REVUE FRANÇAISE D'INFORMATIQUE ET DE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

IRINEL DRAGAN

# Un algorithme lexicographique pour la résolution des programmes polynomiaux en variables entières

*Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle*, tome 2, nº V3 (1968), p. 81-89

<http://www.numdam.org/item?id=RO_1968__2_3_81_0>

R.I.R.O.
(2e année, N° 14, 1968, p. 81-90)

# UN ALGORITHME LEXICOGRAPHIQUE POUR LA RESOLUTION DES PROGRAMMES POLYNOMIAUX EN VARIABLES ENTIERES. (1)

par Irinel DRAGAN (2)

Résumé. — *On développe un algorithme pour la résolution des programmes polynomiaux en nombres entiers ; l'algorithme représente l'extension d'un algorithme pour la résolution des programmes linéaires en variables binaires. Le point de départ des recherches a été un article de E. L. Lawler et M. D. Bell (*Op. Res. *T. 14, 6, 1966, p. 1098-1112).*

Soit l'ensemble

$$B_n^p = \{ x \mid x = (x_i), \qquad (i = 1, ..., n), \qquad x_i \varepsilon \{ 0, 1, ..., p - 1 \} \} ;$$

soit le système de polynômes à coefficients entiers $P_h(x)$, $(h = 0, 1, ..., s)$ ; soit l'ensemble

$$X_0 = \{ x \mid x \in B_n^p, \qquad P_j(x) \geqslant 0, \qquad (j = 1, ..., s) \}.$$

Nous développerons un algorithme pour la résolution du problème $(A)$ : trouver $\hat{x} \in B_n^p$, tel que

$$P_0(\hat{x}) = \sup_{x \varepsilon X_0} P_0(x).$$

## 1. QUELQUES DEFINITIONS ET PROPRIETES PRELIMINAIRES

Supposons que l'ensemble $B_n^p$ est ordonné lexicographiquement ; c'est-à-dire pour chaque couple de vecteurs $x \in B_n^p$, $y \in B_n^p$, on posera $x \preccurlyeq y$ si et seulement si $n(x) \leqq n(y)$, où

$$n(x) = p^{n-1}x_1 + p^{n-2}x_2 + ... + px_{n-1} + x_n.$$

(1) Présenté au Congrès européen des associations ES, TIMS, IMS, IASPS, Amsterdam, 2-7 sept. 1968.

(2) Université « A. I. Cuza », Jassy, Roumanie.

La fonction $f(x)$, définie sur l'ensemble $B_n^p$, sera appelée lexicographique monotone non-décroissante (en abrégé l.m.n.), si $x \preccurlyeq y$ entraîne

$$f(x) \lesseqgtr f(y).$$

**Théorème 1 :** Les fonctions linéaires homogènes

$$u_1(x) = x_1, \qquad u_2(x) = px_1 + x_2, \qquad u_3(x) = p^2x_1 + px_2 + x_3, \ldots,$$
$$u_n(x) = p^{n-1}x_1 + p^{n-2}x_2 + \ldots + px_{n-1} + x_n,$$

définies sur l'ensemble $B_n^p$, sont des fonctions l.m.n. à valeurs non-négatives.

Soit $y \in B_n^p$, $z \in B_n^p$, deux éléments successifs, $y \preccurlyeq z$, $y \neq z$ ; alors, il existe un indice $k$, $(1 \lesseqgtr k \lesseqgtr n)$, tel que

$$y_1 = z_1, \ldots, y_{k-1} = z_{k-1}, y_k = z_k - 1,$$
$$y_{k+1} = \ldots = y_n = p - 1, z_{k+1} = \ldots = z_n = 0.$$

Il en résulte

$$u_i(z) - u_i(y) = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad i < k, \\ 1 & \text{pour} \quad i \geqslant k, \end{cases}$$

pour chaque $i = 1, \ldots, n$, ce qui suffit pour prouver la monotonie des fonctions $u_i(x)$, $(i = 1, \ldots, n)$. Évidemment, on a $u_i(x) \geqslant 0$, $(i = 1, \ldots, n)$, pour chaque $x \in B_n^p$.

**Théorème 2 :** Un polynôme $P[u_1(x), \ldots, u_n(x)]$, à coefficients entiers non-négatifs, est un polynôme l.m.n. à coefficients entiers.

En effet, la somme de plusieurs fonctions l.m.n. et le produit de plusieurs fonctions l.m.n. à valeurs non-négatives sont des fonctions l.m.n.

Il est bien clair que chaque polynôme à coefficients entiers $P(x)$ s'exprime d'une manière univoque comme un polynôme à coefficients entiers des fonctions $u_i(x)$ ; c'est le résultat des transformations linéaires non singulières

$$(T) \qquad x_1 = u_1, \qquad x_2 = u_2 - pu_1, \qquad x_3 = u_3 - pu_2, \ldots,$$
$$x_n = u_n - pu_{n-1},$$

et

$$(T^{-1}) \qquad u_i = u_i(x), \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Soit le polynôme $P(x)$ de degré $q$ ; si le polynôme correspondant en $u$ contient tous les termes de degré inférieur ou égal à $q$ et si leurs coefficients sont positifs, le polynôme $P(x)$ sera appelé un polynôme complet.

Évidemment, chaque polynôme complet est un polynôme l.m.n., mais la réciproque de cette affirmation n'est pas vraie.

**Théorème 3 :** Soit les polynômes à coefficients entiers $P_h(x)$, $(h = 0, 1, ..., s)$, et le polynôme à coefficients entiers $P(x)$ qui est un polynôme complet dont le degré est égal au degré maximal rencontré dans le système de polynômes considéré ; alors, il existe un nombre entier $C$ non-négatif et des polynômes l.m.n. à coefficients entiers $Q_h(x)$, $(h = 0, 1, ..., s)$, tels que

$$P_h(x) = CP(x) - Q_h(x), \qquad (h = 0, 1, ..., s).$$

Soit $\bar{P}(u)$ et $\bar{P}_h(u)$, $(h = 0, 1, ..., s)$, les résultats de l'application de la transformation linéaire $(T)$ sur les polynômes $P(x)$ et $P_h(x)$, $(h = 0, 1, ..., s)$ ; le polynôme $\bar{P}(u)$ contient tous les termes en $u$ dont le degré est au plus égal au degré maximal rencontré dans le système de polynômes $\bar{P}_h(u)$, et ces termes possèdent des coefficients positifs. Alors, il existe des nombres entiers non-négatifs $C$ tels que tous les coefficients des variables $u_i$ dans les polynômes

$$\bar{Q}_h(u) = C\bar{P}(u) - \bar{P}_h(u), \qquad (h = 0, 1, ..., s),$$

soient des nombres entiers non-négatifs. Soit $C$ le plus petit nombre entier qui possède cette propriété ; alors, les polynômes correspondants $Q_h(x) = \bar{Q}_h[u(x)]$, $(h = 0, 1, ..., s)$, seront des polynômes l.m.n. à coefficients entiers, selon le théorème 2. Mais,

$$Q_h(x) = CP(x) - P_h(x), \qquad (h = 0, 1, ..., s),$$

donc le théorème 3 est démontré.

D'une manière abrégée, les décompositions des fonctions $P_h(x)$, $(h = 0, 1, ..., s)$, seront obtenues à la suite des opérations suivantes : *a*) la transformation linéaire $(T)$ réalisée sur les polynômes $P(x)$ et $P_h(x)$, $(h = 0, 1, ..., s)$ ; *b*) la recherche du nombre entier $C$ ; *c*) le calcul des différences $Q_h(x) = CP(x) - P_h(x)$, $(h = 0, 1, ..., s)$. Il faudra remarquer que ces décompositions dépendent d'un polynôme quelconque appartenant à la classe des polynômes complets. Un choix convenable pourrait améliorer l'efficacité de l'algorithme lexicographique.

Exemple : Soit les polynômes

$$P(x) = 31x_1 + 6x_2 + x_3,$$

$$P_0(x) = -x_1 + x_2 + 2x_3, \qquad P_1(x) = 18x_1 + 5x_2 + x_3 - 16,$$

définis sur l'ensemble $B_3^5$, parmi lesquels $P(x)$ est un polynôme complet. Après la transformation linéaire $(T)$ on obtiendra

$$\bar{P}(u) = u_1 + u_2 + u_3,$$

$$\bar{P}_0(u) = -6u_1 - 9u_2 + 2u_3, \qquad \bar{P}_1(u) = -7u_1 + u_3 - 16.$$

Le nombre entier $C$ doit satisfaire l'inégalité

$$C \geqslant \max(-6, -9, 2, -7, 0, 1),$$

donc $C = 2$ et on a

$$Q_0(x) = 2P(x) - P_0(x) = 63x_1 + 11x_2,$$
$$Q_1(x) = 2P(x) - P_1(x) = 44x_1 + 7x_2 + x_3 + 16.$$

## 2. LA RESOLUTION D'UN PROBLEME AUXILIAIRE

D'abord nous montrerons comment agit l'algorithme lexicographique pour la résolution du problème auxiliaire $(B)$ : trouver le premier élément $\tilde{x}$ de l'ensemble

$$Z = \{ x \mid x \in B_n^p, \qquad P_h(x) \geqslant 0, \qquad (h = 0, 1, \ldots, s) \},$$

où $P_h(x)$ sont des polynômes à coefficients entiers, définis sur l'ensemble $B_n^p$.

On commence par une étape préparatoire. On choisit un polynôme à coefficients entiers, $P(x)$, qui satisfait les conditions suivantes : 1) $P(x)$ est un polynôme complet ; 2) la liste $(L)$ des valeurs du polynôme $P(x)$ pour tous les vecteurs de l'ensemble $B_n^p$ se trouve à notre disposition ; 3) le degré du polynôme $P(x)$ est égal au degré maximal trouvé dans le système de polynômes $P_h(x)$, $(h = 0, 1, \ldots, s)$. On applique le procédé développé dans le paragraphe précédent et on obtiendra le nombre entier non-négatif $C$ et les polynômes l.m.n. à coefficients entiers $Q_h(x)$, $(h = 0, 1, \ldots, s)$, tels que

$$P_h(x) = CP(x) - Q_h(x), \qquad (h = 0, 1, \ldots, s).$$

Maintenant, il faudra résoudre le problème $(B)$ : trouver le premier élément $\tilde{x}$ de l'ensemble

$$Z = \{ x \mid x \in B_n^p, \qquad Q_h(x) \leqslant CP(x), \qquad (h = 0, 1, \ldots, s) \}$$

dans lequel $P(x)$ et $Q_h(x)$ sont des polynômes l.m.n. à coefficients entiers et $C$ un nombre entier non-négatif. L'étape préparatoire est finie et il faudra commencer les itérations de l'algorithme.

Évidemment, le système d'inéquations qui détermine l'ensemble $Z$ peut être remplacé par l'inéquation unique

$$\max_h Q_h(x) \leqslant CP(x) ;$$

c'est l'inéquation pour laquelle nous chercherons le premier élément de l'ensemble des solutions, en connaissant la liste $(L)$ des valeurs de la fonction $P(x)$ pour tous les éléments de l'ensemble $B_n^p$. Il est bien clair que si les fonctions $Q_h(x)$ sont des fonctions l.m.n., la fonction

$$M(x) = \max_h Q_h(x)$$

sera aussi une fonction l.m.n.

Le vecteur $z \in B_n^p$ sera appelé « vecteur de départ » pour la résolution du problème $(B)$, si pour chaque $x \leqslant z$, $x \neq z$, on a $x \notin Z$ ; le vecteur nul est considéré comme un vecteur de départ.

**Théorème 4 :** Si le vecteur $z \in B_n^p$ est un vecteur de départ pour la résolution du problème $(B)$ et le vecteur $\tilde{z} \in B_n^p$ est le premier élément qui satisfait l'inéquation

$$(E) \qquad M(z) \leqq CP(x),$$

nous aurons les conclusions suivantes : *a*) si $\tilde{z}$ n'existe pas, le problème $(B)$ sera insoluble ; *b*) si $\tilde{z} = z$, la solution du problème $(B)$ sera $\tilde{x} = \tilde{z}$ ; *c*) si $\tilde{z} \neq z$, le vecteur $\tilde{z}$ sera un nouveau vecteur de départ et $\tilde{z} \succcurlyeq z$.

Pour justifier le théorème 4 il faudra remarquer d'abord que si $\tilde{x}$ existe nous aurons $\tilde{x} \succcurlyeq z$. Alors, les conclusions du théorème résultent de la manière suivante : *a*) si $\tilde{x}$ existait nous aurions eu $M(z) \leqq M(\tilde{x}) \leqq CP(\tilde{x})$, donc $\tilde{z}$ existerait aussi ; *b*) conclusion évidente ; *c*) si $\tilde{x}$ satisfaisait

$$z \leqslant \tilde{x} \leqslant \tilde{z},\ \tilde{x} \neq \tilde{z},$$

nous aurions eu $M(z) \leqq M(\tilde{x}) \leqq CP(\tilde{x})$, donc $\tilde{z}$ n'aurait pas été le premier vecteur qui satisferait l'inéquation $(E)$.

En tenant compte du théorème 4 nous pourrons formuler les opérations d'une itération quelconque de l'algorithme. Supposons qu'on connaît un vecteur de départ $z_r$ et on commence l'itération $r$ ; pour $r = 1$ on prend $z_1 = 0$. L'itération $r$ contient les opérations suivantes : 1. Calculer les nombres $Q_h(z_r)$, $(h = 0, 1, \ldots, s)$, et le nombre $M(z_r)$ ; 2. extraire de la liste $(L)$ le premier vecteur $z_{r+1}$ qui satisfait l'inéquation $M(z_r) \leqq CP(x)$; 3. appliquer les conclusions du théorème 4 pour établir si le problème $(B)$ a été résolu ou non et passer à l'itération $r + 1$ dans le dernier cas, en remplaçant $z_r$ par $z_{r+1}$.

L'algorithme conduit à la résolution du problème $(B)$ après un nombre fini d'itérations, car tous les vecteurs de départ obtenus à la fin des itérations de l'algorithme sont distincts et l'ensemble $B_n^p$ est fini.

On peut dire que l'algorithme lexicographique cherche la solution du problème $(B)$ parmi les vecteurs de départ construits par lui-même.

Exemple : Soit le polynôme $P_1(x) = 18x_1 + 5x_2 + x_3 - 16$ ; trouver le premier élément $\tilde{x} \in B_3^5$, qui satisfait l'inéquation $P_1(x) \geqq 0$. En prenant le polynôme complet $P(x) = 31x_1 + 6x_2 + x_3$, dont la table des valeurs est donnée dans le tableau II, on réalise l'étape préparatoire de la résolution ; on a $C = 1$, $Q_1(x) = 13x_1 + x_2 + 16$. Maintenant, en tenant compte de la liste $(L)$ on construit le tableau des vecteurs de départ. Après 4 itérations (tableau I) on obtiendra la solution du problème : $\tilde{x} = (0, 3, 1)$ ; cette solution est le 17e vecteur de l'ensemble $B_3^5$. L'algorithme n'a pas utilisé pendant la résolution que 4 vecteurs de départ, les autres vecteurs ont été éliminés par l'algorithme.

TABLEAU I

| $r$ | $z_r$ | $Q_1(z_r)$ | $M(z_r)/C$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 0 0 | 16 | 16 |
| 2 | 0 2 4 | 18 | 18 |
| 3 | 0 3 0 | 19 | 19 |
| 4 | 0 3 1 | 19 | 19 |

## 3. L'ALGORITHME LEXICOGRAPHIQUE

Soit le programme polynomial en nombres entiers : trouver le vecteur $\hat{x} \in B_n^p$, tel que

$$P_0(\hat{x}) = \sup_{x \in X_0} P_0(x),$$

TABLEAU II. — *Liste (L) pour le polynôme* $P(x) = 31x_1 + 6x_2 + x_3$

| $x$ | $P(x)$ | $x$ | $P(x)$ | $x$ | $P(x)$ | $x$ | $P(x)$ | $x$ | $P(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 0 0 | 0 | 1 0 0 | 31 | 2 0 0 | 62 | 3 0 0 | 93 | 4 0 0 | 124 |
| 0 0 1 | 1 | 1 0 1 | 32 | 2 0 1 | 63 | 3 0 1 | 94 | 4 0 1 | 125 |
| 0 0 2 | 2 | 1 0 2 | 33 | 2 0 2 | 64 | 3 0 2 | 95 | 4 0 2 | 126 |
| 0 0 3 | 3 | 1 0 3 | 34 | 2 0 3 | 65 | 3 0 3 | 96 | 4 0 3 | 127 |
| 0 0 4 | 4 | 1 0 4 | 35 | 2 0 4 | 66 | 3 0 4 | 97 | 4 0 4 | 128 |
| 0 1 0 | 6 | 1 1 0 | 37 | 2 1 0 | 68 | 3 1 0 | 99 | 4 1 0 | 130 |
| 0 1 1 | 7 | 1 1 1 | 38 | 2 1 1 | 69 | 3 1 1 | 100 | 4 1 1 | 131 |
| 0 1 2 | 8 | 1 1 2 | 39 | 2 1 2 | 70 | 3 1 2 | 101 | 4 1 2 | 132 |
| 0 1 3 | 9 | 1 1 3 | 40 | 2 1 3 | 71 | 3 1 3 | 102 | 4 1 3 | 133 |
| 0 1 4 | 10 | 1 1 4 | 41 | 2 1 4 | 72 | 3 1 4 | 103 | 4 1 4 | 134 |
| 0 2 0 | 12 | 1 2 0 | 43 | 2 2 0 | 74 | 3 2 0 | 105 | 4 2 0 | 136 |
| 0 2 1 | 13 | 1 2 1 | 44 | 2 2 1 | 75 | 3 2 1 | 106 | 4 2 1 | 137 |
| 0 2 2 | 14 | 1 2 2 | 45 | 2 2 2 | 76 | 3 2 2 | 107 | 4 2 2 | 138 |
| 0 2 3 | 15 | 1 2 3 | 46 | 2 2 3 | 77 | 3 2 3 | 108 | 4 2 3 | 139 |
| 0 2 4 | 16 | 1 2 4 | 47 | 2 2 4 | 78 | 3 2 4 | 109 | 4 2 4 | 140 |
| 0 3 0 | 18 | 1 3 0 | 49 | 2 3 0 | 80 | 3 3 0 | 111 | 4 3 0 | 142 |
| 0 3 1 | 19 | 1 3 1 | 50 | 2 3 1 | 81 | 3 3 1 | 112 | 4 3 1 | 143 |
| 0 3 2 | 20 | 1 3 2 | 51 | 2 3 2 | 82 | 3 3 2 | 113 | 4 3 2 | 144 |
| 0 3 3 | 21 | 1 3 3 | 52 | 2 3 3 | 83 | 3 3 3 | 114 | 4 3 3 | 145 |
| 0 3 4 | 22 | 1 3 4 | 53 | 2 3 4 | 84 | 3 3 4 | 115 | 4 3 4 | 146 |
| 0 4 0 | 24 | 1 4 0 | 55 | 2 4 0 | 86 | 3 4 0 | 117 | 4 4 0 | 148 |
| 0 4 1 | 25 | 1 4 1 | 56 | 2 4 1 | 87 | 3 4 1 | 118 | 4 4 1 | 149 |
| 0 4 2 | 26 | 1 4 2 | 57 | 2 4 2 | 88 | 3 4 2 | 119 | 4 4 2 | 150 |
| 0 4 3 | 27 | 1 4 3 | 58 | 2 4 3 | 89 | 3 4 3 | 120 | 4 4 3 | 151 |
| 0 4 4 | 28 | 1 4 4 | 59 | 2 4 4 | 90 | 3 4 4 | 121 | 4 4 4 | 152 |

où

$$X_0 = \{ x \mid x \in B_n^p, \qquad P_j(x) \geqslant 0, \qquad (j = 1, \ldots, s) \},$$

et $P_h(x)$, $(h = 0, 1, \ldots, s)$, sont des polynômes à coefficients entiers définis sur l'ensemble $B_n^p$.

La résolution du problème $(A)$ se ramène à la résolution d'un nombre fini de problèmes auxiliaires de la forme $(B_k)$ : trouver le vecteur $\hat{x}_k$, premier élément de l'ensemble

$$X_k = \{ x \mid x \in B_n^p, \qquad P_0(x) \geqslant \lambda_k, \qquad P_j(x) \geqslant 0, \qquad (j = 1, \ldots, s) \}$$

où

$$\lambda_k = \begin{cases} -\infty & k = 0, \\ P_0(\hat{x}_{k-1}) + 1 & k > 0. \end{cases}$$

En effet, la résolution successive des problèmes auxiliaires $(B_0)$, $(B_1)$, $(B_2)$, ..., revient à trouver le premier programme $\hat{x}_0$ du problème $(A)$, puis le premier programme $\hat{x}_1$ « meilleur » que $\hat{x}_0$, le premier programme $\hat{x}_2$ « meilleur » que $\hat{x}_1$, et ainsi de suite.

Chaque vecteur $\hat{x}_k$ est un vecteur de départ pour la résolution du problème $(B_{k+1})$ ; le vecteur nul est le vecteur de départ avec lequel on commence la résolution du problème $(B_0)$. Chaque problème $(B_k)$ est un problème du type considéré dans le paragraphe précédent. Alors, on peut donner la description d'une itération $r$ de l'algorithme lexicographique pour la résolution du problème $(A)$. On connaît un vecteur de départ $z_r$ pour la résolution d'un problème auxiliaire $(B_k)$. Il faudra appliquer les opérations suivantes :

*a*) Trouver le vecteur $z_{r+1}$, premier vecteur qui satisfait l'inéquation

$$\max_h Q_h(z) \leqq CP(x),$$

où la fonction $Q_0(x)$ est construite à l'aide du nombre $\lambda_k$ ; si le vecteur $z_{r+1}$ n'existe pas, le programme $(A)$ est résolu, car ou bien nous aurons $\hat{x} = \hat{x}_{k-1}$ (pour $k > 0$), ou bien $\hat{x}$ n'existe pas (pour $k = 0$) ; si le vecteur $z_{r+1}$ existe, passer à l'opération suivante ;

*b*) Établir si $z_{r+1} \neq z_r$ ou $z_{r+1} = z_r$ ; dans le premier cas, commencer l'itération $r + 1$ avec le nouveau vecteur de départ $z_{r+1}$ ; dans le second cas, passer à l'opération suivante ;

*c*) Calculer le nombre

$$\lambda_{r+1} = P_0(z_r) + 1,$$

ajouter $\lambda_{r+1} - \lambda_r$ à la fonction $Q_0(x)$ et passer à l'itération $r + 1$ avec le vecteur de départ $z_{r+1}$.

Évidemment, le vecteur de départ ne peut rester le même que pour deux itérations successives, qui ont réalisé le passage d'un problème auxiliaire à un autre ; d'où le théorème qui suit :

**Théorème 5 :** L'algorithme lexicographique résout le programme $(A)$ après un nombre fini d'itérations.

Dans le cas où une itération $r$ change le problème auxiliaire on peut commencer l'itération suivante avec le vecteur de départ $z_r + e_n$, car $z_r$ n'est pas la solution du nouveau problème auxiliaire ; l'algorithme avec cette petite variation sera illustré par notre exemple.

## 4. EXEMPLE

Soit le programme linéaire en nombres entiers : trouver $\hat{x} \in B_3^5$, tel que

$$P_0(\hat{x}) = \sup_{x \in X_0} P_0(x),$$

où

$$P_0(x) = -x_1 + x_2 + 2x_3,$$

$$P_1(x) = 18x_1 + 5x_2 + x_3 - 16,$$

$$X_0 = \{ x \mid x \in B_3^5, \qquad P_1(x) \geqslant 0 \}.$$

L'étape préparatoire de la résolution a été réalisée dans le premier paragraphe ; nous avons obtenu $C = 2$ et

$$Q_0(x) = 63x_1 + 11x_2,$$

$$Q_1(x) = 44x_1 + 7x_2 + x_3 + 16,$$

en prenant le polynôme complet $P(x) = 31x_1 + 6x_2 + x_3$.

L'application de l'algorithme donnera les résultats contenus dans le tableau III; le tableau a été construit à l'aide de la liste $(L)$ donnée dans le second paragraphe. Nous avons résolu successivement les problèmes auxiliaires $(B_0)$, ..., $(B_5)$ ; pendant la résolution l'algorithme a utilisé seulement 31 vecteurs de l'ensemble $B_3^5$ qui contient 125 vecteurs ; les solutions des problèmes auxiliaires ont été :

$$\hat{x}_0 = (0, 3, 1), \hat{x}_1 = (0, 3, 2), \hat{x}_2 = (0, 3, 3), \hat{x}_3 = (0, 3, 4), \hat{x}_4 = (0, 4, 4)$$

et le problème $(B_5)$ a été insoluble. Alors, le programme considéré a la solution $\hat{x} = (0, 4, 4)$

TABLEAU III

| $k$ | $r$ | $z_r$ | $Q_0(z_r) + \lambda_k$ | $Q_1(z_r)$ | $M(z_r)/C$ | $\lambda_k$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 0 0 | — | 16 | 8 | |
| | 2 | 0 1 2 | — | 25 | 12,5 | |
| | 3 | 0 2 1 | — | 31 | 15,5 | |
| | 4 | 0 2 4 | — | 34 | 17 | |
| | 5 | 0 3 0 | — | 37 | 18,5 | |
| | 6 | 0 3 1 | — | 38 | 19 | |
| 1 | 7 | 0 3 2 | 39 | 39 | 19,5 | 6 |
| 2 | 8 | 0 3 3 | 41 | 40 | 20,5 | 8 |
| 3 | 9 | 0 3 4 | 43 | 41 | 21,5 | 10 |
| 4 | 10 | 0 4 0 | 56 | 44 | 28 | 12 |
| | 11 | 0 4 4 | 56 | 48 | 28 | |
| 5 | 12 | 1 0 0 | 76 | 60 | 38 | 13 |
| | 13 | 1 1 1 | 87 | 68 | 43,5 | |
| | 14 | 1 2 1 | 98 | 75 | 49 | |
| | 15 | 1 3 0 | 109 | 81 | 54,5 | |
| | 16 | 1 4 0 | 120 | 88 | 60 | |
| | 17 | 2 0 0 | 139 | 104 | 69,5 | |
| | 18 | 2 1 2 | 150 | 113 | 75 | |
| | 19 | 2 2 1 | 161 | 119 | 80,5 | |
| | 20 | 2 3 1 | 172 | 126 | 86 | |
| | 21 | 2 4 0 | 183 | 132 | 91,5 | |
| | 22 | 3 0 0 | 202 | 148 | 101 | |
| | 23 | 3 1 2 | 213 | 157 | 106,5 | |
| | 24 | 3 2 2 | 224 | 164 | 112 | |
| | 25 | 3 3 1 | 235 | 170 | 117,5 | |
| | 26 | 3 4 1 | 246 | 177 | 123 | |
| | 27 | 4 0 0 | 265 | 192 | 132,5 | |
| | 28 | 4 1 3 | 276 | 202 | 138 | |
| | 29 | 4 2 2 | 287 | 208 | 143,5 | |
| | 30 | 4 3 2 | 298 | 215 | 149 | |
| | 31 | 4 4 1 | 309 | 221 | 154,5 | |