Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle

FOURGEAUD
LENCLUD
SENTIS

Critère de choix en avenir partiellement incertain

Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle, tome 2, n° V3 (1968), p. 9-19
<http://www.numdam.org/item?id=RO_1968__2_3_9_0>

R.I.R.O.
(2e année, N° 14, 1968, p. 9-20)

CRITERE DE CHOIX EN AVENIR PARTIELLEMENT INCERTAIN

par MM. Fourgeaud, Lenclud et Sentis (1)

Résumé. — *Cette note propose un critère intermédiaire entre les critères de l'espérance et le critère minimax, utilisant les informations partielles sur la vraisemblance des événements. On choisit une décision qui minimise le maximum de l'espérance mathématique du coût, compte tenu des contraintes imposées, aux probabilités des aléas, par les informations disponibles. On démontre que le critère, qui conduit à résoudre un programme linéaire par décision, se réduit à celui de l'espérance en affectant des probabilités égales à un ensemble d'événements judicieusement choisi.*

INTRODUCTION

Lorsque les décisions immédiates ont des conséquences qui dépendent d'événements futurs dont la réalisation ne peut être prévue, on utilise divers critères de choix. Habituellement, on considère deux cas limites.

Le premier est celui où l'avenir est connu en probabilité. Il correspond au fait que celui qui prend la décision a une information suffisamment riche sur son problème pour affecter aux événements futurs des probabilités raisonnables. On peut montrer, que dans ce cas, une décision « rationnelle » est celle qui minimise l'espérance mathématique de la perte, (ou maximise l'espérance de l'avantage) en utilisant comme pondération le système de probabilités subjectives dont on vient de parler. Ce critère est appelé *critère de l'espérance.*

Le second cas est celui où l'avenir est totalement incertain. La seule information disponible est la connaissance des événements possibles sans aucun jugement de probabilité sur leur réalisation. Le critère employé consiste, le plus souvent, à se garantir contre une perte importante ou à s'assurer un gain minimum. Ce sont les *critères minimax.*

Il est clair que les problèmes réels correspondent à des situations intermédiaires. Celui qui a étudié un problème n'est pas sans avoir

(1) Ministère de l'Économie et des Finances, Direction de la Prévision.

quelque opinion sur la vraisemblance des divers événements en concurrence ; mais le plus souvent cette opinion ne lui semble pas assez fondée pour pouvoir être exprimée par un système de probabilités cohérentes. L'avenir est partiellement incertain.

On propose dans cette note un critère, très naturel, permettant d'utiliser des informations partielles sur la vraisemblance des événements. On suppose que cette information peut s'exprimer par un jugement tel que « A est plus probable que B », c'est-à-dire une relation de préordre sur les états possibles.

Le critère proposé associe le critère de l'espérance et le critère minimax. L'idée en est la suivante : la relation de préordre limite les mesures de probabilité possibles et leur impose d'appartenir à un ensemble donné. Pour chaque décision envisagée, on calcule le maximum que peut atteindre l'espérance mathématique du coût dans cet ensemble, et on choisit une décision qui minimise ce maximum.

Il est facile de voir que si l'information est inexistante, on retrouve le critère habituel du minimax. A l'opposé, si l'information conduit à une seule mesure de probabilité, le critère est évidemment celui de l'espérance.

Le critère proposé conduit à résoudre un programme linéaire par décision possible et à choisir une décision qui minimise le résultat de ce programme.

On peut représenter les états de la nature et le préordre qui lui est associé par un graphe. On montre alors que, pour chaque décision possible, il suffit de considérer une partie seulement des aléas. Le critère se réduit à celui de l'espérance en affectant des probabilités égales aux divers aléas composant le noyau associé à chaque décision.

Si le préordre est complet, le coût maximum associé à une décision est obtenu en rangeant les aléas dans l'ordre de probabilité décroissante, en calculant les moyennes arithmétiques successives des coûts correspondants, et en sélectionnant un groupe d'aléas qui définit le maximum de ces moyennes.

On constate aussi que dans le cas où l'on sait seulement qu'un événement a une probabilité inférieure à celle de tous les autres, cet événement ne doit intervenir dans les arbitrages que dans la mesure où son coût dépasse notablement celui des autres.

On évite l'inconvénient des critères minimax dans lesquels l'introduction d'un aléa peu vraisemblable mais de coût légèrement supérieur à celui des autres, peut bouleverser la structure des décisions antérieures.

D'autre part on reproche souvent au critère de l'espérance d'affecter aux états de la nature le même système de probabilité quelle que soit la décision envisagée. Avec le critère proposé on échappe à cette critique puisque le graphe associé duquel on extrait le noyau optimal peut dépendre de la décision.

I. NOTATIONS ET EXPRESSION DU CRITERE

Notations

Posons :

. $I = \{ i \}$ ensemble des décisions, $i = 1 \dots m$,
$J = \{ j \}$ ensemble des états de la nature, $j = 1 \dots n$,
$R = \{ r_{ij} \}$ conséquence de (i, j),
$P = \{ p_1 \dots p_n \}$; $p_j \geqslant 0$, $\Sigma p_j = 1$

mesure de probabilités sur J.

.. $\succsim$ préordre sur les états défini par des relations : $j \succsim j'$ « j est au moins aussi probable que j' »

$$\Leftrightarrow p_j \geqslant p_j' \tag{I.1}$$

Au système (I.1), dont on a éliminé les relations surabondantes, on associe le graphe $G = \{ J, \Gamma \}$ défini de la façon suivante :

$$j, j' \in J,\ j' \in \Gamma j \Leftrightarrow p_j \geqslant p_j'$$

... Π ensemble des mesures de probabilité P satisfaisant aux relations (I.1)

$$\Pi = \{ P, \geqslant \}$$

Critère

Soit $i \in I$ une décision possible et C_i l'espérance mathématique du coût associé avec la mesure de probabilité $P \in \Pi$.

$$C_i = E_P \{R_i\} = \sum_J p_j r_{ij} \tag{I.2}$$

où

$$R_i = \{ r_{ij}, j = 1 \dots n \}$$

On pose :

$$M_i = \operatorname*{Max}_{P \in \Pi} C_i$$

(qui existe, Π étant compact).

Une décision optimale i^* est définie par :

$$M_{i^*} = \operatorname*{Min}_{i \in I} M_i \tag{I.3}$$

II. CALCUL DE $M_i = \operatorname*{Max}_{P \in \Pi} C_i$

1. Définition des sous-graphes et supports admissibles

Considérons l'application S définissant le support de P :

$$\Pi \ni P \xrightarrow{S} S(P) = \{ j / j \in J, p_j > 0 \}$$

et $S(\Pi)$ l'image de Π par S, ensemble des supports :

$$S(\Pi) = \{ S(P) / P \in \Pi \}$$

A tout élément $S(P) \in S(\Pi)$ on peut associer le sous-graphe G_P de G défini par :

$$G_P = \{ S(P), \Gamma_S \}$$

où

$$\Gamma_{Sj} = \Gamma_j \cap S(P)$$

G_P sera appelé *sous-graphe admissible* et $S(P)$ *support admissible.*

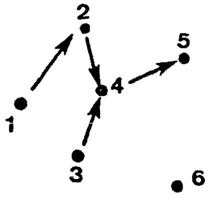
G_P représente l'ensemble des états de probabilité strictement positive associé à P et compatible avec la relation de préordre.

Un support admissible K satisfait à la propriété suivante :

$$j \in K \quad , \quad j' \succsim j \Rightarrow j' \in K \tag{I.4}$$

Si un sommet du graphe appartient à un support admissible, il en est de même de tous ses ascendants.

Par exemple sur le graphe suivant :



$\{ 6 \}$, $\{ 1, 2, 3, 4 \}$ sont des supports admissibles.

Par contre, $\{ 3, 4 \}$ n'est pas un support admissible.

2. Lemme

Soit 4 nombres A, B, C, D $(C \cdot D > 0)$, l'une des 3 propositions incompatibles est vraie :

$$\begin{cases} \dfrac{A}{C} = \dfrac{A+B}{C+D} = \dfrac{B}{D} \\[2ex] \dfrac{A}{C} < \dfrac{A+B}{C+D} < \dfrac{B}{D} \\[2ex] \dfrac{B}{D} < \dfrac{A+B}{C+D} < \dfrac{A}{C} \end{cases}$$

Ce lemme ne sera pas démontré.

3. Théorème

Pour alléger l'écriture l'indice i sera omis.

Posons pour tout $K \in S(\Pi)$

$$|K| = \text{cardinal de } K$$

$$\Psi(K) = \frac{1}{|K|} \sum_{j \in K} r_j$$

alors :

$$\boxed{M = \underset{P \in \Pi}{\text{Max}} \sum_{j \in J} p_j r_j = \underset{K \in S(\Pi)}{\text{Max}} \Psi(K)}$$

Démonstration (1)

a) Soit P^* une solution de $\underset{P \in \Pi}{\text{Max}} \sum_{j \in J} p_j r_j$ et $K^* = S(P^*)$. Posons :

$$q = \underset{j \in K^*}{\text{Min}}\ p_j^* \ , \quad q > 0$$

et partitionnons K^* en :

$$L^* = \{j \,/\, j \in K^*, p_j^* = q\} \tag{II.1}$$

$$N^* = \{j \,/\, j \in K^*, p_j^* > q\}$$

Deux cas sont à distinguer :

Premier cas. $N^* = \varnothing$

Alors on a : $p_j^* = q \quad \forall\, j \in K^*$ donc :

$$p_j^* = \frac{1}{|K^*|} \qquad \text{et} \qquad \Psi(K^*) = M$$

Deuxième cas. $N^* \neq \varnothing$

On peut écrire :

$$M = \sum_{j \in K^*} p_j^* r_j = \sum_{j \in L^*} p_j^* r_j + \sum_{j \in N^*} p_j^* r_j$$

$$= \frac{\sum_{j \in K^*} q r_j + \sum_{j \in N^*} (p_j^* - q)}{q\,|K^*| + \sum_{j \in N^*} (p_j^* - q)}\, r_j \tag{II.2}$$

(1) La démonstration présente est due à M. Lacaze qui a simplifié très notablement la démonstration initiale, fournie par les auteurs, en utilisant le lemme précédent.

En utilisant le lemme, on voit que l'une des 3 propositions suivantes est vraie :

$$\begin{cases} 1 : \dfrac{\sum_{j \in K^*} r_j}{|K^*|} = M = \dfrac{\sum_{j \in N^*} (p_j^* - q) r_j}{\sum_{j \in N^*} (p_j^* - q)} \\ 2 : \dfrac{\sum_{j \in K^*} r_j}{|K^*|} < M < \dfrac{\sum_{j \in N^*} (p_j^* - q) r_j}{\sum_{j \in N^*} (p_j^* - q)} \\ 3 : \dfrac{\sum_{j \in N^*} (p_j^* - q) r_j}{\sum_{j \in N^*} (p_j^* - q)} < M < \dfrac{\sum_{j \in K^*} r_j}{|K^*|} \end{cases} \qquad \text{(II.3)}$$

La proposition 3 est fausse, car sinon $\dfrac{1}{|K^*|}$ étant un système de probabilité admissible, p^* ne serait pas une solution optimale.

Il en est de même de la proposition 2. En effet, N^* est un support admissible. Le système de probabilité (> 0) sur N^* :

$$\frac{p_j^* - q}{\sum_{j \in N^*} (p_j^* - q)}$$

est admissible, car il se déduit du système des p_j^* par une transformation affine qui conserve le préordre.

C'est donc la propriété 1 qui est vraie et on a :

$$M = \operatorname*{Max}_{P \in \Pi} \sum_{j \in J} p_j r_j = \Psi(K^*). \qquad \text{(II.4)}$$

b) Pour tout K admissible, le système de probabilité :

$$p_j = \begin{cases} \dfrac{1}{|K|} & \text{pour} \quad j \in K \\ 0 & \text{pour} \quad j \notin K \end{cases}$$

définit une solution réalisable du programme linéaire

$$\operatorname*{Max}_{P \in \Pi} \sum_{j \in J} p_j r_j$$

Il en résulte que :

$$\Psi(K) = \frac{1}{|K|} \sum_{j \in K} r_j \leqslant M = \Psi(K^*).$$

K^* appartenant à $S(\Pi)$, la proposition est établie.

REMARQUES

1. Le théorème précédent montre que pour chaque décision le calcul de $M = \underset{P \in \Pi}{\text{Max}} \sum_{j \in J} p_j r_j$ conduit à :

- sélectionner les supports admissibles $K \in S(\Pi)$,

- calculer les moyennes arithmétiques $\Psi(K)$ associées à ces supports et déterminer un élément K tel que $\Psi(K)$ soit maximum.

2. La considération de la structure du graphe $G = \{ J, \Gamma \}$ permet dans de nombreux cas pratiques d'alléger la procédure en réduisant le nombre des supports admissibles à examiner. On utilisera le fait que si K et K' sont des supports admissibles :

- $K \cup K'$ est admissible,
- $K \cap K'$ est admissible si $K \cap K' \neq \emptyset$.

En effet, d'après la définition des supports admissibles (cf. I.4).

$$\{ j \in K \cup K',\ j' \succsim j \} \Rightarrow \{ j' \in K \} \vee \{ j' \in K' \} \Rightarrow j' \in K \cup K'$$

$$\{ j \in K \cap K',\ j' \succsim j \} \Rightarrow \{ j' \in K \} \wedge \{ j' \in K' \} \Rightarrow j' \in K \cap K'.$$

III. CAS PARTICULIERS

1. Graphe décomposable

Supposons que l'on puisse définir une partition $\mathcal{T} = \{ G_m \}$ du graphe G telle que :

$$G_m = \{ J_m, \Gamma_m \}$$

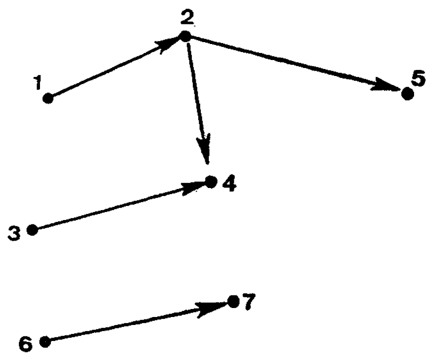
$$\Gamma_m j = \Gamma j \cap J_m$$

$$\left.\begin{array}{l} m \neq m' \\ j \in J_m \\ j' \in J_{m'} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} j \notin \Gamma j' \\ \\ j' \notin \Gamma j \end{array}\right.$$

$$\bigcup_m J_m = J$$

Le graphe G est dit *décomposable.*

Par exemple sur le graphe suivant :



1, 2, 3, 4, 5 } et { 6, 7 } forment une partition de G. Dans ce qui suit on ne considère que des partitions minimales (c'est-à-dire ne contenant pas de sous-partition). En appliquant le théorème général présenté au paragraphe II nous allons voir qu'il suffit de considérer les sous-graphes admissibles associés à la partition $\mathfrak{T}$. Cette propriété fait l'objet du corollaire suivant.

Corollaire

Soit P^* une solution de :

$$\operatorname*{Max}_{P\in\Pi} \sum_{j\in J} p_j r_j \qquad \text{et} \qquad K^* = S(P^*)$$

Supposons le graphe G décomposable et désignons par $\mathfrak{T} = \{ G_m \}$ la partition associée.

Posons :

$$K^* = \bigcup_m K_m^*$$

avec

$$K_m^* = K^* \cap J_m$$

Alors, pour tout $l \in \{ m \}$ tel que $K_l^* \neq \varnothing$, on a :

$$\Psi(K_l^*) = \Psi(K^*).$$

En d'autres termes, la recherche d'une solution est limitée à l'examen des sous-graphes G_m.

Démonstration

Remarquons que tout J_m étant support admissible, il en est de même (cf. remarque 2 du paragraphe II), de K_m^* et de $\bigcup_{m\neq l} K_m^*$ pour tout $l \in \{ m \}$.

On peut écrire :

$$\Psi\left(\bigcup_{m} K_m^*\right) = \frac{\sum_{\substack{\bigcup K_m^* \\ m \neq l}} r_j + \sum_{j \in K_l^*} r_j}{\sum_{m \neq l} |K_m^*| + |K_l^*|}$$

a) $\bigcup_{m \neq l} K_m^* = \varnothing$ et la propriété est établie.

b) $\bigcup_{m \neq l} K_m^* \neq \varnothing$. Il s'ensuit que d'après le lemme l'une des 3 propositions suivantes est vraie.

$$1 : \Psi\left(\bigcup_{m \neq l} K_m^*\right) = \Psi\left(\bigcup_{m} K_m^*\right) = \Psi(K_l^*)$$

$$2 : \Psi\left(\bigcup_{m \neq l} K_m^*\right) < \Psi\left(\bigcup_{m} K_m^*\right) < \Psi(K_l^*)$$

$$3 : \Psi(K_l^*) < \Psi\left(\bigcup_{m} K_m^*\right) < \Psi\left(\bigcup_{m \neq l} K_m^*\right)$$

Les propositions 2 et 3 étant contradictoires avec l'hypothèse que K^* est un support optimal, le corollaire s'en déduit.

Remarque

Si on ne dispose d'aucune information sur les probabilités, le graphe G se décompose en n sous-graphes G_j et l'application du théorème conduit à :

$$\operatorname*{Max}_{P \in \Pi} \sum_{j \in J} r_j = \operatorname*{Max}_{j} r_j$$

On retrouve ainsi le critère minimax.

2. Le préordre est complet

Le graphe G est un chemin

$$\{ 1 \} \rightarrow \{ 2 \} \rightarrow \dots \{ n - 1 \} \rightarrow \{ n \}$$

Les supports admissibles sont :

$$\{ 1 \}, \{ 1, 2 \}, \{ 1, 2, 3 \} \dots \{ 1, 2 \dots n \}$$

L'application du théorème conduit à calculer la suite des moyennes arithmétiques :

$$r_1, \qquad \frac{r_1 + r_2}{2} \ldots, \qquad \frac{\sum_{j=1}^{n} r_j}{n}$$

et à sélectionner celles qui correspondent au maximum.

Remarque

On peut retrouver le résultat précédent par l'étude directe du programme linéaire associé et de son dual.

$$\begin{cases} \text{Max} \sum_{j=1}^{n} p_j r_j \\ p_j \geqslant p_{j+1}, \qquad j = 1 \ldots n - 1 \\ \sum_{j=1}^{n} p_j = 1 \\ \quad p_j \geqslant 0 \end{cases}$$

Le programme dual s'écrit :

$$\begin{cases} \text{Min } \varphi \\ r_1 + u_1 - \varphi \leqslant 0 \\ \cdots\cdot \\ r_j + u_j - u_{j-1} - \varphi \leqslant 0, \qquad 1 < j < n \\ \cdots\cdot \\ r_n - u_n - \varphi \leqslant 0 \\ u_j \geqslant 0 \end{cases}$$

En considérant les inégalités successives il vient :

$$\left| \begin{array}{l} \varphi \geqslant r_1 + u_1 \geqslant r_1 \\ \cdots\cdots \\ \varphi \geqslant \dfrac{r_1 + r_j + \ldots + r_j + u_j}{j} \geqslant \dfrac{r_1 + \ldots + r_j}{j}, \quad 1 \leqslant j \leqslant n \end{array} \right.$$

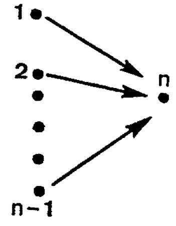
On en déduit que :

$$\varphi = \underset{m \in [1,n]}{\text{Max}} \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} r_j.$$

3. Aléa uniformément dominé en probabilité

Supposons que la seule information disponible soit qu'un aléa, le n^{ieme} par exemple, a une probabilité inférieure à celle de tous les autres.

Le graphe associé se présente de la façon suivante (où l'on a supposé que les aléas $1 \ldots n - 1$ sont rangés par coût décroissant) :



L'application du théorème et du corollaire montre que deux cas sont à envisager :

. L'élément $\{ n \}$ est retenu dans le support admissible optimal K^* et donc $K^* = J$

$$\underset{P \in \Pi}{\text{Max}} \sum_{j \in J} p_j r_j = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} r_j$$

. L'élément $\{ n \}$ n'est pas retenu ; on est amené à un problème dans lequel le graphe considéré est décomposable en $(n - 1)$ sous-graphes. La solution est obtenue par :

$$\underset{j \neq n}{\text{Max}}\, r_j = r_1$$

Donc l'élément $\{ n \}$ ne sera à prendre en compte que si :

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} r_j \geqslant r_1$$

d'où :

$$r_n - r_1 \geqslant \sum_{j=1}^{n-1} (r_1 - r_j) \geqslant 0.$$

Ainsi, l'élément de plus faible probabilité ne sera inclus dans le noyau d'aléas associé à une décision que si son coût dépasse notablement celui de tous les autres.

On échappe ainsi à un des inconvénients du critère minimax, avec lequel l'introduction d'un événement nouveau de coût élevé mais de très faible probabilité peut bouleverser la structure des décisions antérieures. Avec le critère proposé, si cet événement est pris en compte dans le noyau, il n'intervient dans la valeur du maximum qu'avec le poids $\frac{1}{n}$.