REVUE FRANÇAISE D'INFORMATIQUE ET DE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

G. HENRY

Recherche d'un réseau de dépôts optimum

Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle, tome 2, nº V2 (1968), p. 61-70

<http://www.numdam.org/item?id=RO_1968__2_2_61_0>

R.I.R.O.
(2e année, N° 11, 1968, p. 61-70)

RECHERCHE D'UN RESEAU DE DEPOTS OPTIMUM

par G. Henry

Esso-Standard SAF

Cet article expose des méthodes déjà connues mais publiées uniquement en langue anglaise. Il met en valeur l'intérêt que peut présenter une méthode heuristique même lorsqu'une méthode rigoureuse est connue. Il montre qu'on peut traiter des problèmes de grande dimension.

La création d'un dépôt se justifie par des économies de transport

Le problème de la création d'un réseau de dépôts se pose notamment dans les conditions suivantes :

— la clientèle est dispersée sur un territoire étendu,

— les livraisons ne peuvent être assurées que par camion,

— les approvisionnements des dépôts peuvent être effectués par un moyen de transport massif (eau, fer, pipe).

La création d'un dépôt pour desservir une zone de demande se justifie par les économies réalisées sur les coûts de transport. Pour approvisionner cette zone, nous disposons de deux solutions :

— la livrer par camion à partir d'un dépôt voisin (ou de plusieurs),

— créer un dépôt au centre de la zone ce qui réduira les distances de camionnage.

Dans le second cas, en contrepartie des économies sur les frais de camionnage, nous aurons à supporter les dépenses d'exploitation d'un dépôt.

La création d'un dépôt est liée à l'ensemble du réseau de dépôts

La justification d'un dépôt dépend donc de l'emplacement des dépôts voisins. Nous ne pouvons pas rechercher l'emplacement optimum d'un dépôt indépendamment de celui des autres dépôts. Nous devons rechercher le réseau optimum dans son ensemble.

D'une façon générale, on peut dire que si, sur un certain territoire, le nombre de dépôts est très élevé, les frais de transport seront très bas (remplacement de coûts de camionnage par des coûts de transport massif). Par contre, les frais d'exploitation des dépôts seront très élevés. L'inverse sera vrai si le nombre de dépôts est très petit. Le réseau optimum résulte donc d'un compromis entre les frais de transport et les frais d'exploitation des dépôts.

Le problème est essentiellement discontinu

Il existe des points d'implantation privilégiés pour les dépôts :

— points à coût d'approvisionnement relativement bas : usines ou axes de transport massif importants (pipe, voie d'eau, liaisons ferrées à gros trafic),

— zones de consommation élevée (agglomérations importantes).

Il paraît raisonnable de se définir à peu près 2 à 3 fois plus d'emplacements possibles qu'il n'y aura de dépôts dans le réseau optimum. Nous n'avons pas de test de sensibilité du résultat au nombre d'implantations possibles données au départ. La recherche d'un résultat plus fin est de toute façon illusoire à cause de l'incertitude qui pèse sur les données.

Finesse du découpage géographique

Les zones de consommation doivent être assez fines pour qu'une zone de camionnage puisse être définie avec suffisamment de précision. Par exemple, si on s'attend à trouver un réseau optimum de 10 dépôts, on choisira comme zone de consommation le département et chaque zone de camionnage comprendra en moyenne 8 départements. Si on s'attend à un réseau optimum de 100 dépôts, il faudra prendre comme zone de consommation le canton. Chaque zone de camionnage sera définie en moyenne par 20 à 30 cantons.

Données de base

Les données nécessaires sont les suivantes :

— ventes par zones de consommation,

— coûts d'approvisionnement de chaque implantation possible,

— coûts de passage en dépôt,

— coûts de camionnage dépôts clients (zone de consommation = client).

Les restrictions qui apparaissent maintenant sont liées aux deux méthodes de résolution qui vont être indiquées.

Un seul produit

On ne peut prendre en considération qu'un seul produit jusqu'à la sortie de dépôts. Si on vend une gamme de produits, le coût d'approvisionnement et le coût de passage en dépôt doivent être des coûts pondérés. Par contre, à la sortie de dépôt, on peut prendre en compte plusieurs produits, chaque zone de consommation étant considérée séparément pour chaque produit. La pondération doit être faite en fonction des quantités relatives de produits transités. Dans le cas général, la répartition des produits dépend de la zone attribuée à chaque dépôt mais il n'est pas possible d'en tenir compte au cours d'un passage. Bien entendu, on pourrait procéder par approximations successives si la précision en ce domaine était importante.

Pas de limitation de capacité ou de tranches de prix

Il n'existe pas de limitation de capacité. Les ressources pour approvisionner un dépôt à partir d'une origine donnée sont disponibles en quantité illimitée. Il n'existe donc qu'un seul coût d'approvisionnement par dépôt. La capacité des dépôts est également illimitée.

Le coût unitaire d'approvisionnement d'un dépôt est constant. Il ne varie pas en fonction de la quantité transportée. Dans la réalité, ceci n'est vrai que dans une certaine fourchette de tonnage. Là encore, une hypothèse *a priori* doit être faite, quitte à recycler si elle ne se trouvait pas vérifiée.

Coûts de passage en dépôt

Le coût de passage en dépôt comprend un terme annuel fixe et un terme proportionnel au tonnage. C'est l'existence du terme fixe qui rend le problème délicat. S'il n'existait pas, le problème serait trivial (tous les dépôts seraient ouverts).

Les coûts de passage en dépôt comprennent deux types de frais :

— les frais d'exploitation du dépôt (personnel, entretien, éclairage, etc..., rémunération des stocks),

— l'amortissement et la rémunération du capital.

Aux emplacements où il n'y a pas de dépôt existant, on associe une courbe de coût de passage qui tient compte des deux types de frais. Aux emplacements où il existe déjà des dépôts, on associe une courbe qui ne tient compte que des frais d'exploitation. Si la capacité du dépôt existant est dépassée, il faut y ajouter l'amortissement et la rémunération des extensions nécessaires. Mais ceci ne peut être fait que par approximations successives.

Evaluation d'un réseau donné

Si on se donne un réseau, c'est-à-dire si on se donne les emplacements où un dépôt est ouvert, on peut déterminer facilement le coût de distribution minimum correspondant. Ce coût de distribution comprend l'ensemble des frais de transport et de passage en dépôt. Les frais de transport comprennent eux-mêmes les frais d'approvisionnement et les frais de camionnage.

Pour calculer le coût de distribution, on commence par déterminer les zones de camionnage de chaque dépôt, c'est-à-dire l'ensemble des clients qu'il livre. Pour cela, on parcourt la liste des clients. Pour chaque client, on examine la liste des dépôts qui peuvent le desservir. En face de chaque dépôt on peut mettre un coût unitaire marginal de mise en place, somme du coût d'approvisionnement, des frais de passage proportionnels au volume et du coût de camionnage dépôt client. Pour chaque client, on choisit le dépôt pour lequel le coût de mise en place est le plus bas. On ne tient pas compte à ce stade des frais fixes puisque ceux-ci sont indépendants du rattachement des clients aux dépôts.

Une fois les rattachements connus, il est facile de calculer le volume passant par chaque dépôt, d'où le coût d'approvisionnement et les frais de passage en tenant compte cette fois-ci des frais fixes.

Problème posé par la recherche du réseau optimum

Le choix du réseau optimum pourrait être fait en calculant le coût de distribution attaché à chaque réseau possible et en retenant le meilleur. Malheureusement, le nombre de réseaux à étudier devient rapidement très élevé. S'il existe n emplacements, le nombre de réseaux à étudier est 2^n puisque, en chaque emplacement, il existe deux solutions : dépôt ouvert ou dépôt fermé. Le but de toute méthode de recherche est de réduire au maximum le nombre de réseaux à étudier.

Première méthode heuristique par élimination progressive

Nous commencerons par décrire une méthode par élimination progressive. Au départ, on suppose qu'un dépôt est ouvert dans chaque emplacement possible. Puis on effectue un certain nombre d'itérations.

Au cours de chaque itération, on ferme un seul dépôt. Pour fermer ce dépôt, on examine successivement les économies réalisées en fermant chaque dépôt et en maintenant les autres ouverts. Le dépôt fermé est celui dont la fermeture entraîne la plus forte économie. Ce dépôt sera *définitivement fermé* et ne sera plus jamais considéré par la suite.

Lorsqu'il n'est plus possible de réaliser d'économies en fermant un dépôt supplémentaire, le réseau optimum est atteint. Si ce réseau contient k dépôts, on aura étudié au total :

n réseaux à $(n - 1)$ dépôts pour fermer le 1$^{\text{er}}$ dépôt

$(n - 1)$ réseaux à $(n - 2)$ dépôts pour fermer le 2$^{\text{e}}$ dépôt

. . . .

$(n - k + 1)$ réseaux à $(n - k)$ dépôts pour fermer le $k^{\text{ième}}$ dépôt

$(n - k)$ réseaux à $(n - k - 1)$ dépôts pour nous assurer qu'il n'était plus possible d'en fermer d'autres.

Le nombre de réseaux ainsi étudié est très inférieur à 2^n.

L'évolution des coûts au cours de ces itérations peut être décrite dans le graphique 1. Lorsque le nombre de dépôts décroît, les coûts d'exploitation des dépôts décroissent et le coût des transports croît. Le coût total de distribution, somme des deux précédents, décroît jusqu'à l'optimum.

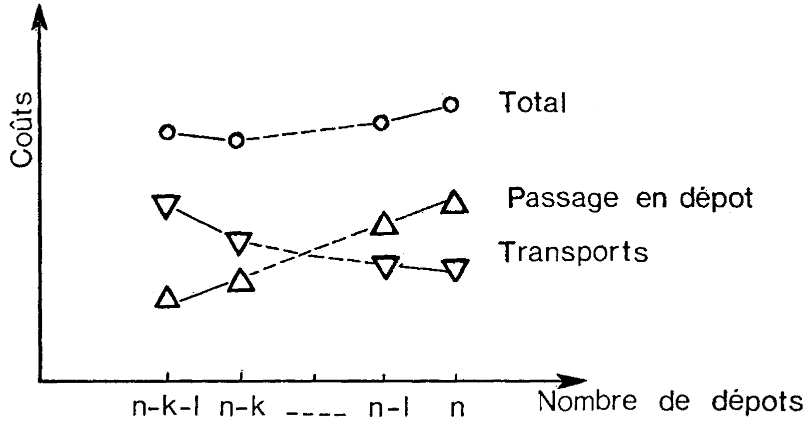


Figure 1

Le réseau ainsi obtenu est appelé optimum par abus de langage. Nous n'avons aucune garantie que le réseau soit effectivement l'optimum. Toutefois, la forme extrêmement aplatie de la courbe nous laisse douter de l'intérêt qu'il peut y avoir à trouver l'optimum véritable. Cette intuition est confirmée par l'expérience faite sur certains cas.

Autre méthode heuristique : par addition progressive

On peut imaginer facilement d'autres approches heuristiques du problème. On peut par exemple penser à une méthode par additions successives, dans laquelle on ajoute les dépôts un à un, un dépôt ouvert au cours d'une itération étant considéré comme définitivement ouvert. L'intérêt des deux méthodes est comparé dans la référence 1 qui traite d'ailleurs d'un cas plus général où les courbes de passage en dépôt sont concaves et non pas seulement du type $ax + b$. Pour autant qu'on puisse être général en parlant de méthode heuristique, la méthode par élimination progressive paraît préférable dans la pratique.

Formulation sous la forme d'un programme linéaire

Le problème d'implantation de dépôts ainsi qu'il a été défini ci-dessus peut facilement se mettre sous la forme d'un programme linéaire. Mais l'existence d'un coût fixe d'exploitation de dépôt introduit des variables entières.

Nous définirons quelques notations :

i = indice dépôt $i = 1, n$

j = indice client $j = 1, m$

a_i = coût d'approvisionnement du dépôt i (F/t)

f_i = coût fixe d'exploitation du dépôt $i (F/an)$

b_i = coût de passage en dépôt proportionnel au volume (F/t)

t_{ij} = coût de camionnage du dépôt i au client $j (F/t)$

$c_{ij} = a_i + b_i + t_{ij}$

d_j = demande du client $j (t/an)$

D_i = demande de tous les clients qui peuvent être rattachés à i

x_{ij} = variable quantité transportée du dépôt i au client j

y_i = variable entière caractéristique de l'ouverture ($y_i = 1$) ou de la fermeture ($y_i = 0$) d'un dépôt

Le problème peut s'énoncer :

$$\min z = \sum_{i,j} c_{ij} x_{ij} + \sum_i f_i y_i \tag{1}$$

$$\sum_i x_{ij} = d_j \qquad j = 1, m \tag{2}$$

$$\frac{1}{Di} \sum x_{ij} \leqslant y_i \qquad i = 1, n \tag{3}$$

$$y_i = 0, 1 \tag{4}$$

$$x_{ij} \geqslant 0. \tag{5}$$

L'équation (3) force y_i à prendre une valeur positive si un x_{ij} est positif ; y_i ne pouvant être égal qu'à 0 ou 1, prend la valeur 1. Elle exprime que la totalité des frais fixes du dépôt i doit être prise en compte dès qu'un client est approvisionné par ce dépôt. La quantité D_i figure au premier membre en diviseur pour ne pas forcer y_i à prendre une valeur supérieure à 1.

Application de la méthode branch and bound

Le principe de la méthode est d'explorer un arbre de solutions. Chaque nœud correspond à une solution du programme linéaire précédent dans lequel on impose à certaines variables entières la valeur 0 ou la valeur 1 et on laisse les autres libres de prendre des valeurs non entières.

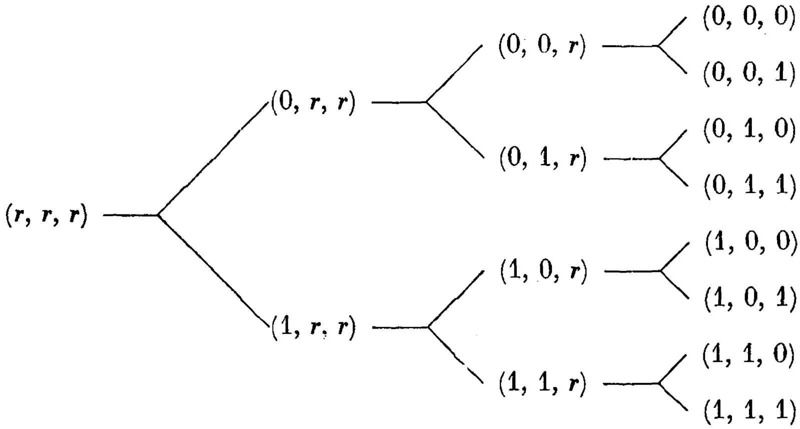
Chaque nœud sera décrit par les valeurs imposées aux variables entières, par exemple pour un problème à 3 variables entières, le nœud (0, 1, r) correspond au problème précédent dans lequel :

$y_1 = 0$

$y_2 = 1$

y_3 est libre de prendre des valeurs non entières.

L'arbre des solutions à explorer se décrit de la façon suivante :

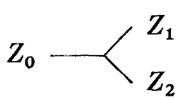


Seules les solutions de la dernière colonne correspondent au problème initial. L'intérêt de la méthode branch and bound est qu'elle permet d'éviter l'exploration complète de l'arbre. En effet, en partant de la gauche, la valeur de la fonction économique à un nœud constitue une borne inférieure pour les valeurs que peut prendre la fonction économique à tous les nœuds qui le suivent sur la droite. Pour s'en rendre compte, il suffit de remarquer qu'on s'impose des contraintes supplémentaires en fixant des valeurs entières aux variables qui étaient encore libres.

En partant de la gauche, on prolonge à chaque itération le rameau dont le nœud a la plus faible fonction économique jusqu'à ce qu'on trouve une solution entière pour laquelle la fonction économique soit inférieure à toutes les fonctions économiques des nœuds pendants.

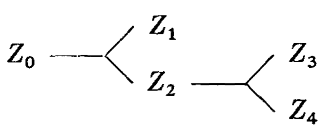
Ainsi, si on a par exemple :

1.



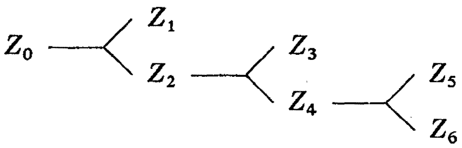
avec $Z_2 < Z_1$ on prolonge Z_2, ce qui donne :

2.



avec $Z_4 < \min(Z_3, Z_1)$ on prolonge Z_4, ce qui donne :

3.

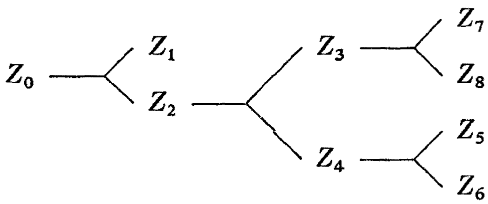


Si $Z_5 \leqslant \min(Z_1, Z_3, Z_6)$, on a trouvé une solution entière optimum puisque :

- $Z_5 \leqslant Z_1 \leqslant Z$ de toutes les solutions obtenues en prolongeant Z_1
- $Z_5 \leqslant Z_3 \leqslant Z$ de toutes les solutions obtenues en prolongeant Z_3.

4.

Si $Z_3 < \min(Z_1, Z_5, Z_6)$, il faut prolonger Z_3, ce qui donne :



- si $Z_7 \leqslant \min(Z_1, Z_5, Z_6, Z_8)$, on a trouvé la solution optimum,
- si $Z_5 \leqslant \min(Z_1, Z_6, Z_7, Z_8)$, on avait déjà la solution optimum sans en être sûr et maintenant on en est sûr,
- si $Z_1 < \min(Z_5, Z_6, Z_7, Z_8)$, il faudrait prolonger la branche Z_1.

La méthode branch and bound nous garantit d'arriver à l'optimum mais on ne connaît pas d'avance le prix qu'il faudra payer. Et ce prix peut être très élevé puisqu'avec un peu de malchance on peut explorer plus de 2^n nœuds, c'est-à-dire plus de solutions qu'il n'en existe d'entières.

Comparaison des différentes méthodes

Nous avons étudié deux problèmes de dimensions relativement modestes avec les programmes décrits dans les références 1 et 2. Les temps de calcul et les résultats obtenus permettent de se faire une idée de l'intérêt relatif des deux méthodes.

Nous souhaitions traiter un problème de dimension importante et il nous est apparu clairement que les temps de calcul avec les deux programmes disponibles dépasseraient ce qu'il est raisonnable d'envisager. Nous avons donc décider de réécrire un programme (ATTILA) utilisant la méthode d'élimination progressive en faisant porter tout notre effort sur la programmation.

L'examen du tableau comparatif ci-dessous nous conduit aux conclusions suivantes :

— les méthodes heuristiques et algorithmiques conduisent à des résultats qui ne sont pas très différents,

— une méthode heuristique bien programmée permet de traiter des problèmes de dimension importante.

Problème	Méthode	Temps de calcul (1)	Cout total
15 dépôts 100 clients 1 500 relations	Addition progressive Branch and bound	12/100 12/100	41,7 40,6
30 dépôts 100 clients 2 500 relations	Addition progressive Élimination Branch and bound ATTILA	17/100 49/100 (2) 4/100	28,02 27,88 27,87 27,75
100 dépôts 2 500 clients 15 000 relations	ATTILA	7/100	

(1) En centièmes d'heure sur 360-50 (optimizer niveau 0)

(2) Annulé au bout de 40/100 sans résultat, repris en imposant à 6 dépôts nommément désignés d'être ouverts et à 6 autres d'être fermés. Résultat obtenu en 6/100 à 2 % près.

Conclusions

Le chercheur opérationnel a la passion de l'optimum. C'est une passion qui coûte cher. L'implantation de dépôts est un exemple où nous trouvons en concurrence une méthode approchée (heuristique) conduisant à une bonne solution et une méthode rigoureuse donnant la solution optimum mais au prix de calculs dont le volume croît très rapidement. La méthode heuristique permet d'aborder des problèmes plus vastes et gagne en puissance ce qu'elle perd en rigueur.

Cette rigueur est d'ailleurs illusoire. L'analyse des résultats montre que ceux-ci se trouvent dans un mouchoir de poche au voisinage de l'optimum. L'écart entre l'optimum et une bonne solution est alors très inférieur à la précision que l'on peut attendre des données. On gagne alors à porter son effort sur celles-ci plutôt que sur la recherche de l'optimum.

Enfin, la méthode heuristique présente un autre avantage. Elle est fondée sur le bon sens et peut être exposée à des personnes sans aucune formation mathématique. La compréhension de la méthode suivie pour arriver à un résultat est un atout majeur pour la faire accepter.

Bien évidemment, à puissance de calcul égale, une méthode rigoureuse est préférable. Le problème d'implantation des dépôts est certainement un domaine où la recherche d'une méthode rigoureuse et efficace mérite d'être poursuivie. L'efficacité dépend d'ailleurs autant de la qualité de la programmation que de celle de la méthode.

[1] E. Feldman, F. A. Lehrer et T. L. Ray, Warehouse location under continuous economics of scale, *Management Science*, May 66.

[2] M. A. Effroymson et T. L. Ray, A branch-bound algorithm for plant location, *Operations Research*, May/June 1966.