Revue d'histoire des mathématiques,
10 (2004), p. 257–318.

EXPLORATION D'UN MODE D'ÉCRITURE DE LA GÉNÉRALITÉ : L'ARTICLE DE POINCARÉ SUR LES LIGNES GÉODÉSIQUES DES SURFACES CONVEXES (1905)

Anne ROBADEY (*)

RÉSUMÉ. — L'analyse de l'article de Poincaré sur les géodésiques fait apparaître qu'il entretient des liens complexes avec les travaux antérieurs de Poincaré en mécanique céleste. Nous montrerons que le problème des géodésiques des surfaces convexes est traité comme un paradigme grâce auquel Poincaré explicite une méthode qui n'était présentée qu'à l'état d'ébauche dans ses ouvrages de mécanique céleste. Cette étude de cas permet ainsi de mettre en évidence l'utilisation par Poincaré d'une technique d'écriture mathématique particulière, et d'en relever plusieurs caractéristiques. Le mode d'exposition pour lequel il opte, qui consiste à présenter une méthode sur un problème particulier plutôt qu'en des termes plus abstraits, ne perd pas de vue la visée générale de la méthode, mais cette généralité s'exprime par des moyens spécifiques.

ABSTRACT. — EXPLORATION OF A WAY OF EXPRESSING GENERALITY : POINCARÉ'S 1905 PAPER ON GEODESICS ON CONVEX SURFACES. — An analysis of Poincaré's 1905 paper on geodesics reveals the complex links between this paper and Poincaré's previous work on celestial mechanics. We will show that the question of geodesics on convex surfaces functions as paradigm, through which Poincaré develops a method that he only sketched in his work on celestial mechanics. This case study thus allows us to explore Poincaré's use of a particular way of writing mathematics and to highlight some of its features. The way he chooses of presenting a method – in the context of a particular problem rather than in more abstract terms – does not obscure the method's generality, but this generality is expressed in terms of specifics.

Une méthode mathématique générale peut être présentée en des termes

(*) Texte reçu le 18 avril 2003, révisé le 11 février 2004.

A. ROBADEY, Équipe REHSEIS, Université Paris VII, Centre Javelot, 2 place Jussieu, 75251 Paris cedex 05.
Courrier électronique : robadey@math.jussieu.fr

Mots clés : Paradigme, Poincaré, généralité, géodésiques, mécanique céleste, géométrie.
Classification AMS : 01A55, 01A85, 53-03, 58E10.

suffisamment abstraits pour englober dans une même formulation toutes les situations auxquelles elle est applicable. Le lecteur peut alors à sa guise remplacer cette formulation abstraite par toute situation concrète qui vérifie les hypothèses utilisées dans la démonstration de la validité de la méthode. Mais la même méthode peut aussi être présentée directement sur un exemple, un *paradigme*[1], sans pour autant que l'auteur veuille en restreindre la généralité.

L'objet de cet article est de montrer qu'on peut reconnaître dans le mémoire publié en 1905 par Poincaré, « Sur les lignes géodésiques des surfaces convexes » [Poincaré 1905c], une méthode délibérément exposée de cette façon sur un paradigme. La question qui se pose alors est de comprendre pourquoi l'auteur a opté pour ce mode d'écriture.

Dans ce mémoire, Poincaré donne deux démonstrations de l'existence d'une géodésique fermée sans point double sur toute surface convexe. C'est surtout la première qui est intéressante pour notre propos ; elle consiste à prouver un résultat un peu plus précis :

Théorème 1. — *Sur une surface convexe quelconque, il y a toujours au moins une géodésique fermée sans point double et il y en a toujours un nombre impair*[2].

C'est cette première démonstration que je désignerai ici comme *la* démonstration du théorème 1. Il sera par ailleurs utile pour le lecteur d'avoir une idée, ne serait-ce que très schématique, du plan du mémoire de Poincaré : après une introduction, Poincaré consacre la section 2 à une étude géométrique des géodésiques, d'inspiration assez traditionnelle ; les sections 3 et 4 contiennent la démonstration du théorème 1 ; les propriétés des géodésiques dont on vient de prouver l'existence sont explorées dans

[1] Le terme de paradigme est employé ici non au sens de Kuhn, mais dans le même sens qu'en grammaire, où l'on présente par exemple la conjugaison des verbes du premier groupe sur le paradigme « chanter ».

[2] C'est moi qui donne à ce résultat le titre de théorème. Dans l'article de Poincaré, ce résultat est seulement énoncé, dans un paragraphe séparé et en italique, à la fin de la démonstration.

Tel qu'il est formulé, ce résultat suppose qu'on compte les géodésiques avec leur multiplicité. De plus, pour certaines surfaces, comme la sphère, le nombre de géodésiques fermées sans point double est infini. Il faut alors considérer que ces cas sont implicitement mis à part dans l'énoncé du théorème. Voir l'annexe B pour plus de détails.

les parties 5 et 6 ; dans les sections 7 et 8 enfin, on trouve la deuxième démonstration d'existence et ses conséquences.

Pour mettre en évidence que Poincaré travaille comme je le prétends sur un paradigme, je vais devoir dégager le contexte dans lequel cette étude est menée. Dans la section des *Œuvres* consacrée aux travaux de Poincaré en géométrie, l'article de 1905 apparaît très isolé. Or nous allons voir qu'en approfondissant la lecture de la démonstration du théorème 1, on met au jour des relations complexes entre le problème des géodésiques *stricto sensu*, qui constitue le sujet immédiat de l'article, et tout le travail de Poincaré en mécanique céleste.

L'analyse de ces liens montrera que le statut de cette démonstration est bien différent de ce qu'il semble à première vue. Poincaré expose en effet ici une méthode dont le domaine d'application dépasse le seul problème des géodésiques, et il en est conscient.

Dans le même temps, cette mise en contexte nous permettra de faire apparaître l'unité du texte de 1905. Ce dernier est en effet composé de plusieurs morceaux qui font appel à des techniques au premier abord très diverses, et seul paraît les lier leur sujet commun, l'étude des géodésiques des surfaces convexes.

La première partie de mon article étudie de façon précise cette démonstration[3], afin de mettre en évidence les liens extrêmement forts qu'elle entretient avec les recherches de Poincaré en mécanique céleste. Concernant ces dernières, il est naturel de se tourner vers les *Méthodes nouvelles de la mécanique céleste*[4] [Poincaré 1892–1899]. Le chapitre III, où Poincaré s'intéresse aux solutions périodiques des équations différentielles de la dynamique, fournit le cadre dans lequel nous pourrons mieux comprendre l'article de 1905. Poincaré y reprend pour une large part des résultats déjà exposés deux ans plus tôt dans son mémoire « Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique » [Poincaré 1890].

Je montrerai que les liens annoncés sont à double sens :

---

[3] Le lecteur est bien sûr invité à consulter le texte de Poincaré ; cependant, j'en exposerai dans le corps de l'article les points clefs sur lesquels s'appuie mon commentaire. Les annexes A et B discutent certaines inexactitudes, explicitent les points de la démonstration de Poincaré qui sont insuffisants, et montrent comment y remédier.

[4] Dans la suite, j'abrégerai ce titre en *Méthodes nouvelles*.

D'une part, les travaux de Poincaré en mécanique céleste influencent profondément le traitement des géodésiques des surfaces convexes, tant dans la problématique choisie, à savoir l'étude des géodésiques *fermées*, que dans la méthode utilisée pour démontrer leur existence. Cette méthode vient, comme nous le verrons, directement des travaux de mécanique céleste.

D'autre part, Poincaré ne se contente pas d'appliquer des résultats ou des méthodes établis en mécanique céleste au problème des géodésiques, comme une simple rentabilisation d'un outil puissant. La façon dont il rédige ce mémoire montre que la question des géodésiques y est abordée comme un cas particulier sur lequel appliquer une méthode ébauchée dans les *Méthodes nouvelles*, afin de la développer d'une façon qui pourra s'étendre à d'autres problèmes. Le lien n'est pas univoque, avec un simple transfert de méthode d'un domaine à un autre, mais réciproque. La théorie développée en mécanique céleste donne une méthode d'attaque de la question des géodésiques. Et celle-ci à son tour est utilisée comme un paradigme grâce auquel Poincaré développe plusieurs points seulement esquissés dans les *Méthodes nouvelles*.

Cette étude de cas ayant mis en évidence que l'article de Poincaré a une validité plus large que le seul problème des géodésiques explicitement étudié, je m'intéresserai dans un deuxième temps plus spécifiquement à ce mode d'écriture mathématique. J'en dégagerai certaines caractéristiques, à l'aide de ce mémoire de Poincaré, mais dans une perspective plus large. Deux points retiendront principalement mon attention. Il s'agit d'abord de l'utilisation du contexte géométrique fourni par les géodésiques pour interpréter les étapes successives de la méthode suggérée par la mécanique céleste, c'est-à-dire du cadre d'interprétation qu'offre l'utilisation d'un paradigme par opposition à une présentation plus abstraite dans le seul contexte de la mécanique céleste. D'autre part, nous verrons que ce mode de présentation choisi par Poincaré fait écho à la description qu'il donne dans ses œuvres philosophiques du travail du mathématicien, ainsi qu'à d'autres spécificités de son écriture mathématique.

1. L'ARTICLE SUR LES GÉODÉSIQUES ET SES LIENS COMPLEXES AVEC LA MÉCANIQUE CÉLESTE

Commençons par présenter la démonstration du théorème 1, en suivant le texte de 1905. Derrière cette première lecture s'en cachent beaucoup d'autres, qui seront déployées dans la suite de l'étude, au fur et à mesure de l'explicitation des liens qu'entretient cet article de Poincaré avec ses travaux de mécanique céleste.

1.1. Présentation de la démonstration

La démonstration proposée par Poincaré se compose de deux parties distinctes, dont je vais indiquer succinctement les grandes lignes. Je me limiterai ici à ce qui est nécessaire pour comprendre les niveaux de lecture successifs que je proposerai ensuite.

1.1.1. Géodésiques d'un sphéroïde

La première partie de la démonstration[5] établit le théorème 1 pour les surfaces suffisamment proches de la sphère, auxquelles Poincaré donne le nom de *sphéroïdes*. Il s'agit d'étudier ce que deviennent les géodésiques de la sphère, qui sont toutes fermées[6], lorsqu'on déforme très peu la sphère.

Nous qualifierions donc aujourd'hui cette étude de « locale » à deux titres : la surface considérée doit être proche de la sphère, et les géodésiques fermées sont cherchées au voisinage des géodésiques — fermées — de la sphère[7]. Dans la suite, je parlerai parfois de « l'étude locale » ou du « résultat local » pour désigner cette première partie de la démonstration.

En suivant d'aussi près que possible les termes de Poincaré, ce premier résultat s'énoncerait ainsi : *sur un sphéroïde, le nombre de géodésiques fermées qui subsistent quelque petite que soit la déformation de la sphère est impair.*

[5] Elle correspond à la section 3, intitulée « Géodésiques d'un sphéroïde », dans l'article de Poincaré.

[6] Dans tout ce qui suit, on considère des surfaces plongées dans l'espace euclidien, munies de la métrique induite. On appelle sphère l'ensemble des points à distance fixée de l'origine. Les géodésiques de la sphère sont donc les grands cercles.

[7] Poincaré précise, à la fin de la démonstration, que son résultat concerne seulement les géodésiques « qui subsistent quelque petit[e] que soit » la déformation de la sphère. Lorsqu'il utilise le résultat de l'étude locale dans la section suivante, c'est dans le contexte des géodésiques fermées sans point double, précision absente de l'étude locale, sinon dans cette remarque finale. Or les géodésiques de la sphère sont sans point double et Poincaré montre, dans la deuxième partie de la démonstration, que le nombre de points doubles ne peut pas changer quand on suit une géodésique fermée au cours d'une déformation. La remarque sur les géodésiques fermées « qui subsistent quelque petit[e] que soit » la déformation est donc sans doute la justification, aux yeux de Poincaré, de l'utilisation du résultat de la partie locale dans le cadre de l'étude des géodésiques *sans point double.*

Poincaré représente la déformation de la sphère comme une famille analytique de sphéroïdes paramétrée par un réel μ, de telle façon qu'on obtienne la sphère lorsque $\mu = 0$. Il travaille d'abord au premier ordre par rapport à μ, c'est-à-dire qu'il étudie le problème linéarisé. Son objectif est de caractériser les géodésiques fermées qui persistent lorsque μ n'est plus nul.

Il met en œuvre dans ce but une méthode inspirée explicitement par la méthode de variation des constantes de Lagrange[8] pour l'étude de la trajectoire d'une planète sous l'effet des perturbations dues aux autres planètes. Elle consiste à choisir un système de coordonnées particulier, lié à la dynamique non perturbée.

Lorsqu'une planète est seule autour du soleil, elle parcourt une ellipse keplérienne. Cette orbite elliptique peut être décrite par des *éléments elliptiques* : l'excentricité, l'inclinaison sur le plan de l'écliptique, etc. Une dernière coordonnée repère la position de la planète sur l'ellipse ainsi caractérisée.

Si l'on tient compte de l'attraction d'une autre planète (ou de plusieurs), le mouvement est modifié, mais faiblement : les masses des planètes perturbatrices sont très petites par rapport à celle du soleil. Ainsi, la façon la plus pratique de décrire le mouvement perturbé est de considérer que la planète décrit encore une orbite elliptique, mais que cette orbite varie lentement au cours du temps. On étudie donc les variations des éléments elliptiques définissant cette orbite en fonction du temps. À un instant t donné, les éléments elliptiques repèrent l'ellipse que décrirait la planète étudiée si l'on supprimait à cet instant l'influence des autres planètes.

Par analogie, Poincaré étudie les géodésiques d'une surface proche de la sphère comme des perturbations des grands cercles de la sphère. Il introduit par conséquent des « éléments de l'orbite osculatrice »[9] qui caractérisent le mouvement d'un point à la façon dont les éléments elliptiques repèrent le mouvement keplérien d'une planète dans la méthode

[8] Il s'agit d'une méthode classique en mécanique céleste, utilisée par Lagrange (voir par exemple [Lagrange 1776]) et associée ensuite à son nom. On en trouve une présentation détaillée dans les *Leçons de mécanique céleste* de Poincaré [1905b].

[9] Poincaré utilise donc ici le même vocabulaire qu'en mécanique céleste, comme on peut le voir par exemple dans sa présentation de la méthode de Lagrange, *Leçons de mécanique céleste* [Poincaré 1905b, p. 90 et suiv.].

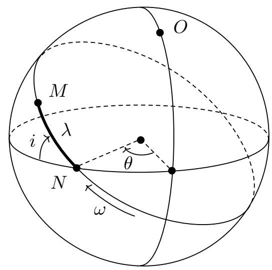

Figure 1. *Nouvelles coordonnées définies par analogie avec les éléments elliptiques de la méthode de Lagrange.*

de Lagrange.

Comme les géodésiques de la sphère sont les grands cercles parcourus à vitesse constante, il adopte les coordonnées position-vitesse (ou *éléments de l'orbite osculatrice*; voir figure 1) suivantes sur la sphère :

- θ, longitude du nœud[10] N de l'orbite circulaire décrite par le point M considéré si on le laisse se mouvoir sans contrainte avec la vitesse initiale considérée;
- i, inclinaison de cette orbite sur l'équateur;
- λ, distance du point au nœud sur l'orbite;
- ω, vitesse de circulation sur l'orbite.

Lorsque μ est nul, les solutions des équations des géodésiques sont, dans ces coordonnées : $i = i_0$, $\theta = \theta_0$, $\omega = \omega_0$ et $\lambda = \omega_0 t$. On peut donc prendre λ comme variable à la place du temps. Lorsque μ n'est plus nul, la méthode de Lagrange consiste à considérer que i, θ varient lentement par rapport à la variable λ (la propriété de conservation de l'énergie permet de se débarrasser de la variable ω).

Grâce à cette description du problème, et en négligeant les quantités d'ordre supérieur à 2 en μ, Poincaré montre que les géodésiques fermées qui subsistent pour μ non nul correspondent aux couples (i_0, θ_0) qui sont des points critiques d'une fonction $R(i, \theta)$. Un renvoi au chapitre III des *Méthodes nouvelles* lui permet ensuite de justifier le passage de l'étude linéarisée (*i.e.* au premier ordre en μ) au résultat pour μ suffisamment petit. Il utilise enfin un résultat d'*analysis situs* qu'il a établi dans un précédent mémoire [Poincaré 1881, p. 29] pour conclure que ces

[10] Le nœud est l'intersection avec l'équateur.

géodésiques sont en nombre impair.

1.1.2. Le principe de continuité analytique

Dans la deuxième partie, Poincaré, quoique sans renvoyer aux *Méthodes nouvelles*, suit de très près une argumentation qu'il y développait déjà. Elle consiste à montrer que la parité du nombre de géodésiques fermées sans point double est constante lorsqu'on déforme progressivement (et analytiquement) une surface convexe. Cette ligne directrice est annoncée par le titre que Poincaré donne à cette section de son article : « Le principe de continuité analytique ».

L'étude ne se restreint donc plus aux surfaces suffisamment proches de la sphère. Poincaré considère au contraire une surface convexe quelconque, Σ_1, et une famille analytique de surfaces Σ_t reliant Σ_1 à un sphéroïde Σ_0. Le résultat local précédent s'applique donc à Σ_0. Poincaré montre que l'ensemble des géodésiques fermées sur les surfaces Σ_t (où t varie entre 0 et 1) forme une courbe analytique $\mathcal{C}$ dans un espace de paramètres convenablement choisi, dont l'intervalle de variation de t forme une dimension (voir figure 2).

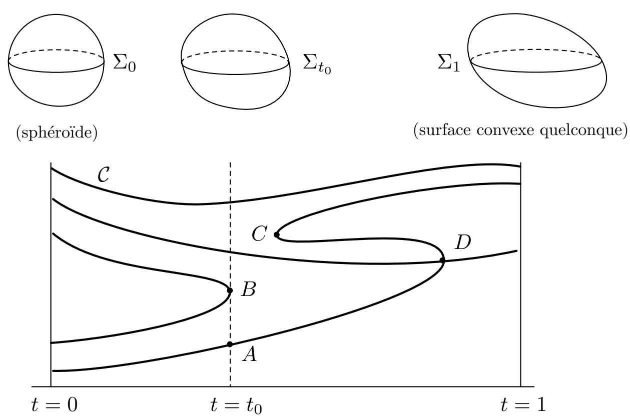

Figure 2. *Courbe analytique $\mathcal{C}$ représentant les géodésiques fermées sans point double sur les surfaces de la famille Σ_t.*

Poincaré explique enfin que la situation est celle que nous pouvons résumer[11] par la figure 2 : pour une branche donnée de la courbe analytique $\mathcal{C}$, au voisinage d'un de ses points d'abscisse t_0, il y a seulement deux comportements qualitatifs possibles. Soit la branche de courbe présente un point pour chaque valeur de t (comme au voisinage du point A de la figure 2), soit il y a deux tels points pour les valeurs de t inférieures à t_0, qui se confondent en un seul en t_0 (comme en B), puis disparaissent pour les valeurs supérieures à t_0, ou l'inverse (comme en C). En D, deux branches distinctes de la courbe $\mathcal{C}$ se coupent. Ainsi, les géodésiques fermées d'une branche apparaissent et disparaissent par couples. Autrement dit, la parité du nombre de géodésiques appartenant à une même branche de la courbe $\mathcal{C}$ reste constante lorsque t varie.

Il reste, pour obtenir un résultat sur les géodésiques *sans point double*, à étudier quels types de géodésiques on peut rencontrer sur la même branche de la courbe $\mathcal{C}$. Poincaré montre que le nombre de points doubles ne varie pas lorsqu'on suit une branche de $\mathcal{C}$. Ceci lui permet de conclure, comme nous l'avons annoncé, que si l'on considère seulement les branches de $\mathcal{C}$ correspondant aux géodésiques sans point double, on a la situation résumée par la figure 2. Il en conclut que leur nombre est de parité constante ; l'étude précédente a montré que les géodésiques fermées sans point double sont en nombre impair sur un sphéroïde, elles sont donc en nombre impair sur une surface convexe quelconque [Poincaré 1905c, p. 60].

1.2. L'origine, dans la mécanique céleste, de la problématique de l'étude des géodésiques

À plusieurs reprises dans son article, Poincaré fait référence à ses travaux de mécanique céleste. Dès l'introduction [Poincaré 1905c, p. 38], ils sont présentés comme une motivation de l'ensemble du mémoire.

L'étude des géodésiques sur les surfaces constitue en effet le problème le plus simple qui s'apparente au problème des trois corps. Poincaré dit de ce dernier : « à côté de la difficulté principale, de celle qui tient au fond

[11] Poincaré ne fait pas de figure. Voir l'annexe B pour les problèmes posés par la définition de la courbe $\mathcal{C}$. La figure est très optimiste : la courbe $\mathcal{C}$ peut présenter des points de rebroussement (comme ceux représentés à droite sur la figure 3) et les différentes branches de courbes peuvent se recouper y compris en de tels points. La démonstration de Poincaré inclut toutes ces éventualités. Nous discutons en annexe des cas encore plus particuliers qui pourraient se produire, que Poincaré ne prend pas explicitement en compte.

même des choses, il y a une foule de difficultés secondaires qui viennent compliquer encore la tâche du chercheur » [*ibid.*]. Le problème des lignes géodésiques en revanche

> « est encore un problème de dynamique, de sorte que la difficulté principale subsiste ; mais c'est le plus simple de tous les problèmes de dynamique ; d'abord il n'y a que deux degrés de liberté, et puis, si l'on prend une surface sans point singulier, on n'a rien de comparable avec la difficulté que l'on rencontre dans les problèmes de dynamique aux points où la vitesse est nulle ; dans le problème des lignes géodésiques, en effet, la vitesse est constante et peut être regardée comme une donnée de la question » [Poincaré 1905c, p. 38–39].

Poincaré justifie enfin son choix d'étudier les géodésiques sur les surfaces *convexes*, par le fait qu'elles ressemblent plus aux trajectoires de la mécanique céleste que celles des surfaces à courbures opposées étudiées par Hadamard [1898] :

> « [...] ce n'est pas aux géodésiques des surfaces à courbures opposées que les trajectoires du problème des trois corps sont comparables ; c'est, au contraire, aux géodésiques des surfaces convexes.
>
> J'ai donc abordé l'étude des lignes géodésiques des surfaces convexes ; [...] » [Poincaré 1905c, p. 39]

Dans la première partie de la démonstration, ensuite, il fait référence explicitement au chapitre III des *Méthodes nouvelles*, afin de justifier le passage de l'étude linéarisée au résultat local. En réalité, ce chapitre des *Méthodes nouvelles* consacré à l'étude des solutions périodiques est loin d'être seulement une référence utile pour compléter un point technique d'une partie de la démonstration de 1905. Nous allons voir qu'il inspire la preuve dans son ensemble.

Le contexte de la mécanique céleste permet en effet de rendre compte d'une deuxième particularité de la problématique adoptée, à savoir l'étude des géodésiques *fermées*.

Hadamard avait déjà effleuré une problématique proche dans l'article évoqué. Il avait entrepris une classification et une étude des géodésiques en fonction de leurs caractéristiques topologiques[12], ce qui l'avait amené à étudier *entre autres* les géodésiques fermées.

Mais c'est bien la mécanique céleste, et non la topologie[13], qui donne

[12] Il attribuait d'ailleurs à Poincaré la paternité de la problématique, en se référant à l'insistance de celui-ci pour l'étude *qualitative* des solutions d'équations différentielles.

[13] La topologie — le terme employé par Poincaré est *analysis situs* — est également employée dans ce mémoire, mais de façon moins centrale (voir p. 133). Là n'est pas la motivation de l'étude des géodésiques *fermées*.

le bon contexte pour comprendre l'attention portée par Poincaré en 1905 aux *seules* géodésiques fermées. En effet, en mécanique céleste, Poincaré avait exprimé non seulement le souci — repris par Hadamard — d'étudier *qualitativement* les solutions des équations, mais plus précisément la conviction que l'étude des solutions *périodiques* est d'une importance toute particulière. Il écrivait à ce propos, dans l'introduction au chapitre III des *Méthodes nouvelles* :

> « Il semble d'abord que ce fait [l'existence de solutions périodiques] ne puisse être d'aucun intérêt pour la pratique. En effet, il y a une probabilité nulle pour que les conditions initiales du mouvement soient précisément celles qui correspondent à une solution périodique. Mais il peut arriver qu'elles en diffèrent très peu, et cela a lieu justement dans les cas où les méthodes anciennes ne sont plus applicables. On peut alors avec avantage prendre la solution périodique comme première approximation, comme *orbite intermédiaire*[14], pour employer le langage de M. Gyldén[15].
>
> Il y a même plus : voici un fait que je n'ai pu démontrer rigoureusement, mais qui me paraît pourtant très vraisemblable.
>
> Étant données des équations de la forme[16] définie dans le numéro 13 et une solution particulière quelconque de ces équations, on peut toujours trouver une solution périodique (dont la période peut, il est vrai, être très longue), telle que la différence entre les deux solutions soit aussi petite qu'on le veut, pendant un temps aussi long qu'on le veut. D'ailleurs, ce qui rend ces solutions périodiques aussi précieuses, c'est qu'elles sont, pour ainsi dire, la seule brèche par où nous puissions essayer de pénétrer dans une place jusqu'ici réputée inabordable » [Poincaré 1892–1899, t. I, p. 82].

Cette insistance particulière sur les trajectoires périodiques se traduit par l'étude exclusive, dans l'article de 1905, des géodésiques fermées et de leurs propriétés, à la différence de ce que faisait Hadamard.

Les géodésiques périodiques n'apparaissent donc plus comme l'un des types topologiques de géodésiques, mais comme *le* type de géodésiques qui offre une première prise à l'étude de la dynamique. Ceci signale clairement une problématique issue des travaux de Poincaré en mécanique céleste et qui oriente son approche de la question des géodésiques sur les

[14] C'est Poincaré qui souligne ; dans la suite, je respecterai l'usage de l'italique des auteurs cités, sauf mention contraire.

[15] Poincaré reprend dans ce premier paragraphe une remarque qu'il faisait déjà, presque dans les mêmes termes, en conclusion de l'un de ses premiers mémoires de mécanique céleste, en 1884 [Poincaré 1884].

[16] Poincaré considérait dans ce paragraphe 13 des équations sous forme canonique :

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}y_i}, \quad \frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x_i}. \tag{1}$$

surfaces convexes.

Le problème des géodésiques est donc présenté par Poincaré comme une sorte de cas particulier dont l'étude est utile à une meilleure compréhension des phénomènes dynamiques. Ceci le conduit à s'intéresser au problème des géodésiques *fermées* sur les surfaces *convexes*.

1.3. La continuité entre la mécanique céleste et la démonstration de 1905

L'influence de la mécanique céleste sur le travail de 1905 ne s'arrête pas là. La première partie de la démonstration est également marquée par la mécanique céleste de façon très visible : d'abord par l'utilisation de l'analogie avec la méthode de Lagrange, puis par le renvoi explicite au chapitre III des *Méthodes nouvelles* pour justifier le passage de l'étude linéarisée au résultat local. Mais on peut montrer que le lien est encore plus profond.

Il nous faut pour cela examiner les « principes exposés dans le chapitre III du tome 1 de [s]on ouvrage, *Méthodes nouvelles de la mécanique céleste* » [Poincaré 1905c, p. 54], auxquels Poincaré renvoie au cours de la première partie de la démonstration de 1905. Ceci nous permettra de préciser les rapports entre ce chapitre des *Méthodes nouvelles* et chacune des deux parties de la démonstration qui nous intéresse. Nous découvrirons ainsi que la mécanique céleste exerce une influence plus déterminante que ne le laissent paraître, à première lecture, l'analogie avec la méthode de Lagrange et le renvoi ponctuel aux *Méthodes nouvelles* pour complément de justification. C'est en effet la démonstration entière qui reprend les principes exposés dans les *Méthodes nouvelles* au chapitre III, tandis que la méthode de Lagrange n'est qu'un outil utile pour une des étapes.

Après une introduction où Poincaré précise ce qu'il appelle solutions périodiques, le chapitre III des *Méthodes nouvelles* est consacré au problème suivant :

> « Supposons que, dans les équations $[\mathrm{d}x_i/\mathrm{d}t = X_i]$, les fonctions X_i dépendent d'un certain paramètre μ ; supposons que dans le cas $\mu = 0$ on ait pu intégrer les équations, et qu'on ait reconnu ainsi l'existence d'un certain nombre de solutions périodiques. Dans quelles conditions aura-t-on le droit d'en conclure que les équations comportent encore des solutions périodiques pour les petites valeurs de μ ? » [Poincaré 1892–1899, t. I, p. 81].

Nous pouvons d'ores et déjà remarquer que la formulation est extrêmement proche du problème que traite Poincaré dans la première partie, pour les sphéroïdes. Jusque dans le choix des notations, le problème est posé de façon similaire. Poincaré considère en effet dans cette première partie de la démonstration de 1905 une famille de surfaces paramétrée par un réel μ, ce qui se traduit par le fait que les équations des géodésiques sont exactement sous la forme considérée dans les *Méthodes nouvelles.* Dans le cas $\mu = 0$, on sait intégrer ces équations : les solutions sont les géodésiques de la sphère, qui sont les grands cercles, c'est-à-dire des solutions périodiques. On cherche à savoir si les équations possèdent encore des solutions périodiques pour les petites valeurs de μ, c'est-à-dire s'il existe encore des géodésiques fermées sur les sphéroïdes paramétrés par ces valeurs de μ.

Poursuivons la lecture du chapitre III des *Méthodes nouvelles.*

Poincaré considère donc des équations $\mathrm{d}x_i/\mathrm{d}t = X_i$ où les X_i sont fonctions des x_i, de μ, et périodiques[17] de période 2π par rapport au temps t. Il fait l'hypothèse que, pour $\mu = 0$, ces équations admettent une solution périodique de période 2π, $x_i = \varphi_i$, où $\varphi_i(2\pi) = \varphi_i(0)$.

Il définit ensuite les fonctions ψ_i par la propriété que la solution valant $\varphi_i(0) + \beta_i$ pour $t = 0$ vaut $\varphi_i(0) + \beta_i + \psi_i$ pour $t = 2\pi$. D'après le théorème de régularité par rapport aux paramètres des solutions d'équations différentielles que Poincaré a démontré auparavant, les ψ_i sont des fonctions analytiques de μ et des β_i.

Or, vu la définition, les fonctions $\psi_i(\beta_1, \ldots, \beta_n, \mu)$ mesurent en quelque sorte le défaut de périodicité de la solution de conditions initiales $(\varphi_i(0) + \beta_i)_i$. Ainsi les ψ_i sont nulles en $\mu = \beta_i = 0$, puisque, par hypothèse, $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ est une solution périodique des équations pour $\mu = 0$. Et la condition pour que les équations comportent encore une solution périodique lorsque μ n'est plus nul est qu'on puisse trouver $\beta_1, \ldots, \beta_n$ tels que $\{\psi_i(\beta_1, \ldots, \beta_n, \mu) = 0\}_{i=1,\ldots,n}$.

Ceci ramène donc le problème à l'application du théorème des fonctions implicites.

[17] Dans un deuxième temps, Poincaré traite le cas où les X_i ne dépendent pas du temps, comme c'est le cas pour les géodésiques. Ce cas est légèrement plus compliqué, mais à part quelques aménagements, l'analyse de Poincaré dans les *Méthodes nouvelles* se développe de façon parallèle dans les deux cas. J'ai donc choisi de présenter les grandes lignes de cette analyse dans le cas le plus simple, c'est-à-dire dans le cas dépendant du temps.

Ce théorème s'applique dans sa forme usuelle lorsque le déterminant fonctionnel (ou jacobien) des ψ_i est non nul. En pareil cas, il existe une fonction continue qui à chaque valeur de μ proche de 0 associe les valeurs des β_i qui correspondent aux conditions initiales d'une solution périodique. La condition de non nullité du déterminant fonctionnel peut également être traduite par le fait que les équations $\psi_i = 0$ admettent pour $\mu = 0$ le système $\beta_i = 0$ comme solution *simple*.

Dans le chapitre II des *Méthodes nouvelles*, Poincaré avait donné une démonstration du théorème des fonctions implicites, d'abord sous sa forme habituelle, puis sous une forme raffinée qui permet de traiter également certains cas où le déterminant fonctionnel dont il est question ci-dessus est nul, c'est-à-dire où la solution connue pour $\mu = 0$ n'est pas simple.

Si donc on a pour $\mu = 0$ une solution d'ordre m supérieur à 2 mais fini, selon la parité de m, on est dans l'un des deux cas suivants, représentés sur la figure 3 (les figures de droite sont des cas encore un peu plus particuliers, mais aussi bien pris en compte par la méthode de Poincaré) : si m est impair, il y a une solution pour chaque valeur suffisamment petite de μ, comme dans le cas où le déterminant est non nul ; si m est pair, il y a deux solutions pour $\mu < 0$, et aucune pour $\mu > 0$, ou bien le contraire.

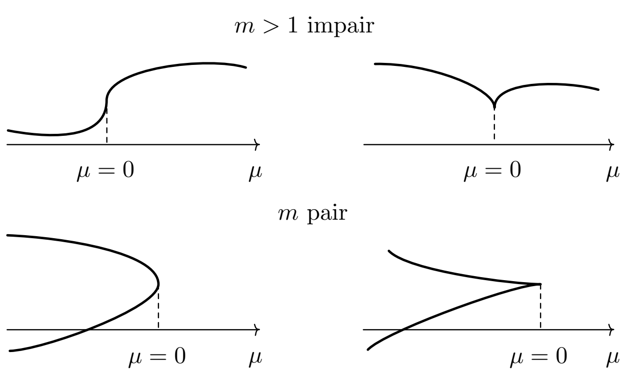

Figure 3. *Cas où le déterminant fonctionnel est nul, mais où la solution reste d'ordre fini.*

À ce stade de la présentation, Poincaré tire une première conclusion :

« Une solution périodique ne peut donc disparaître qu'après s'être confondue avec une autre solution périodique.

En d'autres termes, *les solutions périodiques disparaissent par couples à la façon des racines réelles des équations algébriques.* » [Poincaré 1892–1899, t. I, p. 83]

En utilisant un théorème d'élimination des variables démontré dans le chapitre précédent, Poincaré montre ensuite que les équations $\psi_i = 0$ peuvent être ramenées à une seule équation $\Phi(\beta_n, \mu) = 0$, où Φ est holomorphe et s'annule en $\beta_n = \mu = 0$. Il interprète cette équation comme celle d'une courbe analytique dans le plan des β_n et μ, et précise : « à chaque point de cette courbe correspond une solution périodique » [Poincaré 1892–1899, t. I, p. 84].

J'interromps ici pour l'instant la lecture du chapitre III des *Méthodes nouvelles*. On arrive en effet à la fin d'une unité dans le § 37, consacré aux équations dépendant du temps. La représentation d'un ensemble de solutions périodiques par une courbe analytique permet à Poincaré de ramener le problème à l'étude de la forme de cette courbe au voisinage de l'origine. Il poursuit ensuite cette étude dans plusieurs cas particuliers. Nous reviendrons sur le premier plus bas.

Dans ce que nous venons de rapporter des *Méthodes nouvelles*, nous retrouvons plusieurs éléments essentiels de la deuxième partie de la démonstration de 1905, quoique Poincaré ne renvoie pas explicitement, dans cette deuxième partie de son étude des géodésiques, à ses travaux de mécanique céleste.

En effet, l'argument donné pour justifier, dans l'article de 1905, les deux comportements qualitatifs possibles (représentés par les points A et B de notre figure 2) est exactement celui qu'on trouve dans le chapitre II des *Méthodes nouvelles* pour démontrer la forme raffinée du théorème des fonctions implicites dont nous avons représenté le résultat sur la figure 3. Cette forme du théorème des fonctions implicites est l'argument clef pour démontrer dans les *Méthodes nouvelles* que « les solutions périodiques disparaissent par couples à la façon des racines réelles des équations algébriques ». Et c'est également le point central de la démonstration de 1905, qui conduit à un résultat comparable : « Le nombre de ces points [les points d'intersection d'une branche de $\mathcal{C}$ avec le plan $t = t_0$] ne peut varier que [...] de deux unités » [Poincaré 1905c, p. 56].

Outre cette similarité de l'argument de fond, nous avons vu que l'idée de représenter les solutions périodiques par une courbe dans un espace de paramètres est déjà présente, bien qu'encore assez peu développée, dans les *Méthodes nouvelles.* C'est sous cette forme que Poincaré choisit de présenter le principe de continuité par lequel il étend le résultat de parité obtenu pour le sphéroïde à toute surface convexe.

Après le passage dans lequel nous avons reconnu le principe de la deuxième partie, globale, de la démonstration de 1905, le chapitre III des *Méthodes nouvelles* se poursuit par la présentation d'un cas particulier qui va nous donner la clef de la première partie, locale, de l'étude des géodésiques :

> « Un cas particulier intéressant est celui où, pour $\mu = 0$, les équations différentielles admettent une infinité de solutions périodiques »[18] [Poincaré 1892–1899, t. I, p. 84].

Pour étudier cette nouvelle situation, l'auteur des *Méthodes nouvelles* considère une famille continue de solutions périodiques, paramétrée par un réel h, donnée par des fonctions $\varphi_i(t,h)$: pour chaque valeur de h, les $x_i(t) = \varphi_i(t,h)$ sont périodiques par rapport à t et vérifient les équations $\mathrm{d}x_i/\mathrm{d}t = X_i$ lorsqu'on fait $\mu = 0$.

Dans ce cas, Poincaré montre que la courbe $\Phi(\beta_n, \mu) = 0$ définie plus haut contient la droite $\mu = 0$, qui représente la famille de solutions existant pour $\mu = 0$ (voir la figure 4). En d'autres termes, l'équation $\Phi = 0$ contient μ en facteur : $\Phi = \mu\Phi_1$. Pour étudier les trajectoires périodiques qui subsistent lorsque μ n'est plus nul, c'est donc l'équation $\Phi_1 = 0$ qu'il faut considérer.

Mais, continue Poincaré, « cette courbe $\Phi_1 = 0$ ne passe pas toujours par l'origine », contrairement à la courbe $\Phi = 0$ étudiée précédemment. Il conclut :

> « Nous devons donc avant tout disposer de la constante arbitraire h de façon que cette courbe passe par l'origine » [Poincaré 1892–1899, t. I, p. 84].

Autrement dit, parmi les trajectoires périodiques existant pour $\mu = 0$, seules celles correspondant à certaines valeurs de h (telle h_0 qui fournit le schéma de droite de la figure 4) donneront une trajectoire périodique pour $\mu \neq 0$. Ce sont ces valeurs de h qu'il faut déterminer.

En s'intéressant, en 1905, aux géodésiques des sphéroïdes, Poincaré considère une situation qui relève de ce cas particulier. Sur la sphère en

[18] La suite montre que Poincaré entend par là, non pas l'existence d'une infinité de solutions périodiques quelconques (si on admet une période arbitrairement grande, il existe toujours une infinité de géodésiques périodiques sur une surface convexe, Poincaré le remarque d'ailleurs à une autre occasion), mais l'existence d'une famille *continue* de solutions périodiques.

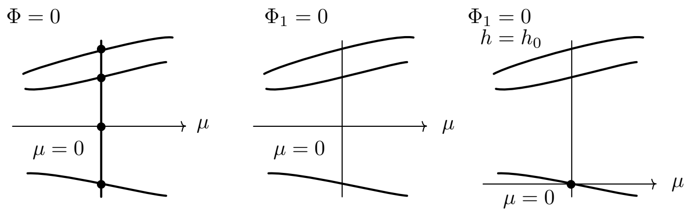

Figure 4. Les courbes $\Phi = 0$ et $\Phi_1 = 0$ dans le cas où il existe, pour $\mu = 0$, une famille de solutions périodiques. La figure de droite représente la courbe $\Phi_1 = 0$ après qu'on a choisi une valeur convenable h_0 de h.

effet, il existe une famille continue de géodésiques fermées, puisqu'elles le sont toutes ! Plus précisément, les géodésiques fermées sont tous les grands cercles, qu'on peut paramétrer par les deux angles i et θ de la figure 1. Le couple (i, θ) retenu par Poincaré pour son travail correspond donc exactement au paramètre h introduit dans les *Méthodes nouvelles*. Et la première partie de la démonstration consiste justement à déterminer les valeurs à donner à ces deux paramètres i et θ pour que le grand cercle correspondant persiste sous forme d'une géodésique fermée lorsque μ n'est plus nul[19].

La démarche adoptée en 1905 est identique à celle que Poincaré avait déjà mise en œuvre pour traiter un autre problème du même type dans les *Méthodes nouvelles*, un peu plus loin dans le même chapitre [Poincaré 1892–1899, t. 1, § 46, p. 133–139]. Mais il considérait alors un problème qui était déjà formulé dans un système de coordonnées bien adapté,

[19] On peut préciser ainsi la correspondance technique entre l'analyse des *Méthodes nouvelles* et la démonstration de 1905 : les équations [Poincaré 1905c, p. 49]

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{\mu}{\sin i}\,\frac{\mathrm{d}S_1}{\mathrm{d}\theta} - \mu \operatorname{cotg} i\,\frac{\mathrm{d}S_1}{d\lambda}, \qquad \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\lambda} = -\frac{\mu}{\sin i}\,\frac{\mathrm{d}S_1}{\mathrm{d}i}, \tag{2}$$

intégrées sur une période de λ, montrent que les ψ_i définis dans les *Méthodes nouvelles* valent ici :

$$\psi_1(i, \theta) = \frac{\mu}{\sin i}\,\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\theta} + o(\mu), \quad \psi_2(i, \theta) = -\frac{\mu}{\sin i}\,\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}i} + o(\mu). \tag{3}$$

Si on note $\Phi = 0$ le système d'équations $\{\psi_1 = 0, \psi_2 = 0\}$, on reconnaît que μ est en facteur dans ces équations, si bien qu'on peut écrire $\Phi = \mu\Phi_1$, où le système d'équations $\Phi_1 = 0$ s'écrit $\{\mathrm{d}R/\mathrm{d}\theta + o(\mu) = 0,\ \mathrm{d}R/\mathrm{d}i + o(\mu) = 0\}$, après simplification par $\sin i$. Choisir (i, θ) point critique de R, c'est donc bien s'assurer que la courbe $\Phi_1 = 0$ passe par l'origine.

où les paramètres naturels décrivant la famille de solutions périodiques pour $\mu = 0$ faisaient partie des variables dans lesquelles étaient écrites les équations initiales[20]. Ainsi, la première étape dans la démonstration de 1905 consiste à se ramener à un tel système de coordonnées, avant de procéder de la même façon que dans le § 46 des *Méthodes nouvelles.* La similarité dans la suite de la preuve est accentuée par le choix des notations : dans les *Méthodes nouvelles* comme dans l'article sur les géodésiques, Poincaré introduit une fonction R, moyenne des termes du premier ordre en μ du hamiltonien, dont les extrema correspondent aux solutions périodiques qui subsistent pour μ non nul.

Ainsi le travail de 1905 suit l'indication donnée par les *Méthodes nouvelles* : « disposer de la constante arbitraire h de façon que [la] courbe $[\Phi_1 = 0]$ passe par l'origine », et reprend dans ce but la démarche déjà employée dans le § 46 des *Méthodes nouvelles.* La nouveauté est la méthode de Lagrange que Poincaré adapte pour obtenir un système de coordonnées convenable.

Nous voyons donc en conclusion de cette étude comparée du chapitre III des *Méthodes nouvelles* et de la démonstration de 1905, que le lien n'est pas ponctuel, ni limité à la problématique adoptée. C'est la démonstration entière de l'article sur les géodésiques qui suit pas à pas les principes énoncés dans les *Méthodes nouvelles.*

Cette remarque permet de faire apparaître une unité entre les deux parties de la démonstration, lesquelles semblaient au premier abord très différentes : la première partie utilise la caractérisation mécanique des géodésiques comme trajectoires d'un mobile ne subissant aucune force, tandis que la seconde présente un aspect plus dynamique, qui utilise le fait qu'une géodésique est caractérisée par sa position et sa vitesse initiale. En réalité, hormis le fait que la première partie est locale et la deuxième globale, elles sont toutes deux fondées sur la problématique énoncée au début du chapitre III des *Méthodes nouvelles*, l'étude de la persistance des solutions périodiques lorsqu'on perturbe les équations du mouvement.

[20] Techniquement, cette particularité se traduisait par le fait que le hamiltonien F_0 était « indépendant de quelques-unes des variables x ».

1.4. L'orientation de cette étude des géodésiques vers un approfondissement des méthodes mises au point en mécanique céleste : le but de la première partie de la démonstration

Après cette mise en contexte, il nous faut poursuivre l'analyse de la démonstration que fait Poincaré de l'existence de géodésiques fermées. Une deuxième direction d'étude pour les liens qu'elle entretient avec les travaux de mécanique céleste va se dégager. Nous avons déjà vu que Poincaré adapte une méthode de mécanique céleste pour l'utiliser en géométrie et en tirer des résultats sur les géodésiques. Du point de vue de la mécanique céleste, on peut décrire ceci comme une exportation de techniques vers la géométrie. Mais ceci ne suffit pas à rendre compte de l'article de 1905. Dans le même temps, Poincaré utilise l'étude des géodésiques pour développer cette méthode et la rendre encore plus efficace *en vue de la mécanique céleste*. On pourrait parler d'une importation de l'exemple des géodésiques pour approfondir cette technique d'étude.

Poincaré évoque la motivation de mécanique céleste qui l'anime dès l'introduction. Il présente le problème des géodésiques des surfaces convexes comme une sorte de cas particulier dont l'étude est utile à une meilleure compréhension des phénomènes de dynamique. Cependant, l'introduction est suivie d'abord par une partie très géométrique, où Poincaré s'inspire des travaux sur les géodésiques au XIX^e siècle, comme le montre l'analyse de P. Nabonnand [1995] : étude du lieu conjugué, du lieu de coupure, etc. On pourrait en conclure que ce mémoire est surtout destiné à étudier les propriétés des géodésiques, grâce, entre autres, à des méthodes issues de la mécanique céleste. Ces méthodes sont d'autant plus adaptées — et donc plus fructueuses — que l'analogie est plus forte entre les deux problèmes : géodésiques fermées des surfaces *convexes* et mécanique céleste. De plus, l'étude des géodésiques permet d'illustrer ces techniques.

Une telle lecture serait réductrice. L'analyse de la structure de la démonstration va nous permettre de montrer que Poincaré ne se contente pas d'*utiliser* la théorie des *Méthodes nouvelles*, mais que dans le même temps il la développe et en élargit le champ : tel est le deuxième sens des liens entre géométrie et mécanique céleste que nous allons maintenant mettre en évidence.

La démonstration, nous l'avons vu, se déroule en deux parties. Elle consiste à montrer que le nombre de géodésiques fermées sans point double est impair. La deuxième partie établit que la parité de ce nombre est constante, en reprenant l'idée déjà présente dans les *Méthodes nouvelles* : les géodésiques fermées apparaissent et disparaissent par couples. Après ce constat, Poincaré s'attache à spécifier ce résultat général, pour montrer qu'il s'énonce de la même façon quand on se restreint aux géodésiques sans point double. À la théorie déjà présente dans les *Méthodes nouvelles* s'ajoute donc la discussion sur les types de géodésiques qu'on peut rencontrer sur une même branche de la courbe $\mathcal{C}$. Poincaré prouve de cette façon que le nombre de géodésiques fermées sans point double est soit toujours pair, soit toujours impair.

La fonction de la première partie, quant à elle, est explicitement de trancher en faveur de l'une ou l'autre possibilité. Poincaré y établit que le nombre de géodésiques fermées sans point double sur un sphéroïde est impair. Il peut alors appliquer la deuxième partie de la démonstration à un chemin reliant une surface convexe quelconque à un sphéroïde. Le point clef de la première partie est donc de déterminer la parité du nombre de géodésiques sur un sphéroïde. Poincaré l'entend bien ainsi, qui conclut la démonstration par :

> « Donc le nombre total de géodésiques fermées sans point double est toujours pair ou toujours impair. Or nous avons vu au paragraphe précédent que pour un sphéroïde ce nombre est impair. De plus, on peut passer d'un sphéroïde à une surface convexe quelconque d'une manière continue.
>
> *Donc, sur une surface convexe quelconque, il y a toujours au moins une géodésique fermée sans point double et il y en a toujours un nombre impair* » [Poincaré 1905c, p. 60].

Or il n'avait pas du tout besoin de cette étude locale et il en était parfaitement conscient. La prise en compte de ce point clef va nous permettre de saisir toute la portée de cette partie de sa démonstration. Jacobi avait en effet réussi à intégrer complètement les équations des géodésiques sur un ellipsoïde. Sur un ellipsoïde à trois axes inégaux, il y a exactement trois géodésiques fermées sans point double. Et Poincaré le sait, puisqu'il fait référence à ce résultat, en poursuivant dans ce mémoire même :

« Par exemple, pour un ellipsoïde nous avons les trois sections principales par les plans de symétrie. »

Tout le calcul perturbatif, relativement technique, de la première partie, se révèle donc inutile ! Poincaré pouvait appliquer le principe de continuité en partant d'un ellipsoïde : il lui suffisait d'écrire par exemple :

« Donc le nombre total de géodésiques fermées sans point double est toujours pair ou toujours impair. Or pour un ellipsoïde nous avons les trois sections principales par les plans de symétrie[21].

Donc, sur une surface convexe quelconque, il y a toujours au moins une géodésique fermée sans point double et il y en a toujours un nombre impair. »

C'est exactement ce qu'il fait plus loin dans ce même article, dans la partie 5, intitulée « Stabilité et instabilité » :

> « Donc, si sur une surface convexe quelconque on envisage toutes les géodésiques fermées sans point double, l'excès du nombre de celles qui sont stables sur le nombre de celles qui sont instables est constant[22] ; il est donc le même que pour l'ellipsoïde, il est donc égal à 1 » [Poincaré 1905c, p. 66].

Or, au lieu d'utiliser le résultat connu sur l'ellipsoïde dans la démonstration du théorème 1, il le mentionne seulement comme une remarque en passant.

Ceci montre que non seulement la première partie de la démonstration est inutile dans l'économie de la démonstration, mais que Poincaré en est parfaitement conscient. Nous avons donc maintenant établi que c'est par un choix délibéré qu'il développe l'étude des géodésiques d'un sphéroïde.

Pourquoi Poincaré a-t-il choisi d'exposer ce calcul compliqué, alors qu'il est inutile pour le but précis qui paraît être le sien dans l'article de 1905 ? Cet écart révèle qu'il poursuit un autre objectif. La thèse que je propose pour rendre compte de cette singularité est qu'il faut lire dans la démonstration l'exposé, sur le *paradigme* des géodésiques des surfaces convexes, d'une méthode dont la portée est plus générale.

Nous avons vu que Poincaré traitait déjà dans les *Méthodes nouvelles* un problème « où pour $\mu = 0$ les équations différentielles admettent une

---

[21] Je me suis contentée ici d'inverser l'ordre des éléments dans le texte de Poincaré, sans ajouter de formules qui ne soient de lui.

[22] Ce résultat a été prouvé par Poincaré d'une façon tout à fait analogue au principe de continuité analytique pour le nombre des géodésiques ; l'idée est que lorsque deux géodésiques fermées se confondent et disparaissent, l'une est stable et l'autre instable.

infinité de solutions périodiques ». Mais dans cette étude du § 46 des *Méthodes nouvelles*, les équations étaient d'emblée écrites dans un système de coordonnées bien adapté à la résolution proposée. Poincaré ne donnait donc pas la marche à suivre s'il n'en avait pas été ainsi.

Dans l'article de 1905, Poincaré présente une résolution plus complète, en ajoutant l'étape de changement de coordonnées. Ainsi, d'une part il montre le lien entre le cas particulier traité dans les *Méthodes nouvelles* et le cas général, qui s'y ramène après un changement de variable. D'autre part, il propose une méthode pour conduire ce changement de variables, en montrant comment adapter la méthode de Lagrange. Le travail sur les géodésiques apporte donc un complément à l'exposé des *Méthodes nouvelles.*

De plus, dans un problème de dynamique plus général, l'argument perturbatif peut retrouver toute son importance. En effet, pour un problème plus compliqué, il est improbable qu'on sache intégrer complètement un cas suffisamment général : on ne saura le plus souvent intégrer que les cas extrêmement particuliers, possédant des symétries. Dans de telles situations, il existera une famille continue de trajectoires périodiques, ou même toutes les trajectoires seront périodiques, comme c'est le cas pour les géodésiques de la sphère. Le raccourci que permet la connaissance des géodésiques de l'ellipsoïde n'existera plus. Le schéma d'étude proposé dans l'article de 1905 pour mettre en œuvre la méthode décrite dans les *Méthodes nouvelles* prendra alors toute sa valeur. Il faudra commencer par étudier le système au voisinage d'une situation singulière intégrable, en adaptant la méthode de Lagrange, avant d'étendre les résultats par un principe de continuité analytique.

Outre une méthode pour effectuer le calcul perturbatif lorsqu'il y a une infinité de solutions périodiques pour $\mu = 0$, Poincaré présente donc, dans l'article de 1905, l'enjeu de ce calcul. Ce cas qui apparaissait comme un cas particulier, peut-être anecdotique, dans les *Méthodes nouvelles*, est ici inséré dans la démonstration d'un résultat global. Le chapitre III des *Méthodes nouvelles* montrait comment appliquer le théorème des fonctions implicites dans différentes situations pour étudier la persistance de trajectoires périodiques. Ce travail sur les géodésiques est l'occasion pour Poincaré de montrer comment ces différents cas d'application peuvent être articulés de façon à prouver un théorème valable pour tous les systèmes dynamiques d'une certaine forme, ici pour les géodésiques fermées sans point double des surfaces convexes.

Ainsi le problème des géodésiques n'est pas véritablement un *exemple* d'utilisation d'une méthode exposée par ailleurs dans les *Méthodes nouvelles*. Il fonctionne plutôt comme un *paradigme* grâce auquel Poincaré développe et met en forme les idées qu'il avait commencé à exprimer dans les *Méthodes nouvelles*. Les deux textes présentent des théories qui sont dans le prolongement l'une de l'autre, mais formulées sous des modes différents. Dans les *Méthodes nouvelles*, Poincaré avait exposé ses idées en considérant des équations générales abstraites $\mathrm{d}x_i/\mathrm{d}t = X_i$. Il développe ensuite ces mêmes idées en les formulant de façon moins abstraite sur le paradigme des géodésiques. La généralité se présente autrement : non dans le mode d'expression, mais dans le champ d'application possible de la méthode exposée.

2. LA PRATIQUE DES MATHÉMATIQUES SUR PARADIGME

Ce caractère paradigmatique de la démonstration de Poincaré mis en évidence, nous allons maintenant tenter de dégager les particularités de ce mode d'écriture et de pratique des mathématiques[23]. À ma connaissance, il n'a malheureusement pas été beaucoup étudié par les historiens des mathématiques. Il me semble pourtant qu'il est plus répandu qu'on pourrait le croire.

2.1. Un type de pratique des mathématiques spécifique

Je voudrais d'abord soutenir qu'il ne faut pas réduire cette façon d'écrire et de pratiquer les mathématiques à un préliminaire heuristique, ni à un procédé didactique.

Il y a, certes, une part heuristique dans le travail de Poincaré. Il le souligne lui-même : le problème des géodésiques est le plus simple qui présente les mêmes caractéristiques que les problèmes de la mécanique céleste, et son étude est un bon moyen pour mieux comprendre les mécanismes en jeu ; nous avons vu par exemple que la géométrie de la

[23] Autrement dit, le présent article est lui aussi un travail sur paradigme : le mémoire de Poincaré n'y est pas seulement étudié pour lui-même, mais comme paradigme de l'écriture sur paradigme...

sphère et la simplicité de l'exemple choisi permettent d'adapter facilement la méthode de Lagrange à l'étude des géodésiques fermées du sphéroïde.

Mais il ne s'agit pas seulement d'une étude liminaire. D'une part, Poincaré n'est pas en train de chercher une méthode : celle-ci existe déjà, présentée dans le chapitre III des *Méthodes nouvelles.* D'autre part, nous avons vu que la méthode utilisée là est déjà pensée comme plus générale : c'est le cœur de l'argument qui nous a permis de montrer que le problème des géodésiques est utilisé comme un paradigme. De plus, nous allons voir maintenant que, par plusieurs aspects, ce mémoire est déjà le lieu d'une généralisation importante du cadre présenté dans les *Méthodes nouvelles.*

Cette généralisation se manifeste d'abord dans la manière dont l'étude locale est conduite : dans les *Méthodes nouvelles*, Poincaré effectuait une telle étude seulement dans un cas plus particulier où le système de coordonnées est adapté à la méthode d'étude proposée, tandis qu'il montre comment choisir des coordonnées convenables pour chercher les géodésiques fermées du sphéroïde.

Le deuxième aspect par rapport auquel Poincaré généralise les idées des *Méthodes nouvelles* tient à la nature de la courbe analytique introduite. Dans les *Méthodes nouvelles*, Poincaré ne considérait cette représentation que dans un plan, et la présentait rapidement à la fin de son étude. En 1905 en revanche, il développe cette idée, considère une courbe analytique dans un espace dont la dimension est seulement déterminée par la dimension de l'espace des paramètres nécessaires pour caractériser une trajectoire donnée, et fait de cette représentation le fondement de tout le raisonnement de la seconde partie.

Enfin, dans l'étude des géodésiques, Poincaré développe une approche globale qui n'était présente qu'à l'état de germe dans les *Méthodes nouvelles.* En effet, dans ce dernier ouvrage, Poincaré n'étudiait les trajectoires périodiques que pour les petites valeurs de μ, c'est-à-dire localement. Seuls quelques indices laissaient entrevoir la possibilité d'exploiter ces résultats locaux pour en tirer des conséquences globales.

La manière dont Poincaré formulait sa conclusion,

> « les solutions périodiques disparaissent par couples à la façon des racines réelles des équations algébriques » [Poincaré 1892–1899, t. I, p. 83]

est un premier indice. D'abord le caractère local de l'étude qui précède s'efface dans cette formulation. De plus, elle annonce le résultat global de 1905 selon lequel la parité du nombre de géodésiques fermées est constante. Enfin la comparaison avec les racines réelles des équations algébriques invite à un dénombrement des trajectoires périodiques, qui éloigne de la perspective initiale centrée sur la persistance des trajectoires périodiques sous certaines conditions.

L'étude globale est également annoncée par la représentation par une courbe analytique. Poincaré écrit « Si l'on regarde un instant β_n et μ comme les coordonnées d'un point dans un plan, cette équation représente une courbe passant par l'origine ; à chacun des points de cette courbe correspond une solution périodique » [*Ibid.*, p. 84]. Il précise bien que la courbe passe par l'origine, puisqu'il étudie les trajectoires périodiques au voisinage de celle représentée par l'origine, justement. Mais la proposition suivante, « à chacun des points de cette courbe correspond une solution périodique », a une connotation plus globale, et annonce l'argument de prolongement analytique qui sera fondé sur l'étude de cette courbe analytique.

Cependant, dans la suite des *Méthodes nouvelles*, dans les applications à des problèmes de mécanique céleste, la recherche des trajectoires périodiques se cantonne à une étude locale, dont les résultats sont valables pour les *petites* valeurs de la perturbation représentée par μ.

La deuxième partie de la démonstration de 1905 apporte donc elle aussi une généralisation remarquable par rapport à l'étude faite dans les *Méthodes nouvelles*, à travers cette globalisation. Le théorème des fonctions implicites, dans sa forme raffinée, est appliqué simultanément à tous les points de la courbe analytique pour assurer qu'à chaque étape de la déformation de la surface, le nombre de géodésiques fermées ne peut varier que d'un entier pair.

L'évocation d'un autre exemple d'utilisation, par Poincaré, d'un paradigme, va nous permettre de renforcer cette remarque : ce procédé n'est pas réductible à un procédé heuristique, provisoire, destiné à faciliter le travail dans un premier temps, mais il a des avantages intrinsèques et peut être employé par choix à des étapes variées du développement d'une théorie mathématique.

C'est pour énoncer un résultat que l'on nomme aujourd'hui *théorème de récurrence*[24] que Poincaré emploie le paradigme qui va nous intéresser.

[24] J'adopterai ce nom quoiqu'il soit postérieur à Poincaré. Ce dernier ne donne pas

Ce théorème affirme l'existence de trajectoires vérifiant certaines propriétés dès lors que le système d'équations différentielles étudié vérifie des hypothèses convenables. Nous n'aurons pas besoin d'en dire plus pour l'argumentation qui suit.

On trouve dans les publications de Poincaré deux démonstrations du théorème de récurrence : dans le mémoire « Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique » [Poincaré 1890], puis quelques années plus tard dans le troisième tome des *Méthodes nouvelles*. La présentation de la démonstration a changé sensiblement entre les deux rédactions.

Dans la première version, celle de 1890, le théorème et sa démonstration sont écrits directement dans les termes d'un système d'équations différentielles de forme générale. Dans les *Méthodes nouvelles*, en revanche, Poincaré choisit d'exposer la même démonstration d'abord dans un contexte physique : au lieu de travailler sur les trajectoires d'un système d'équations différentielles, il considère le mouvement d'un liquide dans un vase. De cette façon, les deux conditions principales d'application du théorème, qui sont la conservation du volume (ou d'un invariant intégral plus général) et le fait que les trajectoires restent dans un espace borné, sont directement saisies par l'intuition physique : la conservation du volume résulte de l'incompressibilité du liquide, et le confinement dans une région bornée de l'espace est matérialisé par le vase qui contient le liquide. Lorsque Poincaré énonce ensuite le résultat dans un cadre plus général, il ne donne pas de nouvelle démonstration. Il souligne simplement : « Il n'y a d'ailleurs rien à changer aux démonstrations qui précèdent. Nous retrouverons, par exemple, l'inégalité [...]. Nous pouvons en déduire les mêmes conséquences » [Poincaré 1892–1899, t. III, p. 155–156].

Ainsi, la même démonstration est formulée de deux façons différentes, la première fois sous forme abstraite et la deuxième fois dans le contexte d'un paradigme. Le paradigme vient ici dans un deuxième temps : il ne s'agit pas d'un procédé heuristique, d'un premier état du théorème, encore mal débarrassé du contexte dans lequel il a été découvert. C'est véritablement un choix délibéré de l'auteur qui le conduit à présenter ce théorème de cette façon-là.

---

de nom à son théorème, qui apparaît chez lui comme un résultat de stabilité. Comme Poincaré utilise plusieurs notions de stabilité différentes, il serait très ambigu de parler d'un *théorème de stabilité*, raison pour laquelle je préfère adopter la dénomination actuelle.

Ceci nous amène à considérer la deuxième réduction qu'on pourrait être tenté de faire concernant l'utilisation d'un paradigme : il s'agirait d'un procédé didactique. Là encore, mon propos n'est évidemment pas de nier toute intention didactique dans le choix d'utiliser un paradigme. Il est clair que dans le cas du théorème de récurrence, le paradigme du liquide dans un vase permet de mieux mettre en évidence les hypothèses du théorème. L'article de 1905 est par ailleurs issu d'une conférence donnée à Saint-Louis, et porte donc probablement la marque d'un exposé oral, dans lequel un soin est apporté tout particulièrement au caractère didactique de la présentation. Mais il serait tout aussi simplificateur de ne voir dans ce mode d'exposition qu'un artifice didactique.

Le cas du théorème de récurrence montre les limites d'une telle explication. Les *Méthodes nouvelles* ne sont pas un ouvrage de vulgarisation ni un cours. Poincaré a écrit un cours de mécanique céleste [Poincaré 1905b], ainsi que deux résumés de son mémoire de 1890, l'un adressé aux astronomes [Poincaré 1891b], l'autre pour un public plus large encore [Poincaré 1891a]. Les *Méthodes nouvelles*, au contraire, forment l'exposé complet, organisé, de ses travaux de mécanique céleste. De plus, une étude plus approfondie, dont cet article n'est pas le lieu, montre que la nouvelle formulation adoptée dans les *Méthodes nouvelles* rencontre l'intérêt porté par Poincaré entre 1890 et 1899 (parution du troisième tome des *Méthodes nouvelles*) à la théorie cinétique des gaz. Plus qu'un simple procédé didactique, nous rencontrons donc là un mode d'écriture dont la richesse demande à être étudiée pour elle-même.

De plus, considérer ce procédé comme un artifice didactique suppose qu'il renvoie à une autre formulation, préexistante, du même théorème, de la même démonstration. C'est le cas pour le théorème de récurrence, mais je ne connais aucune trace d'une autre expression de ce qui est exposé dans l'article de 1905, sinon dans les *Méthodes nouvelles*. Or dans ces dernières, la théorie est présentée, nous l'avons vu, sous une forme moins aboutie. Plus profondément, voir là un procédé didactique suppose un jugement *a priori* sur l'expression canonique que doit prendre un énoncé mathématique : on trouverait dans les *Méthodes nouvelles* la formulation attendue, et dans l'article sur les géodésiques une présentation didactique. Quel critère définirait alors la formulation standard ? Pas la généralité puisque nous avons vu qu'elle peut aussi bien s'exprimer de façon abstraite comme dans les *Méthodes nouvelles* que sur un paradigme. Si l'on utilise l'abstraction comme critère, il s'agit d'un présupposé qui donne lieu à discussion : il faudrait du moins montrer que cette forme est privilégiée par les mathématiciens, tâche probablement impossible à tenir, surtout si l'on prend en compte toutes les traditions mathématiques.

Remarquons que voir dans l'emploi d'un paradigme un procédé heuristique relève d'un présupposé similaire. Cela revient en effet à considérer que la démonstration trouvée d'abord sur un paradigme revêt encore une forme inachevée, dans l'attente d'une formulation définitive qui serait nécessairement d'un autre type.

L'ensemble de ces considérations nous invite à nous débarasser des idées *a priori*, pour étudier les textes mathématiques s'appuyant sur des paradigmes en tant que tels, plutôt que comme des « ombres » de formulations idéales préexistantes ou devant les remplacer. Ce travail a déjà été engagé à propos d'une tout autre tradition : les mathématiques chinoises [Chemla 2003]. Certains points de l'étude de K. Chemla rejoignent des propriétés que nous avons relevées à propos du texte de Poincaré ; l'étude comparative des différentes façons d'utiliser des paradigmes dépasse largement le cadre de notre article, mais se présente comme un objectif dont la réalisation passe par l'étude la plus approfondie possible des différents matériaux disponibles.

2.2. L'importance de la signification géométrique : un rôle d'interprétation

Ces remarques nous invitent donc à exploiter le plus possible le texte de Poincaré en vue de mieux décrire l'écriture sur paradigme qui s'y fait jour. Ceci nous amène à étudier une caractéristique de ce texte sur laquelle nous n'avons pas insisté jusque là : l'utilisation massive d'interprétations géométriques.

À deux reprises, Poincaré interrompt l'argument calculatoire sur les géodésiques du sphéroïde pour donner aux quantités qui apparaissent dans le calcul une signification géométrique.

Il commence par étudier les géodésiques des sphéroïdes grâce à leur équation différentielle, fournie par la mécanique : une géodésique est décrite comme la trajectoire d'un mobile astreint à rester sur la surface sans autre contrainte.

Après plusieurs étapes de calculs qui permettent de simplifier progressivement ces équations, Poincaré définit une quantité S_1, qui joue le rôle d'une énergie cinétique. Après quelques transformations supplémentaires des équations, il s'interrompt en écrivant : « Rendons-nous compte de la signification géométrique de cette fonction S_1 » [Poincaré 1905c, p. 50].

Il revient alors à une approche plus géométrique du sphéroïde, mettant en œuvre un plongement de celui-ci dans l'espace ambiant, une correspondance bijective avec la sphère, des éléments de longueur sur le sphéroïde et sur la sphère. De plus, il donne un caractère encore plus visuel à cette interprétation géométrique en choisissant la correspondance entre la sphère et le sphéroïde de façon à pouvoir utiliser « le langage de la géodésie ». Ceci lui permet d'exprimer S_1 en fonction des éléments de longueur sur la sphère et sur le sphéroïde. Cette formule fait donc intervenir la géométrie du sphéroïde, alors que S_1 apparaissait d'abord seulement comme un auxiliaire de calcul dans un contexte mécanique et non géométrique.

Les deux pages d'interprétation géométrique se caractérisent ainsi d'abord par un changement de références mathématiques : on passe de calculs menés en des termes issus de la mécanique à une approche plus géométrique. Ce changement s'accompagne d'une rupture nette du style de discours. La partie calculatoire est caractérisée par les expressions : « formons l'équation », « posons », « nos équations deviendront », « nous pouvons écrire », « nous pouvons remplacer », « on conservera », « on remplacera ». Toutes ces expressions impliquent une transformation des objets mathématiques manipulés. Au contraire, lorsque Poincaré cherche la signification géométrique de S_1, le texte devient descriptif, il montre un état de fait : « rendons-nous compte », « nous voyons », « il est manifeste », « i et θ désigneront », etc. Seules quelques lignes de calcul dans le passage sur la signification géométrique contiennent à nouveau des tournures impliquant transformation.

Cette section est de plus séparée du texte par une formule d'ouverture (voir ci-dessus) et une formule de clôture : « Telle est la signification géométrique de S_1 ». Poincaré [1905c, p. 52]

Ainsi, tant au niveau du sens que de la formulation, il y a bien un changement très net de type de discours.

Après cette première digression géométrique, Poincaré reprend les équations auxquelles il était parvenu. Il adopte un style démonstratif, avec l'emploi à deux reprises de la formule « il faut et il suffit ». Nous retrouvons l'expression d'une transformation : dans la première section de démonstration, c'était une transformation calculatoire des équations des géodésiques ; ici il s'agit d'une transformation logique de la condition de fermeture des géodésiques. Poincaré est alors conduit à introduire une nouvelle quantité, R, valeur moyenne de S_1. Comme S_1 précédemment, R apparaît donc d'abord comme un auxiliaire naturel du calcul.

À nouveau, Poincaré [1905c, p. 53] s'interrompt sur ces mots : « Il faut d'abord rechercher la signification géométrique de la fonction R ».

Ici encore, il utilise le langage de la géodésie pour donner une signification concrète aux objets qui interviennent. Ceci lui permet finalement d'interpréter la fonction $R(i, \theta)$ comme la différence entre la longueur des grands cercles de la sphère et la longueur du « grand cercle astronomique » C, l'équivalent sur le sphéroïde du grand cercle de coordonnées i et θ.

La séparation entre la partie sur la signification géométrique de R et le reste du texte est un peu moins nette : il n'y a pas de formule de clôture comme à la fin de l'interprétation géométrique de S_1. De plus, Poincaré utilise dans la fin de la démonstration des objets qu'il a introduits dans le paragraphe sur l'interprétation géométrique de R — nous y reviendrons. Cependant, on peut noter que l'interprétation géométrique a pour objet de traduire en termes géométriques le résultat obtenu immédiatement avant. La partie démonstrative précédente s'achève en effet sur : « Les géodésiques fermées répondront donc aux maxima, au minima et aux minimax de la fonction R. » [1905c, p. 52] L'interprétation géométrique se conclut ensuite par : « Ainsi les maxima, minima et minimax de R correspondent aux minima, maxima et minimax de la longueur totale des courbes C » [Poincaré 1905c, p. 53]. Ces deux formules qui se répondent permettent donc finalement de délimiter précisément la section sur la signification géométrique de R, comme nous avions pu le faire pour celle de S_1.

La démonstration s'achève par le renvoi à un résultat d'*analysis situs* sur le nombre de points critiques d'une fonction définie sur la sphère, comme c'est le cas de la fonction R.

Comme pour S_1, l'interprétation géométrique de R constitue donc une section nettement séparée du reste de la démonstration. Elle met en jeu des objets différents : géométrie, géodésie, et utilise un style d'écriture différent.

En résumé, on peut mettre en évidence deux parties de l'étude des géodésiques du sphéroïde, qui se distinguent du corps de la démonstration tant par les thèmes dominants, géométrie et langage de la géodésie *versus* calculs issus de la mécanique, que d'un point de vue purement linguistique. D'abord ces deux passages sont nettement délimités. De plus on observe une rupture de style forte au niveau du premier de ces deux passages, et sensible également dans le second. Les parties démonstratives emploient un style prescriptif (transformations calculatoires) et argumentatif (transformations logiques). Dans les sections d'interprétation, il est surtout descriptif. Ces dimensions objectives rencontrent la perception que Poincaré a de la différence, lorsqu'il donne explicitement le but des deux passages que nous mettons à part : « chercher la signification géométrique ».

Par ailleurs, à l'exception d'une référence, à la fin de la démonstration, à un terme introduit seulement dans un de ces deux passages, du point de vue logique ils ne sont pas nécessaires à la démonstration. On peut suivre l'argument analytique qui montre que les géodésiques fermées du sphéroïde correspondent aux extrema de la fonction R, puis utiliser le résultat d'*analysis situs* pour conclure qu'elles sont en nombre impair, sans savoir ce que représente cette fonction. Pourtant, Poincaré souligne l'importance, à ses yeux, de l'interprétation géométrique et affirme sa volonté de s'y intéresser dans le corps même de la démonstration, lorsqu'il écrit (je souligne) : « *Il faut d'abord* rechercher la signification géométrique de R » [Poincaré 1905c, p. 53].

Ainsi, la structure du texte de Poincaré nous invite à nous poser la question du rôle de ces deux développements. Nous allons voir qu'en reconnaissant ici l'emploi d'un paradigme, nous pouvons rendre compte de l'importance donnée par Poincaré à ces passages. C'est en effet un avantage capital de ce mode d'écriture que d'offrir la possibilité d'interpréter les étapes du calcul. De plus, en prenant en considération cet attachement de Poincaré à mettre en correspondance la méthode issue de la mécanique céleste et les propriétés géométriques de son paradigme, nous serons conduits à percevoir un principe unificateur de l'ensemble de l'article.

Les caractéristiques des passages sur la signification géométrique relevées ci-dessus permettent de comprendre le rôle qu'ils jouent. Nous avons en effet montré les points suivants :

* ces passages sont descriptifs et ne participent pas aux calculs ni à l'argumentation ;

* ils sont cependant insérés au fur et à mesure des étapes de la démonstration ;

* ils portent sur des quantités, S_1 et R, qui sont introduites comme des auxiliaires de calcul ;

* ils concentrent l'utilisation des propriétés géométriques des objets étudiés, au contraire de la démonstration à proprement parler, laquelle est surtout calculatoire et basée sur des principes de mécanique.

Il me semble qu'on peut en conclure que ces passages visent à exploiter le caractère géométrique des objets étudiés pour *interpréter* au fur et à mesure les quantités que l'application de la méthode inspirée par celle de Lagrange conduit à introduire. Non seulement le paradigme choisi permet d'exposer la méthode de recherche des trajectoires fermées qui subsistent quand on perturbe un système qui en possède une famille continue. Mais il fournit de plus un domaine d'interprétation grâce auquel Poincaré donne un deuxième sens aux étapes successives du calcul. Le travail sur les équations données par la mécanique, bien mené, conduit à introduire les quantités S_1 et R, et fournit le résultat dans ces termes. Si Poincaré avait exposé cette méthode dans les termes plus abstraits des *Méthodes nouvelles*, il n'aurait pu qu'indiquer la marche à suivre dans cette transformation des équations — c'est ce qui se passe dans les paragraphes 46 à 48 des *Méthodes nouvelles*. Le paradigme permet d'éclairer cette méthode en offrant un deuxième cadre de description. En plus de la mécanique, Poincaré peut ici s'appuyer sur les propriétés géométriques des objets qu'il étudie. Il ne manque pas d'exploiter cette richesse qui vient du choix qu'il a fait d'employer un paradigme. On rend compte ainsi de l'insistance de Poincaré à donner la signification géométrique avant même de poursuivre la démonstration.

Nous avions relevé dans la partie 1.4 comment le paradigme permet de *mettre en situation* une méthode et montre ainsi comment différents cas peuvent être articulés en vue d'un résultat global. Il s'agissait là d'un éclairage de la méthode que nous pourrions qualifier d'extérieur.

Les *Méthodes nouvelles* indiquaient comment traiter le cas d'une famille infinie de trajectoires fermées d'une part, celui où les trajectoires fermées sont isolées et d'ordre fini d'autre part. L'application de cette méthode au problème des géodésiques montre comment articuler ces différents cas dans une étude globale pour prouver un résultat sur le nombre de géodésiques. L'importance du cas d'une famille infinie de trajectoires périodiques en ressort éclairée : il n'est pas seulement anecdotique, mais peut servir à initier un principe de continuité analytique.

Avec l'exploitation des propriétés géométriques du paradigme, nous voyons un éclairage interne de la méthode : ce sont les étapes successives du calcul prescrit par cette méthode qui prennent sens.

Ainsi, le choix d'un problème qui peut se formuler aussi bien en termes mécaniques qu'en termes géométriques fournit un domaine d'interprétation qui permet une meilleure compréhension du raisonnement, du rôle et du sens de chacune des étapes du calcul. Ceci permet de rendre compte de la corrélation que nous observons entre deux singularités de cet article de Poincaré : le développement d'un calcul inutile à première vue, et l'insistance à donner la signification géométrique des quantités qui interviennent. Ces deux particularités se rencontrent dans la même portion du texte de Poincaré, à propos de l'étude locale.

Loin d'être un hasard, cette corrélation met en évidence un avantage important que présente l'exposition d'une méthode grâce à un paradigme plutôt que de façon plus abstraite. Le choix d'une formulation dans un cadre particulier — comme ici la géométrie — permet en effet d'exploiter le langage et les propriétés de ce cadre. On dispose alors d'un domaine d'interprétation qui se conjugue avec la méthode employée, et permet de l'éclairer de l'intérieur. Le paradigme donne tous ses fruits grâce à cette traduction de la méthode dans le cadre du paradigme.

Une analyse encore un peu plus fine de l'interaction des sections démonstratives et interprétatives de cette étude locale permet d'éclairer la conception qu'avait Poincaré de l'*analysis situs*.

Dans un premier temps, le vocabulaire géométrique et les objets définis dans les sections d'interprétation y restent confinés. De plus, à l'intérieur même de ces sections, les objets géométriques et ceux qui viennent de la description mécanique sont bien distingués, et leur rapport est toujours exprimé par une correspondance explicite. Ainsi, les couples de points sont dits *correspondre* aux valeurs des variables utilisées dans le calcul. De même, dans la formule « les maxima, minima et minimax de R correspondent aux minima, maxima et minimax de la longueur totale des courbes C », les deux domaines sont mis en correspondance, mais restent bien distingués. La fonction R est définie au cours de la démonstration, comme une fonction de i et θ. Les courbes C, en revanche, sont des objets géométriques définis pour interpréter cette fonction.

Mais à la fin de la démonstration cette séparation s'estompe, précisément lorsque Poincaré utilise un résultat d'*analysis situs* démontré dans un autre article. Après avoir défini des points P en relation avec les courbes C, il parle des « points P où la fonction R a la même valeur ». La fonction R est soudain considérée comme une fonction des points de la sphère, et non plus comme une fonction des variables i et θ.

Cette assimilation des deux types d'objets est corrélée avec l'introduction dans le raisonnement d'un résultat d'*analysis situs* : R étant maintenant vue comme une fonction définie sur la sphère, les nombres de ses minima, maxima et minimax sont liés par une relation, qui permet de conclure à la parité du nombre de géodésiques fermées.

Cette corrélation rejoint l'analyse de C. Gilain [1977] et d'A. Herreman [1996] qui soulignent un lien très fort entre *analysis situs* et géométrie chez Poincaré. Ainsi, C. Gilain suggère que la représentation géométrique qui est au cœur des mémoires de Poincaré *sur les courbes définies par les équations différentielles* [Poincaré 1881, 1882, 1885, 1886] n'est pas seulement une illustration géométrique de propriétés analytiques, mais qu'elle joue un rôle théorique qui débouche sur l'introduction explicite de l'*analysis situs* dans la troisième partie du mémoire [Gilain 1977, p. 87–88]. L'utilisation, en 1905, d'un paradigme géométrique joue sans doute un rôle semblable, puisqu'il apporte le substrat géométrique qui prépare l'introduction d'un résultat d'*analysis situs*.

L'utilisation des propriétés géométriques des objets auxquels Poincaré applique ici des techniques de mécanique céleste ne se borne pas à la partie locale de sa démonstration. Nous allons voir que l'exploitation du caractère géométrique du paradigme des géodésiques permet de mieux comprendre l'unité de l'article, non plus seulement au niveau de la démonstration du théorème 1, mais à l'échelle de l'article entier.

Après la démonstration à laquelle je me suis particulièrement intéressée, Poincaré étudie les propriétés de stabilité des géodésiques dont il vient de montrer l'existence. Là encore, le vocabulaire vient des *Méthodes nouvelles* : géodésiques *stables*, *instables de première, deuxième, troisième catégorie.* Poincaré revendique explicitement le parallèle avec ses travaux de mécanique céleste, puisqu'il écrit : « L'analyse qui précède ne diffère pas de celle du n° 347 du tome III de mon Ouvrage sur *les Méthodes nouvelles de la mécanique céleste* » [Poincaré 1905c, p. 63]. Mais Poincaré peut en outre, dans l'article de 1905, exploiter le champ d'interprétation fourni par l'utilisation d'un paradigme.

C'est ainsi qu'il fait intervenir des notions géométriques spécifiques aux géodésiques pour interpréter les différentes sortes de stabilité. Remarquons d'ailleurs qu'il s'agit là d'une nouvelle forme d'interprétation. Nous avons montré que la section 3 — l'étude locale — présentait l'interprétation des étapes d'une méthode grâce au paradigme géométrique. Ici Poincaré éclaire le sens d'une propriété mathématique, il montre à quoi correspond géométriquement la définition de la stabilité.

Dans ce but, il utilise une partie des résultats qu'il prouve au début de son article, dans la partie 2, *Foyers et caustiques.* On pourrait à première vue trouver cette section inutile, ou du moins sans rapport direct avec le reste de l'article. Elle forme en effet une sorte de préambule purement géométrique, qui aborde la question des géodésiques d'une façon beaucoup plus traditionnelle [Nabonnand 1995]. Elle se rapproche de fait, par les thèmes abordés et les méthodes employées, des travaux du XIX^{e} siècle sur les géodésiques des surfaces plus que des travaux de mécanique céleste. Au contraire, nous avons mis en évidence la dépendance importante de la démonstration du théorème 1 et des parties suivantes vis-à-vis des *Méthodes nouvelles* en particulier. Mais l'utilisation de quelques-uns des résultats géométriques pour interpréter la notion de stabilité dans les sections suivantes révèle en fait une grande cohésion de l'ensemble. L'exploration préliminaire de propriétés géométriques de son paradigme permet à Poincaré de lui donner une plus grande force d'interprétation. Il se dote ainsi d'un outil plus puissant pour mettre ensuite en lumière les méthodes et les notions de mécanique céleste qu'il met en œuvre sur ce paradigme.

Nous pouvons relever enfin un dernier point de fécondation réciproque de la géométrie et de la mécanique céleste, à la fin de l'article de

Poincaré. Il propose une deuxième démonstration de l'existence d'au moins une géodésique fermée sans point double sur toute surface convexe. L'idée-clef consiste à chercher une telle géodésique comme la courbe de longueur minimale parmi une classe convenable de courbes sur cette surface.

Or nous avons vu que les géodésiques fermées qui subsistent quand on déforme la sphère correspondent aux points critiques de la fonction R. Et l'interprétation géométrique de cette dernière conduit à y reconnaître, à un coefficient près, la longueur des courbes que Poincaré appelle « grands cercles astronomiques ». En d'autres termes, il a fait apparaître une famille de courbes sur le sphéroïde, ces « grands cercles astronomiques » C, candidats pour représenter les géodésiques fermées qui subsistent. Ces dernières correspondront aux courbes C dont la longueur est minimale, maximale, ou minimax dans la famille.

Il est donc possible que l'interprétation géométrique donnée par Poincaré dans la section 3 soit à l'origine de cette deuxième démonstration, qui fait l'objet de la section 7.

Une étude détaillée permettrait ensuite de montrer que cette deuxième démonstration est à nouveau une occasion pour Poincaré de creuser l'étude de la correspondance entre la notion de stabilité et les propriétés géométriques des géodésiques.

Ainsi les liens entre mécanique céleste et géodésiques dont témoigne le texte de 1905 sont riches et subtils. On ne peut en aucun cas subordonner entièrement cet article de Poincaré à ses recherches en mécanique céleste, en n'y voyant que l'exposé de méthodes qui lui sont destinées. Poincaré démontre des résultats de grand intérêt sur les géodésiques des surfaces convexes. Certains arguments employés, principalement dans la section sur les foyers et les caustiques, puis dans la deuxième démonstration, sont tout à fait géométriques. Cependant, mon analyse révèle à quel point Poincaré lie fortement les deux domaines et dans quelle mesure les parties plus géométriques de l'article sont utilisées ensuite dans une perspective de mécanique céleste, pour interpréter les méthodes et les notions présentées. Il y a ainsi un jeu constant de fécondation réciproque, qui n'est pas exactement symétrique : les aspects géométriques ont une fonction plutôt interprétative, orientée vers une meilleure compréhension des méthodes et définitions techniques fournies, elles, par la mécanique céleste.

L'écriture sur paradigme se laisse donc saisir dans ce mémoire de Poincaré comme un procédé qui permet d'articuler la méthode employée — ici, venant de la mécanique céleste — avec les propriétés intrinsèques du paradigme — ici les propriétés géométriques des surfaces et de leurs géodésiques.

2.3. Paradigme, style de rédaction et réflexion épistémologique de Poincaré

Nous venons de souligner l'importance que Poincaré accorde à la recherche de la signification géométrique des quantités introduites par le calcul. Ceci s'accompagne de nombreuses autres particularités du style de Poincaré qui visent à illustrer son travail technique, à le rendre plus immédiatement compréhensible.

Il y a d'abord un soin apporté explicitement au choix du vocabulaire.

Nous avons déjà relevé l'utilisation du « langage de la géodésie » dans les passages sur la signification géométrique de S_1 et R. Il est particulièrement intéressant de remarquer que c'est un choix de Poincaré, celui de la correspondance entre les points de la sphère et ceux du sphéroïde, qui lui permet d'employer ce vocabulaire. Poincaré signale : « Le choix de cette correspondance est arbitraire dans une assez large mesure. » Puis, après avoir fixé une correspondance, il souligne qu'elle rend possible l'utilisation d'un vocabulaire adapté, plus imagé : « Dans ces conditions, si l'on veut me permettre le langage de la géodésie, u et v représenteront sur le sphéroïde la colatitude et la longitude *astronomiques* » [Poincaré 1905c, p. 50].

Dans la section 2 du même article de 1905, Poincaré utilise également un vocabulaire imagé emprunté cette fois à l'art des chemins de fer. Il distingue ainsi plusieurs types de foyers en fonction de l'allure de la courbe sur laquelle ils se trouvent : foyers *en pointe, en talon.*

On peut reconnaître une volonté semblable de faire comprendre dans la rédaction d'un autre passage de ce mémoire. Poincaré montre au début de la section 4 que les géodésiques fermées forment une courbe analytique $\mathcal{C}$ dans un espace convenablement choisi. L'argument qu'il donne, tel quel, est très imprécis et même faux, si l'on adopte un point de vue plus rigoureux. Garnier, en éditant le tome 6 des *Œuvres* de Poincaré, juge d'ailleurs nécessaire de le préciser par une longue note. Cependant, l'argument de Poincaré va directement à l'idée essentielle, à savoir qu'on peut représenter l'ensemble des géodésiques par une courbe analytique dans un espace bien choisi, peu importe lequel[25]. Il pourrait s'agir ici d'une contrainte didactique, qui interdit, lors d'une conférence, de rentrer dans des détails techniques tels ceux nécessaires pour définir rigoureusement la courbe analytique $\mathcal{C}$. Mais on sait bien que c'est une caractéristique beaucoup plus générale du style de Poincaré, qui lui a été plus d'une fois reprochée[26]. Certes, le texte dont nous disposons ne nous permet pas de savoir s'il était conscient de la légèreté de sa définition de $\mathcal{C}$. Si tel est le cas, on pourra en conclure que la rédaction de Poincaré privilégie l'exposition des idées et la description des phénomènes, aux dépens parfois de l'exactitude formelle.

Nous avons jusqu'ici seulement étudié la façon dont Poincaré travaille en 1905 sur le paradigme des géodésiques. Nous avons déjà évoqué le théorème de récurrence, présenté en 1899 sur le paradigme du liquide dans un vase. Cet autre exemple d'emploi d'un paradigme donne accès à la façon dont Poincaré lui-même décrit l'intérêt de ce mode d'écriture. Dans ce cas, en effet, il précise une raison de ce choix d'exposition :

> « Pour mieux faire comprendre le principe de la démonstration, je vais d'abord prendre un exemple simple. Considérons un liquide enfermé dans un vase de forme invariable et qu'il remplit complètement. [...] » [Poincaré 1892–1899, t. III, p. 142].

C'est donc en termes d'avantage pour la *compréhension* que Poincaré formule un profit qu'il trouve à présenter la démonstration sur un paradigme. Quoiqu'il ne thématise pas lui-même la façon dont il travaille sur le paradigme des géodésiques, il me semble que les deux exemples ont suffisamment de points communs pour qu'on puisse reconnaître une portée générale à ce bénéfice pour la compréhension.

Poincaré explicite la généralité de la validité de la démonstration donnée sur le paradigme à propos du théorème de récurrence. Dans le cas des géodésiques, il la manifeste implicitement en développant la partie perturbative. Dans les deux cas, il souligne la simplicité de l'exemple choisi. De même enfin qu'il explicite la signification géométrique des quantités apparaissant dans le calcul perturbatif de 1905, de même il

[25] En réalité, ceci n'est possible que localement. Voir l'annexe B pour plus de détails.

[26] On trouvera de tels reproches par exemple dans la correspondance entre Mittag-Leffler, Hermite et Weierstrass, qui formaient le jury du prix offert par le roi de Suède et reçu par Poincaré en 1889 (voir [Barrow-Green 1994]).

souligne tout au long de la démonstration de 1899 la correspondance entre les propriétés du liquide dans le vase et les hypothèses du théorème de récurrence. Il écrit par exemple : « L'incompressibilité du liquide ou, ce qui revient au même, l'existence de l'invariant intégral nous montre [...] ».

La volonté de faciliter la compréhension est donc probablement un motif qui le conduit en 1905 à adopter à nouveau un mode d'écriture comparable à celui du théorème de récurrence dans les *Méthodes nouvelles*.

Dans son étude de l'usage des paradigmes dans les classiques de mathématiques en Chine ancienne, K. Chemla s'est intéressée aux indications que nous donnent les commentaires transmis avec ces textes sur la lecture qu'en faisaient les commentateurs. Ces derniers se sont préoccupés d'expliquer et de justifier les textes des classiques. Un passage d'un commentaire du IIIe siècle donne une raison qui fait écho au bénéfice que relevait Poincaré pour la compréhension :

> « Cette procédure est universelle, mais il est difficile de la faire comprendre avec des expressions abstraites *(kongyan)*; c'est pourquoi elle est délibérément liée au cas des millets pour éliminer cet obstacle » [Chemla 2003, p. 445].

Cette remarque du commentateur chinois montre qu'il accorde une certaine valeur à l'abstraction et qu'il voit l'emploi d'un paradigme comme un choix, qui peut présenter des avantages pour la compréhension. Cette liberté se manifeste également par l'existence, dans les œuvres de Poincaré, de deux rédactions différentes de la démonstration du théorème de récurrence, l'une à l'aide d'un paradigme et l'autre d'une façon plus abstraite. Les deux mathématiciens soulignent que l'emploi d'un paradigme permet de mieux comprendre le mécanisme de la procédure ou de la démonstration; il fournit un domaine d'interprétation qui permet d'éclairer la signification des étapes successives de la procédure ou de la démonstration.

Les possibilités d'interprétation fournies par le paradigme, et l'aide à la compréhension qui en résulte, rejoignent l'accent que Poincaré met régulièrement sur l'intuition. Il le formule explicitement dans ses travaux philosophiques, particulièrement au début de *La valeur de la science* [Poincaré 1905a]. L'enjeu affirmé en est bien la compréhension :

> « L'analyse pure met à notre disposition une foule de procédés dont elle nous garantit l'infaillibilité; elle nous ouvre mille chemins différents où nous pouvons nous engager en toute confiance; nous sommes assurés de n'y pas rencontrer d'obstacles; mais, de tous ces chemins, quel est celui qui nous mènera le plus promptement au but?

> Qui nous dira lequel il faut choisir ? Il nous faut une faculté qui nous fasse voir le but de loin, et, cette faculté, c'est l'intuition. Elle est nécessaire à l'explorateur pour choisir sa route, elle ne l'est pas moins à celui qui marche sur ses traces et veut savoir pourquoi il l'a choisie.
>
> [...]
>
> Cette vue d'ensemble est nécessaire à l'inventeur ; elle est nécessaire également à celui qui veut réellement comprendre l'inventeur » [Poincaré 1905a, p. 36–37].

Ainsi, pour Poincaré, par delà l'établissement de la certitude, il s'agit de comprendre ; et ceci aussi bien pour celui qui trouve la démonstration que pour celui qui veut la lire. Le procédé d'écriture que nous avons reconnu dans l'article de 1905, ainsi que l'insistance de Poincaré à donner l'interprétation géométrique des quantités introduites au fur et à mesure, se placent dans la même perspective : ils permettent de *comprendre* le sens des calculs et non seulement de s'assurer de leur validité. Dans ce but, ils donnent prise à l'intuition — géométrique ici, physique pour le théorème de récurrence — plus que ne le permet une présentation analytique.

Nous constatons donc que le choix fait par Poincaré de travailler sur des paradigmes est cohérent avec son style de rédaction ainsi qu'avec sa façon de décrire le travail scientifique, laquelle reconnaît une place importante à l'intuition. Notons que Poincaré considère bien dans un même mouvement l'inventeur et son lecteur, la pratique des mathématiques et leur rédaction, ce qui invite à ne pas séparer les aspects heuristiques et didactiques, mais à appréhender cette façon de pratiquer et d'écrire les mathématiques dans son ensemble. C'est tout un domaine de recherche qui s'ouvre, et la réflexion de Poincaré que nous venons de citer dégage un des axes de cette étude. La corrélation qui se dessine chez Poincaré entre l'utilisation de paradigmes et la position épistémologique amène à interroger plus largement le champ de l'histoire des mathématiques. Quels sont les mathématiciens qui font le plus grand usage de ce mode de travail, quelles relations peut-on mettre en évidence avec leurs options épistémologiques ? Il s'agit là d'un point charnière où philosophie des sciences et histoire des mathématiques peuvent s'éclairer l'une l'autre.

2.4. Problématiques ouvertes par ce type d'écriture mathématique

Lorsque la généralité est exprimée sur un paradigme, le lecteur doit reconnaître cette caractéristique du texte et déterminer lui-même le champ d'application de la méthode présentée. Nous avons vu que Poincaré insiste explicitement sur la généralité de la démonstration du théorème de récurrence dans les *Méthodes nouvelles*. Par contre, dans l'article sur les géodésiques, les indices qui nous ont conduits à cette lecture sont plus discrets : l'introduction annonce une perspective plus générale que les géodésiques, puis, du fait que le cas particulier de l'ellipsoïde n'est pas exploité, on est amené à reconnaître le caractère paradigmatique du problème des géodésiques.

Le commentaire de René Garnier à cet article de 1905 dans le tome 6 des *Œuvres* signale que le mémoire « trouve son origine dans les problèmes difficiles posés par les solutions périodiques de la Mécanique céleste », mais la suite témoigne de ce que la lecture de Garnier diffère de celle que j'ai proposée ici. Il écrit en effet :

> « L'idée maîtresse du Mémoire est l'application d'une méthode de continuité : envisageons une famille continue de surfaces convexes analytiques, dépendant analytiquement d'un paramètre t (ou μ) et reliant une surface donnée ($t = 1$) à la sphère ou à l'ellipsoïde ($t = 0$). Pour t (ou μ) infiniment petit, on peut procéder comme en Mécanique céleste (§ 3) et l'on peut chercher à étendre par continuité les résultats obtenus au cas de t quelconque (§ 4) » [Poincaré, *Œuvres* VI, p. 85].

Ainsi, Garnier n'a pas accordé la même importance que moi au choix explicite de Poincaré de relier une surface quelconque à un *sphéroïde*, et justement pas à une *sphère* ni à un *ellipsoïde*. C'est précisément parce que Poincaré n'exploite pas la connaissance qu'il a des géodésiques de l'ellipsoïde que nous avons pu reconnaître qu'il donne une portée plus générale à la méthode qu'il présente. Ceci lui permet en particulier de mettre en évidence l'importance de la démonstration locale. Or Garnier semble bien passer à côté du rôle de paradigme que Poincaré fait jouer au problème des géodésiques des surfaces convexes.

Il n'est d'ailleurs pas le seul lecteur de Poincaré à négliger cet aspect. Marston Morse écrit également[27] :

> « *He supposed that one member of the family, say S_0, was an ellipsoid with unequal axes. On the ellipsoid there are three principal ellipses. According to Poincaré, upon varying the parameter α, closed geodesics appear and disappear in pairs and the analytic continuation of the three principal ellipses will lead to an odd number of closed geodesics* » [Morse 1934, p. 305].

Dans le passage ci-dessus, Garnier cite la sphère en alternative à

[27] Il est possible qu'une difficulté de traduction ait compliqué la lecture, par Morse, du mémoire de Poincaré. En effet, *spheroid* désigne en anglais un ellipsoïde de révolution, alors qu'il a en général en français le sens beaucoup plus large de surface proche de la sphère. C'est dans ce sens que l'emploie Poincaré, et peut-être Morse a-t-il été conduit à porter moins d'intérêt à la partie perturbative à cause de cette équivoque.

l'ellipsoïde comme surface à partir de laquelle on effectue la déformation. C'est une proposition plus proche de ce que fait effectivement Poincaré, puisqu'il part d'un sphéroïde et que le nombre de géodésiques du sphéroïde est calculé en voyant le sphéroïde comme une perturbation de la sphère. Pourtant, Poincaré a bien soin de séparer la partie perturbative au voisinage de la sphère du principe de continuité analytique. Alors qu'il considère dans la première partie de sa démonstration une surface extrêmement singulière, sur laquelle les équations des géodésiques sont complètement intégrables et dont les géodésiques ont une forme simple, Poincaré passe complètement sous silence dans la partie globale les surfaces singulières qui pourraient apparaître dans la famille. C'est ainsi qu'il n'évoque pas du tout l'éventualité d'une famille continue de géodésiques fermées sans point double, sauf pour la sphère dans la première partie.

Il est difficile de comprendre comment Poincaré concevait ces surfaces singulières. L'article sur les géodésiques donne trop peu de pistes pour aborder cette question, mais je compte l'étudier sur un corpus plus large, à partir des mémoires sur les courbes définies par des équations différentielles et/ou des mémoires de mécanique céleste. Sans préjuger des résultats que donnera cette étude, il me semble que le silence de Poincaré lorsqu'il applique la méthode de prolongement analytique laisse deviner une conception particulière. C'est pourquoi il est sans doute trop rapide de supposer, comme le fait Garnier, que Poincaré entend relier une surface quelconque à la sphère. Il continue d'ailleurs en reprochant à la démonstration de Poincaré de ne pas prendre en compte les cas particuliers qui peuvent se produire. Or le fait que Poincaré évite soigneusement de partir de la situation singulière qu'est la sphère pour appliquer le principe de continuité analytique est probablement lié à son silence sur les surfaces singulières.

Garnier conçoit par ailleurs le lien avec la mécanique céleste essentiellement comme l'utilisation de la méthode de Lagrange. Il cantonne en effet ce lien à la section 3, sans reconnaître l'origine, dans les *Méthodes nouvelles*, des *deux* sections 3 et 4. Ceci concorde avec le choix des éditeurs des *Œuvres* d'inclure ce texte dans le volume consacré à la géométrie. Or l'article de 1905 apparaît très isolé dans cette petite section des *Œuvres*.

Au contraire, j'ai montré à quel point la démonstration que nous avons étudiée est à la fois issue de, et tournée vers, la mécanique céleste :

elle vient compléter la présentation faite, dans les *Méthodes nouvelles*, d'un procédé qui permet d'étudier le comportement d'une trajectoire périodique quand on perturbe le système. Plus généralement, nous avons vu que cette préoccupation pour des questions de mécanique céleste, même si elle ne rend pas compte de tous les résultats contenus dans cet article de Poincaré, imprègne l'article entier, et qu'elle est explicite dès l'introduction.

D'ailleurs, quand on parcourt le texte écrit en 1901 par Poincaré à la demande de Mittag-Leffler pour présenter ses travaux scientifiques, on remarque que Poincaré ne parle de géodésiques que dans la section consacrée à la mécanique céleste [Poincaré 1921, p. 106]. Certes, ce texte a été écrit avant l'article « Sur les lignes géodésiques des surfaces convexes ». Nous ne pouvons donc pas savoir comment Poincaré lui-même aurait situé ce dernier dans son œuvre. Il me semble cependant assez clair que, dans l'œuvre de Poincaré, ce mémoire aurait trouvé une place plus pertinente dans le tome 7 des *Œuvres*, avec les travaux de mécanique céleste[28]. De façon similaire, Birkhoff [1927] et Lefschetz [1957] évoquent la méthode de continuation analytique de Poincaré, mais ne citent que les travaux de mécanique céleste. Il en résulte que Birkhoff déplore que Poincaré n'ait utilisé cette méthode qu'au voisinage de problèmes intégrables : ou bien il ne connaissait pas l'article sur les géodésiques, dans lequel Poincaré applique globalement le principe de continuation, ou bien il n'a pas fait le lien.

Il semble que se dégage une corrélation entre la mise en contexte de l'article de Poincaré, et la reconnaissance de la généralité qui s'y exprime via le paradigme des géodésiques. C'est en effet le contexte de la mécanique céleste qui nous a permis de rendre compte de l'importance de l'étude locale — dont Poincaré, à première vue, n'avait pas besoin — et, par suite, de la généralité de la méthode exposée. À l'inverse, Garnier, qui ne relie pas aussi fortement ce mémoire à la mécanique céleste, ne relève pas non plus l'accent mis par Poincaré sur le sphéroïde dans la partie globale.

Ainsi la mise en contexte de recherches menées grâce à des paradigmes pose un problème théorique, qui ouvre sur une nouvelle problématique. Comment peut-on dire qu'un article, un texte mathématique, dépend de

[28] D'ailleurs, J. Barrow-Green [1997] ne manque pas de mentionner l'article sur les géodésiques parmi les travaux de Poincaré liés à la mécanique céleste après 1889.

tel ou tel domaine des mathématiques ? Je laisse de côté ici les problèmes posés par la différence entre les catégories employées par les auteurs et les nôtres. Le mode d'écriture sur paradigme pose en effet une autre question, qui a peut-être été moins étudiée. En effet, lorsqu'un auteur choisit de présenter un théorème, une méthode, un type de calcul, sur un exemple paradigmatique, le texte produit relève de deux domaines distincts, avec autant de légitimité. Le développement du paradigme reçoit toute sa force de l'exploitation parallèle du domaine d'interprétation, d'où est tiré l'exemple, et de celui qui fournit la méthode, ou auquel elle est destinée, comme nous l'avons montré à la fin de la partie 2.2.

Plus largement, face à ce mode d'écriture, nous avons été conduits à adopter une lecture qui distingue la méthode de son domaine d'application, de façon à faire ressortir leurs contributions respectives, et à étudier pour eux-mêmes les liens qui sont établis entre eux. Cette méthode historiographique que nous avons été conduits à élaborer pour analyser l'article de 1905 a une portée plus large. Il me semble qu'une clef de lecture semblable permettra par exemple d'aborder le texte de la *Commentatio* de Riemann[29] d'une façon nouvelle.

Ce travail montre la diversité des lectures qu'on peut faire d'un même texte. L'éclairage apporté par un contexte se révèle capital, et complexe. Il ne s'agit pas seulement en effet de donner un cadre de lecture, mais d'analyser les liens entre le texte étudié et le contexte proposé. Les différences que nous avons notées entre la lecture de Garnier et celle que nous avançons montrent combien cet éclairage n'est pas donné d'avance. L'autre enjeu qui se dégage est le développement d'un type de lecture particulier pour saisir la portée réelle du discours. En effet, comme nous l'avons constaté, la compréhension du contenu scientifique lui-même ne met pas seulement en jeu des connaissances mathématiques. Il est nécessaire d'interroger le texte pour en évaluer la portée, et mettre à jour des niveaux de généralité qui ne sont pas toujours apparents.

[29] « *Commentatio mathematica, qua respondere tentatur quæstioni ab Ill^{ma} Academia Parisiensi propositae :* [suit l'énoncé de la question] », mémoire soumis par Riemann en 1861 pour un prix de l'Académie des sciences de Paris, et publié en 1876 [Riemann, *Werke*].

3. RÉTROSPECTIVE ET REMERCIEMENTS

Ce travail m'a amenée à étudier la partie la moins connue de l'article de Poincaré : la deuxième démonstration qu'il donne de l'existence d'une géodésique fermée sur toute surface convexe a en effet été beaucoup plus lue et a donné lieu à de nombreuses reprises cherchant à la rendre rigoureuse selon les critères des époques traversées. C'est finalement Croke [1982] qui a donné une démonstration que personne n'a plus contestée depuis. Une nouvelle démonstration, plus simple, a été donnée plus récemment par J. Hass et F. Morgan [1996] ; il suffit de lire l'introduction de ce dernier article pour constater que même après la démonstration donnée par Croke l'intérêt pour ce problème ne s'est pas éteint : plusieurs autres démonstrations, plus ou moins générales et mettant en œuvre des méthodes diverses, avaient été proposées dans l'intervalle. Le développement de la théorie des surfaces minimales, qui généralise la théorie des géodésiques en dimension supérieure, est une motivation importante pour les étudier et rechercher de nouvelles démonstrations susceptibles de mieux se généraliser.

La première démonstration, quant à elle, a été beaucoup moins retravaillée ; la preuve proposée par Lusternik et Schnirelman[30] pour l'existence de trois géodésiques fermées sans point double sur toute surface homéomorphe à la sphère semblait beaucoup plus puissante et généralisable que celle de Poincaré. Cette dernière posait de surcroît des problèmes de rigueur, entre autres à cause du problème des surfaces singulières possédant des familles continues de géodésiques fermées sans point double[31].

C'est un article récent de B. White [1991], sans référence à Poincaré et travaillant en dimension supérieure, qui m'a rendue sensible à la première démonstration de Poincaré. Les deux démarches présentent en effet des similitudes frappantes, quoique dans des langages extrêmement différents. Mon DEA de mathématiques, effectué sous la direction de H. Rosenberg,

[30] Voir [Lusternik et Schnirelman 1929] ; la démonstration est présentée en détail dans l'appendice de [Klingenberg 1978].

[31] On peut en réalité rendre parfaitement rigoureuse la démarche de Poincaré, comme j'ai été amenée à le vérifier grâce à un rapporteur de cet article, à A. Chenciner et à mon travail précédent avec H. Rosenberg. On trouvera la démonstration complète en annexe.

avait consisté entre autres à appliquer la théorie de B. White au cas des géodésiques sur les surfaces convexes. Lisant ensuite l'article de Poincaré, j'ai décidé de consacrer mon DEA d'histoire des mathématiques à étudier cette première démonstration de Poincaré en la comparant à la théorie de White[32]. Cette étude m'a d'abord conduite à reconnaître les liens que ce mémoire de Poincaré entretient avec la mécanique céleste. Finalement la caractéristique de cette démonstration qui a retenu mon attention comme clef de lecture principale et qui forme le cœur de cet article est cette particularité du texte que je décris comme « paradigme ».

Cette rétrospective est l'occasion pour moi de remercier chaleureusement H. Rosenberg qui m'a indirectement conduite à cet article de Poincaré. Ce travail doit également beaucoup à A. Chenciner et aux chercheurs de l'équipe ASD de l'IMCCE, grands connaisseurs de l'œuvre de Poincaré, qui ont accueilli la toute première présentation du début de ces recherches et sont encore des interlocuteurs de premier choix dans mon travail de thèse. Le travail du groupe *Histoire des sciences, histoire du texte* et des échanges passionnants avec J. Virbel m'ont aidée à affiner ma lecture du texte de Poincaré. Les remarques des rapporteurs m'ont permis d'améliorer sensiblement la présentation, d'affermir mon analyse et de compléter la preuve de Poincaré. Enfin, la réflexion sur les mathématiques chinoises de K. Chemla, ainsi que ses relectures exigeantes, m'ont été extrêmement précieuses.

A. SUR LES PASSAGES D'INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE

Le but de cette annexe est de donner quelques précisions techniques sur le calcul effectué par Poincaré aux pages 51 et 52 de son mémoire. Poincaré utilise la même notation T_0 avec deux sens différents et il oublie un peu plus loin un facteur 2. La lecture de ce qui suit nécessite d'avoir suivi le début de la démonstration de Poincaré [1905c, p. 46–51].

Poincaré pose, page 51,

$$T_0 = \frac{1}{2}({u'}^2 + {v'}^2 \sin^2 u) = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}s_1^2,$$

[32] On trouvera les textes des deux mémoires de DEA en ligne sur le site `http://tel.ccsd.cnrs.fr`. Les identifiants sont `tel-00004600` pour celui de mathématiques et `tel-00003413` pour celui d'histoire des mathématiques.

ce qui est une définition différente de celle adoptée au début de la partie sur les géodésiques du sphéroïde. Je noterai ici T_0'' à la place de T_0 pour éviter les confusions. D'autre part, Poincaré définit[33]

$$T_0' = \frac{1}{2}({u_0'}^2 + {v_0'}^2 \sin^2 u) = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}{s_1}^2.$$

Il considère ensuite T_1, que je vais noter T_1'' pour la même raison que précédemment, tel que $T = T_0'' + \mu T_1''$. Enfin, T_1' désigne ce que devient T_1'' quand on remplace u' et v' par u_0' et v_0'[34].

En utilisant l'homogénéité de T et un développement de Taylor par rapport à la différence $(u' - u_0')$ — de l'ordre de μ —, un calcul au premier ordre en μ le conduit à la formule $T_0'' = \frac{1}{2}\omega^2 - 2\mu T_1''$. Il utilise alors la relation $T = T_0'' + \mu T_1''$ pour en déduire que $T = T_0' - \mu T_1''$, d'où $2T = T_0' + T_0''$ et

$$2\,\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}s_1^2 + \mathrm{d}s_2^2.$$

Puis il reprend la valeur de S_1 définie plus haut — donc à partir du T_1 initial, et non de T_1'' :

$$S_1 = \frac{T - \omega^2}{\mu\omega^2}\cdot$$

Il manque ici un facteur 2 : la valeur exacte est

$$S_1 = \frac{T_1}{\omega^2} = \frac{T - T_0}{\mu\omega^2} = \frac{T - \frac{1}{2}\omega^2}{\mu\omega^2}\cdot$$

Poincaré remplace alors T et ω^2 par $\mathrm{d}s^2$ et $\mathrm{d}s_2^2$ respectivement, avec à nouveau la même erreur d'un facteur 2 : T est égal à $\frac{1}{2}\,\mathrm{d}s^2$, et non à $\mathrm{d}s^2$. Ceci donne

$$S_1 = \frac{\mathrm{d}s^2 - \mathrm{d}s_2^2}{2\mu\,\mathrm{d}s_2^2} \quad \Big(\text{et non } S_1 = \frac{\mathrm{d}s^2 - \mathrm{d}s_2^2}{\mu\,\mathrm{d}s_2^2}\Big).$$

En négligeant les puissances supérieures de μ, ceci conduit à la signification géométrique de S_1 qu'il cherchait :

$$S_1 = \frac{1}{\mu}\,\frac{\mathrm{d}s_1 - \mathrm{d}s}{\mathrm{d}s_1} \quad \Big(\text{et non } S_1 = \frac{2}{\mu}\cdot\frac{\mathrm{d}s_1 - \mathrm{d}s}{\mathrm{d}s_1}\Big).$$

[33] On attendrait $T_0 = \frac{1}{2}(U^2 + (1/\sin^2 u)V^2)$, c'est-à-dire $T_0 = \frac{1}{2}({u_0'}^2 + {v_0'}^2 \sin^2 u)$; on a donc ici $T_0' = T_0$ (avec mes conventions), tandis que la quantité que Poincaré vient d'introduire, notée ici T_0'', est différente.

[34] On vient de voir que $T_0 = T_0'$. En revanche, T_1' est défini à partir de T_1'', et non par la formule $T = T_0' + \mu T_1'$. Les quantités T_1' et T_1 n'ont donc rien à voir.

Lorsque Poincaré utilise cette formule pour l'interprétation géométrique de R, il transmet le facteur 2 et trouve

$$R = \frac{1}{\pi\mu}(s_1 - s) \quad \Big(\text{au lieu de } R = \frac{1}{2\pi\mu}(s_1 - s)\Big).$$

Comme les quantités intéressantes sont les minima, maxima et minimax de cette fonction R, le facteur 2 n'influe pas sur la conclusion.

Il faut relever un dernier point dans cette partie de la démonstration de Poincaré : le résultat sur l'imparité du nombre d'extrema de la fonction R est obtenu pour des données polynomiales, où les polynômes sont « les plus généraux de leur degré » [Poincaré 1881, p. 17]. Le résultat s'étend au cas d'une fonction analytique comme l'est R, mais toujours avec une hypothèse que nous qualifierions d'hypothèse de généricité. Effectivement, si par exemple la fonction R est constante, ce qui arriverait si la déformation de la sphère consistait seulement en une dilatation, tous les points seront des extrema de R et toutes les géodésiques — en nombre infini — resteront fermées.

B. SUR LE PRINCIPE DE CONTINUITÉ ANALYTIQUE

Cette annexe vise à identifier les points non démontrés et les failles dans la démonstration que donne Poincaré du théorème 1 et à en proposer une version rigoureuse. La formulation plus précise que nous nous attacherons à prouver, qui ne fait qu'expliciter ce que Poincaré suppose implicitement, est la suivante :

THÉORÈME 2. — *Sur toute surface convexe*[35] *analytique de* $\mathbb{R}^3$, *soit il existe une famille continue de géodésiques fermées sans point double, soit le nombre de telles géodésiques, comptées avec multiplicité, est impair. Il en résulte qu'il y a au moins une géodésique fermée sans point double sur toute surface convexe analytique.*

Nous préciserons bien entendu ce que nous entendons par multiplicité d'une géodésique sur une surface convexe et nous montrerons qu'il s'agit d'une quantité définie modulo 2.

[35] Il est clair, particulièrement dans la section 2 de son mémoire, que Poincaré considère des surfaces dont la courbure est comprise entre deux constantes strictement positives. Nous utiliserons comme lui *convexe* dans ce sens fort.

La démonstration de Poincaré procède en deux temps ; dans un premier temps, il prouve que le nombre de géodésiques fermées (sous-entendu : sans point double) est impair pour certaines surfaces suffisamment proches de la sphère. Il étend ensuite par continuité ce résultat à toute surface convexe analytique. C'est à la deuxième partie de la démonstration, que Poincaré intitule « principe de continuité analytique », que nous nous intéresserons ici[36]. Il s'agit de prouver que la parité du nombre de géodésiques fermées sans point double ne dépend pas de la surface convexe analytique choisie.

B.1. Connexité

La première étape consiste à construire un chemin analytique de surfaces qui relie une surface convexe analytique quelconque à une surface convexe de référence. On prouvera ensuite que, lorsqu'on déforme ainsi progressivement la surface de référence, on peut suivre l'évolution des géodésiques fermées sans point double et que ces géodésiques ne peuvent apparaître ou disparaître que par couples. Il en résultera que leur nombre est de parité constante.

Considérons donc deux surfaces convexes analytiques Σ_0 et Σ_1 de $\mathbb{R}^3$.

Soient C_0 et C_1 les convexes de $\mathbb{R}^3$ bordés par Σ_0 et Σ_1. On utilise les sommes de Minkowski pour définir un chemin $C_t = \{(1-t)p_0 + tp_1 \mid p_0 \in C_0,\, p_1 \in C_1\}$ de convexes entre C_0 et C_1. On vérifie facilement que C_t est un convexe pour tout $t \in [0,1]$ et que la frontière de C_t est constituée des barycentres des points de C_0 et C_1 qui ont même plan tangent.

Ainsi, $\Sigma_t = \partial C_t$ est pout tout t une surface bien définie, analytique, convexe, et le chemin $(\Sigma_t)_{t\in[0,1]}$ est lui aussi analytique[37].

---

[36] La première partie, nous l'avons vu, est inutile lorsqu'il s'agit seulement de démontrer le théorème 2, puisqu'on connaît les géodésiques fermées sans point double sur un ellipsoïde à trois axes inégaux : ce sont les trois ellipses principales.

[37] Minkowski a publié plusieurs travaux sur les surfaces et les volumes convexes entre 1897 et 1903. On trouve en particulier dans [Minkowski 1903] les idées essentielles nécessaires ici. Minkowski [1901a] attribue à Brunn [1887] la définition des sommes de convexes (aujourd'hui dites « sommes de Minkowski »). Par ailleurs, Minkowski avait publié une note aux CRAS, [Minkowski 1901b], qui reprend la plupart de ces idées et qui a été présentée à l'Académie lors d'une séance où Poincaré était certainement présent, puisqu'il présentait une autre note, envoyée par Ludwig Schlessinger. Ainsi, les précisions que nous apportons ici correspondent probablement à ce que Poincaré avait en tête en affirmant qu'« on peut toujours passer d'une surface convexe à une autre d'une manière continue ».

Avec Poincaré, nous pouvons donc supposer les surfaces Σ_t données par une équation $f(x, y, z, t) = 0$, où f est analytique. Nous utiliserons la notation f_t pour désigner la fonction qui définit la surface Σ_t : $f_t(x, y, z) = f(x, y, z, t)$.

B.2. Continuité

Une fois qu'il dispose d'un chemin analytique entre ces surfaces, Poincaré propose de se placer dans un espace de paramètres convenable pour montrer que les géodésiques fermées sont représentées par les branches d'une courbe analytique, et qu'on peut isoler les branches représentant les géodésiques sans point double. En réalité, cette opération ne peut être réalisée que localement, puisque l'idée initiale de Poincaré reviendrait au fond à se placer dans l'espace constitué par l'ensemble des orbites géométriques (fermées ou non), lequel n'est pas bien joli, puisqu'il n'est même pas séparé (du fait de l'existence de géodésiques asymptotes à d'autres...). Il faut en particulier tenir compte de la longueur parcourue avant que la géodésique se referme. Garnier ajoute une note dans l'édition des *Œuvres* pour corriger la définition de Poincaré, manifestement incorrecte. Mais dans la définition qu'il propose en remplacement, il élimine la variable longueur, ce qui équivaut à projeter la courbe analytique dans un espace plus petit. D'une part l'ensemble qui en résulte n'est plus une courbe analytique et, d'autre part, nous verrons que le contrôle de la longueur des géodésiques étudiées est crucial pour conclure, ce que ni Poincaré, ni Garnier, n'ont remarqué.

La propriété qu'on peut établir rigoureusement en suivant la suggestion de Poincaré est la suivante :

PROPOSITION 1. — *Soit γ une géodésique fermée sur Σ_{t_0}. Les géodésiques*

** proches de γ,*

** sur les surfaces Σ_t avec t proche de t_0,*

** qui se referment après une longueur proche de celle de γ,*

sont en correspondance avec un sous-ensemble de $\mathbb{R}^4$ de la forme $F^{-1}(0)$ où F est une application analytique de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$.

Démonstration. — On fixe arbitrairement un point origine P sur γ,

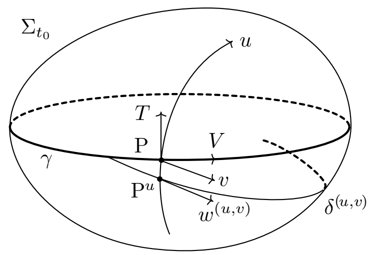

Figure 5. *Repérage des géodésiques proches de γ.*

ainsi qu'une direction de parcours. À partir de maintenant, nous considérons donc γ comme une géodésique paramétrée par l'abscisse curviligne $s \in \mathbb{R}$. On note ℓ la longueur de γ, ou, plus rigoureusement, la période de γ. On a en particulier $P = \gamma(0) = \gamma(\ell)$. Les vecteurs $V = \gamma'(0)$, $N = \overrightarrow{\nabla} f_{t_0}(\gamma(0))$ et $T = V \wedge N$ forment une base orthogonale naturelle de $\mathbb{R}^3$ au voisinage de P. Le vecteur V est de norme 1, puisque la géodésique est paramétrée par l'abscisse curviligne. Soit $\Phi^s_{\Sigma_t}$ le flot géodésique sur la surface Σ_t ; si p est un point de Σ_t, et si $v \in T_p\Sigma_t$, on note $\Phi^s_{\Sigma_t}(p,v) = (P^s_{\Sigma_t}(p,v), V^s_{\Sigma_t}(p,v))$. Alors $P^s_{\Sigma_t}(p,v)$ désigne le point de Σ_t atteint au temps s par la géodésique issue de p avec la vitesse v et $V^s_{\Sigma_t}(p,v)$ désigne la vitesse de cette géodésique au temps s.

Pour décrire une géodésique δ de Σ_{t_0} proche de γ, on utilisera deux paramètres u et v. Le premier repèrera un point d'intersection P^u de δ avec une transversale à γ en P tangente à T (voir figure 5). Le deuxième paramètre repèrera la direction de δ en ce point d'intersection. Pour ce faire, on identifiera le plan tangent en P^u (qui est, rappelons-le, un point proche de P) à Σ_{t_0} avec le plan tangent en P, par exemple par la projection orthogonale de $T_P\Sigma_{t_0}$ (vu comme sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$) sur $T_{P^u}\Sigma_{t_0}$.

Si $u \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ et $v \in T^1_P\Sigma_{t_0}$, on notera donc

$$P^u = P^u_{\Sigma_{t_0}}(P,T), \quad w^{(u,v)} = \frac{v - (v \cdot \overrightarrow{\nabla} f_{t_0}(P^u))\overrightarrow{\nabla} f_{t_0}(P^u)}{\|v - (v \cdot \overrightarrow{\nabla} f_{t_0}(P^u))\overrightarrow{\nabla} f_{t_0}(P^u)\|}$$

et $\delta^{(u,v)}$ la géodésique de Σ_{t_0} issue de P^u avec la vitesse $w^{(u,v)}$. Pour que δ soit proche de γ, il suffit que v soit proche de $V = \gamma'(0)$, condition qui peut s'écrire simplement $v \cdot V > 1 - \varepsilon$, puisque v est par définition un vecteur unitaire de $T_P\Sigma_{t_0}$, de même que V.

Remarque 1. — Ce paramétrage peut conduire à associer une infinité de couples (u, v) à une même géodésique (au sens géométrique) proche de γ, si par exemple on considère une géodésique qui s'enroule en se rapprochant asymptotiquement de γ. Mais nous travaillerons localement y compris pour le paramètre de parcours de chaque géodésique : ce sont les valeurs de s proches de la longueur ℓ de γ qui nous intéresserons, si bien que nous pouvons nous restreindre à $s \in \,]-\varepsilon, \ell+\varepsilon[$ par exemple. Ainsi, des valeurs différentes de u et v, si elles peuvent se rapporter à la même géodésique considérée globalement, renverront pour nous à des sections distinctes de cette géodésique. *In fine*, nous nous intéresserons seulement aux géodésiques fermées sans point double, lesquelles sont caractérisées univoquement par ce paramétrage.

Nous n'avons pour l'instant parlé que des géodésiques proches de γ sur la surface Σ_{t_0}, mais ce sont bien sûr les géodésiques proches sur les surfaces Σ_t proches de Σ_{t_0} qui nous intéressent. Le principe de paramétrage sera identique, avec un paramètre supplémentaire t. La première étape consiste à choisir sur chaque surface Σ_t (pour t proche de t_0) un point qui jouera le même rôle d'origine pour les paramètres u et v que jouait P sur Σ_{t_0}. Il suffit de définir la projection P_t de P sur Σ_t selon N. On vérifie facilement que les coordonnées de P_t sont analytiques par rapport à t.

À partir de ce point, u étant donné voisin de 0, on définit $P_t^u = P^u_{\Sigma_t}(P_t, T - (T\cdot \overrightarrow{\nabla} f_t(P_t))\overrightarrow{\nabla} f_t(P_t))$. C'est un point de Σ_t atteint à partir de P_t en suivant le flot géodésique dans la direction de T, direction transversale à celle de γ. Comme précédemment, on désigne par v un vecteur unitaire de $T_P\Sigma_{t_0}$ proche de V, et on définit

$$w_t^{(u,v)} = \frac{v - (v\cdot \overrightarrow{\nabla} f_t(P^u))\overrightarrow{\nabla} f_t(P^u)}{\|v - (v\cdot \overrightarrow{\nabla} f_t(P^u))\overrightarrow{\nabla} f_t(P^u)\|}\cdot$$

C'est un vecteur unitaire de $T_{P_t^u}\Sigma_t$.

Ainsi, étant donnés u, v et t, on définit une géodésique $\delta_t^{(u,v)}$, qui est la géodésique de Σ_t issue de P_t^u avec la vitesse $w_t^{(u,v)}$. On notera $w_t^{(u,v)}(s) = V^s_{\Sigma_t}(P_t^u, w_t^{(u,v)})$ le vecteur vitesse au point $\delta_t^{(u,v)}(s)$.

Puisqu'on considère une famille analytique de surfaces analytiques, le flot géodésique est également analytique par rapport à toutes les variables, et il en résulte que l'application $(u, v, t, s) \mapsto \delta_t^{(u,v)}(s)$ est analytique de

$U\times\mathcal{V}\times I\times\,]-\varepsilon,\ell+\varepsilon[$ dans $\mathbb{R}^3$, où U est un voisinage de 0, I un voisinage de t_0 et $\mathcal{V}=\{v\in T_P\Sigma_{t_0}\,;\ \|v\|=1,\ v\cdot V>1-\varepsilon\}$ un voisinage de V dans $T^1_P\Sigma_{t_0}$.

Nous cherchons les géodésiques *fermées* proches de γ. Il nous faut donc écrire la condition de fermeture de la géodésique $\delta_t^{(u,v)}$. La géodésique se referme lorsqu'il existe une valeur de s (à laquelle on imposera d'être proche de ℓ, conformément à la remarque 1 ci-dessus) telle que $\delta_t^{(u,v)}(s)=\delta_t^{(u,v)}(0)$ et $w_t^{(u,v)}(s)=v_t^{(u,v)}(0)$.

Par définition, $\delta_t^{(u,v)}(s)$ et $\delta_t^{(u,v)}(0)$ sont deux points de Σ_t proches l'un de l'autre, et le plan tangent à Σ_t en $\delta_t^{(u,v)}(0)=P_t^u$ est transverse à N lorsque t et u sont suffisamment petits, et que s est proche de ℓ. Il suffit donc de vérifier que $(\delta_t^{(u,v)}(s)-\delta_t^{(u,v)}(0))\cdot V=0$ et que $(\delta_t^{(u,v)}(s)-\delta_t^{(u,v)}(0))\cdot T=0$.

Lorsque ces conditions sont vérifiées, $w_t^{(u,v)}(s)$ et $w_t^{(u,v)}(0)$ sont deux vecteurs unitaires de $T_{P_t^u}\Sigma_t$, tous deux proches de V ; pour s'assurer qu'ils sont égaux, il suffit de vérifier que $(w_t^{(u,v)}(s)-w_t^{(u,v)}(0))\cdot T=0$. Nous sommes finalement conduits à considérer l'application analytique

$$\begin{array}{rcl} F : U\times\mathcal{V}\times I\times\,]\ell-\varepsilon,\ell+\varepsilon[& \longrightarrow & \mathbb{R}^3, \\ (u,v,t,s) & \longmapsto & \big((\delta_t^{(u,v)}(s)-\delta_t^{(u,v)}(0))\cdot V, \\ & & (\delta_t^{(u,v)}(s)-\delta_t^{(u,v)}(0))\cdot T, \\ & & (w_t^{(u,v)}(s)-w_t^{(u,v)}(0))\cdot T\big). \end{array}$$

L'ensemble des géodésiques fermées dans le voisinage de γ est donc représenté par une courbe analytique $F=0$. On vérifie immédiatement que tout a été fait de sorte qu'on ait $F(0,V,t_0,\ell)=0$: ces valeurs des paramètres correspondent à la géodésique fermée γ. $\square$

Remarque 2. — Une remarque cruciale ici est qu'on ne peut pas rencontrer à la fois des géodésiques avec point double et des géodésiques sans point double parcourues une seule fois dans une même branche de notre courbe analytique. Poincaré [1905c, p. 56–57] fait cette remarque et poursuit avec une étude plus poussée des types topologiques de géodésiques qui peuvent se rencontrer dans une même branche de la courbe analytique ; il prouve ainsi que le nombre de points doubles ne peut pas varier. Pour nous, seul le début du raisonnement de Poincaré est nécessaire, puisque nous incluons la longueur dans les paramètres décrivant une géodésique fermée. Ainsi, une géodésique fermée parcourue une fois et la même géodésique parcourue deux fois sont pour nous des objets bien différents, et seul le premier nous intéresse, si bien que l'exemple étudié par Poincaré [1905c, p. 57–60] d'une géodésique à un point double qui dégénère en une géodésique sans point double parcourue deux fois est tout à fait étranger à notre point de vue.

Si les points de $F = 0$ où la différentielle de F n'est pas de rang maximal sont isolés, on peut suivre l'analyse de Poincaré : en un point de cette courbe analytique, la ou les branches de courbe passant par ce point peuvent être représentées par la donnée des paramètres u, v et s en séries d'une puissance fractionnaire de t. Il n'y aurait d'exception que s'il existait une (ou plusieurs) branche « verticale », entièrement contenue dans un hyperplan $t = t_1$. La surface Σ_{t_1} possèderait alors une famille continue de géodésiques fermées. Il en est ainsi par exemple des surfaces de révolution, dont tous les méridiens sont des géodésiques fermées. Lorsqu'une branche de courbe est donnée par des séries en une puissance fractionnaire de t au voisinage d'un de ses points, d'abscisse t_2, il y a deux comportements qualitatifs possibles. Si le dénominateur de la puissance fractionnaire est impair, la branche possède exactement un point pour chaque valeur de t proche de t_2 ; autrement dit, la géodésique considérée subsiste pour $t_2 - \varepsilon < t < t_2 + \varepsilon$. Si au contraire le dénominateur est pair, la branche considérée de la courbe analytique possède deux points pour $t < t_2$ et aucun pour $t > t_2$ (ou le contraire) ; on a donc deux géodésiques sur les surfaces Σ_t pour $t < t_2$, qui se rapprochent l'une de l'autre lorsque t s'approche de t_2, se confondent sur la surface Σ_{t_2}, puis disparaissent.

Mise à part la question de la définition précise de la courbe analytique décrivant les géodésiques fermées, c'est là le résultat obtenu par Poincaré. Nous reviendrons plus loin sur les cas dégénérés qui peuvent apparaître, en particulier lorsque les surfaces présentent des familles continues de géodésiques fermées. D'ores et déjà, il manque un élément important pour pouvoir conclure, comme le fait Poincaré, que le nombre de géodésiques fermées sans point double ne peut pas changer de parité. Il faut un résultat de compacité pour pouvoir déduire de cette étude locale un énoncé global.

B.3. Compacité

La propriété fondamentale qui permet de conclure est que la longueur d'une géodésique fermée *sans point double* sur une surface strictement convexe est majorée. Ainsi, une géodésique fermée sans point double ne peut pas voir sa longueur augmenter sans limite lorsque t s'approche de t_1 pour disparaître en t_1.

Le résultat de majoration est dû à Calabi et Cao [1992] :

THÉORÈME 3. — *On considère la sphère munie d'une métrique telle que la courbure vérifie* $0 \leq \mathrm{K}$ *en tout point. On note* M *la variété riemannienne obtenue*, A *son aire et* $\mathrm{Long}(\delta)$ *la longueur de la courbe fermée* δ. *Alors on a* $\mathrm{Long}(\gamma) \leq \frac{1}{2} A\sqrt{\max(\mathrm{K})}$ *pour toute géodésique simple fermée* γ, *avec égalité si, et seulement si,* M *est isométrique à la sphère unité.*

Si maintenant γ_t est une géodésique fermée sans point double sur Σ_t, qui varie continûment avec t pour $t < t_0$, il existe une géodésique γ_{t_0} sur Σ_{t_0} telle que les géodésiques γ_t pour $t \leq t_0$ constituent une branche de la courbe analytique dont nous avons précisé la construction ci-dessus.

En effet, si γ_t est une telle famille, nous pouvons choisir un point P_t sur chaque géodésique de la famille, noter v_t un vecteur unitaire tangent à γ_t en P_t, et s_t la longueur de la géodésique. Les surfaces Σ_t sont compactes, les v_t sont unitaires et les longueurs s_t sont bornées. Ainsi, par compacité on peut extraire une sous-suite $t(n)$ de la suite $(t_0 - 1/n)$ telle que $P_{t(n)}$ converge vers P, $v_{t(n)}$ converge vers V et $s_{t(n)}$ vers ℓ. Par continuité de f, P appartient à Σ_{t_0} et V à $T_P\Sigma_{t_0}$. Par hypothèse, les géodésiques $\gamma_{t(n)}$ sont fermées de longueurs $s_{t(n)}$, donc par continuité du flot géodésique, la géodésique γ_{t_0} issue de P avec la vitesse V sur Σ_{t_0} est fermée de longueur ℓ.

On peut lui appliquer l'analyse locale précédente. Toutes les géodésiques proches de γ_{t_0} sur les surfaces proches de Σ_{t_0} sont décrites par une courbe analytique. Il en est donc ainsi des géodésiques $\gamma_{t(n)}$ pour n assez grand, et par suite des γ_t pour t suffisamment proche de t_0, puisque les γ_t étaient supposées former une famille continue de géodésiques fermées pour $t < t_0$. Autrement dit, la famille γ_t forme une portion de la courbe analytique construite à partir de γ_{t_0}. L'analyse précédente permet donc de prolonger la famille γ_t soit au delà de t_0, soit par une deuxième famille $\widetilde{\gamma}_t$ pour $t \leq t_0$, avec $\widetilde{\gamma}_{t_0} = \gamma_{t_0}$.

Ceci montre que, d'un point de vue global, et non plus seulement au voisinage d'une géodésique fermée donnée, les géodésiques fermées sans point double ne peuvent disparaître qu'en se confondant avec une autre géodésique. La parité de leur nombre global est donc constante au cours de la déformation de la surface, elle est donc la même pour les surfaces Σ_0 et Σ_1 dont nous sommes partis.

B.4. Multiplicité et familles continues

Nous ne sommes plus très loin du résultat visé par Poincaré. Cependant, nous voyons également les limites de la formulation qu'il adopte. D'une part, il faut bien sûr compter les géodésiques avec multiplicité, comme on fait pour les racines des équations algébriques. Poincaré ne signale pas ce point, mais il fait explicitement le parallèle entre la méthode qu'il expose et la théorie des racines des équations algébriques. Ainsi, lorsqu'on a un développement en une puissance fractionnaire à dénominateur pair de t en t_1, la géodésique en laquelle se confondent deux géodésiques avant de disparaître est de multiplicité paire. Il faudrait encore vérifier que la multiplicité, ou du moins sa parité, dépend seulement de la surface considérée, et non de la famille dont elle fait partie.

De plus, les surfaces qui possèdent des familles continues de géodésiques fermées sans point double introduisent de nouvelles complications que Poincaré ne relève pas plus explicitement. En particulier, on ne peut pas définir une multiplicité pour une géodésique donnée d'une telle famille. On ne peut donner un sens qu'à la multiplicité de la famille de géodésiques fermées dans son ensemble. Un exemple permet d'illustrer ce problème.

Sur un ellipsoïde de révolution Σ_{t_0}, on voit aisément que les géodésiques fermées sans point double se partagent en une famille à un paramètre, l'ensemble des méridiens de l'ellipsoïde, γ_θ et une géodésique fermée isolée, l'équateur. Si l'on inclut notre ellipsoïde de révolution dans la famille d'ellipsoïdes obtenue en faisant varier l'un des axes, de façon que Σ_t soit un ellipsoïde à trois axes inégaux pour $t \neq t_0$, la famille de géodésiques fermées sans point double constituée par les méridiens de Σ_{t_0} disparaît pour $t \neq t_0$ et est remplacée par les deux ellipses principales orthogonales à l'équateur. Mais suivant l'orientation choisie pour les axes des ellipsoïdes Σ_t, ce n'est pas toujours la même des géodésiques de la famille γ_θ qui donne naissance, pour $t \neq t_0$, à une géodésique fermée sans point double sur Σ_t. Ainsi, on ne peut pas attribuer de multiplicité à une géodésique γ_{θ_0} particulière. Il est seulement naturel d'attribuer une multiplicité paire à la famille de géodésiques γ_θ dans son ensemble.

Certes, le résultat visé par Poincaré est surtout l'existence d'au moins une géodésique fermée sans point double sur toute surface convexe. Il suffit, pour ce résultat plus faible, de montrer que s'il en existe une sur une surface connue — un sphéroïde par exemple, ou un ellipsoïde — il en existera encore au moins une sur toute surface qu'on peut lier à la surface connue par un chemin analytique. La multiplicité n'a besoin, pour démontrer ce résultat affaibli, d'être définie que dans une famille donnée de surfaces. On peut alors suivre la démarche de Poincaré. Mais deux points doivent être soulignés.

Le premier est que la courbe analytique à considérer ne peut pas être vue comme plongée dans un espace de paramètres : elle est définie seulement localement. Il faut donc la voir comme une variété analytique abstraite, ce qui nous éloigne du texte de Poincaré, quoique la notion de variété abstraite soit à peu près formée à cette époque. En considérant cette variété abstraite et sa projection sur l'intervalle des paramètres, on peut suivre la parité du cardinal de la fibre, comme le suggère Poincaré, par des arguments locaux : les points de la fibre naissent ou meurent par paires.

Cette analyse est encore insuffisante. En effet, Poincaré laisse dans l'ombre les cas où une surface possède une famille continue de géodésiques fermées sans point double. Si cela se produit pour une surface isolée de la famille, l'analyse menée dans le § 46 des *Méthodes nouvelles*, ou pour les géodésiques des sphéroïdes, peut être adaptée et assurer la persistance des géodésiques fermées lors de la déformation. Mais s'il existe un intervalle $]t'_1, t'_2[\ \subset [t_1, t_2]$ tel que les surfaces Σ_t possèdent des familles continues de géodésiques fermées[38], on fera apparaître de nouveaux types de bifurcations.

Ainsi, il faudrait soit montrer que, quitte à perturber le chemin de surfaces reliant Σ_{t_1} à Σ_{t_2}, on peut éviter une telle situation, soit faire une étude exhaustive de toutes les bifurcations possibles.

Toutes ces difficultés liées à des surfaces singulières pour F ont amené Marston Morse [1934, p. 305] à juger très sévèrement cette démonstration de Poincaré.

Le formalisme nécessaire à une démonstration rigoureuse du théorème 2 a été mis au point par Fuller [1967]. Il permet de donner un sens à

[38] En s'inspirant des calculs menés dans le chapitre 4 de [Besse 1978], on peut fabriquer une telle famille de surfaces.

la multiplicité d'une géodésique fermée — ou d'un ensemble compact de telles géodésiques — sur une surface, indépendamment de la famille de surfaces dans laquelle on peut l'inclure. L'« indice » ainsi défini correspond, modulo 2, au nombre de géodésiques comptées avec multiplicité et reste bien défini pour les surfaces qui possèdent des familles continues de géodésiques fermées.

L'auteur ne semble pas avoir remarqué que sa théorie donnait exactement un des deux outils nécessités par cette démonstration de Poincaré[39], le deuxième étant la majoration de la longueur des géodésiques fermées sans point double. D'ailleurs, Fuller insiste — mais à propos d'autres exemples — sur la nécessité de borner la longueur des trajectoires périodiques considérées et il donne, à la fin de l'article cité, des propriétés de majoration de la longueur des orbites périodiques pour d'autres problèmes.

La technique mise au point par Fuller en s'inspirant des théories d'indice des points fixes conduit à définir tout d'abord l'indice d'une géodésique fermée sans point double, isolée, comme l'indice de l'application de retour de Poincaré dans une section autour de la géodésique. Dans notre formalisme, on peut prendre comme section le fibré des vecteurs tangents à Σ_{t_0} le long de la courbe formée des P^u. On dispose des coordonnées (u, v) dans cette section. Alors l'application de retour associe à (u, v) le couple $(\mathfrak{u}, \mathfrak{v})$ tel qu'il existe s proche de la longueur de la géodésique initiale vérifiant $\delta_{t_0}^{(u,v)}(s) = P^{\mathfrak{u}}$ et $\mathrm{d}\delta_{t_0}^{(u,v)}/\mathrm{d}s(s) = w^{(\mathfrak{u},\mathfrak{v})}$. Lorsque la différentielle de l'application de retour est inversible au point fixe correspondant à une géodésique parcourue une seule fois, on peut montrer que l'indice est 1 ou -1 [Leray 1945, p. 215]. Ceci est vérifié lorsque l'application F définie plus haut est de rang maximal, et que le noyau de la différentielle n'est pas contenu dans l'hyperplan $t =$ cste (ce dernier cas est celui où on considère une géodésique qui appartient à une famille continue de géodésiques fermées sur une des surfaces).

On peut ensuite définir l'indice d'un nombre fini de géodésiques fermées comme la somme des indices de chaque géodésique. Lorsque chacune est non dégénérée (*i.e.* lorsque la différentielle de l'application

[39] Fuller a publié plusieurs autres articles sur des sujets proches, mais je n'ai trouvé nulle part de référence à l'article de Poincaré sur les géodésiques fermées. Il cite un livre de Lefschetz [1957], lequel mentionne plusieurs mémoires de Poincaré, mais pas celui sur les géodésiques.

de retour est inversible, ou encore que l'application F considérée plus haut est de rang maximal), chacune contribue pour 1 ou -1, si bien que l'indice est de même parité que le nombre des géodésiques considérées.

Enfin, si C est un ensemble compact isolé de géodésiques fermées (sans point double), on peut déformer légèrement la surface de façon à n'avoir plus que des géodésiques isolées dans un voisinage de C, ce qui permet de définir l'indice de l'ensemble C comme celui de l'ensemble de ces géodésiques isolées sur la surface perturbée. Le point central de la théorie de Fuller consiste à démontrer que l'indice est bien défini et qu'il ne varie pas dans une famille analytique Σ_t. Ceci se ramène à prouver le second point dans le cas particulier où les géodésiques fermées sans point double de Σ_0 et de Σ_1 sont isolées.

La propriété essentielle qui nous permet d'appliquer ce résultat de Fuller est précisément la compacité établie plus haut : l'ensemble des géodésiques fermées sans point double (parcourues une seule fois) sur les surfaces Σ_t avec $t \in [0, 1]$ est compact.

En résumé, la théorie de Fuller prouve que l'indice de l'ensemble des géodésiques fermées sans point double, parcourues une seule fois, ne dépend pas de la surface convexe considérée. Pour les surfaces dont toutes les géodésiques fermées sans point double sont non dégénérées, c'est-à-dire lorsque la différentielle de F est de rang maximal en tous les points représentant une géodésique fermée sans point double de la surface considérée, cet indice est de même parité que le nombre de géodésiques fermées. Lorsqu'il y a une géodésique isolée dégénérée (par exemple lorsque deux géodésiques se confondent avant de disparaître), l'indice de cette géodésique, modulo 2, correspond à la multiplicité avec laquelle on était amené à la compter dans notre explicitation de la méthode de Poincaré. Enfin, lorsqu'une surface présente une famille continue de géodésiques fermées, l'indice associé à cette famille se calcule en comptant les géodésiques fermées qui subsistent lorsqu'on perturbe la surface. Ce dernier procédé est exactement celui que Poincaré emploie pour étudier les géodésiques fermées sur les surfaces proches de la sphère, c'est-à-dire que la première partie de la démonstration de Poincaré revient à calculer l'indice de Fuller modulo 2 de l'ensemble des grands cercles de la sphère, qui est une famille continue à deux paramètres de géodésiques fermées sans point double.

Nous avons utilisé ici une version un peu plus faible de la théorie de Fuller, puisque nous n'avons considéré l'indice qu'il définit que modulo 2, de façon à rester plus près de la formulation de Poincaré en terme de *nombre* de géodésiques. L'indice de Fuller est un entier relatif qui ne dépend pas de la surface considérée, mais il ne correspond pas exactement au nombre des géodésiques, puisque, dans les cas non dégénérés, chaque géodésique contribue par son indice, positif ou négatif suivant le comportement des géodésiques proches.

Remarquons enfin que l'indice de Fuller correspond au degré défini par White [1991] dans le cas plus général des sous-variétés minimales d'une variété donnée. Fuller (et déjà Poincaré avant lui) travaille en considérant la propriété de fermeture d'une géodésique comme une propriété de point fixe, tandis que White utilise une caractérisation variationnelle des géodésiques. Les résultats atteints par les deux théories sont identiques (à ceci près que la théorie de White est écrite directement pour des sous-variétés de dimension quelconque d'une variété de dimension quelconque...).

BIBLIOGRAPHIE

Barrow-Green (June)

[1994] Oscar II's prize competition and the error in Poincaré's memoir on the three body problem, *Archive for history of exact sciences*, 48 (1994), p. 107–131.

[1997] *Poincaré and the Three Body Problem*, Providence, RI : AMS - London : LMS, 1997.

Besse (Arthur L.)

[1978] *Manifolds all of whose geodesics are closed*, Berlin : Springer, 1978.

Birkhoff (George D.)

[1927] *Dynamical systems*, Providence ; New York : American Mathematical Society Colloquium Publications, 1927.

Brunn (Hermann)

[1887] *Über Ovale und Eiflächen*, Inaugural Dissertation, München, 1887.

Calabi (Eugenio) & Cao (Jianguo)

[1992] Simple closed geodesics on convex surfaces, *Journal of Differential Geometry*, 36 (1992), p. 517–549.

Chemla (Karine)

[2003] Generality above abstraction. The general expressed in terms of the paradigmatic in mathematics in ancient China, *Science in Context*, 16 (2003), p. 413–458.

Croke (Christopher B.)
[1982] Poincaré's problem and the length of the shortest closed geodesic on a convex hypersurface, *Journal of Differential Geometry*, 17 (1982) p. 595–634.

Fuller (F. Brock)
[1967] An index of fixed point type for periodic orbits, *American Journal of Mathematics*, 89 (1967), p. 133–148.

Gilain (Christian)
[1977] *La théorie géométrique des équations différentielles de Poincaré et l'histoire de l'analyse*, Thèse de doctorat, Université Paris I, 1977.

Hadamard (Jacques)
[*Œuvres*] *Œuvres de Jacques Hadamard*, Paris : Éditions du CNRS, 1968.
[1898] Les surfaces à courbures opposées et leurs lignes géodésiques, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 4 (1898), p. 27–73. [Hadamard, *Œuvres* 2, p. 729–776].

Hass (Joel) & Morgan (Frank)
[1996] Geodesics and soap bubbles in surfaces, *Mathematische Zeitschrift*, 223 (1996), p. 185–196.

Herreman (Alain)
[1996] *Éléments d'histoire sémiotique de l'homologie*, Thèse de doctorat, Université Paris 7 Denis Diderot, 1996.

Klingenberg (Wilhelm)
[1978] *Lectures on closed geodesics*, Berlin : Springer, 1978.

Lagrange (Joseph-Louis)
[*Œuvres*] *Œuvres de Lagrange*, Paris : Gauthier-Villars, 1867–1892.
[1776] Sur l'altération des moyens mouvements des planètes, *Nouveaux mémoires de l'Académie royale des sciences et belles-lettres de Berlin*, 1776. [Lagrange, *Œuvres* IV, p. 255 et suiv.].

Lefschetz (Solomon)
[1957] *Differential Equations : Geometric Theory*, New York : Interscience, 1957.

Leray (Jean)
[1945] Sur les équations et les transformations, *J. math. pures appl.*, 24 (1945), p. 201–248 (cet article constitue la troisième partie d'un cours de topologie algébrique, écrit en captivité).

Lusternik (Lazar A.) & Schnirelmann (L.)
[1929] Sur le problème de trois géodésiques fermées sur les surfaces de genre 0, *Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris*, 189 (1929), p. 269–271.

Minkowski (Hermann)
[*Werke*] *Gesammelte Abhandlungen von Hermann Minkowski, unter Mitwirkung von Andreas Speiser und Hermann Weyl, herausgegeben von David Hilbert*, Leipzig ; Berlin : Teubner, 1911.
[1901a] Über die Begriffe Länge, Oberfläche und Volumen, *Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 9 (1901), p. 115–121. [Minkowski, *Werke* II, p. 122–127].
[1901b] Sur les surfaces convexes fermées, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 132 (1901), p. 21–24.
[1903] Volumen und Oberfläche, *Mathematische Annalen*, 57 (1903), p. 447–495. [Minkowski, *Werke* II, p. 230–276].

MORSE (Marston)
[1934] *The Calculus of Variations in the Large*, Providence : Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., vol. XVIII, 1934.

NABONNAND (Philippe)
[1995] Contribution à l'histoire de la théorie des géodésiques au XIXe siècle, *Revue d'histoire des mathématiques*, 1 (1995), p. 159–200.

POINCARÉ (Henri)
[*Œuvres*] *Œuvres de Henri Poincaré*, Paris : Gauthier-Villars, 1916–1954.
[1881] Sur les courbes définies par les équations différentielles (1re partie), *J. math. pures appl.* (3e série), 7 (1881), p. 375–422. [Poincaré, *Œuvres* 1, p. 3–44].
[1882] Sur les courbes définies par une équation différentielle (2e partie), *J. math. pures appl.* (3e série), 8 (1882), p. 251–296. [Poincaré, *Œuvres*, t. 1, p. 44–84].
[1884] Sur certaines solutions particulières du problème des trois corps, *Bulletin astronomique*, 1 (1884), p. 65–74. [Poincaré, *Œuvres* 7, p. 253–260].
[1885] Sur les courbes définies par les équations différentielles (3e partie), *J. math. pures appl.* (4e série), 1 (1885), p. 167–244. [Poincaré, *Œuvres* 1, p. 90–158].
[1886] Sur les courbes définies par les équations différentielles (4e partie), *J. math. pures appl.* (4e série), 2 (1886), p. 151–217. [Poincaré, *Œuvres* 1, p. 167–222.
[1890] Sur le problème des trois corps et les équations de la Dynamique, Mémoire couronné du prix de S.M. le roi Oscar II de Suède, *Acta mathematica*, 13 (1890), p. 1–270. [Poincaré, *Œuvres* 7, p. 262–479].
[1891a] Le problème des trois corps, *Revue générale des sciences*, 2 (1891), p. 1–5. [Poincaré, *Œuvres* 8, p. 529–537.
[1891b] Sur le problème des trois corps, *Bulletin astronomique*, 8 (1891), p. 12–24. [Poincaré, *Œuvres* 7, p. 480–490 (il s'agit d'un exposé, sans démonstration, des principaux résultats obtenus dans [Poincaré 1890] susceptibles d'intéresser les lecteurs du *Bulletin astronomique*).
[1892–1899] *Méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, Paris : Gauthier-Villars, 1892–1899 (abrégé en *Méthodes nouvelles*).
[1905a] *La valeur de la science*, Paris : Flammarion, 1905 (cité d'après la réédition de 1970).
[1905b] *Leçons de mécanique céleste*, Paris : Gauthier-Villars, 1905.
[1905c] Sur les lignes géodésiques des surfaces convexes, *Transactions of the American Mathematical Society*, 6 (1905), p. 237–274. [Poincaré, *Œuvres*, 6, p. 38–84] (cité d'après la pagination de l'édition des *Œuvres*).
[1921] Analyse de ses travaux scientifiques, par Henri Poincaré. *Acta mathematica*, 38 (1921), p. 3–135.

RIEMANN (Bernhard)
[*Werke*] *Bernhard Riemann's gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlass*, H. Weber et R. Dedekind, éditeurs, Leipzig : Teubner, 1876 (cité d'après la seconde édition de 1892, avec le supplément de M. Noether et W. Wirtinger (1902), réimprimée en 1990 conjointement par Springer Verlag et Teubner, sous le titre *Gesammelte mathematische Werke, Wissenschaftlicher Nachlass und Nachträge. Collected papers*).

WHITE (Brian)
[1991] The space of minimal submanifolds for varying Riemannian metrics, *Indiana University Mathematics Journal*, 40 (1) (1991), p. 161–200.