Revue d'histoire des mathématiques,
10 (2004), p. 45–106.

LA CONCEPTION DES NOMBRES EN FRANCE AUTOUR DE 1800 : L'ŒUVRE DIDACTIQUE DE SYLVESTRE FRANÇOIS LACROIX

Pierre LAMANDÉ (*)

RÉSUMÉ. — L'objet de cet article est d'examiner la vision des nombres telle qu'elle apparaît dans les ouvrages de S.F. Lacroix. Marqué par le génétisme sensualiste de Condillac, ce dernier sut le dépasser et bâtir ses textes, comme le recommandait d'Alembert, autour d'idées simples, issues d'une vision mathématique dégagée des débats métaphysiques. Sans prétendre construire de système philosophique, il bâtit une œuvre d'une profonde cohérence. Partant des nombres entiers et des opérations arithmétiques, il construit les fractions pour étendre la division. L'algèbre, c'est-à-dire la théorie des équations polynomiales, donne naissance à une nouvelle espèce de nombres, les quantités algébriques. Lacroix montre soigneusement que les nombres négatifs et imaginaires sont susceptibles de toutes les opérations arithmétiques et permettent de résoudre toutes les équations polynomiales. Sa géométrie s'ouvre par la description de l'anthyphérèse qui lui permet de définir le rapport comme limite de rationnels et étend encore le champ des nombres. La cohérence des approches est approfondie dans l'application de l'algèbre à la géométrie. Le calcul infinitésimal est fondé sur la notion de limite, sans recours aux infinitésimaux et s'appuyant sur la loi de continuité dont il donne les principes. Il est étendu aux fonctions de plusieurs variables, se dégageant de l'ambiguïté de la notion de quantités qui recouvrait nombres et grandeurs. Les traités de Lacroix sont parmi les tous premiers à être fondés sur une théorie des nombres purement abstraite, certes incomplète, mais qui ouvre la voie aux avancées du XIX[e] siècle.

(*) Texte reçu le 4 décembre 2001, révisé le 14 mai 2003.
Pierre LAMANDÉ, Centre François Viète, Université de Nantes, 2 rue de la Houssinière, BP 92208, 44322 Nantes CEDEX 3.
Courrier électronique : Pierre.Lamande@math.univ-nantes.fr
Mots clés : S.F. Lacroix, théorie des nombres, nombres et algèbre, nombres et géométrie, nombres algébriques, enseignement mathématique français à la fin du XVIII[e] siècle.
Classification AMS : 01A50, 11-03, 97-03.

ABSTRACT. — THE CONCEPTION OF NUMBERS IN FRANCE CIRCA 1800 : THE PEDAGOGICAL WORKS OF SYLVESTRE FRANÇOIS LACROIX. — This article aims to study the conception of numbers in the books of S.F. Lacroix. Influenced by the genetic sensualism of Condillac, Lacroix went beyond it and constructed his books, as d'Alembert suggested, on simple ideas that stemmed from a vision of mathematics detached from metaphysical debates. Without building a philosophical system, his work was deeply consistent. Beginning with integers and arithmetical operations, he constructed fractions in order to extend division. Algebra, that is the theory of polynomial equations, gave birth to a new kind of number, algebraic quantities. Lacroix carefully showed that negative and imaginary numbers obeyed all the laws of arithmetic and satisfied polynomial equations. His geometry began with a description of anthyphairesis, which allowed him to formulate a conception of ratio as a limit of rational numbers, thereby extending the domain of numbers. The consistency of his approach was increased by the application of algebra to geometry. Calculus was based on the concept of limit, without infinitesimals and supported by a law of continuity the properties of which he provided. It was extended to functions of several variables, without the ambiguity of the concept of "quantity" which shrouded numbers and magnitudes. Lacroix's textbooks were among the very first to be founded on a purely abstract theory of numbers, one that was incomplete to be sure but one which opened the way to nineteenth-century advances.

INTRODUCTION

Lacroix a produit une œuvre didactique qui a marqué le tournant des XVIII[e] et XIX[e] siècles, non seulement en France mais aussi à l'étranger. Si ce constat, largement partagé du vivant de cet auteur, est aujourd'hui admis par de nombreux historiens, ces derniers se plaisent pourtant souvent à souligner son manque de créativité mathématique. Ce jugement demande à être nuancé. Les écrits de Lacroix ne sont pas une simple compilation de résultats et de méthodes découvertes par ailleurs et qu'il aurait su exposer avec une clarté, un ordre et une précision justifiant leur succès. En restructurant l'enseignement mathématique, ils en interrogent les fondements et les solutions apportées sont souvent nouvelles, même si certains de ses éléments peuvent être retrouvés chez des auteurs antérieurs. Dépourvus d'ambiguïtés, mettant en exergue les principes momentanément admis, les textes de Lacroix interrogent autant qu'ils instruisent. Ils font le lien entre les maîtres du XVIII[e] siècle et Cauchy, dont Lacroix a été le professeur à l'École polytechnique. Le changement de paradigmes, au sens de Thomas Kuhn, s'effectue en réalité sur une période plus ou moins longue, les conceptions ou écritures initiales pouvant être infléchies. La forme achevée des nouveaux paradigmes est le terme d'un processus où les traités peuvent occuper une place importante. En ce sens, Lacroix est un auteur important pour saisir le passage de la notion de quantité, dominante jusqu'au XVIII^e^ siècle, à celle de nombre qui triomphe au XIX^e^ siècle.

Lui-même est d'ailleurs conscient de vivre une époque où les découvertes cumulées exigent une refonte de la structure des mathématiques et de leur enseignement, où il faut « réduire à un petit nombre de méthodes générales une foule de procédés particuliers qui tiennent à l'enfance de ces calculs ; mais ce n'est point par une simple compilation qu'on atteindra ce but » [Lacroix 1797–1798, p. III]. Cette élaboration de méthodes générales s'accompagne d'une réflexion approfondie sur les définitions et les idées simples qu'elles expriment. Lacroix ne s'intéresse pas uniquement à l'aspect technique des mathématiques mais aussi à la philosophie qui les sous-tend. Imprégné de l'empirisme anglais et de la pensée des idéologues, il a su, comme nous le verrons plus loin, les utiliser tout en insistant sur l'interdépendance entre le développement des sciences et leur métaphysique. Fin connaisseur de l'ensemble des textes mathématiques, il sait y joindre une réflexion épistémologique et en tirer une vision globale de l'enseignement où la recherche de la vérité est un instrument indispensable du progrès social[1].

Lacroix est en effet un héritier des Lumières. Comme d'Alembert, Condorcet et la majorité des grands écrivains français du XVIII^e^ siècle siècle, il lie le développement des sciences et de leur épistémologie à celui de la philosophie ainsi qu'aux avancées politiques et sociales. Mais l'expérience révolutionnaire modère son enthousiasme. Si, dans ses *Essais sur l'enseignement*, Lacroix [1805, Introduction] trace un tableau admiratif des progrès de la raison au XVIII^e^ siècle, il ne se fait pas d'illusion, ni sur les difficultés qu'elle peut rencontrer, ni sur son poids dans la conduite des hommes. La science elle-même se doit aussi de détruire les préjugés.

> « C'est ainsi que s'est formé, de l'impulsion donnée d'abord par les sciences mathématiques, et bientôt répétée par les sciences physiques, cet esprit de doute et d'examen, de calcul et d'observation, qui caractérise le XVIII^e^ siècle. Tout ce qui ne tenait qu'à des combinaisons plus ou moins heureuses de mots, et à des hypothèses même fort ingénieuses, n'eut qu'une célébrité passagère, et comme par malheur l'esprit humain rencontre plus souvent l'erreur que la vérité, le siècle où la raison fit le plus de progrès fut plus occupé de détruire que d'édifier » [*ibid.*, p. 29].

[1] La conception éducative de Lacroix n'a pas reçu toute l'attention qu'elle mérite. Héritée de la pensée française des Lumières, elle a marqué les écoles centrales, mais leur disparition au profit des lycées a rendu politiquement obsolète la défense que Lacroix en donne. C'est sans doute une des raisons de l'oubli des historiens.

La lutte contre les illusions et les dévoiements de la raison est également nécessaire au plan politique et Lacroix poursuit par une défense et illustration des « esprits profonds mus par une sensibilité réfléchie, qui croient à la perfectibilité de l'esprit humain et qui la désirent ». Alors que, sous le Consulat et le Premier Empire, les critiques violentes contre les années révolutionnaires se multiplient, assimilant volontiers science et révolution, Lacroix n'est pas tendre envers leurs auteurs. « Des hommes accoutumés à reposer leur tête sur l'oreiller des préjugés, imputent les orages dont ils furent les témoins à ceux qui en ont été les premières victimes » [*ibid.*, p. 29]. Il renvoie dos-à-dos « les crimes enfantés par l'ignorance et le fanatisme religieux et les excès qui ont dénaturé les réformes que sollicitait la philosophie ». Les passions humaines, l'ambition, l'envie « puisent dans les idées les plus saines des prétextes pour relâcher par des secousses violentes tous les liens de la société » [*ibid.*, p. 30]. Lacroix est persuadé que l'éducation est essentielle pour l'épanouissement de la rationalité et que les sciences doivent y jouer un rôle majeur. Non par une prétendue certitude de détenir la vérité, mais comme seul mode d'approche critique de celle-ci. C'est à contre-courant qu'il défend en 1805 les écoles centrales, condamnées politiquement comme symboles des errements révolutionnaires, et parfois attaquées par ceux-là mêmes qui les ont mises en place. Le nouvel ordre des lycées correspond à une vision napoléonienne de la société que ne partage pas Lacroix. Il rejette l'encasernement qui leur est imposé, lui opposant la liberté d'une éducation plus insérée dans le tissu social et donc plus critique.

Après avoir situé le cadre social dans lequel évolue Lacroix, et plus particulièrement sa place dans le monde éducatif et intellectuel français, nous analyserons l'héritage scientifique et philosophique sur lequel il construit sa vision des nombres. Puis, comme il n'a pas développé systématiquement une épistémologie, ne l'abordant guère qu'à travers le prisme de l'enseignement, c'est sa pratique mathématique, telle qu'elle apparaît dans ses ouvrages et les commentaires qu'il en a donnés, qui nous livrera ses conceptions.

I. LACROIX ENSEIGNANT ET SCIENTIFIQUE

La formation de Lacroix et ses premiers postes[2]

L'éducation de Lacroix ne diffère guère de celle que reçurent les autres savants français sous l'Ancien Régime. Après des études au collège des Quatre-Nations, il se lie avec le milieu académique. Gaspard Monge, qu'il a probablement rencontré dès 1780, lui donne en 1781–1782 des cours d'analyse, de géométrie analytique et de géométrie infinitésimale [Taton 1951, p. 24]. Les nécessités financières le conduisent à devenir, grâce au soutien de Monge, professeur des Gardes du Pavillon à Rochefort le 1er décembre 1782. Confronté à la morgue des élèves et obligé de suivre un programme imposé, il ne gardera pas un bon souvenir de ce séjour. Il conserve un contact épistolaire avec Monge et, sous son influence, s'oriente alors vers la théorie des équations aux dérivées partielles et ses applications à la théorie des surfaces sans pour autant oublier l'astronomie, objet de ses premiers travaux. Il envoie deux mémoires[3] à l'Académie des sciences qui le font remarquer, en particulier par Condorcet qui en est le secrétaire perpétuel.

En janvier 1786, Lacroix est de retour à Paris où il assure l'enseignement des mathématiques au Lycée[4]. Il le quitte le 31 août 1787. Mais ce bref séjour dans un établissement que R. Taton [1959, p. 138] a qualifié de « citadelle de l'esprit philosophique » lui permet de côtoyer des

[2] S.F. Lacroix (28 avril 1765 - 24 mai 1843) n'a pas fait l'objet d'un travail important. Une courte biographie lui a été consacrée dans [Itard 1973]. René Taton a apporté nombre d'informations dans [Taton 1948 ; 1951 ; 1953a ; 1953b ; 1954a et 1961]. D'autres éléments se trouvent dans [Dhombres, N. et J., 1989 et 1997], [Dhombres, dir., 1992], [Dhombres et Robert 1998]. Sur le contexte historique général, voir, entres autres, [Dhombres, N. et J. 1989] et, sur les écoles centrales, [Lamandé 1988] ainsi que les *Annales historiques de la Révolution française* 243 (1981) et [Julia 1981 ; 1987 et 1996].

[3] Ses *Tables du Soleil* sont présentées le 15 janvier 1785. Son mémoire sur les équations aux dérivées partielles est déposé le 14 décembre 1785 et fait l'objet d'un rapport favorable le 11 février 1786.

[4] En 1785, le Musée, fondé par Pilatre du Rozier est réorganisé à la suite du décès de ce dernier et prend le nom de Lycée. Condorcet accepte d'y être responsable de l'enseignement de mathématiques, assuré par Lacroix. La première année, il s'appuie sur l'*Algèbre* et les *Lettres à une princesse d'Allemagne* d'Euler dont il donne, avec Condorcet, une nouvelle édition en 1788-1789. La seconde année, il aborde l'astronomie physique et les statistiques, sujet de prédilection de Condorcet. Sur Condorcet, Lacroix et le Lycée, voir [Taton 1959], sur les musées et lycées parisiens de la fin de l'Ancien régime, voir [Guénot 1986].

représentants éminents du monde des lettres, comme La Harpe. Le 13 février 1787, il est nommé, sur recommandation de Condorcet, suppléant de Dagelet en mathématiques à l'École militaire de Paris. Durant cette période, Lacroix se met au calcul des probabilités, tout en continuant ses travaux sur les tables astronomiques et la géométrie infinitésimale. Son insertion dans le milieu académique s'approfondit et il se lie d'amitié avec Lagrange, Laplace, Cassini et Lalande. Mais l'École militaire de Paris est fermée début 1788. Sur recommandation de Laplace, examinateur du corps de l'artillerie, Lacroix est nommé en mars 1788 professeur de mathématiques, physique et chimie à l'École du corps royal de l'artillerie de Besançon. Il y reste cinq années sans pour autant se couper de Paris, tant par ses contacts épistolaires que par ses liens institutionnels[5].

Bien qu'il poursuive le parcours classique d'un mathématicien de l'époque, il commence à affirmer la voie qui lui sera propre. Il projette de faire une synthèse encyclopédique des méthodes et des résultats du calcul infinitésimal et commence à en réunir les matériaux. S'il est le seul à entreprendre une œuvre de ce genre, ce souci de revenir sur les fondements du calcul n'est pas isolé[6]. En 1792, Laplace lui écrit :

> « Je vois avec beaucoup de plaisir que vous travaillez à un grand ouvrage sur le calcul intégral [...]. Le rapprochement des méthodes que vous comptez faire sert à les éclairer mutuellement, et ce qu'elles ont de commun renferme le plus souvent leur vraie métaphysique ; voilà pourquoi cette métaphysique est presque toujours la dernière chose que l'on découvre. Le génie arrive comme par instinct aux résultats ; ce n'est qu'en réfléchissant sur la route que lui et d'autres ont suivie qu'il parvient à généraliser les méthodes et à en découvrir la métaphysique » [Lacroix 1797–1798, p. xxiv].

Ces thèmes seront chers à Lacroix et éclairent toute sa vision des fondements.

Lacroix au cœur du monde scientifique et enseignant

Si l'expérience éducative de Lacroix dans les écoles militaires ne semble guère l'avoir satisfait jusque-là, les possibilités ouvertes par la Révolution vont lui permettre de donner toute sa mesure. La tourmente révolutionnaire le touche moins que ses maîtres parisiens[7]. Elle lui donne

[5] Le 29 août 1789, il est nommé correspondant de Condorcet à l'Académie.

[6] [Lacroix 1797–1798] fait un bilan des différentes méthodes employées au XVIII^{e} siècle pour fonder le calcul. C'est aussi l'objet de [Carnot 1797].

[7] Sur ce sujet, voir [Dhombres, N. et J., 1989].

l'occasion de revenir à Paris et d'y occuper une place de premier plan dans le nouveau système éducatif et scientifique. En 1793, Laplace est en disgrâce et Lacroix lui succède comme examinateur des aspirants et élèves du corps de l'artillerie[8]. Ce retour coïncide avec la disparition de Condorcet. Toujours admirateur de ce dernier, Lacroix aide, à sa manière, à concrétiser ses projets d'Instruction publique. Protégé par Monge qui jouit d'un crédit politique important, il est en effet nommé, le 9 octobre 1794, chef de bureau de l'organisation des écoles rattaché au Comité d'instruction publique. Il y joue un rôle important dans l'établissement des écoles centrales. De 1794 à 1797, il fait partie du jury d'entrée à l'École polytechnique. Durant les premiers mois de 1795, il est, avec Hachette, assistant de Monge dans son enseignement de géométrie descriptive à l'École normale de l'an III.

Lacroix publie la même année son *Essai de géométrie sur les plans et les surfaces courbes*, avant la parution en librairie du cours de Monge[9]. Le 12 janvier 1796, il est nommé professeur de mathématiques à l'école centrale des Quatre-Nations. En 1797 et 1798 les deux premiers tomes de son grand *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral* sont édités[10]. Le 24 mai 1799, il devient membre de la section de géométrie de l'Institut en remplacement de Borda et, la même année, il succède à Lagrange comme instituteur d'analyse à l'École polytechnique. La liberté laissée aux professeurs dans les nouvelles écoles lui permet de développer sa vision de l'enseignement : son cours complet de mathématiques paraît entre 1799 et 1802. En 1805, les *Essais sur l'enseignement en général et sur celui des mathématiques en particulier* exposent ses conceptions éducatives et philosophiques. C'est la période la plus créatrice de Lacroix et aussi celle de sa consécration académique[11].

Cette production intense ne l'empêche pas de prendre part aux débats

[8] Laplace retrouve son poste en juillet 1795.

[9] L'influence de ce dernier y est manifeste, même si l'originalité pédagogique de Lacroix s'y révèle. Sur ce traité, voir B. Belhoste, annexe 18 de [Dhombres, dir., 1992].

[10] Le rapport de présentation de cet ouvrage à l'Académie, fait par Legendre et Laplace, est très élogieux. Voir les *Procès verbaux de l'Académie royale des sciences* 1795–1799, t. 1, Hendaye 1910, p. 154–157.

[11] Le 21 nivôse an VI, il accepte sa nomination de membre de l'Académie de l'Institut de Bologne ; le 5 juillet 1801, il devient membre de la Société d'émulation du canton de Vaud ; en 1806, il est correspondant de l'Académie Napoléon de Lucetta.

scientifiques et de participer activement aux travaux de l'Académie des sciences. Il apprécie en connaisseur le mémoire de Lazare Carnot sur le calcul infinitésimal dont il souhaite la publication [Lacroix 1797–1798, p. xxi–xxii][12]. Lorsque Carnot revient d'exil et retrouve sa place à l'Académie des sciences, Lacroix est l'un de ses familiers [Dhombres, J. et N., 1997, p. 509] et ils ont des occasions de travail commun. Tous deux seront par exemple les rapporteurs, le 12 janvier 1803, d'un mémoire proposant une nouvelle notation d'algèbre descriptive dont le but est d'éclairer les rôles interactifs de l'algèbre et de la géométrie. Il existe pourtant des divergences entre les deux hommes sur la question des quantités négatives. Le *Rapport à l'empereur sur les progrès des sciences, des lettres et des arts depuis 1789*, signé par Jean-Baptiste Delambre mais rédigé en grande partie par Lacroix, reconnaît les apports de la *Géométrie de position* [Carnot 1803] mais montre que sa vision des quantités négatives ne paraît pas très convaincante pour Lacroix et ses confrères de l'Institut [Delambre 1810, rééd. de 1989, p. 78–81]. Il connaît et intègre les développements scientifiques les plus récents, y compris étrangers. Par exemple, en 1804, dans la troisième édition des *Compléments d'algèbre* [Lacroix 1800b, 3e éd., p. 294–315], il n'hésite pas à citer et reprendre quelques éléments des *Disquisitiones arithmeticae* de Gauss, parus en 1801 et dont la traduction française sera faite en 1806 par A.C.M. Poullet-Delisle[13].

Mais il ne se contente pas de fréquenter les scientifiques. Il a côtoyé Garat, professeur d'analyse de l'entendement à l'École normale de l'an III et celui-ci fait partie, avec Laplace et Lagrange, du Jury d'Instruction publique qui le nomme à l'école centrale des Quatre-Nations. Il collabore à la *Décade philosophique*, porte-parole des idéologues fondé au printemps 1794. Sa conception du savoir ne peut être pleinement appréciée

[12] Les *Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal*, [Carnot 1797], paraissent en même temps que le premier tome du *Traité du calcul différentiel et du calcul infinitésimal.*

[13] En termes d'aujourd'hui, Gauss démontre que dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ les puissances de tout élément sont en nombre fini, que, si p est premier et a non nul, l'ordre du sous-groupe multiplicatif engendré par a divise $p-1$ et que $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est cyclique. Ce choix de présentation n'est pas gratuit car toutes ces démonstrations le conduisent à exposer la manière de ramener la recherche des racines n-ièmes de l'unité à la résolution d'une suite de polynômes de degré 2 si n est un nombre premier de Fermat : il décrit en détail le cas $n = 17$, ce qui prouve la construction à la règle et au compas de polygones réguliers de 17 côtés.

que si on la resitue à la fois dans la problématique scientifique et dans le débat autour des thèses de ce mouvement philosophique[14]. Dans le plan qu'il a proposé pour le cours de bibliographie des écoles centrales [Lacroix 1805, p. 165–180], il suit d'Alembert dans sa classification des facultés de l'entendement humain : mémoire, imagination et raison, mais y ajoute les développements des idéologues.

> « Lorsqu'on veut établir un enchaînement méthodique dans les diverses sciences qui résultent de l'emploi du jugement, il paraît convenable de les ranger selon l'ordre de leur génération successive. On place en première ligne l'idéologie, qui traite de la manière dont les sensations se transforment en idées ; comment, sur ces idées, nous nous formons des jugements ; et de là se déduisent naturellement les idées propres à diriger notre esprit dans la recherche de la vérité ; de là, par conséquent, la logique considérée sous le point de vue où l'a présenté Condillac » [*ibid.*, p. 170].

Les développements de l'école idéologique lui paraissent essentiels pour fonder les sciences[15]. Cette vision est, nous le verrons, très importante pour le choix et la présentation des principes mathématiques dans son œuvre.

Une influence décroissante

À la différence de nombre de ses collègues, Lacroix n'a pas cherché à acquérir un quelconque pouvoir politique. La constance de ses convictions républicaines l'éloigne de Laplace et des cercles du pouvoir impérial. La création des lycées marque l'échec de la conception éducative que Lacroix, parmi d'autres, avait portée à travers les écoles centrales. Certes le programme du 10 avril 1803 donne une place importante aux mathématiques, étudiées dans les manuels de Lacroix[16]. Mais le plan d'études du 19 septembre 1809 limite leur enseignement aux classes d'humanités et celui du 4 septembre 1821, sous la Restauration, le reporte

---

[14] Sur les idéologues, voir entre autres, [Gusdorff 1978].

[15] « La métaphysique des sciences, qui met pour ainsi dire à part ce qu'elles ont peut-être de plus essentiel, les diverses formes de l'art de penser, au lieu d'être la base de leur édifice doit en être le couronnement ; et [. . .] ce n'est que de nos jours que l'idéologie, réduite à l'analyse exacte des opérations de notre entendement, a fait des progrès si remarquables » [Lacroix 1805, p. 28]. Il renvoie ainsi aux travaux de toute l'école idéologique, dont ceux de Condillac et Destutt de Tracy.

[16] Le programme est rédigé, pour les mathématiques, par Laplace, Monge et Lacroix. L'*Arithmétique* de Lacroix est étudiée en sixième et cinquième, sa *Géométrie* en quatrième et troisième, son *Algèbre* en seconde, son *Application de l'algèbre à la géométrie* (sauf la trigonométrie sphérique) en première, son *Complément des éléments d'algèbre* et son *Traité élémentaire du calcul différentiel et de calcul intégral* en mathématiques transcendantes (qui durent deux ans).

aux deux dernières années du cursus (philosophie). Le retour à la primauté des lettres, conséquence d'une volonté avant tout politique, est évident et l'aspect purement utilitariste de l'enseignement des sciences ne correspond pas à la visée éducative de Lacroix. Il constate avec regret, dès 1811, la désaffection envers les mathématiques à la Faculté des sciences de Paris[17].

Certes, Lacroix a toujours des postes prestigieux, tant universitaires qu'académiques. En 1805, il devient professeur de mathématiques transcendantes au lycée Bonaparte. À la création de l'Université en 1806, il est nommé à la chaire de calcul différentiel et intégral de la Faculté des sciences de Paris dont il est aussi le doyen. Il quitte son enseignement à l'École polytechnique en 1808 pour en devenir examinateur permanent en juillet 1809. En 1815, il est nommé au Collège de France où il restera jusqu'à sa mort[18]. Mais ses activités mathématiques cessent presque totalement vers 1816, date de son dernier grand traité sur les probabilités [Lacroix 1816][19]. La Restauration, pour des motifs politiques, le raye des cadres de l'École polytechnique en 1816. Il renonce à son poste de doyen en 1821 puis, quelques années plus tard, à son enseignement du calcul. Il quitte le Lycée en 1825. Il n'écrira plus après 1817 de rapports pour l'Académie des sciences, dont il reste cependant un membre éminent. Il s'éteint le 24 mai 1843.

II. LE CONTEXTE INTELLECTUEL DE L'ŒUVRE DE LACROIX

1. Les moyens d'une synthèse du savoir : restructuration et sélection

Lacroix poursuit un objectif clairement défini : donner aux élèves la possibilité d'appréhender par eux-mêmes, à l'issue de leurs études, les développements les plus récents des sciences[20]. Mais il juge que l'extension

---

[17] Réponse de Lacroix à l'enquête ministérielle sur l'état de l'Université du 10 décembre 1811, dossier Lacroix de l'Institut, ms.

[18] Il y sera cependant suppléé. Ses cours sont assurés par Benjamin Francœur en 1828.

[19] Après cette date, Lacroix publie encore un *Manuel d'arpentage*, [Lacroix 1826], et une *Introduction à la connaissance de la sphère*, [Lacroix 1828]. Il donne aussi plusieurs textes dans les *Annales de mathématiques* de Gergonne.

[20] « Il est incontestable aujourd'hui que la Mécanique analytique et la Mécanique céleste sont les véritables sources où l'on peut acquérir la connaissance complète et méthodique de toutes les propriétés de l'équilibre et des mouvements des corps soit solides, soit

considérable de ces dernières ne permet plus d'écrire des manuels accumulant les techniques particulières de chaque branche du savoir : ils seraient trop volumineux pour être utilisables, difficiles à comprendre et surtout à retenir. Donner une vision plus *analytique*, employer des méthodes générales et suivre un *ordre naturel* sont pour lui les seuls moyens de graver la métaphysique des sciences dans l'esprit des élèves, leur permettant ainsi de retrouver ou de découvrir les savoirs dont ils pourraient avoir besoin. Pour cela, il faut former un *tableau analytique des connaissances* éclairant l'évolution des différents domaines et leurs liaisons. Sa pratique lors de la présentation des nombres suit clairement cette conception et l'économie de moyens est remarquable. Les extensions successives du concept de nombres sont étroitement liées à la progression mathématique qui conduit de l'arithmétique à l'algèbre, puis à la géométrie, à l'application de l'algèbre à la géométrie et enfin au calcul. Il n'y a, à aucun moment, rupture de sens ou difficultés cachées mais cohérence et continuité des méthodes. Les traités de Lacroix sont les premiers à se fonder sur un concept unifié de nombre.

Nous sommes très loin de la polysémie que le terme quantité conserve tout au long du XVIII^e siècle siècle et durant une partie du XIX^e siècle[21]. Dans l'œuvre de Bézout, par exemple, la quantité est définie classiquement comme ce qui est susceptible d'augmentation et de diminution ; ce concept englobe aussi bien les entiers que les fractions, les grandeurs de la géométrie (de toutes dimensions) que les symboles de l'algèbre, les infiniment petits que les fonctions. L'écriture efface les difficultés, cache les glissements de sens et la diversité des méthodes et des concepts [Lamandé 1987 ; 1988 et à paraître]. Conséquence de cette vision, la théorie des proportions est encore considérablement développée dans les ouvrages des auteurs à succès de l'Ancien Régime, comme Camus, Bézout et Bossut. « La théorie des proportions est une des principales bases des mathématiques » disait l'abbé Marie [1770], le premier maître de Lacroix.

fluides, objets qui forment la principale application de l'analyse transcendante ; il faut donc que désormais les éléments soient composés de manière à conduire à ces ouvrages » [Lacroix 1805, p. 205–206]. C'était aussi l'objectif de Laplace et Lagrange à l'École normale de l'an III. Voir [Dhombres, dir., 1992, Introduction aux leçons de Laplace].

[21] Bien sûr, on y retrouve encore le mot quantité chez Lacroix, mais comme synonyme de nombre.

La situation évolue après les cours de Laplace et Lagrange à l'École normale de l'an III (voir [Dhombres, dir.,1992] et [Lamandé 1993]).

Il faut aussi parler du choix des théories enseignées car ce sont elles qui conditionnent la présentation des fondements. Lacroix les trouve chez les grands mathématiciens de son époque. La géométrie descriptive et l'application de l'algèbre à la géométrie s'inspirent des travaux de Monge. Il en tire une vision nouvelle des principes, beaucoup plus analytique que géométrique.

> « Cette application [du calcul différentiel aux courbes et aux surfaces courbes], au lieu d'être isolée, comme elle l'a presque toujours été jusqu'à présent, fait partie d'une théorie complète des courbes et des surfaces courbes [...]. En écartant avec soin toutes les constructions géométriques j'ai voulu faire sentir au lecteur qu'il existait une manière d'envisager la géométrie, qu'on pourrait appeler géométrie analytique, et qui consisterait à déduire les propriétés de l'étendue du plus petit nombre possible de principes, par des méthodes purement analytiques, comme Lagrange l'a fait dans sa mécanique à l'égard des propriétés de l'équilibre et du mouvement » [Lacroix 1797–1798, p. xxv–xxvi].

Il rappelle les traces de cette méthode dans les notes de la *Géométrie* de Legendre et le mémoire de Lagrange [1773] sur les pyramides : « Mais Monge est, je crois, le premier qui ait pensé à présenter sous cette forme l'application de l'algèbre à la géométrie » [Lacroix 1777–1798, p. xxvi]. L'algèbre est structurée à partir des travaux de Lagrange et Laplace, nous y reviendrons[22]. L'influence de Condorcet et de Laplace est manifeste dans le *Traité élémentaire du calcul des probabilités*[23]. Le *Traité élémentaire de calcul différentiel et intégral* traite des fonctions d'une et de plusieurs

[22] « Tel était l'état des choses lorsque Lagrange et Laplace furent appelés à faire un cours d'analyse à l'École normale. Laplace [...] rappela l'attention des professeurs sur les richesses que présentaient les collections académiques. Les travaux que son collègue et lui firent à cette occasion augmentèrent encore cette masse de richesses et il ne fut plus permis de se livrer à l'ancienne routine » [Lacroix 1799b, 2e éd., p. viii–ix].

[23] Lacroix, à la suite de Condorcet, en étend le champ d'application. « Mais je rappellerai une application du calcul sur laquelle il faut insister : c'est le calcul des probabilités, ou l'analyse des hasards. Cette science, sur laquelle nous n'avons qu'un petit nombre d'ouvrages, a été principalement cultivée, depuis Pascal qui en posa les premiers fondements, par des géomètres français; elle s'applique aux questions commerciales, politiques et morales, aussi bien qu'aux jeux, parce qu'elle embrasse tous les faits dont la cause est inconnue, et du retour desquels on ne peut juger que d'après la succession des évènements passés ou le nombre des évènements possibles. C'est encore à la classe des sciences physiques et mathématiques que je rapporterai l'économie politique, considérée sous le point de vue de la culture, du perfectionnement et de l'encouragement des arts » [Lacroix 1805, p. 178–179]. Pour plus de détails, voir [Armatte 1991] et sa bibliographie.

variables, insère l'application du calcul aux courbes à double courbure et aux surfaces courbes, l'intégration des équations différentielles à deux variables, l'intégration des fonctions de plusieurs variables et la méthode des variations. À l'exception de cette dernière partie où le symbolisme leibnizien est repris, c'est à partir du concept numérique de limite, fondé sur la notion de nombre, qu'il construit cet ouvrage. Il donne ainsi toutes les bases nécessaires à l'étude de la physique mathématique[24].

Si Lacroix n'aborde pratiquement pas l'arithmétique théorique, qu'il s'agisse des résultats déjà présents dans les *Éléments* d'Euclide ou des avancées du XVIII[e] siècle, c'est qu'elle ne s'inscrit pas dans sa vision du développement des sciences. Il croit en effet que l'impulsion donnée par les mathématiques est reprise par d'autres domaines.

> « Tournons donc vers les sciences physiques, qui nous promettent des découvertes nombreuses et utiles, toute l'activité de notre esprit ; et que la théorie des probabilités, devenue familière à tous ceux qui cultivent les sciences morales et politiques, donne enfin des bases solides à celles de nos connaissances qui ne sont pas susceptibles d'être ramenées à un petit nombre de notions abstraites et d'idées complètes » [Lacroix 1805, p. 254].

Dans une lettre à F.J. Français, rédigée entre 1804 et 1810, il est encore plus clair : « J'examine donc toute découverte analytique relativement aux espérances qu'elle peut donner pour l'avancement des sciences physico-mathématiques »[25].

2) La question des fondements des mathématiques

Les grands savants français du XVIII[e] siècle n'ont guère développé de réflexions épistémologiques sur les fondements des mathématiques. Non que leur pratique n'ait apporté des visions nouvelles, mais celles-ci ne sont pas insérées dans une perspective philosophique globale. Deux raisons justifient cette attitude. La première est alors largement partagée par les scientifiques de tous pays : la fécondité des découvertes suffit à justifier la

---

[24] Parlant de son *Traité élémentaire de calcul différentiel et de calcul intégral*, il précise : « En cherchant à renfermer dans le moindre espace tout ce qu'il est indispensable de savoir du calcul différentiel et du calcul intégral pour étudier avec fruit la mécanique, j'ai tâché de présenter la métaphysique du calcul différentiel sans tomber dans les détails où l'on se jette, quand on veut prévenir trop tôt des difficultés qui se lèvent presque d'elles-mêmes lorsqu'on ne les rencontre que successivement, à leur place naturelle » [Lacroix 1805, p. 384–385].

[25] Bibliothèque de l'Institut, ms 2400, II. Pourtant Lacroix ne publiera pas la statique, la dynamique, l'astronomie et le mémoire sur les fortifications qu'il avait rédigés. Manuscrits de la Bibliothèque de l'Institut 2400, IV à VII.

solidité de leurs fondements. La seconde est plus particulière à la France : la méfiance envers l'*esprit de système* y est largement répandue. Deux personnages font cependant exception : d'Alembert et Condillac.

Les œuvres philosophiques de d'Alembert ([1751], [1759], [1767] et ses nombreux articles de l'*Encyclopédie*) ont profondément marqué la réflexion sur les outils et les méthodes des sciences dans la France de la seconde moitié du XVIII^e^ siècle. Il n'est guère de considérations sur les objets mathématiques qui ne fassent référence à ces écrits; c'est encore le cas de Carnot [1803, Dissertation préliminaire] dans sa *Géométrie de position*[26]. Leur impact à la fin du siècle est toujours important, d'autant que ses disciples, Lagrange, Laplace et Condorcet, occupent des places éminentes dans le monde académique. Lacroix est, lui aussi, profondément imprégné de la problématique développée par d'Alembert.

> « La manière dont l'algèbre est présentée dans les éléments de cette science que Clairaut publia dès 1748, les réflexions insérées par d'Alembert dans quelques articles de l'*Encyclopédie* et dans ses *Éléments de philosophie*, sur la marche et les principes fondamentaux des diverses parties des mathématiques [...] ne furent pas moins utiles à la science que les recherches transcendantes, dont les détails intéressent seulement les personnes qui veulent les appliquer ou les étendre. À mesure que l'analyse s'est développée par les travaux des successeurs de ces grands géomètres, l'ordre des éléments s'est amélioré, et la clarté qu'un enchaînement plus méthodique, une succession plus naturelle, répandent sur les propositions qu'ils renferment, a mis en état d'en compléter la métaphysique » [Lacroix 1805, p. 21–22].

Sans revenir en détail sur la philosophie de d'Alembert, il paraît nécessaire de rappeler quelques-uns de ses thèmes qui éclairent les choix de Lacroix[27]. Les principes de nos connaissances ne répondent pas à la connaissance intime et profonde du monde et d'Alembert refuse l'*esprit de système*. Son épistémologie est une interrogation sur le lien entre la nature de la connaissance et la connaissance de la nature plutôt qu'une construction philosophique achevée. Les mathématiques résultent de l'étude des propriétés des corps, mais l'algèbre, science des grandeurs et instrument de découvertes, y occupe une place particulière et première[28]. Sa certitude

---

[26] C'est encore à d'Alembert que renvoie le rapport de l'Académie en 1810 dans sa description du travail de Carnot.

[27] Pour plus de détails, voir, entre autres, [Cassirer 1932], le numéro spécial *Dix-huitième siècle* 16 (1984), [CIS 1989], [Paty 2003] et [Lamandé 2003b].

[28] C'est un thème déjà présent dans le groupe malebranchiste. Voir, par exemple, [Lamy 1680].

n'est pas entamée par l'impossibilité d'une connaissance parfaite des corps car ses principes « ne portent que sur des notions purement intellectuelles, sur des idées que nous nous formons à nous-mêmes par abstraction, en simplifiant et en généralisant des idées premières » [D'Alembert 1986, p. 106]. Elle est en effet issue de l'arithmétique dont elle synthétise les règles.

> « Elle (l'arithmétique) n'est autre chose que l'art de trouver d'une manière abrégée l'expression d'un rapport unique qui résulte de la comparaison de plusieurs autres. Les différentes manières de comparer ces rapports donnent les différentes règles de l'arithmétique. De plus il est bien difficile qu'en réfléchissant sur ces règles, nous n'apercevions certains principes ou propriétés générales des rapports, par le moyen desquels nous pouvons, en exprimant ces rapports de manière universelle, découvrir les différentes combinaisons qu'on peut en faire. Les résultats de ces combinaisons, réduits sous une forme générale, ne sont en effet que des calculs arithmétiques indiqués, et représentés par l'expression la plus simple et la plus courte que puisse souffrir leur état de généralité. La science ou l'art de désigner ainsi les rapports est ce qu'on nomme algèbre » [D'Alembert 1751, rééd. 1965, p. 31].

Cette phrase résume assez bien la manière dont d'Alembert pose la question des fondements. Toute science se forme par abstractions successives à partir de l'observation de la nature. En comparant des objets ou des groupes d'objets, on saisit des propriétés communes (par exemple avoir la même couleur ou, en arithmétique, la même quantité d'objets ou, en géométrie, la propriété commune des figures d'être des lignes droites) qui ne représentent que partiellement la famille étudiée (les objets peuvent être différents, l'idée de nombre est indépendante de la nature des objets dénombrés, celle de droite ne décrit pas la position dans l'espace). De là naissent les *idées simples* qui isolent dans un objet une propriété particulière. Elles se partagent en notions abstraites, comme celle d'étendue ou de durée, de sensation etc. et en idées primitives que nous acquérons par les sens (couleurs, froid, *etc.*) ; les *idées simples* peuvent elles aussi faire l'objet de généralisation. Si la science ne peut prétendre expliquer l'essence des choses, elle part de ces idées simples et doit reposer sur des principes. « Il est dans chaque science des principes, vrais ou supposés, qu'on saisit par une espèce d'instinct auquel on doit s'abandonner sans résistance » [D'Alembert 1986, p. 46]. En mathématiques, les principes sont les définitions qui servent de socle aux différents domaines. Elles expriment la nature de l'objet tel que nous le concevons, mais non tel qu'il est. Elles doivent fixer les idées en développant leur formation [*ibid.*, p. 208]. D'Alembert accepte sereinement leur caractère provisoire. Si elles sont au début de chaque chaîne du savoir, cela ne signifie pas pour autant qu'elles en sont définitivement les principes premiers. « Nous les appelons *principes* parce que c'est là que nos connaissances commencent. Mais, bien loin de mériter ce nom par eux-mêmes, ils ne sont peut-être que des conséquences fort éloignées d'autres principes plus généraux que leur sublimité dérobe à nos regards » [*ibid.*, p. 31].

D'Alembert sait bien les difficultés qui peuvent subsister : « Pour ne citer qu'un seul exemple, je ne connais aucun ouvrage où ce qui regarde la théorie des quantités négatives soit parfaitement éclairci » [*ibid.*, p. 106]. Il reconnaît que la métaphysique de l'algèbre n'est pas encore achevée, ce qui ne l'amène nullement à remettre en question la vérité de cette science. Pour la (re)trouver, il recommande de suivre les méthodes des inventeurs : « Cette métaphysique simple et lumineuse qui a guidé les inventeurs est donc la partie que le philosophe doit s'appliquer à développer dans les éléments d'algèbre ; les opérations de calcul les plus simples suffiront à la faire entendre » [*ibid.*, p. 107]. Il ne s'agit pas de spéculer sur la nature des objets, mais de montrer, comme l'ont fait les fondateurs de l'algèbre, la génération des règles et des êtres à partir de problèmes, et de dévoiler les abstractions successives.

Les fondements de la géométrie sont plus délicats à cerner. D'Alembert y justifie la numérisation du concept de grandeur par l'idée de mesure qui renferme l'idée de rapport implicitement exprimée ; la mesure elle-même repose sur le principe de superposition qui est mis à la base des principes démonstratifs de la géométrie [*ibid.*, p. 113]. L'existence des rapports incommensurables est assurée par leur approximation rationnelle et leur représentation géométrique. Mais la permanence des opérations algébriques sur ces nouveaux êtres est justifiée par la généralisation des idées.

> « Ainsi, quoiqu'il n'y ait à proprement parler de calcul possible que par les nombres [c'est-à-dire ici les entiers ou les fractions], ni de grandeur mesurable que l'étendue, [...] nous parvenons, en généralisant toujours nos idées, à cette partie principale des mathématiques, et de toutes les sciences naturelles, qu'on appelle science des grandeurs en général » [*ibid.*, p. 31].

Pour fonder le calcul infinitésimal, d'Alembert conserve cette économie de principes qui le caractérise [Casini 1989]. Il refuse les infiniment petits comme les débats sur l'infini potentiel et l'infini en acte et exhibe une notion d'infini purement mathématique et opératoire. Il pose comme principe du calcul l'idée de limite qui recouvre en fait deux concepts complémentaires, celui de limite géométrique dont l'existence est supposée *a priori* et justifiée par une intuition de l'espace, et celui de limite algébrique, issu de calculs numériques, très proche du sens qu'adoptera Cauchy [Lamandé 2003b].

Condillac occupe une situation différente, ayant principalement œuvré en philosophie. Mais certaines de ses conceptions sont reprises par nombre de mathématiciens comme Lagrange [Dahan-Dalmedico 1992, p. 171–201]. Le programme des leçons de mathématiques et la première leçon de Laplace à l'École normale de l'an III, par exemple, reprennent des thèmes condillaciens : les grandeurs de l'arithmétique comme abstraction de l'entendement, l'algèbre comme modèle des langues, l'importance des signes dans la formation des langues, la place centrale de l'analogie et de l'analyse. Il est connu que les sensations sont, pour Condillac, à l'origine des fonctions d'entendement et de volonté et qu'il assigne au langage un rôle déterminant, sinon exclusif, dans la formation des idées. Pour lui, les signes des langues sont une création humaine, sans justification dans la nature de l'idée pensée ou de l'objet désigné, mais leurs règles de fonctionnement sont indépendantes des individus[29]. Méthode analytique et langue sont une seule et même chose, mais une langue bien faite doit partir de la nature et être construite avec soin en procédant par analogie. L'algèbre est pour lui le modèle de cette méthode applicable à toutes les sciences dont il expose sa vision dans la *Langue des calculs* [Condillac 1798].

Pour lui, la numération a commencé par le calcul digital. Puis il montre comment les mots des langues usuelles ont servi à fixer, non sans ambiguïtés, les idées vagues que représentent les collections symbolisées par les doigts. Le troisième stade est celui de l'apparition des symboles numériques et le dernier la naissance de l'algèbre. Il souligne à chaque fois les extensions de sens et le processus d'abstraction ainsi que la place de l'analogie dans la permanence des règles et des symboles. Sa justification des règles des signes est pourtant la reprise d'un argument ancien, logico-linguistique : « $-a$ est une quantité soustraite, une soustraction ;

[29] Nous nous limitons ici à quelques très brefs rappels indispensables pour situer la position de Condillac sur les nombres. Pour un aperçu plus complet, voir, entre autres, [Malherbe 1982], [Dhombres 1982], [Trotignon 2000], [Lamandé 2003a] et [Auroux et Chouillet 1981].

et soustraire une soustraction c'est ajouter, comme nier une négation c'est affirmer » [Condillac 1798, rééd. 1822, p. 212-213].

Que représentent les nouveaux symboles qui apparaissent dans les deux derniers dialectes ? Pour Condillac, une fraction numérique est un objet à construire, une division à faire ; -2 représente une différence qui ne peut être *prononcée*, c'est-à-dire prendre sens, que si elle est effectuée sur un entier plus grand. « À proprement parler, il n'y a point de quantités en moins dans les langues vulgaires, ni même en arithmétique » [Condillac 1798, rééd. 1822, p. 225]. Dans une autre langue cependant, le symbole $-a$ peut prendre sens pour lui-même :

> « Mais, en algèbre, où les signes sont indéterminés [c'est-à-dire représentent toutes les valeurs numériques possibles], on ne saurait prononcer la différence : on ne peut que l'indiquer, et $a - b$ ou $b - a$ est l'unique réponse à celui qui demande celle qui est entre a et b. Ce langage une fois adopté, on ajoute a à $-b$, ce qui donne $a - b$, et on soustrait $-b$ de a, ce qui donne $a + b$; et il n'y a de contradiction que dans les mots somme et reste qui ne sont pas de l'algèbre » [*ibid.*, p. 225].

Il importe ici de souligner, mathématiquement parlant, que l'algèbre condillacienne repose exclusivement sur l'arithmétique. Sa conception génétique des entiers, comme idées certes, mais extraites des sens, de la comparaison entre groupes d'objets bien concrets, conduit Condillac à vouloir donner sens aux extensions successives du mot nombres à partir d'opérations issues de l'arithmétique, toujours possibles au moins symboliquement. La division engendre les fractions, la soustraction donne les quantités en moins, l'élévation à une puissance justifie l'extraction de racines. Il voit les différentes règles comme un calcul formel, *mécanique*, justifié sur les premières acceptions du mot nombre et étendu par analogie.

Il ne conçoit pas que les problèmes, ici le théorème fondamental de l'algèbre, puissent créer de nouveaux objets, qui ne trouvent sens qu'en renvoyant à la théorie qui les a fait naître. Ainsi Condillac est obligé d'admettre que l'algèbre, cette langue si bien faite, conduit à des expressions contradictoires dans sa philosophie : « Toute puissance paire étant en plus, une quantité en moins ne saurait être un carré » [*ibid.*, p. 308]. Il en conclut à l'absurdité des quantités imaginaires.

> « Par conséquent [...] $\sqrt{-a^2}$, $\sqrt{-4}$ [...] ne sont pas des racines carrées ; cependant on croit voir dans ces expressions des quantités qu'on nomme imaginaires ; et on croit avoir une idée de ces prétendues quantités, parce qu'un signe paraît supposer une idée. Qu'est-ce donc qu'une chose qui implique contradiction ? Si elle n'est rien, l'unique idée qu'on puisse en avoir, c'est qu'elle n'est rien ; la dénomination de quantités imaginaires a été mal choisie ; il fallait dire expressions imaginaires ;

expressions parce qu'elles ressemblent aux expressions qui signifient quelque chose ; et imaginaires parce que, dans le vrai, elles ne signifient rien. Ce ne sont donc des expressions qu'improprement et par extension. Il y a donc, jusque dans l'algèbre, des expressions qui ne signifient rien ; elles s'y trouvent nécessairement, et par conséquent, il ne faut pas s'étonner si, dans toutes les langues, il y a un grand nombre d'expressions imaginaires, qu'on prend pour autant de quantités » [*ibid.*, p. 308].

On est loin de l'attitude des mathématiciens qui y voient certes des symboles non expliqués, mais les utilisent avec d'autant plus de confiance qu'ils s'insèrent notamment dans une théorie des équations qui dépasse le cadre condillacien. Pour Condillac, ils ne sont rien et impliquent contradiction. Sa problématique ne va pas au-delà des réflexions déjà faites au XVI^e siècle : l'utilisation des imaginaires dans le cas irréductible des équations du troisième degré et l'explicitation des règles qui les régissent.

3. La philosophie sensualiste modérée de Lacroix.

Nous avons vu à quel point l'œuvre de Lacroix s'appuie sur les avancées mathématiques de ses maîtres. Mais la présentation qu'il en a donnée est aussi tributaire des débats épistémologiques que nous venons de retracer. Les *Essais* [Lacroix 1805] sont la source majeure qui permet d'aborder sa philosophie. D'Alembert et Condillac sont parmi les auteurs les plus cités de ce texte[30]. Les pages consacrées à d'Alembert montrent une communauté de vues et de sentiments, une admiration sans restriction pour l'homme, tant comme scientifique que comme membre éminent de la République des lettres. « Conservant dans ses écrits la modération qu'il montra constamment dans sa conduite, (il) devint l'un des plus ardents propagateurs de la nouvelle, de la vraie philosophie » [*ibid.*, p. 16]. On a vu l'importance accordée par Lacroix à ses réflexions philosophiques ; on retrouvera leur impact dans ses traités.

Les apports de la philosophie condillacienne sur l'origine des connaissances marquent également la réflexion de Lacroix :

« La métaphysique rendue par Locke accessible aux esprits justes, qui ne goûtent que les connaissances solides appuyées sur des faits certains et traités par une déduction rigoureuse, fut cultivée dans ce sens par Condillac. Il s'occupa beaucoup aussi de

[30] En faisant un index de cet ouvrage, on trouve, dans l'ordre décroissant, les auteurs suivants : Newton (18 fois), Descartes (15 fois), Condillac et d'Alembert (11 fois, respectivement p. 20, 25, 170, 171, 235, 239, 244, 245, 247, 249, 342 et 11, 15, 16, 18, 22, 23, 29, 199, 251, 309, 316), Euclide, Laplace et Euler (10 fois), Pascal (9 fois), Clairaut et Lagrange (8 fois), *etc.*, sans compter les allusions.

celle des mathématiques, et dut peut-être à ses méditations sur ce sujet la lucidité de ses principes sur l'origine de nos connaissances, sur la méthode propre à faire des découvertes et à les exposer » [*ibid.*, p. 20–21].

Lacroix renvoie à son sensualisme génétique, sa vision du caractère essentiel de la langue et des signes ainsi qu'à sa primauté de l'analyse comme méthode de découverte et d'exposition.

« Quoiqu'il soit incontestable, ainsi que l'a observé Condillac, que l'évidence résulte de la liaison des idées, et qu'il suffise par conséquent d'observer exactement cette liaison pour convaincre de la vérité ceux à qui on la communique, comme pour la découvrir quand on la cherche, il ne faut pas négliger pour cela la discussion des formes logiques, qui, lorsqu'on n'en abuse pas, peuvent exercer très utilement l'esprit. La communication de nos pensées ne pouvant s'effectuer que par le secours des signes, la formation de ces signes, qui, pour être bien faits, doivent rendre seulement la liaison des idées, est une suite immédiate de la logique; mais malheureusement l'esprit philosophique n'ayant pas toujours présidé à la construction des langues, celles dont on fait usage sont bien imparfaites, et semblent plutôt appartenir au domaine de la mémoire qu'à celui du jugement » [*ibid.*, p. 171–172].

Pourtant Lacroix prend quelque distance avec Condillac. Après avoir exposé sa vision de l'analyse et de la synthèse en mathématiques, qui diffère de celle des philosophes, il conclut :

« Ce n'est donc pas parce qu'ils se sont servis de la méthode analytique, que la métaphysique a fait tant de progrès entre les mains de Locke et Condillac; mais plutôt parce qu'ils ont puisé leurs premières notions dans la nature, et non pas dans leur imagination; c'est parce qu'ils sont remontés à la véritable origine des connaissances plutôt que d'en créer une à leur façon » [*ibid.*, p. 247–248].

Revenant aux sciences, il ajoute : « C'est donc moins dans la méthode que dans la simplicité des idées premières et dans leur évidence que consiste la certitude du raisonnement » [*ibid.*, p. 248–249]. Il est ici plutôt héritier de d'Alembert. Les idées premières sont au centre de sa présentation des nombres, mais toujours reliées à une problématique scientifique.

Il y a en effet chez Lacroix un véritable scepticisme sur la capacité de la métaphysique isolée des sciences à éclaircir les fondements des mathématiques, doute qui n'est pas sans rappeler celui de d'Alembert.

« Il est probable qu'on a commencé par voir dans nos sensations l'origine de nos idées; mais à force de classer, de diviser, de distinguer, d'abstraire les différentes circonstances que présentaient les idées acquises, on s'égara dans les catégories et dans toutes les abstractions qu'elles amenèrent à leur suite. La renaissance de la physique, en donnant au raisonnement un sujet réel, ouvrit les yeux sur l'abus qu'on en avait fait. La marche tracée par Newton dans le troisième livre de ses *Principes* ne pouvait demeurer restreinte aux seuls objets auxquels il l'avait appliquée. L'éclat des découvertes qu'il fit en la suivant excita, dans ceux qui cultivaient les sciences, une émulation qui produisit bientôt le renouvellement de la métaphysique. Il faut convenir qu'elle a beaucoup gagné dans cette révolution ; mais peut-être est-il temps qu'on s'arrête, et, qu'en comparant ce qu'elle a perdu d'un côté et ce qu'elle a acquis de l'autre, on reconnaisse que, seule entre toutes les sciences, elle n'est susceptible que d'un progrès limité, et qu'il existe dans la théorie des opérations de l'entendement un point que nous ne pourrons jamais dépasser » [*ibid.*, p. 253–254].

Les limites des théories de la connaissance s'étendent aussi aux sciences et Lacroix expose ce *scepticisme gradué* dans le *Traité élémentaire du calcul des probabilités* [Lacroix 1816, 2e éd., p. 178]. Sur la question tant agitée par les philosophes de la liaison des effets aux causes, il rappelle les positions en présence. La première, soutenue par Hume, nie que l'on puisse supposer une dépendance entre deux effets qui se suivent et s'accompagnent constamment. La deuxième position pense que les lois de la pensée exigent de rapporter chaque effet à une cause. La dernière enfin estime que la considération des divers degrés de probabilité permet de donner la mesure de la confiance que nous pouvons attacher à nos connaissances. Lacroix se rallie à cette doctrine moyenne, développée par Helvétius [1758] dans le premier chapitre du premier discours de son ouvrage *De l'esprit.* Il est cependant notable que ce scepticisme gradué ne se rapporte qu'aux sciences qui ne sont pas (encore ?) susceptibles d'être rapportés à des concepts clairs et non contestables, qu'il s'agisse des sciences morales et politiques ou de certains domaines de la physique.

4. La présentation didactique des fondements chez Lacroix

On a vu que Lacroix pense que la métaphysique des sciences ne peut apparaître qu'à la fin de leurs développements, qu'elle provient du dévoilement de leurs liaisons, bref à l'issu d'un processus qu'il sait inachevé. Comment, dans ces conditions donner des définitions, des idées *premières et complètes* qui doivent, dans un traité, précéder les raisonnements ? Faut-il, pour les nombres par exemple, en donner une explication génétique ? Faut-il, comme dans bien des traités antérieurs, rédiger de longues considérations de nature philosophique ? Il ne reprend aucune de ces options qui seraient contraire à sa vision du savoir et explique ce refus :

« On a tâché dans ce traité de réunir la clarté à la brièveté, et surtout d'éviter cette forme dogmatique qui fait presque toujours tomber comme des nues, des idées nouvelles que les commençants ne parviennent cependant à comprendre que lorsqu'ils les ont rapprochés de celles qu'ils ont déjà acquises dans le commerce ordinaire de la vie. L'enchaînement le plus méthodique me paraît être celui dans lequel les idées naissent successivement les unes des autres, ou sont amenées par le besoin et la force des choses : on s'est bien gardé de commencer par une définition de l'arithmétique, également inutile à celui qui connaît cette science et à celui qui veut l'apprendre » [Lacroix 1797, Introduction].

En géométrie, il reprend la position médiane de d'Alembert qui « semble résulter de l'observation d'un petit nombre de règles posées par Pascal » [Lacroix 1805, p. 309–310] (voir [Lamandé 1993 et 2003b]). Les motivations de ce choix sont également pédagogiques car les succès des élèves « dépendent en grande partie de la manière dont on leur présente les premières notions » [Lacroix 1805, p. 282].

Tout d'abord Lacroix s'adresse à des jeunes ayant reçu une première instruction et acquis les premières idées des sciences. On a vu que pour lui les concepts de grandeur et d'étendue s'acquièrent très tôt et reposent sur les sensations. Il ne cherche pas à analyser ce processus d'apprentissage :

« Je confesse mon ignorance sur la manière dont les idées de *nombre* et de *grandeur* s'acquièrent ; et je me borne à examiner ici comment, avec les matériaux déjà élaborés par une première instruction, empirique si l'on veut, on peut faire entrer dans des têtes de quinze à seize ans, la théorie élémentaire des sciences mathématiques et les formes des méthodes qui leur sont propres » [*ibid.*, p. 196].

Pour cela, il pense que le « maître doit chercher à ramener son élève en lui-même, dès qu'il a acquis un assez grand nombre de notions extérieures à comparer entre elles » [*ibid.*]. Ce retour de l'élève sur lui-même est une autre justification de la brièveté de sa présentation des entiers : il ne s'agit au fond que de donner un langage à une expérience quotidienne. Mais cette introspection est aussi une exigence fondamentale pour les autres définitions. Les notions nouvelles que l'élève reçoit deviendront d'autant plus claires qu'elles proviendront d'une réflexion personnelle sur la pratique scientifique elle-même, ses objets certes mais aussi ses méthodes et sa problématique.

Lacroix refuse donc de s'étendre outre mesure sur les notions premières. S'il n'est pas question pour lui de rejeter les réflexions philosophiques, il ne veut pas leur accorder une trop grande place : « S'appesantir sans mesure sur des détails purement métaphysiques [...] c'est alambiquer les notions les plus claires et obscurcir par des preuves superflues ce qui est évident par soi-même » [*ibid.*, p. 198]. De plus, ces preuves ne sont souvent que des cercles vicieux :

« Il est un moyen sûr de distinguer les propositions qui ont besoin d'être prouvées de celles qui, tenant immédiatement aux sensations les plus répétées et n'étant, à proprement parler, que des données d'expérience, n'ont besoin que d'être rappelées à l'esprit du lecteur. Si la proposition dont on veut faire voir la vérité est évidente par elle-même, on la retrouvera au moins implicitement dans le raisonnement qu'on emploie pour la démontrer ; et l'analyse exacte de ce raisonnement fera toujours connaître un cercle vicieux » [*ibid.*, p. 310–311].

À ce doute s'ajoute la conviction que *les jeunes gens épuisent leurs forces dans de vaines subtilités* et s'écartent ainsi des vérités scientifiques profondes. Sur quoi s'appuyer pour s'assurer de la certitude des sciences ? Lacroix retrouve un thème présent chez d'Alembert :

« C'est donc moins dans la méthode [analytique ou synthétique] que dans la simplicité des idées premières et dans leur évidence que consiste la certitude du raisonnement » [*ibid.*, p. 249]. Il pense aussi que la science se justifie par son propre développement, par la succession et la cohérence des découvertes en confrontation avec la nature (le réel) ainsi que par leur ordonnance méthodique en un corps de doctrine épuré. Cette exposition raisonnée ne peut être une accumulation de méthodes antérieures, même si l'histoire est souvent évoquée, mais doit suivre une logique éclairée par les résultats les plus récents :

« Les digressions sont d'ailleurs bien moins propres à faire sentir la nature des vérités, que la succession méthodique de ces vérités. Les conséquents, lorsqu'ils sont bien déduits et bien ordonnés, réfléchissent sur les antécédents une lumière beaucoup plus vive que celle que les antécédents pourraient acquérir par eux-mêmes » [*ibid.*, p. 199].

La rigueur se traduit donc avant tout par la clarté des principes, l'analyse des diverses formes de raisonnements, l'ordre des propositions et leur enchaînement. Les méthodes générales sont préférées pour de multiples raisons. Elles sont les plus simples, d'autant plus nécessaires que « les progrès récents des sciences physiques et mathématiques ont prodigieusement augmenté la masse des objets d'instruction », et surtout « elles sont aussi les plus propres à faire connaître la véritable métaphysique de la science » [*ibid.*, p. 202–203].

5. *L'évolution de l'* **Algèbre** *de Lacroix : visées scientifiques et épistémologiques, contraintes éditoriales et didactiques*

Il reste un dernier point à examiner avant d'aborder l'œuvre de Lacroix. Nous avons choisi de nous appuyer en algèbre sur le texte définitif que donne la troisième édition[31]. Il nous faut cependant retracer l'évolution qui a conduit à cette présentation. Deux premiers constats s'imposent lorsqu'on se penche sur les traités de Lacroix : le rythme étonnamment rapide de leur publication et leur succès immédiat qui a imposé de multiples éditions (voir la bibliographie). Cette réalité explique, au moins en partie, les variations des premières versions de l'*Algèbre*.

Le premier ouvrage didactique sur lequel Lacroix s'est appuyé est la réédition de l'*Algèbre* de Clairaut, augmentée d'une *Arithmétique* due à Jean-Baptiste Biot et de notes considérables provenant pour l'essentiel des cours de Lagrange et Laplace à l'École normale de l'an III et d'articles de Lagrange [Lacroix 1797]. Sans revenir en détail sur ce texte que nous avons analysé ailleurs [Lamandé à paraître], il convient de remarquer qu'il ne représente que partiellement la pensée de Lacroix. Manifestement réalisé dans l'urgence, collage d'écrits d'origines variées, il répond avant tout à la nécessité de disposer d'un support imprimé pour son enseignement à l'école centrale des Quatre-Nations, comme Lacroix l'explique dans la préface de la seconde édition des *Éléments d'algèbre* en 1800 [1799b, 2e éd., p. ix]. Pourtant cet écrit révèle déjà les principales préoccupations que nous avons soulignées : exposer les résultats les plus récents de la science et suivre la *méthode des inventeurs*. On y retrouve la théorie générale des équations polynomiales qui venait de recevoir une forme nouvelle avec la démonstration laplacienne du théorème fondamental de l'algèbre dans les cours de l'École normale de l'an III, faisant reposer la théorie des équations sur celle des fonctions symétriques qui en est « le fondement le plus solide ». Et Lacroix a expliqué ce premier choix :

> « Clairaut, se frayant une route philosophique, répandit sur les principes de l'Algèbre une lumière nouvelle. Les lecteurs, dans son ouvrage, prennent part en quelque sorte à l'invention de la science ; ils en suivent le but dès les premiers pas qu'ils y font, et ne se demandent plus ce que signifient ces symboles mystérieux qui semblent ne conduire que par une sorte de magie à des résultats souvent inintelligibles » [*ibid.*, p. vii].

Mais il passe assez vite à la rédaction de son propre traité. Tout d'abord parce qu'il juge que l'ouvrage de Clairaut, excellent pour ceux qui commencent l'étude de l'algèbre, devient trop minutieux et surchargé de

[31] Les éditions postérieures ne présentent que des variations stylistiques ou des changements de valeurs dans les problèmes, sans importance sur le plan épistémologique et scientifique. L'introduction et la préface, devenues inutiles, disparaissent à partir de la sixième édition.

détails lorsqu'on le poursuit au-delà des premières notions. « On crut même s'apercevoir que les règles fondamentales de l'algèbre ne s'y faisaient pas assez remarquer » [*ibid.*, p. viii]. De plus, il ne répond pas à sa conception de l'enseignement des sciences dans les écoles centrales, où il s'agit plus d'exercer le jugement que la mémoire. Abandonnant les détails dépourvus de liaison, leur préférant les *méthodes générales qui tiennent de plus près à la métaphysique de la science*, Lacroix entreprend de restructurer l'algèbre. « L'enchaînement des parties de cet ouvrage est le résultat du plan général que je me suis fait de l'analyse algébrique. Cette analyse offre deux branches bien distinctes, la théorie des équations et celle des suites, étudiée avec le calcul différentiel. J'ai conçu que ces éléments devraient conduire les lecteurs jusqu'à la résolution d'une équation quelconque » [*ibid.*, p. xii–xiii]. L'algèbre elle-même est partagée en deux traités. Les *Éléments d'algèbre* qui se limitent aux résultats les plus usuels et les *Compléments des éléments d'algèbre* qui donnent les parties les plus difficiles de cette science.

Outre ces raisons épistémologiques et scientifiques, les diverses éditions des *Éléments d'algèbre* ont d'autres motivations. Les contraintes éditoriales d'abord. La réédition du Clairaut étant épuisée, Lacroix décide de rédiger son propre texte en 1799. Pressé par le temps et voulant remplir les lacunes de sa réédition du Clairaut, il emprunte « quelques articles de la troisième partie du cours de Bézout qui n'avaient pour objet que des détails d'opérations communs à tous les livres et toutes les méthodes ». En 1800, dans la seconde édition, il substitue « une rédaction nouvelle à la plupart de ces passages » [*ibid.*, p. xv]. C'est en effet à partir de celle-ci que le plan voulu par Lacroix est pleinement atteint. Les visées scientifiques et épistémologiques ne sont pas remises en question, mais exposées dans une rédaction plus cohérente.

La troisième édition offre quelques changements, pour la plupart mineurs. Le plus important concerne l'introduction des quantités négatives. La seconde édition présente très tôt, juste après la résolution des équations du premier degré à une inconnue, une *Réflexion sur les quantités positives et les quantités négatives* [*ibid.*, p. 31 et suiv.]. À partir de la troisième édition, la question des quantités négatives isolées est reportée après les opérations sur les quantités algébriques et la résolution des équations du premier degré à plusieurs inconnues [Lacroix 1799b, 3e éd., p. 83 et suiv.].

Il importe pour notre propos de reproduire le commentaire qu'en donne Lacroix dans l'avertissement de la troisième édition :

> « L'ayant méditée depuis longtemps, je n'ai dû lui faire que peu de modifications ; mais beaucoup de détails ont été refaits avec le plus grand soin [...] Je me suis rapproché davantage de la marche d'invention, la seule par laquelle on puisse faire étudier avec quelque intérêt les commencements de l'algèbre et en donner une idée raisonnable ; mais j'ai en même temps l'attention de multiplier les énoncés et les résumés dans la forme dogmatique, nécessaire pour rendre aisée la pratique des règles. Ce travail m'a convaincu que la considération des quantités négatives isolées était en général placée trop près du commencement dans la plupart des livres élémentaires ; et cela est d'ailleurs confirmé par l'histoire de la science, où l'on voit que l'explication des solutions négatives des problèmes est un des derniers progrès de l'analyse, dû à Descartes. Aussi la plupart des auteurs ne se sont adressés sur ce sujet qu'à la mémoire ; et ceux qui, ne voulant pas en faire un objet d'autorité, ont cherché à expliquer la nature de ces quantités, ont eu recours à des comparaisons forcées, comme celle des *biens* et des *dettes*, qui ne conviennent qu'à un cas particulier de cette théorie. Ce n'est d'ailleurs que dans l'application de l'algèbre à la géométrie qu'on peut concevoir dans toute son étendue la théorie des quantités négatives, puisque les principales circonstances de cette théorie sont des faits algébriques qu'il faut se contenter de bien constater et de classer ensuite dans l'ordre qui les fait le mieux ressortir. C'est aussi ce que j'ai tâché de faire, craignant, d'après une observation répétée, l'obscurité que des détails métaphysiques trop étendus et trop multipliés jettent dans l'esprit des commençants. J'ai donc différé de parler des quantités négatives jusqu'à ce qu'elles fussent amenées par la résolution des questions » [*ibid.*, Avertissement, p. v–vi].

On retrouve ici l'influence des conceptions éducatives de Lacroix. Il pense qu'un manuel doit évoluer en fonction de l'auditoire :

> « Rappelé aux fonctions du professorat que je n'avais exercé jusque-là que dans des écoles où la forme et la matière de l'instruction étaient rigoureusement déterminées, et celle des écoles centrales étant laissée entièrement à la disposition du maître, je fus engagé par cette liberté à réfléchir sur les moyens de perfectionner le cours qui m'était confié. J'éprouvais sur un auditoire nombreux les principes et les méthodes que j'avais conçus ; leur application servait à les confirmer ou les modifiait quelquefois heureusement » [Lacroix 1805, p. 192][32].

La liberté du programme lui permet de rendre compte des derniers progrès de la science, mais elle s'éprouve sur des élèves qui l'obligent à préciser, à mettre en valeur de manière différente et plus appuyée, ce qu'il juge essentiel.

[32] Il reconnaît à la page 116 que ses ouvrages « ont considérablement gagné par leurs observations, presque toujours justes et souvent très fines ».

III. LA PRATIQUE DIDACTIQUE DES NOMBRES : L'EXTENSION SUCCESSIVE DES DOMAINES

1. Des entiers aux fractions : l'arithmétique

Lacroix n'aborde en arithmétique que les nombres positifs, entiers, fractionnaires et décimaux. Son exposition de l'idée de nombre entier est très brève et repose avant tout sur une abstraction à partir des observations sensorielles quotidiennes :

> « L'idée de *nombre* se présente à l'esprit dès que l'on remarque la coexistence de plusieurs individus d'une même espèce. Lorsqu'on voit un homme ou plusieurs hommes, une étoile ou plusieurs étoiles, on conçoit l'idée de l'unité et de la pluralité. Lorsqu'on compare ensuite la pluralité à l'unité, on a l'idée du nombre qui se compose de la réunion de plusieurs individus ou unités ; ainsi l'unité ajoutée à elle-même forme le nombre deux » [Lacroix 1797, 1^er^ §].

Cette présentation qui peut sembler aujourd'hui banale diffère cependant des approches antérieures des traités. Ce n'est pas la définition euclidienne, tant reprise jusqu'au XVII^e^ siècle. Ce n'est pas non plus la définition classique du XVIII^e^ siècle, implicitement reliée à la notion de rapport, telle que nous pouvons la trouver chez Bézout. Après avoir défini la quantité comme ce qui est susceptible d'augmentation ou de diminution, celui-ci conçoit l'unité comme la quantité que l'on prend pour servir de terme de comparaison aux quantités de même espèce et le nombre comme exprimant de combien d'unités ou de parties d'unité une quantité est composée. Elle se rapproche plutôt de la description condillacienne de collections de doigts, qui sert à générer la notion de nombre, mais Lacroix commence à un niveau conceptuel supérieur. Il reprend brièvement une partie de la progression de la *Langue des calculs* car le premier pas qu'il propose est de faire sentir le passage de la nomenclature vulgaire des nombres à l'écriture en chiffres. Puis il parle du premier apprentissage *presque toujours expérimental* des quatre opérations sur les entiers.

La présentation des fractions suit naturellement la division ; elles ne sont pas exposées de manière dogmatique, mais comme la conséquence naturelle de cette opération. Reprenant les exemples de division sur les entiers, il constate qu'elles ne sont pas toujours exactes et qu'il faut concevoir le reste divisé en parties égales puis généralise cette remarque.

> « On voit par là que toutes les fois que le dividende ne contiendra pas exactement le diviseur, l'opération conduira à un reste qui sera l'excès du dividende sur le produit du diviseur par les unités du quotient ; il faudra donc alors, pour compléter

le quotient, concevoir l'unité du dividende partagée en autant de parties égales qu'il y a d'unités dans le diviseur, et prendre autant de ces parties qu'il y a d'unités dans le reste, pour les joindre à la portion du quotient que l'on a déjà trouvée. Il n'est pas difficile de voir que chacune de ces subdivisions de l'unité sera nécessairement plus petite que l'unité elle-même ; c'est pour cela qu'on les a comprises sous la dénomination générique de *fractions*, quel que soit d'ailleurs le nombre de parties dans lesquelles on a subdivisé l'unité » [Lacroix 1797a, 3^{e} éd., n^{o} 50, p. 44–45].

Il revient dans ses *Essais* sur l'origine et l'écriture des fractions :

« Mais la décomposition d'un nombre en parties égales ne pouvant s'opérer qu'en décomposant aussi l'unité qu'on a choisie comme terme de comparaison, on rencontre bientôt une espèce de nombres, dont l'expression renferme deux idées puisqu'il s'agit d'une certaine quantité d'unités et du nombre de parties dans lesquelles chacune doit être divisée. Le signe propre à rendre ces idées doit être composé de deux éléments, et présente par conséquent deux sortes de modifications, qui résultent des opérations qu'on peut effectuer, soit séparément, soit conjointement, sur les deux parties. Voilà où conduit, ce me semble, le développement de la définition des fractions, lorsqu'on les déduit des divisions imparfaites, leur origine naturelle » [Lacroix 1805, p. 259–260].

Commentant les opérations sur les fractions, il utilise des termes très proches de ceux de Condillac : « Il y a ici un passage très remarquable d'une acception donnée aux mots multiplier et diviser, d'après le cas le plus simple de l'idée qu'ils expriment, à une acception générale, dans laquelle on enveloppe des cas nouveaux qui ne se lient aux premiers que par de simples analogies » [*ibid.*, p. 260].

Si l'analogie condillacienne reste présente ainsi que l'importance des signes, la différence avec *La langue des calculs* apparaît, car la division de l'unité est effective et non plus symbole opératoire. De plus, il ne reprend pas la justification des règles régissant les fractions par la permanence de leur langue. La règle de simplification des fractions n'est pas déduite par analogie, mais démontrée par une suite de raisonnements. Il fait voir, comme conséquence de l'addition des entiers, l'addition de fractions de même dénominateur et en déduit que la multiplication d'une fraction par un entier (addition itérée) s'obtient en multipliant le numérateur par cet entier. Puis il explique que la division d'une fraction par un entier s'obtient en multipliant le dénominateur par cet entier. D'où l'on conclut que la fraction est inchangée si l'on multiplie numérateur et dénominateur par le même entier. L'addition de deux fractions est aisément déduite de ce résultat. La généralisation de l'idée de multiplication est plus délicate. Il propose la définition suivante « multiplier un nombre par un autre, c'est composer avec le premier un nombre de la même manière que le second est avec l'unité » [Lacroix 1797a, 3e éd., n° 66, p. 57]. Il faut donc multiplier par le numérateur et diviser par le dénominateur.

Lacroix comme Condillac ne conçoivent pas les entiers dans une perspective euclidienne, mais comme abstraction à partir de l'observation de diverses multiplicités. Il n'y a pas une, mais des unités particulières que la nature nous propose ou que nous définissons. Mais là où Condillac représentait une fraction comme une opération à faire, une division en puissance, Lacroix considère cette division comme faite, l'unité effectivement divisée en parties égales; prendre une fraction revient à changer d'unité. Il s'appuie sur la division euclidienne des entiers $a = bq + r$ où $0 \leq r < b$, pour écrire toute fraction a/b comme somme de la partie entière q et de r fois la fraction $1/q$ qui est un nombre et non une opération. Cette distinction est importante car l'extension de sens donnée au mot nombre ne change pas la nature de l'objet comme dans *La langue des calculs*. L'analogie devient ainsi plus profonde; non seulement il n'y a plus qu'un niveau de langage, mais encore unification des objets.

2. Nombres négatifs, complexes et théorie des équations

Le second élargissement du domaine des nombres concerne les nombres négatifs qui ne sont introduits qu'en algèbre. Lacroix, comme tous les géomètres de son époque, considère cette science comme une extension de l'arithmétique où des nombres inconnus sont représentés par des lettres et suivent les règles usuelles de cette dernière. Selon la prescription de d'Alembert, il entreprend de l'exposer par la méthode des inventeurs, c'est-à-dire par des problèmes : il fait toujours nombre d'exercices avant d'en dégager les règles générales qui sont ensuite abordées pour elles-mêmes. Ce point est essentiel car, si les premiers problèmes ne peuvent avoir sens et solutions que dans le cadre arithmétique où ils sont posés, ils fondent une nouvelle science qui a ses propres objets et méthodes[33]. Pour les justifier, Lacroix cite Saurin, défendant le calcul infinitésimal : « Nos calculs n'ont pas tant de besoin qu'on pense d'être éclairés; ils portent avec eux une lumière propre; et c'est d'ordinaire de leur sein même que sort toute celle qu'on peut répandre sur eux, et que peut recevoir le sujet

[33] Parlant de la recherche du plus grand commun diviseur de quantités algébriques, il souligne la différence avec l'arithmétique : « Cette opération n'a pas tout à fait en algèbre le même but qu'en arithmétique », et décrit sa méthode [Lacroix 1805, p. 288–289].

qu'on traite ». Puis il ajoute : « L'auteur aurait dû, ce me semble, ajouter à ces remarques incontestables, qu'il faut savoir bien lire dans le calcul, pour en interpréter avec sûreté les résultats » [Lacroix 1805, p. 285–286].

Après avoir introduit les symboles de l'algèbre, Lacroix les utilise pour résoudre des problèmes tout en montrant, comme Condillac, qu'il remplace le langage ordinaire par une écriture symbolique[34]. Il aborde ensuite les équations polynomiales dans l'ordre de degré croissant. Les méthodes de résolution des équations du premier degré sont exposées d'une manière générale et l'on ne trouve pas, dans ce premier temps, de quantités négatives isolées. Puis il développe les opérations sur les expressions algébriques, donnant alors une justification classique des règles de signes.

« Si la quantité à soustraire a des termes affectés du signe $-$, il faut leur donner le signe $+$. En effet, si de la quantité a, on voulait ôter la quantité $b - c$, et qu'on écrivit d'abord $a - b$, on aurait diminué ainsi a de la quantité b toute entière ; mais la soustraction ne devait s'effectuer qu'après avoir diminué préalablement b de la quantité c. On a donc ôté de trop cette dernière quantité qu'il faut par conséquent restituer avec le signe $+$, ce qui donnera le vrai résultat $a - b + c$ » [Lacroix 1799b, 7^e^ éd., p. 36]. La justification de $(a - b)c = ac - bc$ est de la même veine, faisant appel aux idées de soustraction et de multiplication développées en arithmétique [*ibid.*].

Les premières quantités négatives isolées apparaissent à l'issue de problèmes concrets du premier degré[35]. Dans un premier temps, l'énoncé des questions impose de trouver des solutions positives et Lacroix rectifie l'énoncé : les gains deviennent des dettes. Si ce type de réflexions est bien ancien, il ajoute presque immédiatement : « Mais l'algèbre dispense de toute recherche à cet égard lorsque l'on sait opérer convenablement sur les expressions affectées du signe $-$; car ces expressions étant déduites des équations du problème doivent satisfaire à ces équations » [*ibid.*, p. 87–88]. Il n'en est plus de même lorsque le problème posé devient *abstrait*. En effet, lorsqu'il expose la solution générale des systèmes linéaires de deux, trois ou quatre équations à autant d'inconnues, il finit, après plusieurs

[34] Dans [Lacroix 1799b, 7e éd., p. 13], on trouve un tableau de correspondance entre les écritures littérales et algébriques.

[35] À l'issue de la résolution d'un problème du premier degré de deux équations à deux inconnues [Lacroix 1799b, 7e éd., p. 85].

exemples, par donner des formules tout à fait générales [*ibid.*, n° 84, p. 124–125 et n° 86–88, p. 127-132], et la dernière illustration proposée aboutit à deux solutions positives et une négative qui sont toutes également acceptées [*ibid.*, p. 133–134]. Dans ce cas, il ne s'agit plus de la résolution algébrique d'un problème concret. Il est vrai que cet exemple suit une longue réflexion, non sur la nature de ces quantités, mais sur leurs règles opératoires, à l'issue de laquelle elles sont pleinement acceptées.

En effet, après ces exemples où il a *redressé* l'énoncé, il revient sur les quantités négatives :

> « Il est à propos d'examiner de plus près l'usage de ces quantités, et d'abord de s'assurer de la manière dont il convient d'effectuer les opérations indiquées à leur égard. On a ci-dessus fait usage des règles des signes [. . .] mais ces règles n'ont point été démontrées pour des quantités isolées » [*ibid.*,n° 62, p. 91].

Cette remarque est le signe d'un déplacement du débat. Les quantités négatives sont des objets de l'algèbre dont il faut d'abord déterminer les lois opératoires généralisant celles de l'arithmétique, puis interpréter le sens. Il n'emploie pas de terme à connotations métaphysiques et, nous allons le voir, choisit un vocabulaire nouveau. La règle des signes est démontrée de manière entièrement nouvelle par rapport à sa preuve sur des quantités non isolées : elle est inspirée de celle de Laplace dans ses cours à l'École normale de l'an III[36] :

« En multipliant a par $b - b$, on aura encore $ab - ab$[37], parce que le multiplicateur étant égal à zéro, le produit sera aussi égal à zéro ; et il faudra par conséquent que le second terme soit $-ab$ pour détruire le premier terme $+ab$. Donc $+a$ multiplié par $-b$ doit donner $-ab$ » [Lacroix 1797, p. 50]. Les autres règles sont prouvées de manière identique.

Il est évident ici que nous avons quitté les démonstrations de type

---

[36] Cette preuve se trouve dans toutes les éditions de l'*Algèbre*. Celle de Laplace est un peu différente : « Nous observerons que le produit de $-a$ par b est $-ab$, puisque ce produit n'est que $-a$ répété autant de fois qu'il y a d'unités dans b. Nous observerons ensuite que le produit de $-a$ par $+b - b$ est nul, puisque le multiplicateur est nul ; ainsi le produit de $-a$ par $+b$ étant $-ab$, le produit de $-a$ par $-b$ doit être d'un signe contraire, ou égal à $+ab$, pour le détruire ». [Dhombres, dir., 1992, p. 62]. On remarquera que Lacroix utilise la distributivité (le mot n'est évidemment pas employé) dès la première règle des signes, ce qui n'est pas le cas de Laplace.

[37] Lacroix a soigneusement prouvé la distributivité dans le cas des nombres entiers et l'admet de manière implicite pour les nombres fractionnaires et algébriques.

ancien qui ouvrent l'*Algèbre*, où les idées sensibles d'addition, de soustraction et de multiplication arithmétiques sont sous-jacentes, pour un nouveau type de preuves ne faisant intervenir que les propriétés des opérations sur les symboles, en l'occurrence la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition[38]. Affecter du signe − une *quantité monôme* ne pose pas problème, car c'est *de fait* un nouvel être mathématique sur lequel on décrit les opérations de l'algèbre. Lacroix adopte alors un vocabulaire neutre sur le plan philosophique, mais très significatif de sa génération des objets : il parle de *solutions algébriques* des équations ou de *quantité algébrique*. Quant au sens, il développe longuement un dernier exemple concret[39] où il peut faire bouger les données de façon à montrer comment évoluent les solutions et expliciter ainsi ce qu'il entend par « lire dans le calcul, pour en interpréter avec sûreté les résultats » suivant la formule déjà vue des *Essais*. À cette occasion, il souligne que « le changement de signe des inconnues x et y, répond à un changement dans la direction des chemins que ces inconnues représentent » [Lacroix 1799b, 7e éd., p. 105].

Cette attitude montre bien la manière dont Lacroix construit ses objets en algèbre. Ils ne sont pas des symboles d'opérations, comme dans *La langue des calculs*, mais des signes qui n'ont besoin que d'être munis de lois pour prendre place en mathématiques. Ils ne sont pas générés uniquement par l'arithmétique comme chez Condillac, mais par les nécessités de la résolution des équations polynomiales, théorie qui est, pour Lacroix comme pour les mathématiciens de cette période, au cœur de l'algèbre. La question de leur interprétation n'est pas abandonnée pour autant ; on verra que dans son *Traité élémentaire de trigonométrie rectiligne et sphérique et de l'application de l'algèbre à la géométrie* [Lacroix 1798a], les nombres négatifs seront interprétés géométriquement. Mais l'algèbre a sa logique propre, même si les résultats des calculs sont à analyser différemment dans un problème arithmétique, algébrique ou géométrique.

C'est de la même manière qu'il va introduire ce qu'on appelle aujourd'hui les nombres algébriques, réels ou complexes. Les premières équations du second degré étudiées sont sans terme du premier degré et il aborde la

[38] Bien sûr, la distributivité est aujourd'hui une des lois de la théorie des anneaux, alors qu'elle n'est ici qu'un résultat induit en algèbre à partir des propriétés arithmétiques.

[39] Il s'agit de problèmes de courriers qui partent d'endroits différents et peuvent aller dans le même sens ou en sens contraire [Lacroix 1799b, 7e éd., no 67–75, p. 94–111].

racine quarrée des nombres entiers. Après avoir démontré, suivant en cela la preuve donnée par Legendre [1798], que « tous les nombres entiers, qui ne sont point des quarrés parfaits, n'ont point de racines, non seulement en nombres entiers, mais encore en nombres fractionnaires », il ajoute : « Cependant on sent qu'il doit exister une quantité qui, multipliée par elle-même, produise un nombre quelconque » [Lacroix 1799b, 7e éd., p. 145], puis donne l'idée d'encadrement de cette quantité par des rationnels de plus en plus approchants. Ceci lui suffit pour affirmer :

> « L'extraction de la racine quarrée, appliquée aux nombres qui ne sont pas des quarrés parfaits, donne donc naissance à une nouvelle espèce de nombres, de même que la division engendre les fractions ; mais il y a cette différence entre les fractions et les racines des nombres qui ne sont pas des quarrés parfaits, que les premières, qui se composent toujours d'un nombre exact de parties de l'unité, ont avec cette unité une *commune mesure*, ou un rapport exprimé par des nombres entiers, et que les secondes n'en ont point » [*ibid.*].

L'expression *donne naissance à une nouvelle espèce de nombres* montre bien la logique profonde de Lacroix. Les êtres apparaissent à la suite de problèmes algébriques et il ne cherche pas à les justifier alors que, dans ce cas précis, la géométrie en donnerait facilement une illustration. Cette primauté de l'algèbre par rapport aux autres champs des mathématiques est poussée à son terme : à partir des fractions, ce ne sont plus les opérations arithmétiques qui engendrent les nouveaux objets, mais la théorie des polynômes. Il montre ensuite comment calculer, avec la précision demandée, une approximation décimale de la racine. Il remarque enfin que ces équations ont deux solutions :

« Dans l'équation générale $x^2 = 25$, la valeur de x étant la quantité qui, élevée au carré, produit 25, elle pourra, si on considère les quantités algébriques, être affectée indifféremment du signe $+$ ou du signe $-$; car, soit qu'on la désigne par $+5$ ou par -5, on aura également pour son carré 25. On peut donc prendre $x = +5$ et $x = -5$ » [*ibid.*, n° 106, p. 154–155]. Le mot important est évidemment *quantité algébrique* et l'on voit bien que les nombres négatifs sont traités en algèbre de manière identique aux nombres positifs.

C'est au numéro suivant que sont introduits les imaginaires :

> « Il suit de la considération des signes, que si le second membre de l'équation générale $x^2 = c$ était un nombre négatif, l'équation serait absurde, puisque le quarré d'une quantité affectée, soit du signe $+$, soit du signe $-$, étant toujours affecté du signe $+$, on ne peut trouver, ni dans l'ordre des quantités positives, ni dans celui des quantités négatives, aucune quantité dont le quarré soit négatif [...] C'est cette

circonstance qu'on exprime lorsqu'on dit que *la racine d'une quantité négative est imaginaire* » [*ibid.*, p. 156].

Cette remarque n'est que provisoire, mais le lecteur attentif aura déjà remarqué que le mot *absurde* est immédiatement suivi d'un commentaire qui en atténue la portée puisqu'il précise le domaine de l'absurdité : *ni dans l'ordre des quantités positives, ni dans celui des quantités négatives.* Il passe ensuite à la résolution de l'équation générale du second degré, où les coefficients sont aussi bien positifs que négatifs, et établit la formule générale. Divers exemples permettent de l'illustrer et l'on retrouve le cas des racines imaginaires. Le commentaire qu'il en fait annonce déjà leur utilité.

« Les expressions $\sqrt{-b}$, $a + \sqrt{-b}$ et en général celles qui comprennent la racine quarrée d'une quantité négative, se nomment *quantités imaginaires*[40]. Ce ne sont que des symboles d'absurdité qui tiennent la place de la valeur qu'on aurait obtenue, si la question proposée eût été possible. On ne les néglige point dans le calcul, parce qu'il arrive quelquefois qu'en les combinant d'après certaines lois, l'absurdité se détruit, et le résultat devient réel. On trouvera des exemples dans le *Complément* » [*ibid.*, n° 115, p. 167].

Pour le moment, l'important est de faire remarquer un *fait d'analyse*, « la nécessité d'admettre deux solutions dans les équations du second degré [...]. Je reviendrai, poursuit Lacroix, sur ces remarques qui contiennent en germe la théorie générale des équations d'un degré quelconque » [*ibid.*, n° 116, p. 168–169]. Il expose alors la formation des puissances entières de quantités algébriques monômes, les règles qui les régissent puis l'extraction de racines. Pour ces dernières, il se limite à une écriture : « Pour revenir de la puissance à la quantité qui l'a formée, il n'y a qu'à renverser les règles ci-dessus, c'est-à-dire diviser l'exposant de chaque lettre par celui qui marque le degré de la racine qu'on veut extraire » [*ibid.*, n° 129, p. 189]. La formule du binôme de Newton pour les exposants entiers est soigneusement montrée [*ibid.*, n° 106, p. 196–209][41]. Lacroix

[40] Il met en note : « Il serait plus exact de dire expressions ou symboles imaginaires, puisque ce ne sont pas des quantités ». On voit que l'on quitte le domaine des quantités fondées sur une intuition géométrique.

[41] Lacroix effectue le produit $(x + a)(x + b)(x + c) \cdots$ et trouve les coefficients des puissances décroissantes de x : 1, la somme des lettres $a + b + c + \cdot$, la somme des produits de ces lettres prises deux à deux, trois à trois, *etc.* Il engage ensuite une étude des arrangements et combinaisons pour trouver le nombre de termes de chacun de ces coefficients. Il conclut en prenant $a = b = c = \cdots$. Dans [Lacroix 1799b, 2e éd., p. vii], il revendique l'originalité de cette démonstration : « On trouve dans ce livre plusieurs

se refuse ici à une induction trop rapide, comme il l'explique dans ses *Essais* [Lacroix 1805, p. 292–293], renvoyant la question au *Complément.* Les polynômes étant ainsi introduits, il veut en chercher les racines et commence, comme pour le second degré, par l'équation la plus simple, $x^n = a$, qu'il réduit à la recherche des racines n-ièmes de l'unité. Le calcul est mené soigneusement dans les cas $n = 3$ ou 4. Les racines imaginaires sont presque justifiées, car il souligne qu'en suivant les règles qui les régissent, y compris l'élévation à une puissance, elles annulent le polynôme. Il ajoute : « Ces racines, qui sont imaginaires, sont malgré cela d'un usage fréquent dans l'analyse » [Lacroix 1799b, 7e éd., no 158, p. 226], puis annonce le théorème fondamental de l'algèbre.

> « Cette multiplicité des racines de l'unité tient à une loi générale des équations, d'après laquelle une inconnue admet autant de valeurs qu'il y a d'unités dans l'exposant du degré de l'équation qui la détermine ; et quand la question ne comporte pas ce nombre de solutions réelles, il est complété par des symboles purement algébriques, qui, se trouvant soumis aux opérations indiquées dans l'équation, la vérifient. Il suit de là que les racines des nombres ont deux espèces d'expressions ou de valeurs ; la première que j'appellerai *détermination arithmétique* [c'est-à-dire réelle positive] [...] ; la seconde comprend les valeurs négatives et les expressions imaginaires, que je désignerai sous le nom de *déterminations algébriques*, parce qu'elles ne doivent leur existence qu'à la combinaison des signes de l'algèbre » [*ibid.*, no 106, p. 228].

Les règles sur ces déterminations algébriques sont assez simples. L'écriture de l'addition et de la soustraction reste inchangée. La multiplication est plus difficile à justifier. Si on veut élever au carré $\sqrt{-a}$ où a est positif, il faut penser que ce symbole est racine de l'équation $x^2 = -a$ et son carré est donc $-a$; Lacroix souligne que la règle obtenue sur les quantités positives $(\sqrt{a})(\sqrt{b}) = \sqrt{ab}$ n'est plus valable pour les *déterminations algébriques* et il explique ce fait par l'*indétermination des radicaux* si l'on introduit les racines algébriques [*ibid.*, p. 239]. Pour trouver le produit $(\sqrt{-a})(\sqrt{-b})$ où a et b sont positifs, il décompose $\sqrt{-a}$ en $(\sqrt{a})(\sqrt{-1})$ et conclut que ce produit vaut $-\sqrt{ab}$ [*ibid.*, p. 243]. Nous sommes loin ici des ambiguïtés de nombre d'auteurs antérieurs. La théorie générale des équations se limite dans l'*Algèbre* à la démonstration que, si a est racine de l'équation $P(x) = 0$, alors $P(x)$ est divisible par $x - a$ d'où il peut déduire : « Une équation d'un degré quelconque ne peut admettre plus de

choses entièrement neuves, telles qu'une démonstration de la formule du binôme, fondée sur la théorie des combinaisons, et qui est encore, pour le cas où l'exposant est entier et positif, la plus directe qu'on ait pu découvrir jusqu'à ce jour ».

diviseurs binômes du premier degré qu'il n'y a d'unités dans l'exposant de son degré, et qu'elle ne peut avoir par conséquent un plus grand nombre de racines » [*ibid.*, n° 182, p. 253]. Il faut noter que, si les coefficients du polynôme sont positifs ou négatifs, il n'en est plus de même pour les racines. « Toute quantité ou toute expression, soit réelle, soit imaginaire, qui, mise à la place de l'inconnue x dans une équation préparée comme ci-dessus[42], la rend égale à zéro, et par conséquent satisfait à la question, se nomme la *racine* de l'équation » [*ibid.*, n° 178, p. 248]. La démonstration du théorème fondamental de l'algèbre est renvoyée au *Complément des éléments d'algèbre*, mais il est énoncé et bien préparé. Les déterminations algébriques restent encore de purs symboles, mais elles sont déjà munies des lois d'addition, soustraction et multiplication. La division n'est pas expliquée, bien qu'elle eût pu facilement être faite. Les nombres imaginaires sont donc, dans l'optique de Lacroix, des êtres algébriques créés par la théorie des équations et ont, de ce point de vue, un statut analogue aux nombres négatifs.

C'est dans le *Complément* que la division des imaginaires est définie explicitement et Lacroix y ajoute l'opération d'extraction de racines entières quelconques de quantités imaginaires, ce qui finit de leur donner un statut algébrique. Lacroix y étudie d'abord les fonctions symétriques des racines des équations, puis reprend pour l'étude du troisième et quatrième degrés la méthode exposée par Laplace dans les *Leçons de l'École normale de l'an III.* La résolution des équations du troisième degré lui permet de lier quantités réelles et imaginaires, comme il l'avait annoncé dans son *Algèbre*[43]. On sait que dans le cas irréductible, celui où la formule de Cardan fait intervenir des nombres imaginaires, l'équation a trois racines réelles. Lacroix s'appuie sur les exposés de Lagrange et Laplace dans les *Leçons de l'École normale de l'an III* pour expliquer ce phénomène, mais il ajoute à ceux-ci une démonstration personnelle

[42] Sous la forme $P(x) = 0$ où $P(x)$ est un polynôme unitaire (dont le coefficient de la plus grande puissance est 1). Lacroix a expliqué que toute équation polynomiale pouvait s'écrire ainsi.

[43] Lacroix cite aussi « Lagrange qui a présenté le premier la théorie de la résolution générale des équations, sous le point de vue d'après lequel je viens de l'exposer (*Mémoires de l'Académie des sciences de Berlin*, années 1770 et 1771) » [Lacroix 1800b, 3e éd., p. 41].

très élégante de la réalité des trois racines dans le cas irréductible[44]. Il reprend la preuve donnée par Laplace dans ses *Leçons* qu'une équation de degré pair est toujours décomposable en facteurs réels du premier ou du second degré et donc qu'une équation de degré quelconque ne peut avoir que des racines réelles ou imaginaires. Puis il prouve, ce que ne faisait pas Laplace, que toutes les opérations algébriques sur les imaginaires, addition, soustraction, multiplication, division et élévation à une puissance fractionnaire, donnent des résultats encore imaginaires. Son insistance sur les lois algébriques qui les régissent montre qu'elles sont pour lui la principale justification de leur statut d'objets mathématiques.

Il est vrai que Lacroix n'a pas donné d'explications sur la nature des êtres qu'il dévoile peu à peu. Il est aussi exact que les objets de l'arithmétique et ceux de l'algèbre n'ont pas chez lui le même statut ontologique et qu'il n'a apparemment pas reconnu l'apport qu'a constitué la représentation géométrique des imaginaires dont il est le contemporain. Mais peu l'ont fait à son époque et surtout cette conception est étrangère à l'engendrement algébrique des nombres qu'il développe. En réalité, Lacroix ne cherche pas à développer une philosophie des fondements des mathématiques, mais insiste sur la cohérence logique de l'ensemble, les lois opératoires et la problématique propre au domaine abordé. Sa reconnaissance *effective* du rôle premier des lois algébriques et de la théorie des équations dans la construction des nombres lui permet de contourner l'impasse de *La langue des calculs* sur les imaginaires que nous avons soulignée et en fait un précurseur du XIXe siècle. Enfin, il n'a laissé place à aucune ambiguïté. Augmentant progressivement le champ d'étude et les êtres mathématiques, il prend toujours grand soin de préciser le domaine d'application des résultats. À aucun moment, il n'agit subrepticement pour introduire de nouveaux concepts. Il permet ainsi de poser les bonnes questions.

3. Nombres et géométrie

Sa *Géométrie* débute par un *Supplément au Traité élémentaire d'arith-*

[44] S'appuyant sur l'évidence qu'une équation polynomiale à coefficients réels de degré impair a toujours au moins une racine réelle a, Lacroix fait une mise en facteur par $x-a$; il peut ainsi exprimer les deux autres racines en fonction des coefficients du polynôme et de la racine a en résolvant une équation du second degré. Un calcul simple lui permet de voir que ces deux dernières racines sont réelles dans le cas irréductible et imaginaires autrement [Lacroix 1800b, 3e éd., no 21 et 22, p. 48 et suiv.].

métique. En effet, la géométrie et l'arithmétique avaient longtemps été les premiers objets des études mathématiques. Malgré la tendance à considérer l'algèbre comme première, exprimée par exemple dès la fin du XVII^{e} siècle dans le *Traité de la grandeur en général* de Lamy [1680] et soutenue par d'Alembert [1986, p. 105], cette tradition pèse et l'algèbre ne s'est introduite que peu à peu dans les traités au cours du XVIII^{e} siècle. Lacroix le sait et reconnaît qu'en conséquence, la géométrie pouvait être abordée avant l'algèbre dans la pratique scolaire. Comme l'ordre logique de ses traités se trouve ainsi bouleversé, Lacroix y expose l'écriture algébrique et reprend en quelques pages les résultats sur les proportions. Si leur écriture traditionnelle est encore présente, il est clair que l'ancienne théorie eudoxienne est ici, comme chez pratiquement tous les auteurs du XVIII^{e} siècle, complètement transformée. « Le *rapport* des longueurs est le nombre, soit entier, soit fractionnaire, qui exprime combien l'une des longueurs contient l'autre [...]. En général, le *rapport* ou la *raison* de deux nombres est le quotient de l'une par l'autre » [Lacroix 1797a, 3^{e} éd., n^{o} 111, p. 92]. Une proportion $a : b :: c : d$ n'est plus que l'égalité des rapports a/b et c/d. L'addition et la soustraction de grandeurs sont représentées comme chez Euclide. Le produit est interprété géométriquement par la notion d'aire, de volume, mais il est traité algébriquement. Les premières propositions du Livre II des *Éléments* y sont entièrement décrites et démontrées par l'algèbre.

La géométrie à proprement parler débute par trois paragraphes de généralités sur l'étendue, les lignes droites et circulaires. À la suite de d'Alembert, elle est conçue comme l'étude des formes des corps. Ceux-ci ont nécessairement trois dimensions et « un corps ne peut être privé de l'une de ses dimensions sans cesser d'exister » [Lacroix 1797a, 3^{e} éd., p. 1]. Pour autant, ils ont des limites « qui tombent sous nos sens et n'ont point d'épaisseur » [*ibid.*] : ce sont les surfaces. Lorsqu'un corps présente plusieurs faces, chacune a des limites qui n'ont ni épaisseur ni largeur et que l'on nomme lignes. Enfin ces dernières ont des limites sans épaisseur, ni largeur, ni longueur, qu'on nomme points. La réflexion qui suit cette exposition souligne la filiation par rapport à d'Alembert et Condillac. « L'existence de ces diverses espèces de limites ne peut être révoquée en doute, puisque ce n'est que par leur moyen que nous jugeons de la figure des corps. Nous les considérons par la pensée, chacune en particulier, en faisant abstraction d'une ou de deux des dimensions du corps, qui ne sauraient d'ailleurs être anéanties » [Lacroix 1799a, 9e éd., p. 1–2]. Il conclut : « Par le raisonnement, nous atteignons cette limite ; par le calcul, nous pouvons nous en approcher indéfiniment ; tandis que l'exactitude des opérations mécaniques trouve ses bornes dans l'imperfection inévitable des instruments » [*ibid.*, p. 2] Dans cette simple phrase, se trouvent résumés les présupposés philosophico-mathématiques de Lacroix. Les sensations conduisent, à l'issue d'un processus d'abstraction, aux notions de volumes, surfaces, lignes et points[45]. Le calcul permet d'approcher les concepts que seule la raison saisit pleinement. Enfin le primat théorique des instruments, règle et compas, est rejeté comme étant beaucoup moins apte que le calcul à rendre compte du réel, ce qui ne signifie pas qu'ils ne seront pas utilisés.

Immédiatement après ces considérations, Lacroix entreprend de numériser les grandeurs géométriques et aborde le problème de la mesure comme d'Alembert.

> « Mesurer la distance de deux points ou la longueur d'une droite, c'est chercher combien de fois cette droite en contient une autre, prise pour unité, ce qui se fait en portant la seconde sur la première, autant qu'il est possible ; et si l'on trouve un reste, il faut tâcher d'évaluer ce reste en fraction de la seconde ou de l'unité. En général, mesurer une ligne par une autre, c'est chercher le rapport de ces deux lignes, ou chercher s'il n'y a pas une ligne plus petite qui soit contenue un nombre exact de fois dans l'une et dans l'autre, et qui par conséquent soit la commune mesure de toutes deux. Cette recherche est donc, par rapport aux lignes, ce qu'est celle du commun diviseur à l'égard des nombres » [Lacroix 1797a, 3e éd., p. 4–5].

La similitude de la comparaison de deux grandeurs et de deux entiers est bien soulignée. Le problème qui suit, intitulé « Deux droites étant données, trouver leur commune mesure, ou tout au moins le rapport approché de l'une à l'autre », décrit la procédure qui n'est autre que l'antyphérèse, où l'algorithme de recherche du plus grand commun diviseur de deux entiers est transposé aux grandeurs. Elle est expliquée en détail sur un exemple où les deux lignes sont commensurables, puis on trouve la conclusion suivante :

> « Rien ne doit être plus facile maintenant que d'appliquer ce procédé à tout autre

[45] L'idée de limite renvoie ici à un acte de pensée que l'on pourrait qualifier de physico-géométrique et il faut le distinguer du concept de limite arithmético-algébrique que l'on verra placé au cœur du traité d'analyse. Les significations du mot limite, très utilisé en cette fin de siècle, dépendent beaucoup non seulement des auteurs, mais aussi du domaine traité. Ce pourrait être l'objet d'une étude comparative très intéressante.

exemple. La comparaison des restes successifs doit être poussée jusqu'à ce qu'on en trouve un qui soit contenu un nombre exact de fois dans celui qui précède, ou qui soit tel que le reste qu'il pourrait laisser dans cette opération, échappe aux sens par la petitesse. C'est ainsi qu'on parviendra toujours à un résultat, au moins approché » [*ibid.*, p. 5].

Cette présentation d'un processus, éventuellement infini, de calcul de rapports lui permet d'identifier nombres et grandeurs. Il n'est pas indifférent que Lacroix ait exposé dans ses *Compléments d'algèbre* la théorie des fractions continues, car elle est la correspondance algébrique de l'antyphérèse.

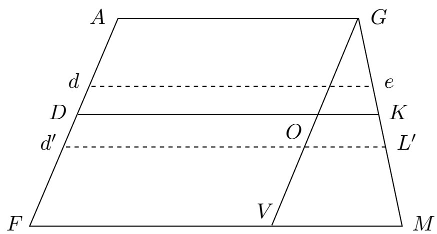
Lors de la première utilisation de la notion de rapport, dans la démonstration du théorème de Thalès, il met une note qui renvoie à cette première approche, mais précise un peu plus la notion d'approximation.

« On éprouvera sans doute quelque difficulté à transporter aux parties de l'étendue la notion de rapport, telle qu'on la conçoit à l'égard des nombres, surtout lorsqu'il s'agira de lignes incommensurables entre elles ; mais l'obscurité disparaîtra, si l'on fait attention qu'on ne peut comparer deux lignes qu'en les supposant rapportées à une commune mesure, et qu'alors leur rapport est vraiment un nombre, ou une fraction dont les termes sont exprimés par des nombres de mesures communes comprises dans chaque droite. Quoi que cette fraction cesse d'être rigoureusement assignable dans le cas où le rapport est incommensurable, elle n'en existe pas moins, puisqu'on peut en approcher d'aussi près qu'on voudra ; et deux rapports incommensurables devront être regardés comme égaux, dès qu'on prouvera que, quelque loin que soit poussée l'approximation pour l'un et pour l'autre, leur différence demeurera toujours nulle » [*ibid.*, p. 35].

C'est donc sur une vision de la limite, au sens actuel de ce terme, que repose l'argumentation de Lacroix et elle lui permet de dérouler ses preuves sans difficultés. Ainsi le théorème de Thalès est démontré en deux temps. Tout d'abord, il établit que « si deux droites quelconques sont coupées par un nombre quelconque de parallèles menées par des points pris à des distances égales sur la première, les parties de la seconde seront aussi égales entre elles » [*ibid.*, p. 32]. Le théorème de Thalès s'ensuit si les grandeurs sont commensurables. Dans le cas contraire, il montre par l'absurde que l'on a toujours égalité de rapports.

« Si AF et AD sont incommensurables, on prouvera, ainsi qu'il suit, que leur rapport ne peut être ni plus petit, ni plus grand que celui de GK à GM. Soit d'abord $AF : AD :: GM : GI$, GI étant plus petit que GK. On peut toujours diviser le côté AF en parties assez petites pour qu'en menant par tous les points de la division des parallèles à FM, il en passe une, de, entre les points I et K ; on aura, d'après ce qui précède, à cause de la commensurabilité de AF à Ad, $AF : Ad :: GM : Ge$. Les antécédents de cette proportion étant les mêmes que ceux de la précédente, on en conclura cette nouvelle proportion entre les conséquents de l'une et de l'autre

$AD : Ad :: GI : Ge$, résultat absurde puisque AD étant plus grand que Ad, GI est plus petit que Ge » [*ibid.*, p. 34].



Le cas où GI est plus grand que GK est traité de manière semblable. Il est néanmoins clair que les propriétés des proportions, démontrées sur les fractions, sont étendues, *ipso facto*, à toutes les grandeurs. Le « passage du fini à l'infini », des rapports commensurables aux rapports incommensurables, « des lignes droites aux courbes » s'effectue souvent, dans la *Géométrie* de Lacroix, grâce à des théorèmes clairement isolés :

* « Lorsqu'on peut prouver que la différence de deux grandeurs invariables est plus petite qu'une grandeur donnée, quelque petite que soit celle-ci, il en résulte que les deux premières grandeurs sont égales entre elles[46].

* Lorsque trois grandeurs sont telles que la première, variable, surpassant toujours les deux autres qui ne changent point, peut approcher en même temps de toutes deux aussi près que l'on voudra, ces deux grandeurs seront égales entre elles » [Lacroix 1805, p. 322–323].

Ces deux propositions sont tout à fait opératoires et permettent souvent d'éviter les raisonnements par l'absurde. Elles ne sont cependant pas utilisées pour généraliser les propriétés de proportions de fractions aux proportions de grandeurs. Il semble bien que la primauté de l'algèbre soit la raison de cette absence. Les grandeurs étant numérisées, elles sont soumises *ipso facto* aux lois de l'algèbre.

La *Géométrie* de Lacroix est, des géométries de son époque, celle qui utilise de la manière la plus conséquente l'algébrisation permise par l'assimilation des grandeurs aux nombres, *via* l'antyphérèse. Ainsi, après avoir démontré que, si un triangle ABC est rectangle en B et D le pied de la perpendiculaire menée de B sur AC, on a les proportions

[46] Ce théorème est aussi isolé comme premier principe des limites par Laplace [Dhombres, dir., 1992, p. 89].

$AD : AB :: AB : AC$ et $CD : BC :: BC : AC$. Il en déduit $AD = AB^2/AC$, $CD = BC^2/AC$ d'où $AC = (AB^2 + BC^2)/AC$ et le corollaire : $AC^2 = AB^2 + BC^2$, formule purement numérique dans laquelle plus rien ne rappelle sa signification géométrique première [Lacroix 1799a, 9e éd., p. 28–29]. Dans ses *Essais*, Lacroix justifie, en reprenant les arguments d'Arnauld [1667], l'ordre choisi en géométrie : lignes, surfaces, volumes. Il y explique bien la différence entre sa preuve du théorème de Pythagore, obtenue sans notion de surface, et celle d'Euclide :

> « On trouvera par la mesure des aires des propositions qui se sont présentées dans la théorie linéaire des triangles. De ce nombre est la propriété du triangle rectangle par rapport au carré de l'hypoténuse ; et il convient ici de faire remarquer qu'elle est alors une proposition de géométrie pure, tandis que quand on y parvient par la similitude des triangles, elle suppose les lignes rapportées à une commune mesure, et n'est qu'une proposition numérique » [Lacroix 1805, p. 333–334].

Mais il va plus loin et insiste sur l'apport de la numérisation des grandeurs. Elle permet d'aboutir à des théorèmes impossibles à atteindre par la *géométrie pure* qui ne recourt pas à la notion de mesure :

> « On a découvert depuis une proposition analogue par rapport au tétraèdre, ou en trois dimensions, dont l'expression ne peut s'entendre que des nombres. *Le quarré de l'aire de la plus grande face d'un tétraèdre, dont trois faces contiguës sont rectangles, est égal à la somme des quarrés des aires de ces surfaces.* Ceci ne peut être dit que des secondes puissances des nombres qui mesurent ces aires » [*ibid.*, p. 333].

Les raisons de la numérisation des grandeurs ne sont donc pas uniquement d'ordre métaphysique, primat de l'algèbre, désordre des *Éléments* d'Euclide, mais aussi mathématiques : c'est grâce à elle que le champ du savoir peut s'élargir.

4. La trigonométrie et l'application de l'algèbre à la géométrie

L'identification des grandeurs et des nombres est utilisée de manière fondamentale dans le *Traité élémentaire de trigonométrie rectiligne et sphérique et de l'application de l'algèbre à la géométrie.*

Ce traité commence par les trigonométries rectiligne et sphérique. Classiquement, la première sert à la résolution des triangles. Dans un premier temps, le sinus est donc défini comme la perpendiculaire abaissée de l'extrémité d'un arc de cercle (de rayon quelconque R) sur le rayon qui passe par l'autre extrémité, et le cosinus comme la partie du rayon comprise entre le centre du cercle et le pied du sinus. Ce sont alors des grandeurs positives [Lacroix 1798a, 3e éd., p. 4]. Les formules trigonométriques $\sin(a \pm b) = (\sin a \cos b \pm \sin b \cos a)/R$, *etc.* sont montrées géométriquement dans le cas où a, b, $a \pm b$ sont entre 0 et $\frac{1}{2}\pi$ [*ibid.*, p. 4]. Par la suite, Lacroix pose $R = 1$. Puis il trace un cercle entier et deux diamètres perpendiculaires qui lui permettent de repérer les grandeurs trigonométriques. Il entreprend de faire parcourir à l'arc la totalité du cercle et analyse l'évolution des grandeurs trigonométriques, remarquant par exemple que le cosinus change de côté quand l'arc dépasse $\frac{1}{2}\pi$. Il cherche alors comment « les expressions analytiques des sinus et cosinus répondent aux diverses circonstances que nous venons de remarquer ». La permanence des *expressions analytiques* lui permet d'écrire $\cos(\frac{1}{2}\pi + b) = -\sin b$, *etc.* et il explique alors que les grandeurs trigonométriques sont positives ou négatives, qu'elles changent de signe quand elles passent par 0, ou géométriquement qu'elles changent de sens quand l'extrémité de l'arc franchit les axes orthogonaux [*ibid.*, p. 21–22]. Il n'insiste plus sur cette question du signe en trigonométrie, car c'est l'application de l'algèbre à la géométrie et l'utilisation systématique d'un repère orthonormé qui vont lui permettre de donner une explication des signes dépassant la permanence des expressions analytiques [*ibid.*, p. 93]. Remarquons simplement ici qu'en 1803, Carnot dans sa *Géométrie de position* part d'un principe analogue. Comme Lacroix, il montre les formules trigonométriques dans le cas où tous les angles sont aigus et, pour les étendre au cas général, s'appuie sur son principe de *corrélation*, alors que Lacroix considère les grandeurs négatives, *sur une même droite munie d'une origine fixe*, comme opposées aux grandeurs positives.

La seconde partie débute par une définition classique de l'application de l'algèbre à la géométrie.

> « Cette branche des mathématiques, considérée en général, comprend, non seulement la recherche des propriétés de l'étendue par le moyen des procédés algébriques, mais elle doit montrer encore comment on peut représenter par ces propriétés tout ce que signifie une expression algébrique quelconque, ramener sans cesse les constructions des figures aux expressions de calcul, et revenir de celles-ci aux premières ; c'est ce que montreront successivement les diverses questions traitées dans ce chapitre » [Lacroix 1798a, 3e éd., p. 75].

Le programme cartésien ainsi repris dépasse le modèle. Après avoir donné quelques exemples, il aborde le problème de diviser une ligne en moyenne et extrême raison [*ibid.*, p. 79]. La résolution algébrique conduit à une équation du second degré dont une racine est négative et Lacroix, comme Descartes, donne les constructions géométriques correspondant aux résolutions algébriques. Mais ce dernier, dans les premières pages de sa *Géométrie*, occultait les racines négatives des équations du second degré. Lacroix, au contraire, les prend en compte et n'hésite pas à écrire $x = -AD'$, AD' étant une grandeur obtenue graphiquement. Ce signe $-$ est expliqué un peu plus loin avec des arguments identiques à ceux développés en algèbre : « Dans l'application de l'algèbre à la géométrie le signe $-$ s'interprète en général comme à l'égard des nombres, en renversant d'une certaine manière l'énoncé de la question, ou en prenant les lignes qui en sont affectées, dans un sens contraire à celui qu'on les avait supposé d'abord » [*ibid.*, p. 89]. Après avoir rappelé ce qu'il appelle redresser l'erreur de l'énoncé lorsque la solution est négative, il ajoute :

> « Mais, pour certaines questions, pour toutes celles qui mènent à des équations du premier degré par exemple, on n'a pas besoin de prendre cette peine ; le signe du résultat indique lui-même le renversement dont l'énoncé est susceptible ; et les valeurs négatives, employées conformément aux règles établies pour effectuer les opérations sur les quantités affectées du signe $-$ satisfont aussi bien aux questions que celles qui sont positives. C'est pour cela que les géomètres récents ont changé la dénomination de *racines fausses* qu'on donnait autrefois aux racines négatives des équations » [*ibid.*, p. 89–90].

Mais il ne suffit plus maintenant d'accepter les valeurs négatives parce qu'elles satisfont une équation algébrique et Lacroix ajoute immédiatement : « C'est donc aussi par la soustraction que l'on doit expliquer, sur les figures géométriques, les valeurs négatives que l'algèbre donne à certaines lignes ; et pour soustraire une ligne d'une autre, il suffit de porter la première sur la seconde, à partir de l'une des extrémités de celle-ci » [*ibid.*, p. 90]. Il explique alors que pour soustraire CD de AB, il faut porter la ligne CD sur la droite AB *à partir de* B. Il envisage d'abord le cas où CD est plus petit que AB. Si CD est plus grand que AB « la différence des deux droites proposées serait marquée en Ac', sur le prolongement de AB, et serait placée à gauche du point A, c'est-à-dire d'un côté opposé au résultat de la première opération ». Après un autre exemple, il conclut : « En général, toutes les fois qu'il s'agit de distances rapportées à un point fixe et comptées sur une même ligne [...] celles qui sont affectées du signe $-$ doivent se prendre dans un sens opposé à celles qui sont affectées du signe $+$ » [*ibid.*, p. 92]. Lacroix reprend ici l'exposition de la différence de deux grandeurs géométriques déjà présente dans les *Éléments* d'Euclide. Mais il la généralise au cas où la grandeur à soustraire est plus grande que la grandeur soustraite.

Ces réflexions, déjà présentes dans de nombreux traités antérieurs, ne sont cependant pas suffisantes, car elles pourraient ne représenter que de simples conventions :

> « L'algèbre sert non seulement à déterminer la grandeur des lignes et des parties de l'étendue, comparées les unes aux autres, mais elle fournit encore le moyen de déterminer les figures qu'affectent ces lignes, et en général les formes de l'espace. Descartes, en remarquant le premier que ces figures et ces formes déterminent des relations de grandeur entre des droites, est parvenu à appliquer l'algèbre à la théorie des lignes en général, et, par cette découverte, les mathématiques ont entièrement changé de face » [*ibid.*, p. 105].

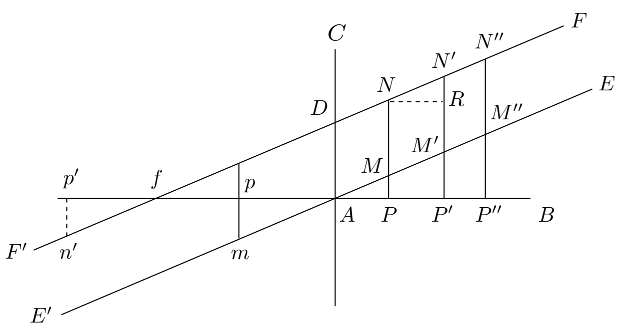
Pour cela, on abaisse la perpendiculaire d'un point M du plan sur une ligne droite AB, donnée de position, P étant la projection, et à partir du point A, fixé une fois pour toutes, on mesure les distances AP et PM. Le lien entre ces deux grandeurs caractérise la ligne décrite par M et il conclut :

« Rien n'empêche d'imaginer que les lignes AP, PM soient rapportées à une ligne commune prise pour unité, et que, de ce point de vue, elles ne soient représentées par des nombres ou par des lettres » [*ibid.*]. Une courbe est ainsi traduite algébriquement par son équation. Le programme de Lacroix est systématique. Il reprend l'ensemble des travaux faits à son époque et revendique à juste titre la nouveauté de son plan :

> « Montrer le double point de vue sous lequel on peut envisager l'application de l'algèbre à la géométrie ; d'abord ainsi qu'elle s'est présentée aux premiers inventeurs, comme un moyen de combiner les théorèmes de géométrie ; ensuite devenue par l'heureuse idée de Descartes, et les travaux d'Euler, de Lagrange, de Monge, le moyen général de déduire les propriétés de l'étendue, du plus petit nombre de principes [...] Classer en conséquence les lignes par leurs équations [...] En déduire la nécessité de savoir transformer les coordonnées pour employer ce moyen à simplifier les équations des lignes, et à déterminer leurs caractères essentiels. Revenir par un chemin opposé, en remontant de quelques propriétés des lignes à leur équation [...] en déduire des équations générales des lignes du second degré, leurs propriétés communes, et s'en servir pour donner une idée de la manière dont les anciens les avaient considérées, afin de lier les connaissances anciennes avec les nouvelles. Déterminer les tangentes de ces lignes, par une méthode qui soit analytique, uniforme, et qui s'étende même à toutes les courbes ; faire remarquer les limites des tangentes de l'hyperbole, ou ses asymptotes ; indiquer sommairement la manière dont les anciens menaient les tangentes aux sections coniques. Passer aux principes de la détermination des courbes par le nombre de points qui les caractérise. Enfin, esquisser rapidement l'usage des courbes pour construire les racines des équations déterminées, et pour peindre les circonstances de leur résolution » [Lacroix 1805, p. 379–380].

Les premières courbes étudiées sont les droites passant par l'origine. Nous les abordons car elles permettent à Lacroix de justifier son interprétation des grandeurs négatives, de montrer que ce qui n'était que symboles algébriques renvoie à des réalités géométriques. Le théorème de Thalès permet de trouver l'équation d'une droite passant par l'origine dans le premier quadrant. Mais

> « La ligne AE ne se termine pas brusquement au point A ; on doit embrasser toute son étendue, la concevoir prolongée [...] Cette dernière partie est comprise aussi dans l'équation $y = ax$; car on peut donner à x des valeurs négatives, et les valeurs exprimant les distances à la ligne AC doivent être prises du côté opposé à celui où l'on a porté les valeurs positives [...] les valeurs correspondantes de y, étant aussi négatives, doivent être prises du côté opposé à celui où on a porté les valeurs positives, c'est-à-dire au dessous de AB » [Lacroix 1798a, 3e éd., p. 107].



Les conventions sur l'interprétation géométrique des grandeurs affectées du signe − sont ainsi justifiées par leur adéquation à la problématique posée, l'analyse algébrique des formes de l'espace. La théorie de l'application de l'algèbre à la géométrie éclaire les principes de l'algèbre et, réciproquement, les propriétés de l'algèbre apportent un éclairage nouveau sur des propriétés bien connues d'objets géométriques comme les coniques. La correspondance ainsi établie permet non seulement de les retrouver d'une manière nouvelle et systématique mais aussi d'élargir le domaine. Plus qu'une réflexion *a priori*, c'est la cohérence de l'ensemble du domaine qui en justifie les principes.

5. *Le* Traité élémentaire de calcul différentiel et de calcul intégral

Il reste à traiter des principes du calcul infinitésimal, nécessaire pour dépasser les courbes algébriques et aborder l'ensemble des formes de l'espace. Le *Traité élémentaire de calcul différentiel et de calcul intégral* laisse aussi apparaître l'originalité de Lacroix et la cohérence de sa démarche. Il débute par des « Notions préliminaires et principes de la différentiation des fonctions d'une seule variable ». La notion de fonction, clairement dégagée dès les premiers paragraphes, est tout à fait générale :

> « 1) Dans cette partie de l'analyse, on prend pour sujet le passage d'une ou de plusieurs quantités par différents états de grandeur, et les changements qui en résultent dans d'autres quantités dépendantes pour leur valeur de celle des premières.
>
> 2) Pour exprimer qu'une quantité dépend d'une ou de plusieurs autres, soit par des opérations quelconques, soit même par des relations impossibles à assigner algébriquement, mais dont l'existence est déterminée par des conditions certaines, on dit que la première est fonction des autres. L'usage de ce mot en éclaircira la signification » [Lacroix 1802, p. 1–2]

Les quantités sont totalement numérisées ainsi que la notion de limite. Comme toujours, les exemples précèdent les définitions. Il commence par les fonctions polynomiales du premier, second et troisième degré et calcule sur celles-ci le rapport de l'accroissement de la fonction sur celui de la variable en s'appuyant sur la simplification entre numérateur et dénominateur. Il fait voir, par exemple sur la fonction ax^2, que le rapport est $2ax+ah$ et que, « si on conçoit que cette quantité h aille en diminuant, le résultat s'approchera sans cesse de $2ax$, et n'y atteindra qu'en supposant $h=0$; en sorte que $2ax$ est la *limite* du rapport, c'est-à-dire *la valeur vers laquelle ce rapport tend à mesure que la quantité diminue, et dont il peut s'approcher autant que l'on voudra* » [Lacroix 1802, 2e éd., p. 3].

Cette limite n'est pas géométrique mais arithmético-algébrique[47]. Il conclut ce paragraphe par une induction que l'on sait bien sûr aujourd'hui fausse en général, mais qui est exacte pour tous les exemples donnés par Lacroix.

> « Ce premier terme (le terme du quotient indépendant de la variable dans les exemples cités), ou cette limite, n'est pas particulier aux fonctions que nous venons d'examiner, il se rencontre dans toute fonction en général. *En s'évanouissant, les accroissements respectifs d'une fonction et de sa variable conservent encore le rapport dont ils se sont approchés par degrés ; et il existe entre ce dernier et la fonction dont il dérive, une dépendance mutuelle qui détermine l'un par l'autre, et réciproquement.* Ces assertions s'éclaircissent et se confirment d'une manière très satisfaisante par la considération des courbes, ainsi que l'on verra par la suite » [*ibid.*].

[47] Ce concept de limite est repris par Cauchy dans son *Cours d'analyse* et étendu aux limites infinies : « Le rapport $[f(x+\alpha)-f(x)]/\alpha$ converge ordinairement, tandis que la valeur numérique de α diminue, vers une valeur finie différente de zéro. Cette limite sera par exemple $2x$ si l'on prend $f(x)=x^2$ » [Cauchy 1821, p. 65]. Bien sûr, ce qui n'est chez Lacroix qu'une définition cherchant à décrire les propriétés du continu géométrique sert de base à Cauchy pour fonder une nouvelle analyse.

Cette notion de limite est ensuite traitée algébriquement. Lacroix démontre que la limite de la somme, différence, produit ou quotient de *quantités variables en même temps* est la somme, différence, produit ou quotient des limites. Cela lui permet d'expliquer facilement les règles de la différentiation et d'aborder les différentielles successives sans difficulté, sans l'ambiguïté des infiniment petits de tous ordres ou suppositions d'un développement en série entière. Il ne postule qu'ultérieurement l'existence d'un développement en série pour les fonctions[48], qui lui permet de différentier les fonctions transcendantes et implicites. Il aborde d'une manière complète les *maxima* et les *minima* d'une fonction d'une variable. Il montre que la dérivée première doit être nulle et qu'il faut regarder les dérivées successives pour s'assurer que l'on est bien à un *extremum.* Il généralise plus tard ce résultat aux fonctions de plusieurs variables. Le tout est traité d'une manière purement algébrique (les nombres sont totalement ordonnés) et sans aucune justification géométrique.

Le lien entre calcul différentiel et théorie des courbes n'intervient que tardivement et il est complètement renversé par rapport aux traités antérieurs[49]. Ceux-ci se fondaient majoritairement sur les concepts leibniziens d'infiniment petit, de courbe comme polygone infiniangulaire, *etc.* Le calcul algébrique sur les limites proposé par Lacroix justifie la vision géométrique et non l'inverse. Il explique d'ailleurs ainsi l'adéquation de la notion de limite avec la continuité des courbes.

> « Par la loi de continuité, on doit entendre celle qui s'observe dans la description des lignes par le mouvement, et d'après laquelle les points consécutifs d'une même ligne se succèdent sans aucun intervalle. La manière d'envisager les grandeurs dans le calcul ne paraît pas admettre cette loi, puisqu'on suppose toujours un intervalle entre deux valeurs consécutives de la même quantité ; mais plus cet intervalle est petit, plus on se rapproche de la loi de continuité, à laquelle la limite convient parfaitement ; c'est aussi en vertu de cette loi de continuité que les accroissements, quoiqu'évanouissants, conservent encore le rapport dont ils se sont approchés par degrés avant de s'évanouir.
>
> Il me paraît maintenant très évident que la métaphysique précédente renferme l'explication philosophique des propriétés du Calcul différentiel et du Calcul intégral,

[48] Une phrase cependant nuance ce résultat : « Cette remarque donne un moyen fort simple pour développer en série, suivant les puissances entières et positives de x, une fonction quelconque u de cette variable, *lorsque ceci est possible* » (nous soulignons) [Lacroix 1802, 2e éd., p. 22]. L'introduction de [Lacroix 1797–1798] possède un long développement sur la convergence des séries.

[49] Je ne considère pas [Lagrange 1797] comme un traité et je ne parle que des manuels français.

soit par rapport aux recherches sur les courbes, soit par rapport à celles qui concernent le mouvement. [...] et la *considération des limites donne le moyen d'établir cette continuité dans le calcul*» [*ibid.*, p. 82].

La suite du traité montre que la numérisation est presque complète. La vieille notion de quantité qui recouvrait des grandeurs de toutes dimensions est abandonnée au profit de la notion de fonction de plusieurs variables. Les *extrema* de fonctions de plusieurs variables peuvent alors être traités avec clarté et il en donne les conditions nécessaires et suffisantes. Seul le calcul des variations, et pour cause, conserve les concepts d'infiniment petit leibnizien. Bien sûr, ce traité est, de notre point de vue, insatisfaisant et l'on sait les apports du XIXe siècle sur ce point (voir, entre autres, [Bottazini 1986]). Mais il représente une avancée certaine par rapport aux textes français antérieurs [Lamandé 1989 et 1998] et sa structure put être reprise par Hermite et Serret qui le rééditent avec des notes en 1861–1862.

CONCLUSION

La notion de nombre, progressivement étendue des entiers aux nombres algébriques puis aux grandeurs géométriques est bien le socle des mathématiques de Lacroix. Elle lui permet de baser son œuvre sur un concept unifié, d'intégrer l'ensemble des grands domaines mathématiques à partir d'un nombre minimal de principes. La structure ainsi établie n'est certes pas, à nos yeux, exempte de défauts : la réflexion sur les définitions possibles des entiers, sur les fondements de la continuité, qu'il s'agisse des propriétés des réels ou de la continuité des fonctions, la reconnaissance de l'indépendance de l'algèbre générale par rapport aux lois de l'arithmétique etc. sont autant de champs que les mathématiciens du XIXe siècle défricheront. Cela ne doit pas cacher la richesse de la réflexion.

L'apport des traités de Lacroix est souvent négligé dans une approche historique qui, privilégiant les grandes avancées, néglige le terreau sur lequel elles poussent. On a vu que Lacroix a renoncé très vite aux recherches mathématiques. On sait aussi qu'il est, avec Poisson, responsable du rejet, en janvier 1831, par l'Académie des sciences du « Mémoire sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux » de Galois. Mais la fécondité de son œuvre est ailleurs. *Magister matheseos* de la fin du XVIIIe siècle, obligé en tant que tel d'interroger les fondements de la science qu'il expose, il révèle, questionne et renouvelle l'épistémologie largement partagée par les plus grands mathématiciens français de son temps, le plus souvent de manière implicite. En tant que tel, il intéresse l'historien des sciences. Il concerne aussi l'histoire de la pédagogie car il montre que les nécessités éducatives peuvent engendrer des réflexions épistémologiques et conduire à des découvertes. La figure de Lacroix est d'autant plus attachante qu'elle représente un cas assez rare d'une réflexion où science, philosophie et pédagogie sont étroitement entremêlées. Non au sein d'un système, mais au cœur d'une pratique à laquelle il a consacré sa vie.

Le sensualisme qui imprègne sa réflexion, sa justification de l'édifice mathématique par sa cohérence interne, sa problématique[50] et ses applications physiques, son scepticisme quant aux débats philosophiques coupés du développement scientifique sont sans doute ses limites. Mais des bornes qu'il accepte pleinement. Comme d'Alembert et Laplace, il est persuadé que seul le développement des sciences permet d'approfondir leur métaphysique. En conséquence, le plus important, sur le plan pédagogique et théorique, est de dégager *les idées simples*, d'ordonner les raisonnements suivant des méthodes générales et fécondes, *d'aller en avant.* Mais il ne se contente pas de fournir une synthèse. En donnant des fondements nouveaux aux traités, en intégrant les découvertes de son époque, en dégageant clairement les présupposés et en mettant les nombres au cœur des mathématiques, il ouvre la voie aux développements ultérieurs.

La philosophie mathématique de Lacroix est en effet moins triomphaliste que celle de Condillac ou de Condorcet. Comme d'Alembert, il relativise la portée des principes fondamentaux des sciences. Les critiques de Destutt de Tracy contre la présentation des mathématiques comme modèle universel de connaissance et de logique sont aussi reçues[51]. Nous avons vu qu'il reconnaît, comme toute une partie de l'école

[50] La pensée de Lacroix sur la vérité des règles de l'algèbre est très proche de celle développée par Brunschvicg dans son chapitre XXIII : Les racines de la vérité algébrique : « N'est-ce pas au contraire à la connexion des diverses théories, établies en arithmétique, en algèbre, en analyse, en géométrie qu'il appartient de garantir la vérité de la notion » [Brunschvicg 1981, p. 549] ?

[51] Si, dans le tome I des *Éléments d'idéologie*, Destutt de Tracy voyait les langues comme des espèces d'algèbre, il refuse au tome III de réduire la logique aux mathématiques : « On ne peut les trouver, ces principes (logiques) que dans nos facultés intellectuelles » [Destutt de Tracy 1805, p. 143].

idéologique post-condillacienne, que les sciences ne sont pas toutes susceptibles de mathématisation. Il se consacre à une exposition des seules mathématiques, cherchant leur justification, non dans une philosophie préexistante, mais dans l'exposition de ses *principes*, de sa cohérence interne et de ses applications. Cette attitude le conduit à une épistémologie qui n'est plus celle, un peu pragmatique, du XVIIIe siècle français, mais n'arrive pas à dégager clairement ses présupposés, même si, à certains égards, elle annonce la problématique du XIXe siècle. On le voit clairement dans sa présentation des nombres.

Le sensualisme génétique de Condillac est à l'origine de sa conception des entiers. Nous avons vu cependant qu'il s'en sépare assez vite. Il fonde les *quantités algébriques* sur la résolution des équations polynomiales, met en exergue leur structure algébrique[52] mais ne va pas jusqu'à les justifier par la libre création du mathématicien. Sa vision des complexes est plus proche de celle du premier Cauchy que de l'interprétation géométrique ou de la définition formelle de l'école algébrique anglaise (voir [Bachelard 1967] et [Flament 2003]). S'il met certes en exergue la structure algébrique des êtres mathématiques créés, il ne cherche pas à en donner une définition formelle, *a priori*. L'algèbre reste encore pour lui, comme pour tout le XVIIIe siècle, celle des équations polynomiales.

C'est encore une vision sensualiste qui le guide en géométrie. Pourtant l'antyphérèse sert de mode explicatif pour relier grandeurs géométriques et grandeurs arithmétiques ; la numérisation ainsi permise et la notion de limite lui permettent de proposer des preuves nouvelles de résultats anciens. Il essaie bien de rendre compte de la continuité qu'il voit comme une donnée de l'espace, mais sans en explorer les propriétés. En trigonométrie, il reste fidèle aux démonstrations géométriques, tout en n'hésitant pas à prolonger les formes analytiques pour justifier les valeurs négatives. Le poids de la tradition peut justifier ce choix, mais cette explication ne semble pas suffisante car il n'hésite pas à innover dans d'autres domaines. Il ne juge probablement pas possible de reprendre les travaux d'Euler dans ce domaine, de faire intervenir les complexes et les séries dans un domaine qui leur est étranger. En effet, dans la tradition française, illustrée entre autres par d'Alembert, l'objet de la géométrie est différent de celui de l'algèbre.

[52] Qui comprenaient à l'époque addition, soustraction, multiplication, division et élévation à une puissance fractionnaire.

L'application de l'algèbre à la géométrie intègre clairement la numérisation du plan ou de l'espace muni d'un repère orthonormé. La cohérence des résultats géométriques et analytiques établie par cette correspondance systématique entre les formes de l'espace et leurs équations lui permet de justifier, beaucoup plus que des réflexions de nature métaphysique, les idées premières, fondements des mathématiques. Mais l'espace reste une donnée de l'expérience, face à une algèbre fondée sur l'abstraction. Son calcul abandonne les infiniment petits. Le choix de la notion de limite, clairement algébrique et non plus géométrique, comme fondement du calcul innove, sans pour autant que Lacroix en tire toutes les conséquences : le domaine de l'analyse reste celui des fonctions analytiques.

Mais il ne faut pas oublier que toutes ces ambiguïtés seront encore présentes pendant une grande partie du XIXe siècle, non seulement dans les traités, mais aussi dans la problématique de la recherche. Les débats sur les fondements de l'arithmétique, de l'algèbre, de la géométrie, de l'analyse, pour ne reprendre que les thèmes que nous avons abordés, ne cesseront d'être présents, d'autant plus intéressants que les réponses apportées seront toujours porteuses de créations de concepts et de champs nouveaux. Lacroix, en unifiant ses traités autour de la notion de nombre, représente le premier pas d'un processus qui parcourt tout le dix-neuvième siècle. Nous ne pouvons ici qu'indiquer quelques pistes. Il reste à faire l'étude de l'impact des traités de Lacroix, à le situer par rapport aux débats qui parcourent le monde mathématique français dès le début du XIXe siècle. Sur le sens et la présentation des nombres négatifs et imaginaires en algèbre bien sûr, mais aussi sur leur utilisation en géométrie. Quelle est sa place dans la genèse d'une nouvelle forme didactique de la géométrie analytique, rivale de la *géométrie rationnelle* qu'inaugure Carnot [Chasles 1837] ? Les quantités de Carnot sont en effet des êtres géométriques (lignes, surfaces, angles, *etc.*) et non des nombres comme chez Lacroix. Sa doctrine des quantités directes et inverses vise avant tout à éclaircir la signification du signe − dans les formules analytiques qui expriment les relations métriques entre les divers êtres géométriques d'une figure, ainsi qu'à montrer comment ces formules évoluent quand la figure change de position. Les contemporains l'ont bien compris. En 1813, par exemple, Gergonne [1813] consacre un long texte à la question des quantités négatives. Il se démarque de Condillac et d'un formalisme pur pour conclure : « Cette expression $-a$ m'annonce simplement qu'il a été fait, sur les quantités de la nature de a, une convention formelle ou tacite, en vertu de laquelle on a différencié, par les signes, celles dont le mode d'existence était opposé » [Gergonne 1813, p.20]. Il avait auparavant refusé de définir ce *mode d'existence opposé.* « Je répondrai à cette question lorsqu'on m'aura donné de bonnes définitions de l'*espace*, du *temps*, des *substances*, des *modes*, de l'*angle* et notamment de ce qu'on appelle aujourd'hui *quantités directes et inverses* » [*ibid.*][53]. La conclusion est nette :

> « Je n'en suis pas moins pour cela pénétré de la plus haute estime pour la personne et les productions de l'illustre auteur de cet ouvrage. Mais je pense que la *Géométrie de position* ne perdrait absolument rien de ses avantages réels et qu'elle gagnerait peut-être même du côté de la clarté et de la brièveté si elle était ramenée aux notions que je viens de chercher à établir, ou plutôt de rappeler de l'oubli » [*ibid.*].

ANNEXE : LES NOMBRES NÉGATIFS DANS LA SECONDE ÉDITION DE L'*ALGÈBRE*

Lacroix, comme toujours, introduit l'algèbre par des problèmes qui sont eux-mêmes posés, dans un premier temps, avec des valeurs numériques, puis dans un second temps avec des *caractères indépendants de toute valeur particulière comme le sont les lettres de l'alphabet.* Après quelques exemples où les signes algébriques sont introduits, Lacroix aborde les équations, écriture symbolique du problème, et entreprend de les résoudre en commençant par la plus simple, celle du premier degré à une inconnue. Il donne alors les règles qui permettent de la résoudre et les applique sur plusieurs questions. Au n° 18, il se demande quand deux courriers, partant de lieux différents et allant dans le même sens avec des vitesses différentes, se rencontrent. L'exemple numérique est ensuite généralisé avec des lettres et la solution donnée sous sa forme la plus générale. Le n° 19 applique ces formules sur une autre question analogue et le n° 20 revient sur la formule générale pour interpréter physiquement ses différents termes. Le n° 21 entreprend de résoudre la même question si les deux courriers vont à la rencontre l'un de l'autre et il donne la formule générale. Il n'y a jusque là que des solutions positives.

[53] C'est évidemment la *Géométrie de position* de Carnot qu'il vise. Son refus d'une définition ne l'empêche pas par ailleurs d'en donner une caractéristique : deux quantités ont un mode d'existence opposé quand elles s'anéantissent par leur réunion.

C'est à ce moment que Lacroix donne ses « Réflexions sur les quantités positives et négatives ». Il reprend les deux questions qu'il vient de traiter aux n° 19 et 21. Les solutions algébriques ne diffèrent que par des signes sur certains termes des formules obtenues et Lacroix conclut :

> « Les lettres ne représentent que la valeur absolue des quantités. Les signes + et − n'ont été jusqu'ici que les indications de l'addition et de la soustraction ; mais ils peuvent aussi représenter dans plusieurs cas la manière d'être des quantités les unes à l'égard des autres. Une même quantité peut être considérée sous deux points de vue opposés, ou comme capable d'augmenter une autre quantité, ou comme capable de la diminuer. Tant qu'on ne représentera les quantités que par des lettres ou des nombres, rien ne désignera quel est celui des deux aspects sous lesquels on les considère » [Lacroix 1799b, 2e éd., n° 22, p. 31].

Il donne l'exemple des biens et des dettes.

> « Le moyen le plus naturel de faire sentir cette différence, c'est de les désigner par des signes qui indiquent l'effet qu'elles peuvent avoir l'une sur l'autre ; or l'effet des dettes étant de retrancher sur les possessions, il est naturel de les désigner en leur appliquant le signe −. Ces dernières quantités, qu'on appelle négatives, ont donc une existence aussi réelle que les premières, qu'on en distingue par la dénomination de positives et elles n'en diffèrent qu'en ce qu'elles ont une acception toute différente dans le calcul. Les quantités positives et les quantités négatives peuvent se trouver et se trouvent souvent mêlées ensemble dans un calcul, non seulement parce que certaines opérations ont conduit, comme nous l'avons vu jusqu'ici, à retrancher certaines quantités de quelques autres, mais encore parce que l'on a souvent besoin d'exprimer dans le calcul les différents aspects sous lesquels on considère les quantités » [*ibid.*, p. 32].

On n'a pas ici une réflexion de nature métaphysique sur les quantités algébriques, mais une interprétation des signes mis devant les quantités dans une formule. Les mouvements des courriers sont bien réels, mais selon qu'ils vont dans le même sens ou non, il faut changer les signes des quantités qui les représentent dans les formules. En fait, il s'agit plus de décrire une analogie entre solutions de problèmes que de construire un être mathématique.

Il aborde immédiatement le cas où, après avoir résolu l'équation avec les méthodes exposées antérieurement, la valeur de l'inconnue est négative. Le premier exemple donné, arithmétique, a un caractère assez artificiel par rapport à la problématique qu'il avait suivie jusque-là :

> « Par exemple, si l'on proposait la question évidemment impossible : *Trouver un nombre qui ajouté à* 15 *donne* 10, en représentant le nombre cherché par x, on aurait l'équation $x + 15 = 10$ et par conséquent en vertu des règles ci-dessus $x = 10 - 15 = -5$. Cette dernière conclusion me fait donc voir que x, que j'avais considéré comme devant être ajouté à 15 pour former 10 en doit, au contraire, être retranché. Toute solution négative indique quelque fausse supposition dans l'énoncé

de la question ; mais, en même temps, elle indique la correction en ce qu'elle marque que la quantité doit être prise dans un sens tout opposé à celui dans lequel elle l'a été d'abord » [*ibid.*, p. 33].

Nous sommes ici en présence d'une réflexion bien traditionnelle et il explique par une règle triviale de l'algèbre l'égalité $10 - 15 = -5$: il suffit de porter -15 et -5 de l'autre côté du symbole = en changeant de signe pour retrouver l'égalité $15 = 10 + 5$. Il revient ensuite sur l'exemple de ses courriers qui vont à la rencontre l'un de l'autre avec des valeurs numériques qui le rendent impossible (le premier courrier a déjà dépassé le point de départ du second quand celui-ci part). Il explique alors que la formule exprime cette impossibilité en donnant une solution négative et que le second courrier ne doit pas aller au-devant du premier, mais courir après lui. Ces premières réflexions sont bien classiques et correspondent tout à fait à la nature des problèmes posés. Mais les considérer comme représentatives de son épistémologie serait erroné car Lacroix n'en reste pas là et termine ces « Réflexions sur les quantités positives et négatives » par une phrase qui montre bien qu'il n'en a pas fini avec cette question. « À mesure que nous avancerons, nous aurons soin de fixer de plus en plus l'idée qu'on doit se faire des quantités négatives » [*ibid.*, p. 35].

Il aborde ensuite les opérations fondamentales sur les quantités considérées généralement (addition, soustraction, multiplication et division). Si la première démonstration qu'il donne de $a - (b - c) = a - b + c$ est commune à tous les manuels antérieurs [*ibid.*, p. 39–40], elle est suivie d'une justification par analogie qui porte sur une quantité négative isolée.

« Si l'on avait, par exemple, la quantité $a + b$ il est évident qu'on en retrancherait $+b$ en effaçant cette dernière quantité, ce qui réduirait la première à a. On voit de même que si de $a - b$ on voulait retrancher $-b$, il suffirait d'effacer $-b$ et on aurait pour reste a. En concevant ainsi la soustraction, c'est-à-dire en supposant la première quantité décomposée en deux parties, dont l'une soit précisément la quantité à soustraire, il n'est pas difficile d'expliquer pourquoi il faut changer le signe de la quantité à soustraire. Posons par exemple que l'on veuille retrancher la quantité b de la quantité a ; il est évident qu'au lieu de a on pourra écrire $a + b - b$, puisque les termes $+b$ et $-b$ se détruisent. Maintenant, si c'est $+b$ qu'on se propose de soustraire, on l'effacera et il restera $a - b$. Si c'est au contraire $-b$, on effacera ce dernier et il restera $a + b$ » [*ibid.*, p. 40].

Il va encore plus loin et souligne que « les opérations algébriques ont reçu des noms d'après leur analogie avec les opérations arithmétiques, mais qu'elles ont un sens plus étendu » [*ibid.*, p. 41]. Cette évolution de sens est analogue à celle déjà rencontrée dans le passage des entiers aux fractions.

La soustraction d'une quantité négative donne lieu à une augmentation comme la multiplication par une fraction donne un produit moindre. Il précise en note :

> « Le changement du $-$ en $+$ dans la soustraction ne cause quelque embarras à ceux qui commencent que parce qu'ils veulent rapporter toutes les notions qu'on leur donne de l'algèbre à celles qu'ils ont acquises en arithmétique, tandis que l'extension que les signes généraux employés dans la première donnent aux résultats ne permet plus leur comparaison exacte avec ceux qu'on tire des nombres ; la soustraction de $b - a$ indiquée algébriquement n'emporte pas nécessairement l'idée que b surpasse a » [*ibid.*, p. 41][54].

La multiplication des quantités, elle aussi, montre bien l'autonomie de l'algèbre par rapport à l'arithmétique. Pour expliquer le résultat de la multiplication de $a - b$ par c, il débute par un type de raisonnement ancien : « Si l'on multiplie a tout entier, [...] il est visible qu'on y multiplie de trop la quantité b dont a doit être diminuée ; il faut donc ôter de ce produit la quantité b multipliée par c, c'est-à-dire ôter bc » [*ibid.*, p. 48]. Il en déduit la règle des signes. Mais il ajoute presque immédiatement la démonstration inspirée des *Cours de l'École normale* qui concerne les nombres négatifs isolés que nous avons déjà vue [*ibid.*, p. 50]. Il met en note :

> « Il est facile de voir pourquoi il faut accoler ainsi une quantité positive à la quantité négative pour arriver au résultat demandé. C'est qu'il faut nécessairement faire entrer dans le raisonnement ou dans le calcul l'idée de la quantité négative ; ce n'est pas le signe $-$ qui peut l'exprimer puisqu'il n'est qu'une simple marque de convention. Mais en prenant $a - a$, on assigne le caractère distinct des quantités

[54] Il revient aussi, dans cette même note, sur l'idée des quantités négatives plus petites que 0 et en donne une interprétation originale : « Quelques auteurs ont pensé que les quantités négatives étaient au-dessous de 0 ; voici ce qui a donné lieu à cette opinion. Si l'on considère par exemple le nombre 7 et qu'on retranche successivement les nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, *etc.* on aura pour restes 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0, -1, -2, *etc.* où l'on verra que la soustraction des nombres de plus en plus grands donnant des restes de plus en plus petits, conduit à zéro avant d'arriver à des restes négatifs ; c'est dans ce sens qu'on peut dire que les quantités négatives sont au-dessous de zéro. La notion tirée des dettes conduit encore à ce résultat [...] Il ne faut pourtant pas conclure de tout ceci qu'il y ait des quantités réellement au-dessous du zéro ou du néant. Les quantités négatives, abstraction faite de leur signe, ont une grandeur absolue qui les rend comparables aux quantités positives. Mais le signe indique l'ordre qu'elles tiennent dans une suite ou progression qui commence par des quantités positives, et cet ordre deviendrait inverse si l'on commençait par des quantités négatives, en sorte que les états de positif et de négatif sont purement relatifs entre eux et n'ont rien d'absolu ». La réflexion est intéressante, car elle prolonge l'*ordre naturel* des entiers, qui renvoie à l'idée déjà présente dans les *Éléments* d'Euclide du tout et de sa partie, grâce à une progression arithmétique.

négatives, celui d'être opposées aux quantités positives, ou de les détruire lorsqu'il y a égalité de grandeur absolue ».

Le mot *opposé* prend bien ici une signification très proche du sens actuel, uniquement définie par les règles opératoires.

Les quantités négatives représentent donc au départ des quantités à soustraire, puis des quantités prises « dans un sens opposé, avec des propriétés toutes contraires » , tout ceci étant introduit par des exemples de la vie quotidienne. Mais les opérations sur ces quantités sont justifiées de plusieurs manières. Dans un premier temps, il reprend une argumentation classique, sans quantités négatives isolées, reposant sur des raisonnements où l'intuition arithmétique est fondamentale. Dans un second temps, il les considère sur les quantités négatives isolées : le primat des lois opératoires est alors évident et l'extension de sens revendiquée. La suite du texte (division, manière de trouver le plus grand commun diviseur de deux quantités littérales, des fractions littérales) est identique à la version des éditions ultérieures. La partie « Des équations du premier degré à plusieurs inconnues » est par contre plus brève, car les éditions suivantes y intégreront, comme on l'a vu, les démonstrations relatives aux opérations sur les quantités isolées.

Il y a bien changement dans l'ordre des propositions concernant les quantités négatives. À partir de la troisième édition, toute la partie sur les opérations dont sont susceptibles les quantités littérales ne porte pas sur les quantités négatives isolées qui sont introduites ultérieurement. Pour autant, les démonstrations sont reprises presque mot à mot. Nous ne ferons pas cette correspondance fastidieuse. Il n'en reste pas moins que l'évolution isole plus clairement la génération algébrique successive des symboles de cette science en étudiant d'une manière séparée les quantités négatives isolées. Le vocabulaire en témoigne. Le mot *quantités algébriques*, rarement employé dans la deuxième édition, est omniprésent à partir de la troisième édition. Doit-on y voir une rupture épistémologique ? Si l'on considère l'épistémologie comme une « branche de la philosophie des sciences qui étudie de manière critique la méthode scientifique, les formes logiques et les modes d'inférence utilisés en science, de même que les principaux concepts fondamentaux, théories et résultats des diverses sciences et ce afin de déterminer leur origine logique, leur valeur et leur portée objective » [Nadeau 1999, p. 209], la réponse est négative.

La logique de l'*Algèbre* est restée inchangée : elle est structurée en vue de résoudre le théorème fondamental de l'algèbre. Les formes logiques, les démonstrations restent identiques. Les objets même de cette science voient leur dénomination précisée, mais leur signification n'est pas changée. Au début de l'ouvrage, ils sont introduits par des problèmes et, dans toutes les éditions, Lacroix qualifie d'absurdes les solutions des équations polynomiales qui sont exclues par l'énoncé même de la question. Elles sont cependant acceptées en algèbre grâce à des extensions successives du concept de nombre. On peut critiquer la solution proposée par Lacroix, mais on ne peut nier la constance de ses idées. On ne peut pas plus parler de refus du nombre négatif chez Lacroix à partir de la parution de la *Géométrie de position* de Carnot en 1803.

BIBLIOGRAPHIE

ARMATTE (Michel)
[1991] Une discipline dans tous ses états : La statistique à travers ses traités (1800–1914), *Revue de synthèse*, 4e série, 2 (2001), p. 161–204.
ARNAULD (Antoine)
[1667] *Nouveaux éléments de géométrie*, Paris : Charles Savreux, 1667.
AUROUX (Sylvain) et CHOUILLET (Anne-Marie)
[1981] *Réédition critique de la Langue des calculs de Condillac*, Lille : Presses universitaires de Lille, 1981.
BACHELARD (Suzanne)
[1967] *La représentation géométrique des quantités imaginaires au début du* XIXe *siècle*, Conférences du Palais de la Découverte, Paris, 1967.
BOSSUT (Charles)
[1798] *Traité de calcul différentiel et intégral*, Paris : Imprimerie de la République, 1798.
BRUNSCHVICG (Léon)
[1981] *Les étapes de la philosophie mathématique*, rééd. avec une préface de J.T. Desanti, Paris : Blanchard, 1981.
CARNOT (Lazare)
[1797] *Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal*, Paris : Duprat, 1797.
[1803] *Géométrie de position*, Paris : Imprimerie du Chapelet, 1803.
CASINI (Paolo)
[1789] 'D'Alembert, l'économie des principes et la métaphysique des sciences', dans [CIS 1989, p. 135–152].
CASSIRER (Ernst)
[1932] *Die Philosophie der Aufklärung*, Tübingen : Mohr, 1932. Trad. française : *La philosophie des Lumières*, Paris : Fayard, 1966.
CAUCHY (Augustin Louis)
[1821] *Cours d'analyse de l'École royale polytechnique*, Paris : Debure, 1821.
CHASLES (Michel)
[1837] *Aperçu historique des méthodes en géométrie*, Bruxelles : M. Hayez, 1837.

Condillac (Étienne Bonnot de)
[1798] *La langue des calculs*, Paris : Houël, 1798.

Condorcet (Marie Jean Antoine Nicolas Caritat, marquis de)
[Œuvres] *Œuvres* en 12 vol. publiés par A. Condorcet, E. O'Connor et F. Arago, Paris : Firmin-Didot, 1847–1849.

Dahan-Dalmedico (Amy)
[1992] 'La méthode critique du mathématicien philosophe', dans [Dhombres, dir., 1992, p. 171–201].

D'alembert (Jean Le Rond)
[1751] *Discours préliminaire de l'Encyclopédie*, t. 1, Paris : Briasson, 1751.
[1759] 'Essai sur les éléments de philosophie', dans *Mélanges de littérature, d'histoire et de philosophie*, nouvelle édition revue, corrigée et augmentée par l'auteur, vol. 4, Amsterdam : L. Chatelain et fils, 1759.
[1767] 'Éclaircissements sur divers endroits des éléments de philosophie', dans *Mélanges de littérature, d'histoire et de philosophie*, vol. 5, Amsterdam : L. Chatelain et fils, 1767.
[1986] *Essai sur les éléments de philosophie*, Paris : Fayard, 1986 (rééd. des textes de 1759 et 1767).

Delambre (Jean Baptiste)
[1810] *Rapport historique sur les progrès des sciences mathématiques depuis 1789*, Paris : Imprimerie impériale, 1810; rééd. avec présentation et notes de J. Dhombres, Paris : Belin, 1989.

Destutt (Antoine, comte de Tracy)
[1805] *Éléments d'idéologie, troisième partie : logique*, Paris : Courcier, 1805.

Dhombres (Jean)
[1982] La langue des calculs de Condillac ou comment propager les Lumières, *Sciences et techniques en perspective*, 2 (1982), p. 197–230.

Dhombres (Jean et Nicole)
[1989] *Naissance d'un nouveau pouvoir : sciences et savants en France 1793–1824*, Paris : Payot, 1989.
[1997] *Lazare Carnot*, Paris : Payot, 1997.

Dhombres (Jean), dir.
[1992] *L'École normale de l'an III. Leçons de mathématiques*, Paris : Dunod, 1992.

Dhombres (Jean) et Robert (Jean Bernard)
[1998] *Fourier créateur de la physique mathématique*, Paris : Belin, 1998.

Flament (Dominique)
[2003] *Histoire des nombres complexes*, Paris : CNRS Éditions, 2003.

Gergonne (Joseph Diaz)
[1813] Réflexions sur le même sujet [les quantités négatives], *Annales de mathématiques pures et appliquées*, 4 (1813), p. 6–20.

Guénot (Hervé)
[1986] Musées et lycées parisiens (1780-1830), *Dix-Huitième siècle*, 18 (1986), p. 249–267.

Gusdorff (Georges)
[1978] *Les sciences humaines et la pensée occidentale,* t. VII : *La conscience révolutionnaire les idéologues*, Paris : Payot, 1975.

Helvétius (Claude Adrien)
[1758] *De l'esprit*, Paris : Durand, 1758.

Itard (Jean)

[1973] 'Lacroix, Sylvestre François', dans *Dictionary of Scientific Biography*, vol. VII, New York : Charles Scribner's Sons, 1973, p. 549–551.

Julia (Dominique)

[1981] *Les trois couleurs du tableau noir, la Révolution*, Paris : Belin, 1981.

[1987] *Atlas de la Révolution française,* t. 2 : *L'enseignement*, Paris : Éditions de l'EHESS, 1987.

[1996] L'École normale de l'an III : bilan d'une expérience révolutionnaire, *Revue du Nord*, t. LXXVIII, n° 317, p. 853–886 et 1023–1040.

Kuhn (Thomas S.)

[1962] *The Structure of Scientific Revolutions*, Chicago : University of Chicago Press, 1962; trad. fr. par Laure Meyer, Paris : Flammarion, 1983.

Lacroix (Sylvestre François)

[1795] *Essai de géométrie descriptive sur les plans et les surfaces courbes ou éléments de géométrie descriptive*, Paris : Fuchs, Régent et Bernard, 1795; 2e éd. 1802; 5e éd. 1822; 6e éd. 1829; 7e éd. 1840.

[1797] *Éléments d'algèbre par Clairaut*, 5e édition avec des notes et additions tirées des cours de l'École normale et précédées d'un traité élémentaire d'arithmétique, 2 vols, Paris : Duprat, 1797. Les notes et les additions sont de Lacroix; l'arithmétique de Biot.

[1797–1798] *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral*, Paris : Duprat 1797-1798. Il ajoute en 1800 un *Traité des différences et des séries.* Le tout est refondu et complété dans deux éditions en 1810 et 1819, Paris : Courcier, 1797–1798.

[1797a] *Traité élémentaire d'arithmétique*, Paris, Duprat, 1797; 2e éd. 1800; 3e éd. 1801; 4e éd. 1804; 6e éd. 1805; 7e éd. 1807; 9e éd. 1811; 13e éd. 1813; 15e éd. 1820; 16e éd. 1823; 17e éd. 1826; 19e éd. 1836; 20e éd. 1846.

[1797b] Note anonyme sur le calcul, *Moniteur universel*, 1(1797), p. 500.

[1798a] *Traité élémentaire de trigonométrie rectiligne et sphérique et d'application de l'algèbre à la géométrie*, Paris : Duprat, 1798; 2e éd. 1800; 3e éd. 1803; 6e éd. 1813; 7e éd. 1822; 9e éd. 1837; 10e éd. 1852; 11e éd. 1863.

[1798b] Supplément à la théorie des solutions particulières des équations différentielles, *Bulletin de la Société philomatique*, 1 (1798), partie 2, p. 86–88.

[1799a] *Éléments de géométrie*, Paris : Duprat, 1799; 2e éd. 1802; 3e éd. 1803; 4e éd. 1804; 5e éd. 1806; 9e éd. 1811; 10e éd. 1814; 11e éd. 1819; 12e éd. 1822; 13e éd. 1825; 14e éd. 1830; 15e éd. 1836; 16e éd. 1837; 17e éd. 1855; 18e éd. 1863; 19e éd. 1871; 22e éd. 1884; encore édité en 1897 et 1912.

[1799b] *Éléments d'algèbre*, Paris : Duprat, 1799; 2e éd. 1800; 3e éd. 1802; 4e éd. 1803; 5e éd. 1804; 6e éd. 1807; 10e éd. 1812; 14e éd. 1825; 15e éd. 1830; 16e éd. 1836; 17e éd. 1847; 20e éd. 1852; 21e éd. 1854; 22e éd. 1868; 23e éd. 1871.

[1800a] *Discours sur l'instruction publique prononcé à la distribution des prix des écoles centrales de la Seine le 29 thermidor an VIII*, Paris 1800 (Un exemplaire se trouve à la bibliothèque de l'Institut, AA 532, n° 2).

[1800b] *Compléments des éléments d'algèbre à l'usage de l'école centrale des Quatre-Nations*, Paris : Duprat, 1800; 2e éd. 1801; 3e éd. 1804; 5e éd. 1825; 6e éd. 1835; 7e éd. 1863.

[1802] *Traité élémentaire de calcul différentiel et intégral*, Paris : Duprat, 1802; 2e éd. 1806; 3e éd. 1820; 5e éd. 1837. Des éditions revues par Hermite et Serret furent publiées à Paris : Mallet Bachelier, 1861-1862, 1867 et 1881.

[1804] *Introduction à la géographie mathématique et critique et à la géographie physique*, Paris : Dentu, 1804 (premier volume d'une Géograhie moderne dirigée par J. Pinkerton et C. Walkenaer). Elle a été complétée et rééditée en 1811.

[1805] *Essais sur l'enseignement en général et sur celui des mathématiques en particulier*, Paris : Courcier, 1805 ; rééd. en 1816, 1828, 1838 et 1857.

[1811] Note sur son huitième volume du Cours complet, *Moniteur universel*, 1811, p. 1292.

[1816] *Traité élémentaire du calcul des probabilités*, Paris : V^ve^ Courcier, 1816 ; 2^e^ éd. 1822 ; 3^e^ éd.1833 ; 4^e^ éd. 1864.

[1826] *Manuel d'arpentage ou instruction élémentaire sur cet art et sur celui de lever les plans*, Paris : Roret, 1826 ; 2^e^ éd. 1827 ; 5^e^ éd. 1834 ; rééd. 1852.

[1828] *Introduction à la connaissance de la sphère*, Paris : H. Bossange, 1828.

Lagrange (Joseph Louis)

[Œuvres] *Œuvres complètes*, éd. par J.A. Serret et G. Darboux, 14 vol., Paris : Gauthiers-Villars, 1867–1892.

[1773] 'Solutions analytiques de quelques problèmes sur les pyramides triangulaires', dans [Œuvres, III, p. 661–692].

Lamandé (Pierre)

[1987] Les manuels de Bézout, *Rivista di storia della scienza*, 4 (1987), p. 339–375.

[1988] La mutation de l'enseignement scientifique en France (1750-1810) et le rôle des écoles centrales : l'exemple de Nantes, *Sciences et techniques en perspective*, 15 (1988).

[1989] Deux manuels mathématiques rivaux : le Bézout et le Lacroix. Ancien contre nouveau régime en calcul infinitésimal, *Wissenschaftliche Zeitschrift der Wilhelm-Pieck-Universität Rostock*, G-Reihe 37 (1988), p. 16–25.

[1990] Des différents rôles de l'écriture dans un manuel mathématique : l'exemple de Bézout, *Sciences et techniques en perspective*, 18 (1990), p. 31–40.

[1993] Trois traités français de géométrie à l'orée du dix-neuvième siècle : Legendre, Peyrard et Lacroix, *Physis*, 30 (1993), p. 243–302.

[1998] Les traités de calcul du Marquis de l'Hôpital et de Sylvestre François Lacroix. Une même mathématique ? dans *Contribution à une approche historique des mathématiques. Actes de la* 7^e^ *université d'été interdisciplinaire sur l'histoire des mathématiques*, Nantes : IREM des pays de la Loire, 1998, p. 207–236.

[2003a] La grammaire comme preuve de l'algèbre : la langue des calculs de Condillac, dans Maison des Sciences de l'homme *Ange-Guépin*, éd., *La Preuve.* Séminaire Le lien Social, org. par le Centre François Viète (Nantes, 13–14 mai 2002), Nantes 2003, p. 75–89.

[2003b] Quelques éléments sur la conception des objets et des méthodes mathématiques dans les textes philosophiques de d'Alembert, *Cahiers François Viète*, 6 (2003), p. 1–36.

[à paraître] 'L'influence des cours au-delà de l'an III : L'exemple des cours de mathématiques', dans Julia (Dominique), éd., *Volume introductif de la réédition des cours de l'École normale de l'an III*, Paris : Presses de l'École normale supérieure, à paraître.

Lamy (Bernard)

[1680] *Traité de la grandeur en général qui comprend l'arithmétique, l'algèbre, l'analyse et les principes de toutes les sciences qui ont la grandeur pour objet*, Paris 1680 ; 2^e^ éd. revue et augmentée, Paris : Pralard, 1689.

LEGENDRE (Adrien Marie)
[1798] *Essai sur la théorie des nombres*, Paris : Duprat, 1798.
MALHERBE (Michel)
[1982] L'empirisme génétique de Condillac, *Sciences et techniques en perspective*, 2 (1982), p. 185–196.
MARIE (abbé Joseph François)
[1770] *Leçons élémentaires de mathématiques par l'abbé de La Caille ; nouvelle édition augmentée par M. l'abbé Marie*, Paris : Desaint, 1770 ; rééd. 1778.
MONGE (Gaspard)
[1795] *Feuilles d'analyse appliquée à la géométrie à l'usage de l'École Polytechnique*, Paris, 1795.
NADEAU (Robert)
[1999] *Vocabulaire technique et analytique de l'épistémologie*, Paris : PUF, 1999.
TATON (René)
[1948] Une lettre inédite de Monge sur la situation en France après la fuite du Roi, *Revue d'histoire des sciences*, 1 (1948), p. 358–359.
[1951] *L'œuvre scientifique de Monge*, Paris : PUF, 1951.
[1953a] Laplace et S.F. Lacroix, *Revue d'histoire des sciences*, 6 (1953), p. 350–360.
[1953b] 'S.F. Lacroix, mathématicien, professeur et historien des sciences', dans *Actes du VIIe congrès international d'histoire des sciences*, Jérusalem, 1953, p. 588–593
[1954a] 'Une correspondance inédite de S.F. Lacroix-Quetelet', dans *Actes du congrès 1953 de l'Association française pour l'avancement des sciences*, Luxembourg, 1954, p. 350–360.
[1954b] Une lettre inédite de Dirichlet, *Revue d'histoire des sciences*, 7 (1954), p. 172–175.
[1959] Condorcet et S.F. Lacroix, *Revue d'histoire des sciences*, 12 (1959), p. 127–158 et p. 243–262.
[1961] Une lettre inédite d'Humboldt au mathématicien S.F. Lacroix, *Revue d'histoire des sciences*, 14 (1961), p. 329–330.
TROTIGNON (Pierre)
[2000] Condillac, *Encyclopædia Universalis*, t. 6, Paris, 2000, p. 329–330.
VITRAC (Bernard)
[1994] *Traduction et commentaires des* Éléments *d'Euclide*, vol. 2, Livres V à IX, Paris : PUF, 1994.

Ouvrages collectifs

* *Annales historiques de la révolution française*, 243 (1981), numéro consacré aux problèmes de l'enseignement de l'Ancien régime à l'Empire.
CIS (Centre international de synthèse)
[1989] *Jean d'Alembert, savant et philosophe, portrait à plusieurs voix*, Paris : Éditions des Archives Contemporaines, 1989.
* *Dix-Huitième siècle*, 16 (1984), numéro consacré à d'Alembert.