideur lors de la phase $A$. A l'issue de cette phase de réoptimisation si l'on obtient de nouvelles solutions efficaces susceptibles d'intéresser le décideur, elles seront examinées lors de la phase $A$ de l'itération suivante. Sinon, le décideur devra procéder au choix définitif parmi les solutions figurant dans $\mathcal{T}'$.

L'intérêt de cette procédure nous paraît devoir résider en ce qu'elle offre au décideur la possibilité d'affiner ou de modifier son système de jugement, à mesure qu'il avance dans la connaissance du domaine des solutions qu'il explore.

## II. LA PHASE *A* (PHASE DE CHOIX)

C'est la phase de choix proprement dit. On part de l'examen du tableau des gains associé à un ensemble de solutions réalisables efficaces $(X^1, X^2, ..., X^p)$, (lors de la première itération il s'agira de l'ensemble des solutions extrêmes $Z^1, Z^2, ..., Z^m$). Si l'une des solutions $X^i$ est considérée comme globalement très satisfaisante sur l'ensemble des critères, le problème sera terminé. Sinon c'est que toute solution $X^i$ est, soit « médiocre » selon au moins un critère important, soit « mauvaise » selon au moins un critère d'importance moins considérable. On se trouve en présence d'une situation où les points de vue apparaissent comme contradictoires, ce qui nous conduit à étudier les solutions de « compromis » que représentent les points du polyèdre : $\mathcal{T} = \mathcal{T}(X^1, X^2, ..., X^p)$. L'étude de ces solutions doit aboutir à la sélection d'un sous-ensemble $\mathcal{T}'$, contenu dans $\mathcal{T}$, et correspondant à la zone de compromis la plus intéressante. Cette sélection étant faite, on recherchera lors de la phase $B$ s'il existe dans $D$ des solutions efficaces préférables à (dominant uniformément) certains points retenus du polyèdre $\mathcal{T}'$.

$\mathcal{T}'$ sera défini comme le plus petit convexe contenant la suite $(X'^1, ..., X'^q)$ avec

$$X'^i \in \mathcal{T}(X^1, ..., X^p) \qquad 1 \leqslant i \leqslant q \text{ et } q \leqslant p.$$

Une telle suite $(X'^1, ..., X'^q)$ sera construite *progressivement* à partir de la suite initiale $(X^1, ..., X^p)$. Cette construction sera réalisée en une suite finie *d'étapes de décisions élémentaires* auxquelles correspondra une suite de polyèdres $\mathcal{T}_j$ tels que :

$$(X^1, ..., X^p) = \mathcal{T} \supset \mathcal{T}_1 \supset ... \supset \mathcal{T}_e = \mathcal{T}'$$

Chaque polyèdre $\mathcal{T}_j$ étant défini par ses points extrêmes :

$$\mathcal{T}_j = \mathcal{T}(S_j^1, ..., S_j^{pj})$$

Il se construira à partir de $\mathcal{T}_{j-1}$, défini par $(S_{j-1}^1, ..., S_{j-1}^{pj-1})$, au vu du tableau des gains associé à $(S_{j-1}^1, ..., S_{j-1}^{pj-1})$ :

— d'une part en éliminant un ou plusieurs des sommets $S_{j-1}^i$

— d'autre part en s'autorisant l'introduction d'un ou plusieurs points non extrêmes de $\mathcal{T}_{j-1}$ ; l'introduction de tels points devant jouer le rôle d'un compromis compensant l'exclusion des sommets $S^i_{j-1}$ éliminés. On exigera ici que le nombre de points introduits ne soit jamais supérieur à celui des points éliminés et que chacun des points de la suite $(S^1_j, ..., S^{pj}_j)$ soit effectivement un sommet du polyèdre $\mathcal{T}_j$.

Ces deux conditions, relatives à l'introduction de solutions-compromis, permettent de clarifier la sélection et d'en accélérer la convergence. On peut penser qu'il existe une large classe de problèmes concrets pour lesquels de telles exigences ne gêneront en rien le décideur.

Si à chaque étape le nombre de points-compromis introduits est strictement inférieur au nombre de sommets éliminés, alors le nombre d'étapes de la phase est inférieur ou égal à $p$. Cette variante rapide de la procédure a cependant l'inconvénient de pouvoir conduire à l'élimination prématurée de solutions intéressantes.

Lorsque le décideur se refusera à éliminer aucun des sommets d'un polyèdre $P_e$ la phase de choix sera terminée et l'on posera :

$$\mathcal{T}' = \mathcal{T}_e$$

et l'on passera en phase $B$.

Évidemment la phase de choix est également terminée lorsqu'un polyèdre $\mathcal{T}'$ se réduit à un seul point $S$. Lorsque $S$ est une solution mixte de $\mathcal{T}'$, $S$ n'est pas nécessairement efficace, aussi pourra-t-on passer alors en phase $B$ pour tenter d'obtenir une solution meilleure. Par contre, si $S$ est un sommet de $\mathcal{T}$, ce sera la solution cherchée.

A titre d'exemple on présente maintenant deux procédures de réalisation de l'étape élémentaire de décision permettant le passage de $\mathcal{T}_j$ à $\mathcal{T}_{j+1}$.

## 1. Procédure de comparaison à la moyenne

a) *Principe de la procédure :*

Étant donné la suite $\mathcal{S}_j = (S^1_j, ..., S^{pj}_j)$ des sommets du polyèdre $\mathcal{T}_j$, suite notée ici plus simplement : $\mathcal{S} = (S^1, ..., S^p)$, la solution *moyenne* $\bar{S}$ sera définie par :

$$\bar{S} = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{p} S^i$$

La valeur de $\bar{S}$ selon chaque critère est alors égale à la valeur moyenne des points de la suite sur ce critère :

$$y_j(\bar{S}) = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{p} y_j(S^i)$$

Rappelons que $\bar{S}$ est une solution admissible et, bien que cela soit assez évident, qu'elle n'implique en aucune façon un mélange des critères : chacun de ceux-ci conserve son intégrité (chacune des valeurs moyennes calculées ne concernant qu'un critère à la fois).

Chaque sommet $S^i$ est alors comparé à la moyenne $\bar{S}$ ; s'il est considéré comme moins « bon » que celle-ci, il sera éliminé. Les sommets de $\mathcal{T}_{j+1}$ seront alors les sommets de $\mathcal{T}_j$ non éliminés auxquels on pourra adjoindre le point $\bar{S}$ (dans la mesure où celui-ci constitue un compromis intéressant compte tenu des choix effectués).

$\bar{S}$ présente l'intérêt de représenter la base de comparaison la plus « objective » (en l'absence d'information supplémentaire). De plus on va voir que le choix de l'élimination ou de la conservation d'un sommet $S^i$ après confrontation avec $\bar{S}$ peut être quasi-automatisé, mais il n'est pas dans notre objectif d'indiquer une procédure systématique d'élimination de sommets (ou stratégies) : le décideur pourra dans chaque cas spécifique, compte tenu des particularités de son problème, éliminer les stratégies de son choix. Cependant, à titre d'exemple, nous suggérons une façon de faire possible dont on pourra s'inspirer.

b) *Règles d'élimination :*

On compare $S^i$ à $\bar{S}$, le problème est de décider si $S^i$ doit être ou non conservé.

Désignons par

$$I = \{ 1, 2, \dots, p \} \quad , \quad J = \{ 1, 2, \dots, m' \}$$

$J$ défini comme le sous-ensemble des $m'$ critères auxquels on s'intéresse dans l'itération considérée (on a $m' \leqslant m$ et lors de la 1re itération : $m' = m$).

$$M_j = \operatorname*{Max}_{i \in I} y_{ij} = y_{jj}$$

$$m_j = \min_{i \in I} y_{ij}$$

$$\mu_j = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{p} y_{ij}$$

Les $y$ sont les éléments du tableau des gains associé à $\mathcal{T}$.

$M_j$ est la valeur optimale du critère $C^j$, $m_j$ la valeur minimale du critère $C^j$, $\mu_j$ la valeur moyenne prise par le critère $C^j$, sur l'ensemble des solutions $S^i$, $i \in I$ (voir fig. 6).

Posons :

$p_j^*$ la proportion de critère $C^j$ pour lesquels $y_j > \mu_j$ (1)

$$\mu_{ij} = \frac{y_{ij} - \mu_j}{M_j - m_j}$$

$$q_j^* = \operatorname{Max} (- \tau_i, 0) \text{ avec } \tau_i = \min_j \alpha_{ij}$$

(1) Ceci si l'on a aucune raison de penser qu'un critère est plus important qu'un autre ; sinon cette proportion sera pondérée par les poids des différents critères mais le rôle joué par ces poids serait ici local et limité, alors que dans le cas classique (voir I.2 *a*) ils déterminaient la solution.

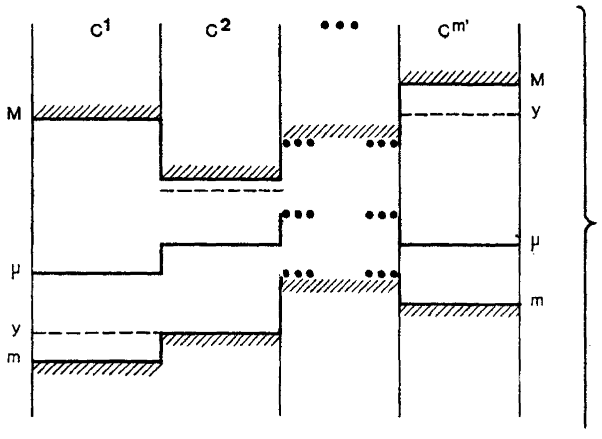



**Figure 6**

**Profil des valeurs maximales ($M$), minimales ($m$), moyennes ($\mu$) et courantes ($y$) pour chacun des critères**

$p_i^*$ et $q_i^*$ sont compris entre 0 et 1 [1].

Soient deux paramètres $P$ et $Q$ compris entre 0 et 1.

On élimine la ou les solutions $S^i$, $i \in I$ telles que :

$$p_i^* < P$$

*et*

$$q_i^* > Q$$

(cette condition n'intervenant que lorsque $p_i^* \neq 0$).

Les seuils $P$ et $Q$ sont à apprécier par le décideur en fonction de l'importance des critères $C^j$ et des valeurs $M, m, \mu, y$. Si par exemple pour un couple $(P_0, Q_0)$ aucune solution $S^i$ ne s'élimine, c'est-à-dire

$$\forall_i \qquad p_i^* \geqslant P_0 \text{ ou } q_i^* \leqslant Q_0$$

et si l'on désire quand même éliminer, il faudra soit augmenter $P_0$, soit diminuer $Q_0$ soit faire les deux, sinon on passera en phase $B$.

(1) ($p_i^*$ et $q_i^*$ sont quelque peu analogues aux indicateurs de concordance et de discordance de la méthode Electre : R. Benayoun, B. Sussmann, B. Roy [1] et B. Roy [7], sauf qu'ici les $p_i^*$ et $q_i^*$ sont calculés pour tout $i$, par rapport à un même point de repère admissible : la moyenne).

c) *Exemple numérique*

$$\mathcal{C} = \{ C^1, C^2, C^3, C^4 \},\ \pi = \{ 1, 1, 1, 1 \} \text{ (poids)}$$

Étape 1 : $\mathcal{S}^{(1)} = \{ S_1^{(1)}, S_2^{(1)}, S_3^{(1)}, S_4^{(1)} \}$, $I^{(1)} = \{ 1, 2, 3, 4 \}$

| | $C^1$ | $C^2$ | $C^3$ | $C^4$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $S_1^{(1)}$ | 50 | 120 | 400 | 6 | Tableau des $y_{ij}^{(1)}$ |
| $S_2^{(1)}$ | 42 | 150 | 420 | 14 | |
| $S_3^{(1)}$ | 30 | 100 | 500 | 12 | |
| $S_4^{(1)}$ | 37 | 80 | 470 | 20 | |
| $\bar{S}_{I^{(1)}}$ | 39.75 | 112.50 | 447.50 | 13 | |
| $M - m$ | 20 | 70 | 100 | 14 | |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $S_1^{(1)}$ | 10.25 | 7.50 | — 47.50 | — 7 | Tableau des $y_{ij}^{(1)} - \mu_j^{(1)}$ |
| $S_2^{(1)}$ | 2.25 | 37.50 | — 27.50 | 1 | |
| $S_3^{(1)}$ | — 9.75 | — 12.50 | 52.50 | — 1 | |
| $S_4^{(1)}$ | — 2.75 | — 32.50 | 22.50 | 7 | |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $S_1^{(1)}$ | 0.51 | 0.11 | — 0.47 | — 0.50 | Tableau des $\alpha_{ij}^{(1)} = \dfrac{y_{ij} - \mu_j}{M_j - m_j}$ |
| $S_2^{(1)}$ | 0.11 | 0.54 | — 0.27 | 0.07 | |
| $S_3^{(1)}$ | — 0.49 | — 0.18 | 0.52 | — 0.07 | |
| $S_4^{(1)}$ | — 0.14 | — 0.46 | 0.22 | 0.50 | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| $S_1^{(1)}$ | $p_1^{*(1)} = 0.50$ | $q_1^{*(1)} = 0.50$ | Tableau des $(p^{*(1)}, q^{*(1)})$ |
| $S_2^{(1)}$ | $p_2^{*(1)} = 0.50$ | $q_2^{*(1)} = 0.27$ | |
| $S_3^{(1)}$ | $p_3^{*(1)} = 0.25$ | $q_3^{*(1)} = 0.49$ | |
| $S_4^{(1)}$ | $p_4^{*(1)} = 0.50$ | $q_4^{*(1)} = 0.46$ | |

Supposons que l'on choisisse $P^{(1)} = 0{,}75$, $Q^{(1)} = 0{,}48$

les solutions éliminées sont alors $\mathcal{S}'^{(1)} = \{ S_1^{(1)}, S_3^{(1)} \}$

Remarque : la détermination des seuils $(P, Q)$ peut ne pas apparaître comme indispensable, l'élimination pouvant s'effectuer facilement par l'examen des valeurs $p^*$, $q^*$.

Étape 2 : $\mathcal{S}^{(2)} = \{ S_1^{(2)} = S_2^{(1)}, S_2^{(2)} = S_4^{(1)}, S_3^{(2)} = \bar{S}_{I^{(1)}} \}$, $I^{(2)} = \{ 1, 2, 3 \}$

| | $C^1$ | $C^2$ | $C^3$ | $C^4$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $S_1^{(2)}$ | 42 | 150 | 420 | 14 | Tableau des $y_{ij}^{(2)}$ |
| $S_2^{(2)}$ | 37 | 80 | 470 | 20 | |
| $S_3^{(2)}$ | 39 75 | 112.50 | 447.50 | 13 | |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\bar{S}_{I^{(2)}}$ | 39.60 | 114.20 | 445.80 | 15.70 | |
| $S_1^{(2)}$ | 0.48 | 0.51 | 0.52 | $-0.28$ | Tableau des $\alpha_{ij}^{(2)}$ |
| $S_2^{(2)}$ | $-0.52$ | $-0.49$ | 0.48 | 0.72 | |
| $S_3^{(2)}$ | 0.03 | $-0.02$ | 0.03 | $-0.45$ | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| $S_1^{(2)}$ | $p_1^{*(2)} = 0{,}50$ | $q_1^{*(2)} = 0{,}52$ | Tableau de $(p^{*(2)}, q^{*(2)})$ |
| $S_2^{(2)}$ | $p_2^{*(2)} = 0{,}50$ | $q_2^{*(2)} = 0{,}52$ | |
| $S_3^{(2)}$ | $p_3^{*(2)} = 0{,}50$ | $q_3^{*(2)} = 0{,}45$ | |

Si l'on conserve les mêmes valeurs $P$, $Q$ c'est-à-dire $P^{(2)} = 0{,}75$, $Q^{(2)} = 0{,}48$ les solutions $\mathcal{S}'^{(2)} = \{ S_1^{(2)}, S_2^{(2)} \}$ sont éliminées.

Remarque : il n'est pas obligatoire de conserver les mêmes valeurs des seuils $P$ et $Q$. Par exemple si l'on choisit $P^{(2)} = 0{,}75$ et $Q^{(2)} = 0{,}40$ alors les solutions $S_1^{(2)}$, $S_2^{(2)}$, $S_3^{(2)}$ sont éliminées, $\mathcal{S}^{(3)} = \{ \bar{S}_{I^{(2)}} \}$, et dans ce cas on peut :

— soit retenir la stratégie mixte $\bar{S}_{I^{(2)}} = \{ 39.60 \;\; 114.20 \;\; 445.80 \;\; 15.70 \}$

— soit, si celle-ci n'est pas jugée satisfaisante, arrêter la procédure et passer en phase $B$.

Étape 3 : $\mathcal{S}^{(3)} = \{ S_1^{(3)} = S_3^{(2)}, S_2^{(3)} = \bar{S}_{I^{(2)}} \}$, $I^{(3)} = \{ 1, 2 \}$

| | $C^1$ | $C^2$ | $C^3$ | $C^4$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $S_1^{(3)}$ | 39.75 | 112.50 | 447.50 | 13 | Tableau des $y_{ij}^{(3)}$ |
| $S_2^{(3)}$ | 39.60 | 114.50 | 445.80 | 15.70 | |
| $\bar{S}_{I^{(3)}}$ | 39,67 | 113,35 | 446,65 | 14,35 | |

Dans ce cas, et plus généralement, dans tous les cas où l'ensemble $\mathcal{S}$ n'est plus composé que de deux solutions après éliminations successives des autres, il est inutile de calculer les indicateurs $p^*$, $q^*$ car ils seront égaux pour les deux solutions. On peut alors :

— soit sélectionner une des deux solutions $S_1^{(3)}$ ou $S_2^{(3)}$ ;

— soit sélectionner la moyenne $\bar{S}_{I^{(3)}}$ ou un point quelconque du segment $(S_1^{(3)}, S_2^{(3)})$ ;

— soit, si l'on n'est pas satisfait, arrêter la procédure et passer en phase $B$.

Remarques :

— l'indicateur $p$ pourrait sembler peu discriminant (par exemple $p_1^{*(2)} = p_2^{*(2)} = p_3^{*(2)} = 0{,}50$), ce sera d'ailleurs le plus souvent le cas quand les poids des critères seront égaux. Mais si les critères sont d'importance différente alors $p$ sera significatif ;

— on peut imaginer des variantes à cette procédure, comme par exemple tenir compte, pour le calcul de $q^*$, non du plus grand écart négatif $\alpha_{ij}$ mais, comme dans la méthode Electre ([1], [7]), du 2e plus grand, etc.

## 2. Procédure de comparaison des sommets par couples

Au vu du tableau des gains correspondant à la suite de solutions $(S^1, ..., S^p)$ on choisira tout d'abord un *sommet de référence* parmi ceux présentant une ou plusieurs des caractéristiques suivantes :

— il est optimum dans $\mathcal{T}_j$ sur un critère prépondérant,

— il est optimum dans $\mathcal{T}_j$ pour un critère sur lequel un nombre important de sommets $S^i$ prennent des valeurs inacceptables.

Soit $S^{i_o}$ le sommet de référence choisi, il devra nécessairement figurer dans l'ensemble des sommets sélectionnés. On procède successivement à la comparaison des $(p - 1)$ couples de sommets $(S^{i_o}, S^i)$, $i \neq i_o$. A l'issue de chacune de ces comparaisons une des décisions suivantes doit être prise :

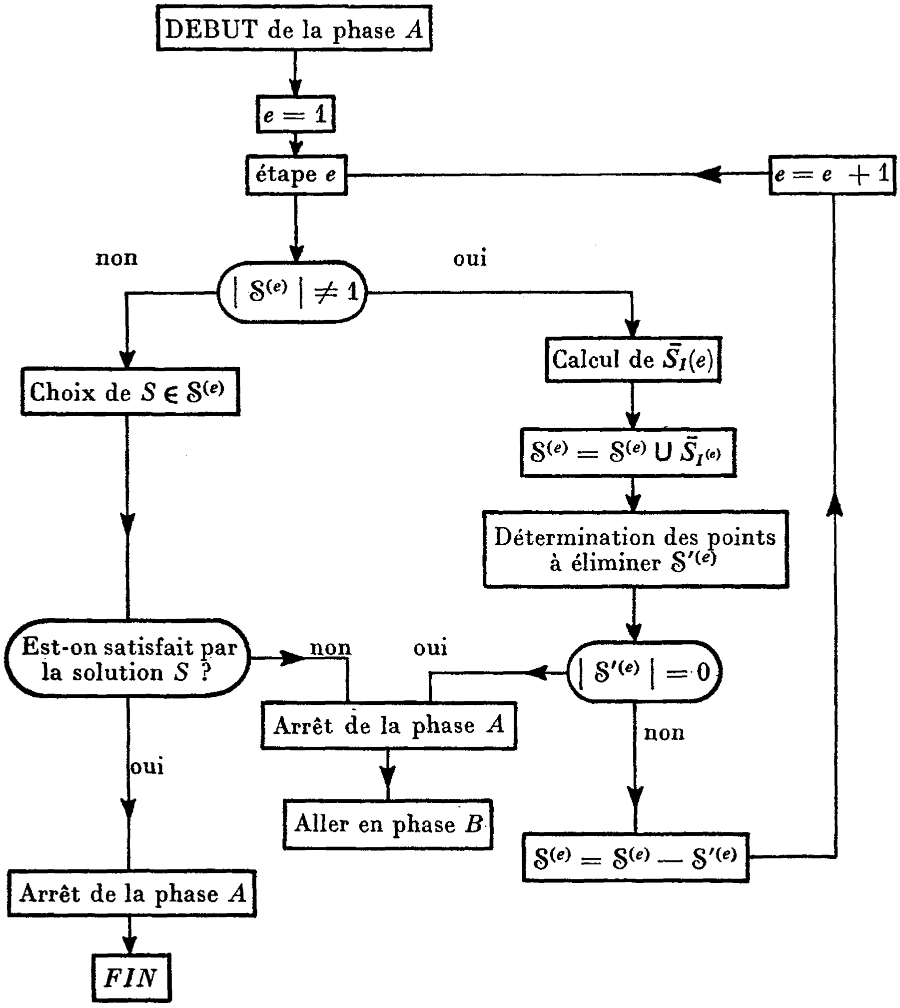
— élimination de $S^i$ (ce qui entraîne l'inclusion de $\mathcal{T}_{j+i}$ dans le polyèdre $\mathcal{T}(S^1, ..., S^{i-1}, S^{i+1}, ..., S^p)$),

— sélection de $S^i$ (ce qui implique l'appartenance du segment $(S^{i_o}, S^i)$ au polyèdre $\mathcal{T}_{j+1}$.

— Substitution à $S^i$ du point $S'^i = \lambda^i S^i + (1 - \lambda) S^{i_o}$ (avec $0 < \lambda^i < 1$), la valeur de $\lambda^i$, caractéristique du compromis accepté, est choisie par l'utilisateur.

Cette procédure a l'intérêt de présenter clairement les options à prendre lorsqu'on est en présence de critères d'importance différente. Un exemple d'application à un problème concret sera présenté dans la 4e partie de cet article.

3. **Organisation de la phase** $A$ (avec utilisation de la technique de la moyenne)




$\mathcal{S}^{(e)}$ ensemble des points extrêmes de $\mathcal{T}$ à l'étape $e$,

$\bar{S}_{I^{(e)}}$ moyenne calculée sur $\mathcal{S}^{(e)}$,

$\mathcal{S}'^{(e)}$ ensemble des points de $\mathcal{S}^{(e)}$ éliminés à l'étape $e$.

**Figure 7.** ORGANISATION DE LA PHASE $A$

### 4. Remarques générales sur la phase *A*

Deux procédures de choix ont été présentées, mais il est parfaitement possible de les combiner ou d'en imaginer d'autres spécialement adaptées à un problème particulier. On pourra aussi par exemple, pour la comparaison des solutions, prendre en compte un nombre $m_1$ de critères secondaires, le tableau des gains sera alors complété par les $m_1$ colonnes correspondant à ces critères. Les notes figurant dans ces colonnes seront établies après examen des composantes de chaque solution extrême. Selon le type de critère secondaire ces notes pourraient être :

— une valeur numérique si le critère est analytique,

— une appréciation si le critère est qualitatif (jugement sur la facilité de mise en œuvre d'une solution, son adaptabilité, ...).

Les valeurs des solutions relativement aux critères secondaires seront seulement constatées, et celles-ci n'interviendront dans la décision que lorsque la seule considération des critères principaux ne pourra permettre un choix clair.

Pour terminer on remarquera que, quelque soit la procédure adoptée, la phase *A* ne comportera que très peu de calculs, d'ailleurs simples à effectuer. Par contre, les règles et sous-règles de décisions peuvent être complexes à formaliser. Aussi sera-t-il souvent facile d'effectuer à la main l'ensemble des opérations de la phase *A*. Faisons observer toutefois que cette approche se prête particulièrement bien au mode conversationnel et qu'alors même en phase *A* le recours à l'ordinateur peut être envisagé avec profit.

## III. LA PHASE *B* (PHASE DE REOPTIMISATION)

C'est la phase ayant pour but d'obtenir de nouvelles solutions efficaces, parmi celles figurant dans le sous-ensemble de $D$ dont on sait, compte tenu des choix intermédiaires déjà effectués, qu'il est susceptible de contenir des solutions intéressantes : ce sous-ensemble se définira simplement comme l'ensemble des points de $D$ qui, sur chacun des critères, prennent une valeur au moins égale à une valeur minimum donnée. Cette valeur minimum pour chacun des critères est choisie à l'itération $k$ en fonction des valeurs des différents sommets des polyèdres $\mathfrak{J}^k$ et $\mathfrak{J}'^k$ relativement à ce critère.

Le domaine d'admissibilité de la phase de réoptimisation à l'itération $k$ (qu'on notera $D^k$) étant ainsi défini, on calculera les nouvelles solutions extrêmes, ainsi que l'optimum d'une fonction « mixte », somme pondérée des critères, dont les coefficients *se déduiront* du seul examen des résultats de la phase de choix qui a précédé.

**1. Le domaine d'admissibilité $D^k$**

$D^k$ sera l'intersection avec $D$ de l'ensemble des solutions du système d'inégalités suivant :

(3.1) $$y_j(X) \geqslant l_j^k \qquad j = 1, 2, ..., m$$

$l_j^k$, niveau minimum toléré pour le critère $C^j$ à l'itération $k$, doit évidemment être choisi en tenant compte des options qui ont été prises lors de la phase de choix immédiatement antérieure. Lors de cette phase on a sélectionné, à l'intérieur du polyèdre de solutions admissibles $\mathcal{S}^k$, un sous-ensemble $\mathcal{S}'^k$ réunissant les solutions les plus intéressantes. Ainsi, notant [1] :

$$\underline{y}_j'^k = \min X \in \mathcal{S}'^k \, y_j(X) \qquad j = 1, 2, ..., m$$

et

$$\underline{y}_j^k = \min X \in \mathcal{S}^k \, y_j(X)$$

a-t-on évidemment :

$$\underline{y}_j'^k \geqslant \underline{y}_j^k \qquad j = 1, 2, ..., m$$

En général, il sera légitime de poser :

(3.2) $$l_j^k = \underline{y}_j'^k$$

ainsi est-on certain que toute solution figurant dans $D^k$ prendra, sur tout critère, une valeur au moins égale à la plus faible des valeurs prises par ce critère sur l'ensemble des points non rejetés.

Si par contre on a quelques raisons de s'orienter vers l'exploration d'un type plus particulier de solutions (au vu, par exemple, du tableau des gains associé aux sommets de $\mathcal{S}'^k$), il est toujours possible de choisir des niveaux $l_j^k$ différents de ceux indiqués par (3.2). En particulier, si l'on désire favoriser l'obtention de valeurs aussi bonnes que possible sur un ou plusieurs critères prépondérants, on pourra :

— soit imposer pour les critères en question une valeur minimum strictement supérieure à $\underline{y}_j'^k$ (notons qu'il faudra alors s'assurer qu'il existe au moins une solution de $\mathcal{S}'^k$ vérifiant les nouvelles contraintes, cette précaution permettant de se prémunir contre le risque de définir un domaine $D^k$ qui soit vide) ;

— soit choisir, pour des critères secondaires (ou des critères pour lesquels tous les sommets de $\mathcal{S}'^k$ prennent des valeurs satisfaisantes), des niveaux $l_j^k$ inférieurs à $\underline{y}_j'^k$. Par exemple :

$$\underline{y}_j^k \leqslant l_j^k < \underline{y}_j'^k$$

Ce faisant on se donne la possibilité de ne pas écarter des solutions intéressantes qui ne seraient rejetées qu'en raison de leur valeur médiocre sur un petit nombre de critères secondaires.

---

(1) Les valeurs suivantes s'obtiennent directement en considérant les tableaux des gains relatifs à $\mathcal{S}^k$ et $\mathcal{S}'^k$.

La condition :

$$l_j^k \geqslant \underline{y}_j^k$$

est introduite dans le seul but d'assurer l'inclusion :

$$D^k \subseteq D^{k-1}$$

## 2. Les fonctions « objectifs »

On doit maintenant calculer les valeurs maximum prises par les différents critères sur le domaine $D^k$ qui vient d'être défini. On notera [1] :

$$\bar{y}_j'^k = \max X \in \mathcal{S}'^k y_j(X) \qquad j = 1, 2, ..., m$$

$$\bar{y}_j^k = \max X \in \mathcal{S}^k y_j(X)$$

Pour tout indice $j$ on a évidemment :

$$\bar{y}_j'^k \leqslant \bar{y}_j^k$$

Soient alors :

$$\hat{y}_j^k = \max_{X \in D^k} y_j(X) \qquad j = 1, 2, ..., m$$

les valeurs cherchées.

De l'inclusion $D^k \subseteq D^{k-1}$ il résulte :

$$\hat{y}_j^k \leqslant \bar{y}_j^k$$

De plus, si $D^k$ a été défini en choisissant pour tous les critères des seuils $l_j^k$ vérifiant l'inégalité :

$$l_j^k \leqslant \underline{y}_j'^k \tag{3.3}$$

on aura alors : $\mathcal{S}'^k \subseteq D^k$

et dans ces conditions on pourra écrire :

$$\bar{y}_j'^k \leqslant \hat{y}_j^k \leqslant \bar{y}_j^k \qquad j = 1, 2, ..., m$$

Sinon, s'il existe au moins un critère $C^{j0}$ pour lequel on a choisi une valeur $l_{j0}^k$ vérifiant :

$$\underline{y}_{j0}'^k < l_{j0}^k \leqslant \bar{y}_{j0}'^k$$

la condition $\bar{y}_j'^k \leqslant \hat{y}_j^k$ pourra alors n'être pas vérifiée pour certains critères secondaires, sacrifiés afin d'assurer que toute nouvelle solution efficace ait, sur les critères principaux, une valeur supérieure aux seuils $l_{j0}^k$ choisis.

Le nombre de réoptimisations nécessaires pour obtenir toutes les valeurs $\hat{y}_j^k$ sera parfois strictement inférieur à $m$. En effet, si l'on a jugé

(1) Les valeurs suivantes s'obtiennent directement en considérant les tableaux des gains relatifs à $\mathcal{S}^k$ et $\mathcal{S}'^k$.

devoir conserver, dans la phase de choix, un ou plusieurs points correspondant à des solutions extrêmes sur $D^{k-1}$ (et donc sur $\mathcal{S}^{k-1}$) on aura pour les critères correspondants :

$$\hat{y}_j^k = \bar{y}_j^k = \bar{y}_j'^k \tag{3.4}$$

ceci à la seule condition d'avoir choisi des seuils $l_j^k$ vérifiant les conditions (3.3).

Pour chacune des réoptimisations qui devront effectivement être réalisées on maximisera en fait les critères perturbés :

$$y_j(X) + \varepsilon \cdot \sum_{i \neq j} y_i(X)$$

afin d'assurer l'efficacité des nouvelles solutions marginales.

Lorsqu'à l'issue de la phase de réoptimisation on aura obtenu, sur au moins un critère, un gain $\hat{y}_j^k - \bar{y}_j'^k$ considéré comme intéressant, il conviendra d'effectuer au moins une itération supplémentaire puisqu'en effet on a mis en évidence l'existence de solutions nettement préférables à certains des sommets figurant dans $\mathcal{S}'^k$. Sinon, et en particulier lorsque pour tout critère $C^j$ pour lequel on a :

$$\bar{y}_j'^k < \hat{y}_j^k < \bar{y}_j^k$$

il s'avère que le gain relatif : $\dfrac{\hat{y}_j^k - \bar{y}_j'^k}{\bar{y}_j^k - \bar{y}_j'^k}$ est lui-même faible, on pourra considérer que la phase de choix suivante représente le choix définitif [1].

Considérons maintenant le cas particulier ou la double égalité (3.4) est vérifiée pour tous les critères. Il correspond au refus, lors de la phase $A$, d'éliminer aucun des sommets de $\mathcal{S}^k$ qui sont maximum sur au moins un critère. Dans ces conditions, une nouvelle solution efficace ne peut être obtenue qu'en optimisant une fonction mixte, combinaison linéaire des différents critères soit :

$$F^k(X) = \sum_j \pi_j^k \cdot y_j(X)$$

De multiples considérations peuvent bien entendu guider le choix de ces poids $(\pi_j^k)$. A titre indicatif on propose ici la pondération élaborée sur les bases suivantes :

Si $\bar{S}'^k$ est la solution moyenne (cf. II) sur $\mathcal{S}'^k$, appelons *regret* sur le critère $j$ la quantité :

$$\Delta_j^k = \bar{y}_j^k - y_j(\bar{S}'^k).$$

Compte tenu de l'attitude manifestée par le décideur, tous les regrets peuvent être considérés sinon comme strictement équivalents, du moins

---

(1) Sauf lorsqu'aucune des valeurs $l_j^k$ choisies pour définir $D^k$ n'est significativement supérieure à $y_j^k$, cette occurence étant liée à un comportement trop timoré du décideur lors de la phase de choix précédente.

comme relativement voisins. Ainsi est-on conduit à élaborer un système de poids de la forme :

$$\pi_j^k = 1/\Delta_j^k$$

Une des originalité de l'approche proposée est que le décideur fait, chemin faisant, « l'apprentissage » de l'importance de ses critères, alors qu'initialement ses idées pouvaient être floues.

L'optimisation d'une fonction mixte $F^k(X)$, dont les poids sont déduits de considérations du type précédent, peut être réalisée non seulement dans ce cas particulier mais également lors de chacune des phases de réoptimisation. Ceci parce que le maximum relativement à une telle fonction fournit généralement une solution efficace intéressante (voir IV).

Remarque :

On peut également obtenir une solution efficace intéressante en résolvant le P.L. :

Minimiser : $\lambda$

$$\lambda \geqslant \pi_1^k(\hat{y}_1^k - y_1(x))$$
$$\lambda \geqslant \pi_m^k(\hat{y}_m^k - y_m(x))$$
$$x \in \mathfrak{I}_k.$$

La solution de ce P.L. donne le minimum sur $\mathfrak{I}_k$ de la fonction $G(x)$, définie par l'égalité :

$$G(x) = \min_j (\pi_j^k(\hat{y}_j^k - y_j(x))$$

Cette solution aura également l'intérêt de ne pas être nécessairement l'un des sommets de $\mathfrak{I}_k$.

Pour finir, nous préciserons que l'ensemble des points sommets du polyèdre $\mathfrak{I}^{k+1}$, domaine de choix de l'itération suivante, comprendra d'une part toutes les solutions optimales des *P.L.* résolus durant la phase de réoptimisation et d'autre part ceux des points extrêmes de $\mathfrak{I}'^k$ qu'on jugera intéressant de conserver.

## IV. APPLICATION DE LA PROCEDURE A UN CAS CONCRET

Il s'agit d'un problème de Gestion Prévisionnelle des Cadres d'Entreprise.

Le modèle élaboré (voir [2]) a la forme d'un programme linéaire. Les variables du modèle sont des effectifs de cadres affectés à des catégories de postes au cours de périodes données. Les fonctions objectifs, au nombre de 4, fonctions linéaires des variables, sont :

— la « satisfaction » totale des cadres (*SA*)
— l'efficacité réelle totale des cadres (*EF*)
— les coûts d'embauche (*EB*)

— les coûts d'écart entre les affectations du programme et les besoins en effectifs prévus ($EC$).

L'application concrète du modèle a porté sur un problème de 350 variables soumises à 200 contraintes.

Devant la difficulté de déterminer pour chacun des critères un « poids » significatif, nous avons renoncé à une méthode du type « traditionnelle » décrit en I.2 pour appliquer la procédure P.O.P. développée en II et III. Voici, sans entrer dans le détail, les résultats obtenus :

Itération 1 :

Tableau des gains 1 (4 optimisations enchaînées relatives à $SA$, $EF$, $EB$, $EC$)

| | $SA$ | $EF$ | $EB$ | $EC$ |
|---|---|---|---|---|
| $Z^1$ | **8 618** | 3 778 | — 3 143 | — 3 369 |
| $Z^2$ | 7 824 | **4 018** | — 3 621 | — 4 024 |
| $Z^3$ | 3 449 | 1 707 | — **899** | — 8 350 |
| $Z^4$ | 6 653 | 3 251 | — 2 447 | — **2 012** |

Phase $A$ (de choix) :

Nous utilisons ici la technique II.2 (de comparaison par couples).

Le point de référence choisi est $Z^4$ car

— il est optimum sur le critère $EC$ jugé très important,

— il est acceptable sur les autres critères ;

couple ($Z^4$, $Z^1$) : élimination de $Z^1$

($Z^4 > Z^1$ pour $EB$ et $EC$ et l'écart $Z^1 - Z^4$ sur $SA$ et $EF$ n'est pas jugé significatif) ;

couple ($Z^4$, $Z^2$) : élimination de $Z^2$

(pour les mêmes raisons que précédemment) ;

couple ($Z^4$, $Z^3$) : ici à cause du critère $EB$ on ne peut éliminer $Z^3$.

$\mathcal{T}'$ est alors constitué du segment $Z^3Z^4$.

Phase $B$ (de réoptimisation) :

Contraintes additionnelles :

$$EB \geqslant -2\,000$$
$$EC \geqslant -4\,000$$

Critères :

$SA$, $EF$ et une fonction pondérée $F$ de $SA$, $EF$, $EB$ et $EC$ dont les poids calculés par la méthode décrite en III.2 sont respectivement 31, 64, 64 et 15.

Itération 2 :

Tableau des gains 2 (3 optimisations enchaînées relatives à $SA$, $EF$, $F$)

| | $SA$ | $EF$ | $EB$ | $EC$ |
|---|---|---|---|---|
| $Z^5$ | **7 552** | 3 305 | — 2 000 | — 4 000 |
| $Z^6$ | 7 098 | **3 610** | — 2 000 | — 4 000 |
| $Z^7$ | 7 200 | 3 483 | — 2 000 | — 3 045 |

Phase $A$ :

$Z^7 = (7\,200, 3\,483, -2\,000, -3\,045)$ est globalement meilleure que $Z^1$, $Z^2$, $Z^3$, $Z^4$, $Z^5$, $Z^6$ sur l'ensemble des critères. Ce sera la solution retenue.

Remarque : le point qui sur le segment $Z^3Z^4$ vérifie $EB = -2\,000$, a pour valeurs sur les autres critères $SA \simeq 5\,690$, $EF \simeq 2\,790$, $EC \simeq -3\,910$, solution mixte dominée uniformément et nettement par la solution efficace $Z^7$.

Le problème a été résolu à l'aide du code OPHELIE sur CDC 6 600 en
45 sec $CP$, 180 sec $PP$ pour l'itération 1
32 sec $CP$, 174 sec $PP$ pour l'itération 2.

## V. REMARQUES GENERALES ET CONCLUSION

Pour beaucoup de problèmes de décision il convient de restituer à l'ordinateur son rôle et sa vocation de partenaire constant du décideur, qu'un certain nombre de méthodes quasi-automatiques tendent à négliger. C'est dans cette perspective que se situe la procédure itérative P.O.P. précédemment décrite. Notons qu'il est facile de transformer la démarche proposée en procédure complètement automatique (voir II.1) mais c'est une solution que nous avons volontairement écartée pour les raisons indiquées plus haut.

Outre la possibilité pour le décideur d'intervenir à son gré dans le déroulement du processus qui conduit à la décision finale en utilisant au mieux l'information intermédiaire acquise, la technique décrite lui permet chemin faisant de mesurer, mieux qu'il ne pouvait le faire *a priori*, l'importance relative des différents critères.

En dehors des optimisations nécessaires pour construire les tableaux des gains, qui pourront s'effectuer à un coût très raisonnable (voir IV) à l'aide d'un code capable d'optimiser successivement sur plusieurs fonctions économiques, les autres opérations, qui permettent de passer d'une série d'optimisations à la suivante, peuvent très facilement se faire sans le recours à un ordinateur. Cependant il ne faudrait pas que la description donnée de la procédure laisse l'impression d'un grand nombre d'itérations avant l'obtention de la solution globalement la meilleure : la plupart du temps quelques itérations (2 ou 3, voir IV) suffiront.

Certaines des idées développées peuvent être utilisées en programmation convexe en général et même en programmation discrète (voir Rudeanu [8]).

Au passif de la méthode, notons qu'elle ne constitue pas une exploration systématique de l'ensemble des solutions efficaces, mais seulement d'un sous-ensemble de celles-ci ; de plus le procédé n'utilise pas toute l'information que l'on pourrait tirer des optimisations, en particulier on ne prend pas en compte d'une façon analytique les coûts duaux (ceux-ci peuvent néanmoins constituer un critère secondaire qualitatif). Si les critères les plus importants sont de nature qualitative, cette procédure perd de son intérêt (la méthode Electre, R. Benayoun, B. Sussmann, B. Roy [1] et B. Roy [7] est alors davantage adaptée) ; ici, les critères qualitatifs ne peuvent être que secondaires et les valeurs attribuées aux solutions, pour chacun d'entre eux, seulement constatées. Enfin, la procédure reste applicable lorsque le nombre de critères est grand ($>$ 10), mais il est alors conseillé, après analyse du tableau des gains obtenu à la première itération, de restreindre le nombre de critères pris en compte en adjoignant toutefois des contraintes (3.2) assurant une valeur minimale sur chacun des critères négligés.

**En conclusion, disons que les deux aspects originaux de la méthode, c'est-à-dire la prise en compte de critères multiples et la possibilité pour le décideur de contrôler et d'intervenir dans son déroulement, rendent possibles une traduction plus fidèle de la réalité et une meilleure intégration de ses nuances dans la résolution des problèmes.**

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES


[1] R. Benayoun, B. Roy et B. Sussmann, *ELECTRE : une méthode pour guider le choix en présence de points de vue multiples.* Note de Travail n° 49. Direction Scientifique de la SEMA, juin 1966.

[2] R. Benayoun, J.-P. Decostre et P. Leyrat, *Gestion Prévisionnelle des Cadres.* Rapport de Recherche n° 35, S.E.M.A., février 1969.

[3] P. Bod, *Programmation linéaire dans le cas de plusieurs fonctions objectifs données simultanément* (en Hongrois). Publ. Math. Inst. Hungar Acad. Sci. (séries *B*), pp. 541-554, 8 (1963).

[4] G. Boldur, V. Ionescu et I. Stancu-Minasian, *Application de la théorie de l'utilité à la résolution des problèmes de programmation linéaire à plusieurs critères d'optimum.* Communication présentée à la Session scientifique annuelle du Centre de calcul économique et cybernétique économique, Bucarest, février 1969.

[5] M. Desplas, *Mathématique de la décision économique*, Dunod, 1966.

[6] A. M. Geoffrion, *Solving Bicreterion Mathematical Programs.* Operations Research, pp. 39-54, 15 (1967).

[7] B. Roy, *Classement et choix en présence de points de vue multiples*, Revue Française d'Informatique et de Recherche Opérationnelle, Avril 1968.

[8] S. Rudeanu, *Programmation Bivalente à plusieurs fonctions économiques.* Communication présentée à la Session scientifique annuelle du Centre de Calcul économique et cybernétique économique, Bucarest, février 1969.

[9] J. Tergny, *Problèmes de cohérence des choix sur multicritères.* Note de Travail n° 81, Direction Scientifique de la S.E.M.A., juillet 1968.