

DEUX CADASTRES DE L'ÉPOQUE D'UR III

par Jacques QUILLIEN (*)

RÉSUMÉ. — On ne connaît, parmi la très nombreuse documentation cunéiforme, que deux documents présentant les caractéristiques des tablettes étudiées ici, écrites il y a plus de quarante siècles dans la Mésopotamie du Sud. Celles-ci présentent le dessin d'un champ de forme assez complexe, dont la partie centrale est découpée en rectangles pour en permettre le calcul de l'aire. Chaque rectangle porte deux indications d'aire.

Le cadastre dessiné sur la première tablette est de forme assez régulière. Son revers est lisible et on peut y lire les aires cumulées vérifiant celles de la face. La tablette a reçu en 1898 une interprétation obtenue par tâtonnements. L'autre tablette présente un dessin aux formes plus contournées et n'avait pas jusqu'à présent été expliquée. Son revers trop abîmé ne peut être confronté avec les indications de la face.

Le présent travail propose une reconstitution des calculs du scribe pour les deux tablettes, basée sur la prise en compte du travail du géomètre-arpenteur.

ABSTRACT. — TWO CADASTRAL SKETCHES FROM THE TIME OF UR III. — Among the numerous cuneiform documents available, only two tablets have the characteristics of those presented here; they were written more than forty centuries ago in South Mesopotamia. On one side, they bear the drawing of a field, whose shape is quite complex: the core is divided into rectangles to allow the calculation of the area. Each rectangle bears two inscriptions related to the area.

The cadastral sketch inscribed on the first of these tablets is made up of quite regular shapes; the indications on the reverse are legible and are accumulated values of areas that confirm the calculations on the obverse. In 1898, an interpretation of this document based on trial and error was proposed. The other tablet, made up of more intricate geometric shapes, has not been explained until now, the reverse being too damaged to be compared with the indications written on the obverse.

The present study takes into account the work done by the surveyor, and suggests a reconstitution of the scribe's calculations for the two tablets.

Les tablettes MIO 1107 et Wengler 36 que nous allons étudier sont en écriture cunéiforme et en langue sumérienne. Elles ont été trouvées au

(*) Texte reçu le 29 janvier 2002, révisé le 21 mars 2003.

J. QUILLIEN, 121, avenue Philippe Auguste, 75011 Paris.

Courrier électronique : j.quillien@wanadoo.fr.

Mots clés : Mathématiques babyloniennes, cadastre, arpentage, sumérien.

Classification AMS : 01-08, 01A07, 01A17, 51-03, 54-99.

cours de fouilles clandestines aux environs de Lagaš, dans la Mésopotamie du Sud (à 80 km environ d'Ur). Elles ont été écrites dans cette même zone géographique à la fin du III^e millénaire avant notre ère, à une époque où les rois de la troisième dynastie d'Ur, conventionnellement appelée Ur III, organisaient la production de leur empire de façon centralisée. La province de Lagaš était spécialisée dans la production de céréales.

Ces deux tablettes présentent sur leur face le dessin d'une surface complexe (figures 1 et 8), où le scribe a tracé dans l'argile des traits qui délimitent un habillage périphérique de trapèzes et de triangles et une zone centrale, le *temen*, qu'il a découpée en rectangles. L'ensemble du dessin porte des indications de nombres cunéiformes qui représentent des longueurs et des aires. Les calculs qui relient les longueurs et les aires n'y figurent pas. Les tablettes comportent sur le revers un texte en sumérien où l'on retrouve en particulier la somme des aires écrites sur la face (figure 1, copie de MIO 1107; nous n'avons pas de copie du revers de Wengler 36).

On a appelé cadastres ces représentations de surfaces étendues, couvrant respectivement 41 km² et 14 km².

La singularité de ces deux tablettes réside dans la présentation des aires du *temen* : chacun des éléments rectangulaires porte deux indications d'aires écrites tête-bêche et sensiblement différentes l'une de l'autre. Le but de cette note est de proposer une explication complète de ces indications et de présenter une reconstitution des calculs du scribe. Nous donnons également une signification géométrique simple à ces calculs, que nous avons établie pour la tablette MIO 1107, puis appliquée à la tablette Wengler 36.

Comme on le verra, tous les calculs d'aires de la périphérie sont faits en considérant que les côtés se coupent à angle droit. Mais quand sur le terrain on doit tracer un côté perpendiculaire à un autre, on le fait toujours avec une approximation (dont l'importance est fonction des dispositifs utilisés). Les arpenteurs mésopotamiens ont eux aussi connu cette *approximation dans le tracé*, qui ne peut être assimilée à une erreur, et qui a des conséquences sur les longueurs.



Par exemple, pour faire le simple tracé d'un rectangle à partir d'un côté AB existant, on élève deux perpendiculaires en A et B puis on porte sur ces droites les longueurs égales AC et BD . La longueur du côté CD dépend de l'approximation faite dans le tracé des perpendiculaires. Notre reconstitution prend en compte cette incertitude dans le tracé.

Les particularités des deux tablettes ont retenu l'intérêt de nombreux chercheurs. Ainsi la tablette MIO 1107 a été éditée par F. Thureau-Dangin [1898] qui a ensuite repris son étude pour quelques compléments et corrections mineurs [Thureau-Dangin 1928]. Il écrit : «le grand polygone central se divise en quatre rectangles (figure 1) pour lesquels deux séries d'évaluation sont données pour compenser les erreurs (sur les longueurs). Voici comment, après quelques tâtonnements, j'ai pu reconstituer ces calculs» [Thureau-Dangin 1898, p. 17]. Il exécute ensuite les opérations qui mettent en correspondance les longueurs et les aires inscrites sur la tablette, mais il ne fournit ni explication ni support géométrique à ses «tâtonnements». C'est pourquoi son approche de MIO 1107 n'a pu être utilisée pour Wengler 36, dont la parution date pourtant de 1922. Et quand il évoque des «erreurs» pour justifier la nécessité des deux calculs, il ne rend pas compte de la signification de celles-ci. Nous faisons les mêmes opérations arithmétiques que lui, mais en donnant un sens et une explication géométrique aux calculs du scribe, ce qui nous permet ensuite d'utiliser le même principe pour reconstituer les calculs de Wengler 36.

J. Oppert [1898] a critiqué l'interprétation de F. Thureau-Dangin en refusant le système métrologique qu'il adoptait et qui venait d'être proposé [Reisner 1896], puis en niant l'idée même de marge d'erreur d'une mesure : «la mesure était quelque chose de sacré dans l'antiquité et se tromper était une profanation» [Oppert 1898, p. 32].

Wengler 36 a été édité par A. Deimel [1922] qui en a donné des schémas, une transcription et quantité de résultats concernant surtout la périphérie. Il ne semble pourtant pas qu'il ait analysé les mécanismes de calcul du *temen*.

S. Dunham [1986] s'est intéressée aux diverses significations du terme *temen* dans les textes mésopotamiens et, entre autres occurrences, à sa présence dans trois «tablettes de champs» de la période d'Ur III, parmi lesquelles figure MIO 1107 mais non Wengler 36. Elle reproduit les calculs faits par les savants qui ont publié ces tablettes, et en particulier ceux de

F. Thureau-Dangin, mais ne les étudie pas.

J. Friberg [1990], dans la synthèse très importante qu'il a publiée sur les mathématiques des textes cunéiformes, a considéré ces deux tablettes et écrit : «la surface centrale *ša₃-temen-na* est constituée de pseudo-rectangles. La '*false area formula*' est appliquée à chacun des pseudo-rectangles» [Friberg 1990, p. 542] . L'explication que nous proposons est différente (pour la *false area formula*, voir § 2.2.4).

M. Liverani [1990] a fourni la copie des deux cadastres MIO 1107 et Wengler 36, mais son propos est une réflexion sur le paysage et les formes des champs néo-sumériens et non l'analyse de mécanismes de calcul.

L'ouvrage collectif *Archaic bookkeeping* a présenté une belle copie et une photographie de la face de Wengler 36. Pour le calcul de la zone centrale, les auteurs indiquent que «les diverses parties sont calculées comme si leurs côtés opposés étaient égaux» [Nissen-Damerow-Englund 1993, p. 66–69]. Cette affirmation, incomplète, ne rend pas compte de tous les calculs.

P. Damerow reprend une formulation identique : «les différentes surfaces partielles du *temen* sont calculées comme si les côtés opposés étaient de même longueur» [Damerow 2001, p. 254].

Nous allons expliciter notre méthode sur des exemples simples, puis l'appliquer à la tablette MIO 1107 et nous verrons ensuite comment la mettre en œuvre sur Wengler 36. Mais auparavant il est nécessaire de présenter les notations et les systèmes d'unités utilisés sur les deux tablettes.

1. UNITÉS ET NOTATIONS

Les *longueurs* sont exprimées en «ninda» (1 ninda vaut environ 6 mètres), elles sont écrites le long des côtés, dans un système sexagésimal positionnel. Le scribe utilise deux signes, le chevron qui signifie la dizaine et le clou vertical qui signifie l'unité, à un facteur près de 60^n . L'ambiguïté sur l'ordre de grandeur, inhérente au système d'écriture, est levée par la considération des aires, et par deux autres signes qui marquent la place de l'unité : le signe \neq pour $\frac{1}{2}$ et le signe ∇ pour 600.

Pour notre propre transcription de l'écriture sexagésimale, nous choisissons, selon une convention usuelle dans l'écriture moderne des mathématiques mésopotamiennes, de marquer la position de l'unité par un point-virgule. Nous indiquons ci-après entre parenthèses les longueurs exprimées

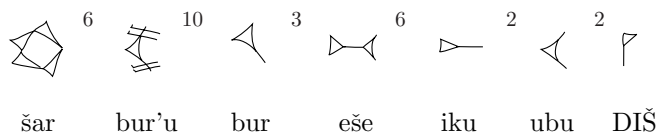
dans le système décimal.

Dans la figure 1,

- NZ est coté \llcorner , sa valeur est 15 ninda, que nous écrivons 15 ; .
- AZ est coté \llcorner , la prise en considération des aires nous permet de choisir 60×6 ninda, et nous écrivons 6 00 ; (360).
- OB , coté $\llcorner \llcorner \llcorner \llcorner$ vaut $1 \times 600 + 1 \times 60 + 3 \times 10 + 2$, nous écrivons 11 32 ; (692).

Pour être tout à fait complet, il faut signaler l'occurrence pour la longueur AO du mot sumérien que nous lisons « la » et qui signifie « moins ». AO , qui s'écrit $\llcorner \llcorner \llcorner \llcorner$ vaut $1 \times 600 + 9 \times 60 + 2 \times 10 - 1$, que nous écrivons 19 19 ; (1159). Nous donnons les dimensions selon les deux notations sexagésimale et décimale sur les dessins des *temen* (figures 6, 7 et 10).

Les aires sont décrites par un système additif où l'on inscrit directement le nombre d'unités en juxtaposant les signes qui ont chacun une valeur concrète fixe. Les unités relèvent d'un système métrologique fixé bien avant l'écriture de ces tablettes. On les représente de manière courante par le diagramme suivant



où les nombres représentent le rapport entre les grandeurs mesurées par les unités successives. Ainsi 1 bur = 3 eše, 1 eše = 6 iku, etc. Pour signifier 5 bur + 2 eše + 3 iku, le scribe inscrit $\llcorner \llcorner \llcorner \llcorner \llcorner \llcorner \llcorner \llcorner \llcorner$.

La correspondance entre longueurs et surfaces peut s'exprimer par une seule relation, soit $1 \text{ iku} = (10 \text{ ninda})^2$, ce qui donne $1 \text{ iku} = \text{environ } 3.600 \text{ m}^2$, $1 \text{ eše} = 21.600 \text{ m}^2$, $1 \text{ bur} = 64.800 \text{ m}^2$, etc.

Pour l'écriture des aires, nous conservons le choix de F. Thureau-Dangin de transformer directement en bur les unités supérieures : pour 3 šar 5 bur'u 1 bur 2 eše 2 iku 1 ubu, nous écrivons donc 231 bur 2 eše 2 iku 1 ubu (figure 1, aire *AOPY*).

Les systèmes d'unités ont été détaillés par M. Powell [1990].

2. UN CADASTRE CHALDÉEN

C'est sous ce titre que F. Thureau-Dangin [1898] a traité de MIO 1107.

On ne dispose pas de photographie de cette tablette de 0,127 m par 0,108 m qui est au musée d'Istanbul, mais des copies qu'il a faites de la face et du revers (figure 1).

Nous désignons par «aire inscrite» la valeur d'aire portée sur la tablette et par «aire calculée» la valeur de l'aire calculée par nous à partir des longueurs inscrites par le scribe, en admettant que les éléments sont rectangles.

Considérons par exemple le triangle CDP . L'aire *inscrite* de ce triangle est égale à la somme des valeurs portées (figure 1) sur la droite du côté CD , la première de 1 bur de «terrain accidenté» et la seconde de 4 bur 1 eše 3 iku de «terrain cultivable», soit un total de 5 bur 1 eše 3 iku. Pour l'aire *calculée*, on lit sur la copie de la tablette les longueurs des côtés. $PC = 1\ 00; (60)$ et $DP = 5\ 30; (330)$. L'aire du triangle, en admettant qu'il est rectangle, vaut $1\ 00; \times 5\ 30; / 2$, soit $2\ 45\ 00;$. On peut faire le calcul dans le système décimal : $60 \times 330 / 2 = 9900$ ninda², que l'on transforme dans le système métrologique défini plus haut en 5 bur 1 eše 3 iku. On peut aussi rester dans le système sexagésimal en notant $2\ 45\ 00; = 2\ 30\ 00; + 15\ 00;$ et en utilisant les tables de conversion mésopotamiennes : pour $2\ 30\ 00;$ on lit 5 bur et pour $15\ 00;$ on lit 1 eše 3 iku. La somme est 5 bur 1 eše 3 iku (on ne connaît de table de conversion qu'un peu postérieure à Ur III). Pour cet élément les aires *inscrite* et *calculée* sont égales.

Le revers de la tablette (figure 1.b) porte les cumuls des aires de la face, totalisés séparément pour la zone périphérique et pour la zone centrale.

2.1 Aires de la périphérie

Les éléments de la périphérie ne comportent pas d'inscriptions disposées tête-bêche. Les calculs se suivent aisément sur le dessin du cadastre de la figure 2. Nous reportons sur un tableau, pour chaque élément, la valeur de l'aire *calculée* ainsi que la différence entre l'aire *inscrite* et l'aire *calculée*.

La somme des aires inscrites des surfaces périphériques figure à la ligne 1 sur le revers de la tablette (figure 1 et § 2.4). Comme le montrent ces calculs, les aires sont calculées dans l'hypothèse d'angles droits.

Cinq éléments de ce tableau ont leur aire répartie en «terrain cultivable» (gan_2) et en «terrain accidenté» (hur-sag), celui-ci couvrant sur la périphérie une aire de 6 bur 1 eše 3 iku.

Il n'entre pas dans notre propos d'analyser élément par élément les

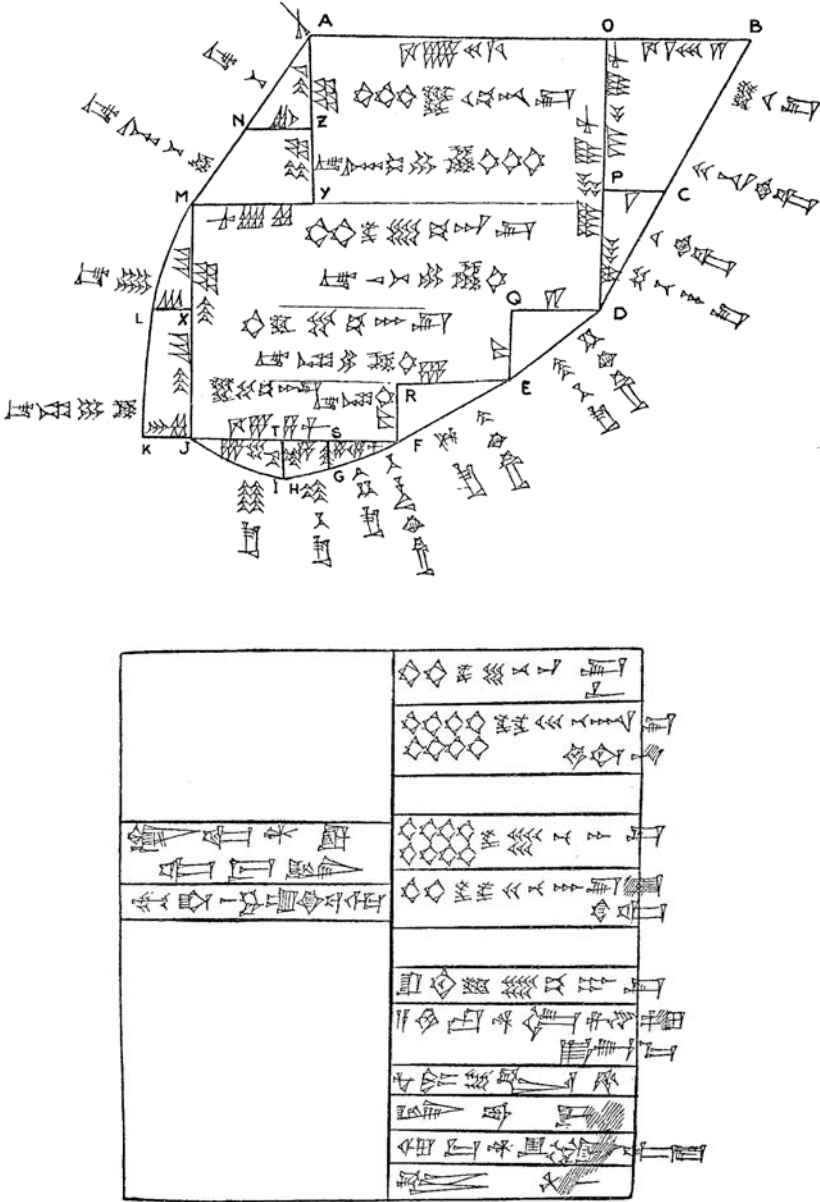


Figure 1. MIO 1107 Face et revers. Copie de F. Thureau-Dangin.

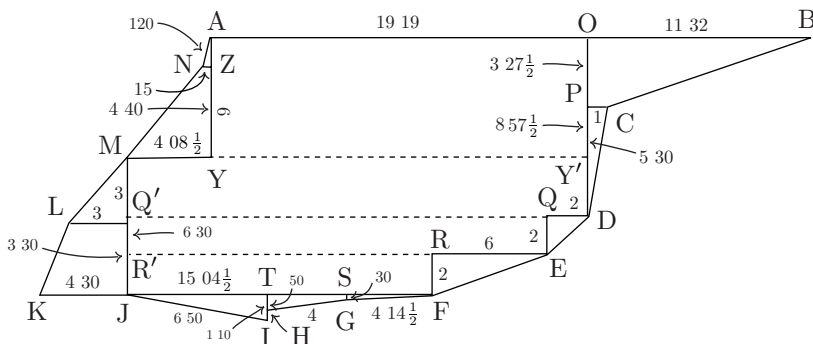


Figure 2. MIO 1107. Dessin du cadastre à l'échelle (dessin de l'auteur).

	dimensions	aires calculées	+ aire inscrite - aire calculée
BCPO	$3\ 27\frac{1}{2}; \times(11\ 32; +1\ 00;)/2$	43 bur 1eše 1 DIŠ	0
CDP	$5\ 30; \times 1\ 00; /2$	5 bur 1 eše 3 iku	0
DEQ	$2\ 00; \times 2\ 00; /2$	4 bur	0
EFR	$6\ 00; \times 2\ 00; /2$	12 bur	0
FGS	$4\ 14; 1/2; \times 30; /2$	2 bur 2 iku 1 DIŠ	+1 ubu
GHST	$4\ 00; \times(30; +50;)/2$	5 bur 1 eše	0
IJT	$6\ 50; \times 1\ 10; /2$	7 bur 2 eše 5 iku 1 ubu	+1 ubu
JKLX	$3\ 30; \times(4\ 30; +3\ 00;)/2$	26 bur 4 iku 1 ubu	0
LMX	$3\ 00; \times 3\ 00; /2$	9 bur	0
MNZY	$4\ 40; \times(4\ 08; 1/2 + 15;)/2$	20 bur 1 eše 3 iku	-1 DIŠ
NAZ	$1\ 20; \times 15; /2$	1 eše	0
	somme des aires calculées	136 bur 1 eše 1 ubu	
	somme des différences	1 ubu 1 DIŠ	
	somme des aires inscrites	136 bur 1 eše 1 iku 1 DIŠ	

différences entre aire inscrite et aire calculée, erreurs, volontaires ou non, qui sont de faible amplitude. Pour *IJT* par exemple, lorsque le scribe inscrit 8 bur, il s'agit peut-être simplement pour lui d'alléger l'écriture, tout en ne commettant qu'une erreur minimale.

2.2. Aires de la zone centrale

2.2.1. *Problème posé.* — On voit les effets de l'imprécision du tracé en considérant les dimensions générales de la partie centrale (figure 6) : pour aller de O à J , le chemin « parallèle » à OA est de $23\ 27; \frac{1}{2}$ ninda en passant par A , et il est de $23\ 04; \frac{1}{2}$ ninda en passant par D , tandis que dans l'autre direction le chemin « parallèle » à OD est de $12\ 30; \frac{1}{2}$ ninda par A et de $12\ 57; \frac{1}{2}$ ninda par D .

Si tous les tracés d'éléments perpendiculaires étaient idéalement orthogonaux et les mesures exactes, les chemins « parallèles » seraient de même longueur. Il n'y aurait que des éléments rectangulaires que le scribe pourrait calculer exactement. Ce n'est pas le cas : la surface que décrit l'arpenteur en reportant les dimensions sur la tablette n'a pas de réalité géométrique définie. Des déviations se sont produites, et en l'absence de triangulation on ne sait pas en quels points. Le calculateur doit donc utiliser un mode de calcul approché.

Nous pensons avoir reconstitué le mode de calcul approché du scribe, qui explique à la fois la double série de calculs et la disposition tête-bêche des résultats. Pour faciliter sa compréhension, nous allons en présenter le principe sur un exemple théorique, un pseudo-*temen* simple calculé dans le système décimal. Nous prendrons ensuite un deuxième exemple théorique qui présente une disposition particulière qui doit faciliter la compréhension de Wengler 36. Puis nous montrerons que l'artifice du double calcul n'est pas limité à ces deux tablettes, mais qu'il est implicite au mode général de calcul des quadrilatères quelconques dans le monde mésopotamien, la « false area formula ». Nous proposerons ensuite une reconstitution complète des calculs effectués par les scribes des deux tablettes.

2.2.2. *Méthode géométrique : exemple théorique.* — Le cadastre de la figure 3.a présente des dimensions qui ne permettent pas que tous ses côtés se coupent à angle droit (car $AB > FE + DC$ et $BC > AF + ED$). Nous allons faire deux calculs approchés différents de détermination de son aire. Nous vérifierons ensuite sur les tablettes que nos calculs correspondent à

ceux des scribes.

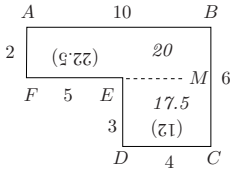


Figure 3.a

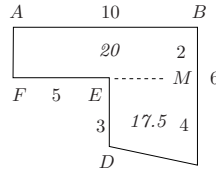


Figure 3.b

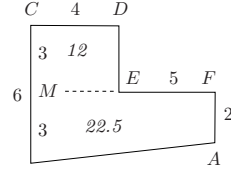


Figure 3.c

- *Premier calcul, S_{AB} , aire de la figure avec la base AB (figure 3.b).*

Nous appelons figure de base AB le cadastre où tous les angles sont droits et toutes les longueurs exactes, excepté les angles (C et D) et la longueur (CD) opposés à AB. La surface se décompose en deux éléments, le rectangle ABMF d'aire $2 \times 10 = 20$ et le trapèze EMCD d'aire $(10-5) \times (3+4)/2 = 17\frac{1}{2}$. On écrit les aires sur la tablette (figure 3.a). Leur somme est $S_{AB} = 20 + 17\frac{1}{2} = 37\frac{1}{2}$. On remarque que la longueur CD, incompatible avec les autres données, n'est pas utilisée dans le calcul.

- *Deuxième calcul, S_{CD} , aire de la figure avec la base CD (figure 3.c).*

En retournant la tablette on met en évidence la figure de base CD où tous les angles sont droits et les longueurs exactes, excepté les angles (A et B) et la longueur (AB) opposés à CD (figure 3.c). La surface est décomposée en un rectangle d'aire $3 \times 4 = 12$ et en un trapèze rectangle d'aire $(4 + 5) \times (3 + 2)/2 = 22\frac{1}{2}$. On écrit les éléments sur la tablette retournée (figure 3.a). Leur somme est $S_{CD} = 12 + 22\frac{1}{2} = 34\frac{1}{2}$. On n'utilise pas la longueur AB, incompatible avec les autres données. Puis on définit la surface du *temen* comme la moyenne arithmétique de S_{AB} et S_{CD} , soit 36.

On a fait deux calculs d'aire, qui ont donné des résultats différents, et on a porté ces valeurs différentes sur la tablette selon une disposition tête-bêche demandée par le déroulement du calcul. C'est la même disposition que l'on voit sur MIO et Wengler. On a ensuite sommé les aires de même orientation puis on a défini l'aire du *temen* comme la moyenne de ces sommes.

2.2.3 Méthode géométrique : deuxième exemple théorique. — Nous avons légèrement modifié (figure 4.a) le plan du cadastre précédent.

Pour la figure de base AB (figure 4.b), les calculs d'aire se font comme précédemment. Les surfaces élémentaires sont un rectangle et un trapèze, respectivement d'aires 20 et 14 (total 34).

Mais lorsque l'on retourne la tablette et que l'on considère la figure de base EF (figure 4.c), on est amené, du fait que $CB = HA$, à tracer trois surfaces, deux rectangles et un trapèze, d'aires respectives 9, 8 et $13\frac{1}{2}$ (total $30\frac{1}{2}$).

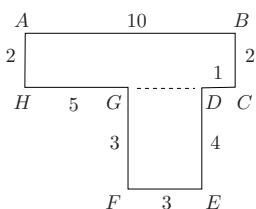


Figure 4.a

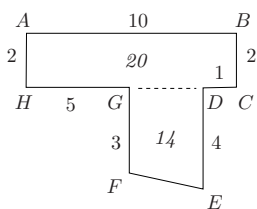


Figure 4.b

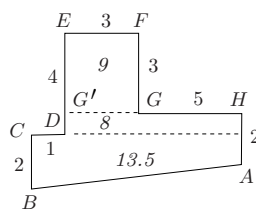


Figure 4.c

L'écriture des aires sur la tablette (figure 3.a) doit tenir compte de cette parcelle qui existe ou n'existe pas selon le côté par où l'on considère la tablette, ce qui demande une présentation particulière. Nous verrons sur Wengler 36 (chapitre 3), dans une configuration analogue à cet exemple, comment le scribe a dessiné les surfaces et écrit les aires.

2.2.4 Règle des arpenteurs (*false area formula*). — La «règle des arpenteurs», appliquée classiquement pour le calcul des quadrilatères, consiste à assimiler une figure de côtés a, b, c, d à un rectangle de côtés $\frac{1}{2}(a+c)$ et $\frac{1}{2}(b+d)$, ce qui permet d'écrire que son aire est égale à $\frac{1}{4}(a+c)(b+d)$. Montrons que la méthode géométrique, que nous avons exposée en 2.2.2, est équivalente à la règle des arpenteurs.

Pour cela, *appliquons la méthode géométrique* à un quadrilatère convexe quelconque :

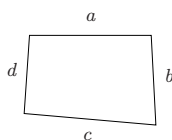


Figure 5.a

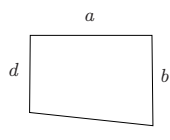


Figure 5.b

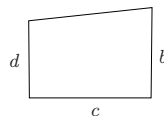


Figure 5.c

Soient S_a et S_c les aires des figures de bases a et c . On a $S_a = \frac{1}{2}a(b+d)$ et $S_c = \frac{1}{2}c(b+d)$. La moyenne arithmétique de ces deux valeurs est égale à $\frac{1}{4}(a+c)(b+d)$. On retrouve bien la même aire que par la règle des arpenteurs.

Ainsi, la méthode traditionnellement utilisée pour le calcul des aires dans le monde mésopotamien apparaît comme l'application au quadrilatère de la méthode par laquelle les scribes déterminent les aires des *temen* de MIO 1107 et Wengler 36.

2.2.5 *Méthode géométrique appliquée à MIO 1107.* — Le premier calcul : appliquons la méthode pour calculer S_{AO} , aire du *temen* de base AO .

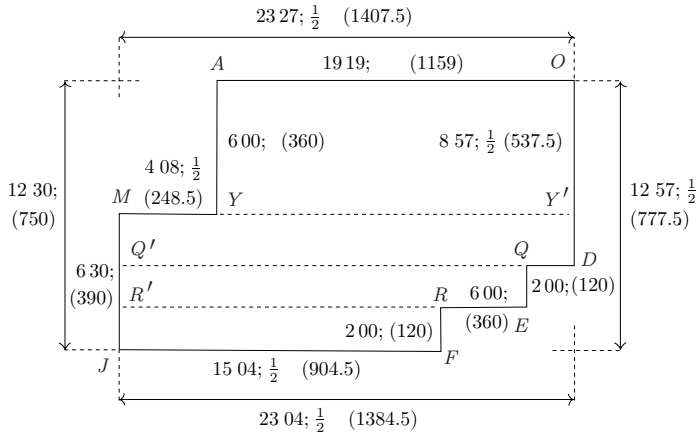


Figure 6. *Temen* base AO . Valeurs décimales entre parenthèses (dessin de l'auteur)

	dimensions	aires calculées	+ aire inscrite - aire calculée
$AOY'Y$	$19\ 19; \times 6\ 00;$	231 bur 2 eše 2 iku 1 ubu	0
$MY'DQ'$	$(19\ 19; + 4\ 08; \frac{1}{2}) \times (8\ 57; \frac{1}{2} - 6\ 00;)$	138 bur 2 eše 2 iku 1 DIŠ	0
$Q'QER'$	$(19\ 19; + 4\ 08; \frac{1}{2} - 2\ 00;) \times 2\ 00;$	85 bur 2 eše 3 iku	0
$R'RFJ$	$(19\ 19; + 4\ 08; \frac{1}{2} - 2\ 00; - 6\ 00;)$ $\times (1\ 32; \frac{1}{2} + 2\ 00;)/2$	54 bur 2 eše 1 iku 1 ubu	1 ubu
	$JR' = 12\ 30; - 8\ 57; \frac{1}{2} - 2\ 00; = 1\ 32; \frac{1}{2}$		
	somme des aires calculées	511 bur 3 iku 1 DIŠ	
	somme des différences	1 ubu	
	somme des aires inscrites	511 bur 3 iku 1 ubu 1 DIŠ	

La longueur FJ n'est pas utilisée dans le calcul. L'application de la règle géométrique s'effectue rapidement, sans aucun tâtonnement, avec une seule erreur, minime.

Le second calcul consiste à déterminer S_{FJ} , aire du *temen* de base FJ .

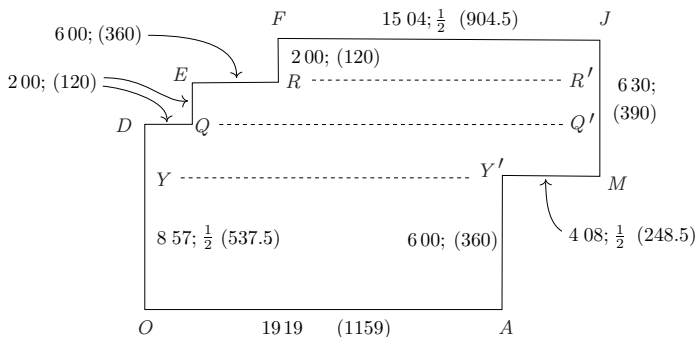


Figure 7. *Temen* base FJ . Valeurs décimales entre parenthèses (dessin de l'auteur)

	dimensions	aires calculées	+ aire inscrite - aire calculée
$FJR'R$	$15\ 04; \frac{1}{2} \times 2\ 00;$	60 bur 5 iku 1 ubu	0
$ER'Q'Q$	$(15\ 04; \frac{1}{2} + 6\ 00; = 21\ 04; \frac{1}{2}) \times 2\ 00;$	84 bur 5 iku 1 ubu	0
$DQ'MY'$	$(21\ 04; \frac{1}{2} + 2\ 00; = 23\ 04; \frac{1}{2})$ $\times (6\ 30; -2\ 00; -2\ 00;)$	115 bur 1eše 1 ubu 1 DIŠ	+ 1 DIŠ
$Y'YAO$	$(23\ 04; \frac{1}{2} - 4\ 08; \frac{1}{2} = 18\ 56;)$ $\times (6\ 27; \frac{1}{2} + 6\ 00;)/2$ $6\ 27; \frac{1}{2} = 2\ 00; +2\ 00;$ $+8\ 57; \frac{1}{2} - 6\ 30;$	235 bur 2 eše 3 iku 1 ubu 1 DIŠ	
	somme des aires calculées	495 bur 2 eše 3 iku 1 ubu	
	somme des différences	+ 1 DIŠ	
	somme des aires inscrites	495 bur 2 eše 3 iku 1 ubu 1 DIŠ	

Ce calcul s'effectue de la même façon que le premier. La différence entre les aires calculées et inscrites ne porte que sur un élément, et pour une valeur très faible.

Nous venons de déterminer les sommes des aires inscrites à l'intérieur des rectangles du *temen*, les unes dans un sens, les autres dans l'autre sens. Elles valent respectivement 511 bur 3 iku 1 ubu 1 DIŠ (base AO) et 495 bur 2 eše 3 iku 1 ubu 1 DIŠ (base FJ). Leur moyenne arithmétique est 503 bur 1 eše 3 iku 1 ubu 1 DIŠ. C'est cette valeur que nous allons retrouver au revers de la tablette (§2.4) désignée comme «aire du *temen*».

2.3. Total des aires

On additionne les aires de la périphérie et du centre inscrites sur la face de la tablette :

- la périphérie : 136 bur 1 eše 1 iku 1 DIŠ (§ 2.1),
 le *temen* : 503 bur 1 eše 3 iku 1 ubu 1 DIŠ (§ 2.2.5),
 total : 639 bur 2 eše 5 iku.

Ces valeurs figurent aux lignes 1, 2 et 5 du revers de la tablette (figure 1 et ci-dessous).

2.4. Revers de la tablette (figure 1)

Le revers présente le total des aires de la périphérie, le total de la zone centrale, une seconde répartition globale entre terrain cultivable et terrain accidenté, puis le total de toutes les aires (inscrites).

Nous proposons une transcription

- 1 2 šar₂ 1 bur'u 6 bur₃ 1 eše₃ 1 iku 1 DIŠ gan₂ bar
- 2 8 šar₂ 2 bur'u 3 bur₃ 1 eše₃ 3 iku 1 ubu 1 DIŠ gan₂ ša₃-*temen*-na
- 3 8 šar₂ 1 bur'u 7 bur₃ 1 eše₃ 2 iku gan₂
- 4 2 šar₂ 2 bur'u 2 bur₃ 1 eše₃ 3 iku gan₂ e₂-ḫur-sag
- 5 šu-nigin₂ 10 šar₂ 3 bur'u 9 bur₃ 2 eše₃ 5 iku gan₂
- 6 a-ša₃ uru ^dšul-gi-sipa-kalam-ma
- 7 nu-banda₃ še-il-ḫa
- 8 lugal-iti-da
- 9 u₃ ur-^dig-alim sa₁₂-du₅
- 10 ib₂-gid₂
- 11 gir₃ inim-^dšara₂ sa₁₂-du₅-lugal
- 12 mu ša-aš-ru-um^{ki} ba-ḫul

et une traduction

- 1 136 bur, 1 eše, 1 iku, 1 DIŠ à la périphérie
- 2 503 bur, 1 eše, 3 iku, 1 ubu, 1 DIŠ au centre
- 3 497 bur, 1 eše, 2 iku de terrain cultivable
- 4 142 bur, 1 eše, 3 iku de terrain accidenté
- 5 soit au total 639 bur, 2 eše, 5 iku de terrain
- 6 territoire du village de Šulgi-sipa-kalam-ma
- 7 responsable Še'ilḫa.
- 8 Lugal-itida
- 9 et Ur-^dIgalim le chef du cadastre

- 10 ont réalisé l'arpentage
- 11 sous l'autorité de Inim-^dŠara₂, chef du cadastre du roi,
- 12 l'année où Šašru a été détruit.

On retrouve bien les cumuls des aires inscrites sur la face. L'aire totale du cadastre est de 41 km², dont 32 km² en terrain cultivable et 9 km² en terrain accidenté. Le cadastre concerne un village dont le nom est forgé sur celui du roi Šulgi : «Šulgi est le pasteur du pays». Le travail des deux arpenteurs est garanti par un représentant royal, Inim-^dŠara₂, bien connu par d'autres tablettes [Maekawa 1996, p. 74–75]. Le nom d'année date la tablette de l'an 42 de Šulgi, ou bien de l'an 6 du règne de son successeur Amar-Sîn (on ne peut pas trancher entre ces deux dates qui ont entre elles un intervalle de 11 ans).

Les arpenteurs ont défini et mesuré cette surface assez complexe de dimensions importantes en suivant un cheminement linéaire le long de la zone centrale, marqué par des changements de direction orthogonaux. Cette disposition est habituelle dans les tablettes de champs, elle minimise le travail sur le terrain et facilite les calculs d'aires puisqu'elle conduit à ne calculer que des éléments rectangulaires. Mais elle a l'inconvénient d'être sensible aux approximations de tracé. La schématisation, que nous avons explicitée sur un exemple théorique, a permis de reconstituer les calculs qu'a menés le scribe de MIO 1107 pour tenir compte des «erreurs» sur les longueurs causées par ces approximations. Elle est susceptible de s'appliquer à tout polygone dont les côtés sont quasi rectangulaires. Nous allons l'utiliser pour reconstruire les calculs du scribe de Wengler 36.

3. WENGLER 36

La très belle copie de la face parue dans *Archaic bookkeeping* [Nissen *et al.* 1990, p. 66], et reproduite figure 8 avec l'obligeante autorisation de Stefan Maul, représente cette tablette de 0,111 m par 0,108 m, provenant de la région de Umma (localité voisine de Lagaš), dont l'original est conservé à la *Freie Universität Berlin*. Pour le revers nous avons une transcription partielle par A. Deimel [1922, p. 61].

La partie centrale, sous un habillage de 49 surfaces élémentaires périphériques (figure 8), a une particularité de forme et de dimensions qui permet une vérification très précise de la méthode géométrique que nous proposons.

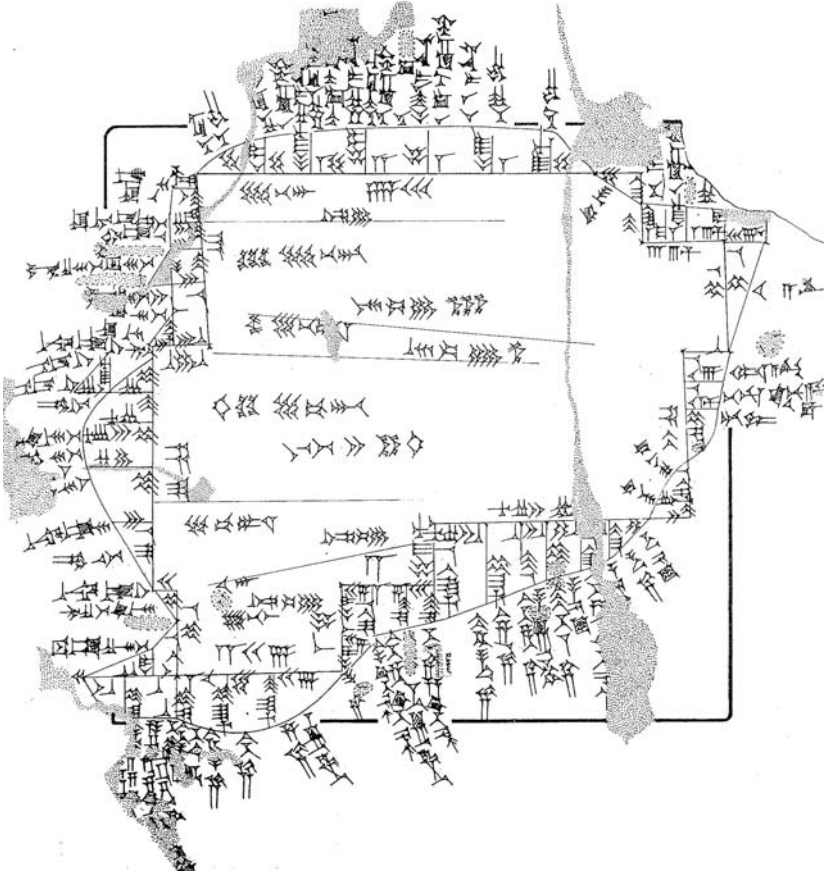


Figure 8. Wengler 36. Face. Copie de S. Maul

3.1. Aires de la périphérie

Les surfaces élémentaires comportent chacune plusieurs natures de terrains. Nous ne donnons pas ici le détail des calculs de ces éléments, tous rectangulaires. Grâce à la grande précision de la copie, on arrive à lire toutes les longueurs, mais pour les aires il y a quelques difficultés dues à des écritures manquantes, en particulier pour les éléments 10-12 et 47 (nous avons conservé la numérotation des éléments de A. Deimel).

Le total des aires de la périphérie est d'environ 45 bur.

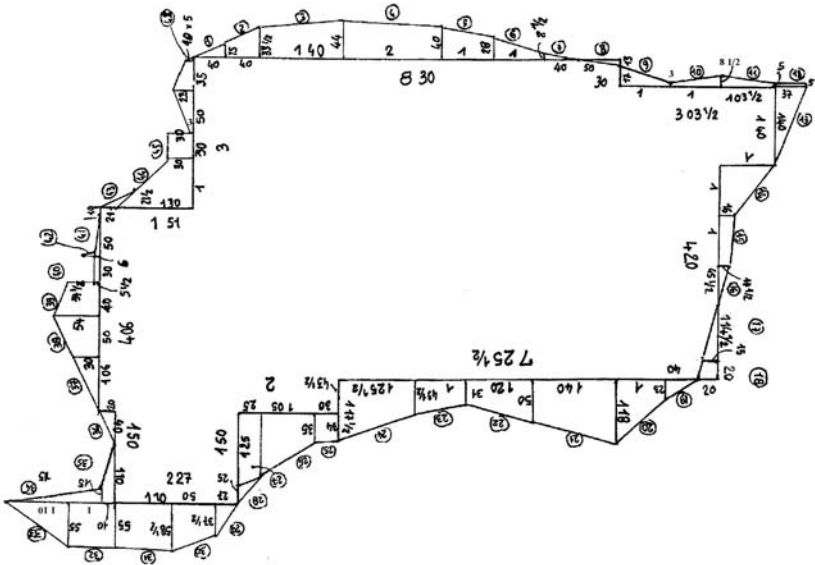


Figure 9. Wengler 36. Dessin du cadastre à l'échelle (dessin de l'auteur)

Le dessin à l'échelle du cadastre (figure 9) montre que le scribe a pris soin d'écrire à la fois les dimensions de chaque élément de la périphérie et les longueurs cumulées qui forment les dimensions du *temen* (figure 10).

3.2. Aires de la zone centrale

a) *Calcul du temen de base KL.* — Appliquons la méthode géométrique à la surface de base *KL*, en lisant directement les longueurs sur le dessin de la figure 10.

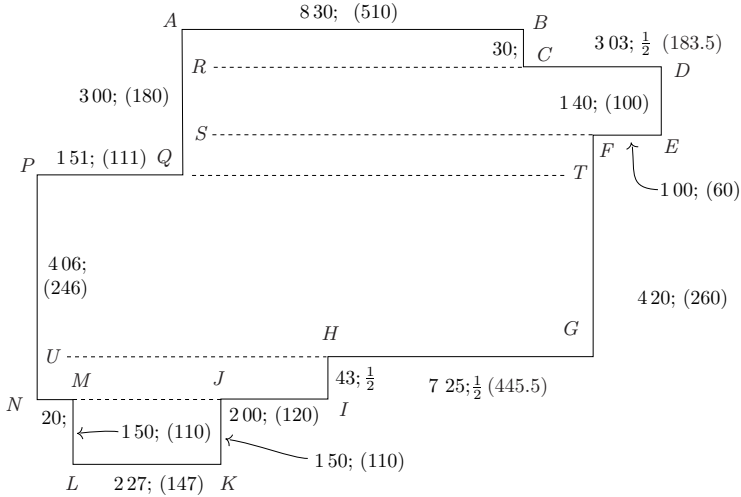


Figure 10. Wengler 36. Zone centrale. Valeurs décimales entre parenthèses (dessin de l'auteur)

	dimensions	aires calculées	+ aire inscrite - aire calculée
<i>MJKL</i>	2 27; × 1 50;	8 bur 2 eše 5 iku 1 ubu 1 DIŠ	-1 iku
<i>UHIN</i>	(2 27; + 20; + 2 00; = 4 47;) × 43; 1/2	6 bur 2 eše 4 iku 1 ubu 1 DIŠ	0
<i>PTGU</i>	(4 47; + 7 25; 1/2 = 12 12; 1/2) × (4 06; - 43; 1/2 = 3 22; 1/2)	82 bur 1 eše 1 iku 1 DIŠ	0
<i>SFTQ</i>	(12 12; 1/2 - 1 51; = 10 21; 1/2) × (4 20; + 43; 1/2 - 4 06; = 57; 1/2)	19 bur 2 eše 3 iku 1 DIŠ	0
<i>RDES</i>	(10 21; 1/2 + 1 00; = 11 21; 1/2) × 1 40;	37 bur 2 eše 3 iku 1 ubu	0
<i>ABCR</i>	(11 21; 1/2 - 3 03; 1/2 = 8 18;) × (22; 1/2 + 30;)/2	7 bur 4 iku 1 ubu 1 DIŠ	
	22; 1/2 = 4 06; + 3 00; - 43; 1/2 - 4 20; - 1 40;		0
	somme des aires calculées	163 bur 5 iku 1 DIŠ	
	somme des différences	-1 iku	
	somme des aires inscrites	163 bur 4 iku 1 DIŠ	

Les valeurs calculées correspondent toutes exactement aux valeurs inscrites, sauf pour l'élément *MJKL* où l'erreur de 1 iku est assez

importante, peut-être de report. Le *temen* est composé de six surfaces élémentaires, cinq rectangles et un trapèze.

b) *Calcul du temen de base AB.* — Nous appliquons cette méthode (angles droits théoriques et longueurs théoriques, sauf pour les éléments opposés à la base) à la surface de base *AB* en lisant les longueurs sur les figures 10 et 11.

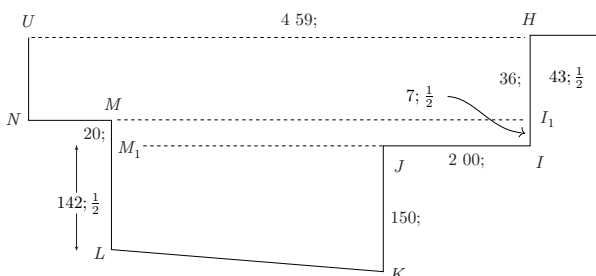


Figure 11. Wengler 36. Détail du temen base *AB* (dessin de l'auteur)

	dimensions	aires calculées	+ aire inscrite - aire calculée
<i>ABCR</i>	8 30; × 30;	8 bur 1 eše 3 iku	0
<i>RDES</i>	$(8\ 30; + 3\ 03; \frac{1}{2} = 11\ 33; \frac{1}{2}) \times 1\ 40;$	38 bur 1 eše 3 iku 1 ubu	0
<i>SFTQ</i>	$(11\ 33; \frac{1}{2} - 1\ 00; = 10\ 33; \frac{1}{2})$ $\times (3\ 00; - 30; - 1\ 40; = 50;)$	17 bur 1 eše 4 iku 1 ubu 1 DIŠ	0
<i>PTGU</i>	$(10\ 33; \frac{1}{2} + 1\ 51; = 12\ 24; \frac{1}{2})$ $\times (30; + 1\ 40; + 4\ 20; - 3\ 00; = 3\ 30;)$	86 bur 2 eše 3 iku 1 ubu	0
<i>UHIN</i>	$(12\ 24; \frac{1}{2} - 7\ 25; \frac{1}{2} = 4\ 59;)$ $\times (4; 06; - 3\ 30; = 36;)$	5 bur 2 eše 5 iku 1 ubu 1 DIŠ	0
<i>MI₁IM₁</i>	$(4\ 59; - 20; = 4\ 39;) \times (43; \frac{1}{2} - 36; = 7; \frac{1}{2})$	1 bur 3 iku	0
<i>M₁JKL</i>	$(4\ 39; - 200;) \times (1\ 42; \frac{1}{2} + 1\ 50;)/2$ $1\ 42; \frac{1}{2} = 3\ 00; + 4\ 06; + 1\ 50; - 30; - 1\ 40;$ $- 4\ 20; - 43 \frac{1}{2}; 0$	9 bur 1 eše 1 iku	
	somme des aires calculées	168 bur 1 ubu	

On constate l'égalité parfaite des valeurs des aires inscrites et calculées.

Le scribe avait cependant à traiter un problème particulier amené par les caractéristiques de dimensions du *temen* : celui-ci, qui comportait six éléments en base KL (figure 10), en présente sept en base AB (figure 11) du fait que $ML = JK$, comme on l'a vu sur un exemple (§ 2.2.3, figure 4). Il y a une difficulté pour noter l'aire du rectangle MI_1IM_1 (figure 11) sur la tablette parce que cette surface existe pour la figure de base AB mais n'existe pas lorsque l'on considère la tablette dans l'autre sens (figure de base KL).

Le scribe a tracé en biais une ligne auxiliaire de séparation des surfaces élémentaires, sous laquelle il a inscrit l'aire de 1 bur 3 iku (figure 12).

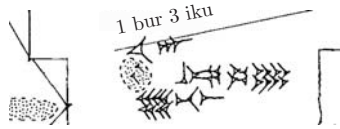


Figure 12. Détail de la copie

La précision de ce résultat, et son aspect inattendu pour qui n'aurait pas analysé la tablette selon notre méthode, sont à notre avis la meilleure preuve que nous avons effectivement reconstitué les calculs du scribe.

c) Aire du temen. — Nous venons de déterminer les sommes des aires inscrites à l'intérieur des rectangles du *temen*, les unes dans un sens, les autres dans l'autre sens. Elles valent respectivement 163 bur, 4 iku, 1 DIŠ (base KL) et 168 bur 1 ubu (base AB). Leur moyenne arithmétique est 165 bur 1 eše 5 iku 1 DIŠ .

C'est cette valeur que nous devrions lire sur le revers, mais nous ne disposons pour celui-ci que d'une transcription partielle où A. Deimel [1922, p. 61] indique que l'aire se termine par 3 iku 1 ubu 1 DIŠ (§ 3.4). Une relecture du revers permettrait peut-être de comprendre la différence.

3.3. Total des aires

Les aires inscrites pour la périphérie ne sont pas totalement lisibles sur la face, nous ne sommes pas en mesure d'en faire la somme exacte, qu'on ne pourrait d'ailleurs pas vérifier sur le revers. L'aire totale est d'environ 210 bur, soit de 14 km^2 dont 11 km^2 pour le *temen*.

3.4. Revers de la tablette

La copie n'en a pas été publiée et la transcription qu'en a donnée A. Deimel est incomplète. Nous proposons une traduction partielle en reprenant avec son accord des éléments du travail (inédit) que B. Lafont a développé à l'occasion du présent article.

1 [] 1 bur₃ 2 eše₃ 1 iku 1 ubu 1 DIŠ gan₂ bar
 2 [] 3 iku 1 ubu 1 DIŠ gan₂ ša₃-temen-na
 7 [] ... erin₂ Umma^{ki}
 9 mu ^dAmar-Sûn-EN lugal-e ur-bi-lum mu-ḫul

1 [] 1 bur, 2 eše, 1 iku, 1 ubu, 1 DIŠ à la périphérie
 2 [] 3 iku, 1 ubu, 1 DIŠ au centre
 7 (référence à la ville) d'Umma
 9 l'année où le roi Amar-Sîn a détruit Urbilum

La tablette date de l'année où le roi Amar-Sîn a détruit Urbilum, c'est-à-dire de l'an 2 de son règne.

CONCLUSION

Les tablettes MIO 1107 et Wengler 36 sont très proches : même forme, mêmes dimensions, même origine, même époque et même contenu : sur la face, le dessin d'un cadastre aux grandes dimensions, dont il s'agit de calculer la surface dans le même système métrologique et, surtout, ce qu'on n'a pas retrouvé ailleurs, même double calcul de la surface centrale.

Ce calcul apparaît comme un moyen de faire face à l'impossibilité où se trouve le scribe de concilier les mesures de longueurs avec l'hypothèse de côtés se coupant tous à angle droit.

Le cheminement des arpenteurs sur le terrain que l'on peut reconstituer à propos de MIO 1107 nous incite à croire, plutôt qu'à un exercice scolaire, à un cadastre véritable, intégré dans le cadre de l'exploitation des ressources de la province.

Wengler 36 est sans doute également un vrai cadastre de la pratique. Mais, à la périphérie, ses auteurs ont construit un édifice complexe, avec de multiples surfaces élémentaires, compliqué à plaisir par les natures variées de terrains. Et, au centre, avec les dimensions du *temen* qui conduisent à la surface fantôme de 1 bur 3 iku, ils ont donné au cadastre un aspect ludique qui fait penser à un exercice théorique. Quoi qu'il en soit, la qualité

visuelle de la tablette, la précision parfaite des calculs et le processus de calcul assez élaboré témoignent du haut niveau de formation du scribe.

Nous avons d'abord imaginé la schématisation géométrique sur MIO 1107 pour donner une compréhension visuelle aisée permettant de reconstituer les calculs. Ensuite, la facilité avec laquelle la méthode s'est appliquée à Wengler 36, l'égalité entre les aires calculées et les aires écrites, ainsi que l'existence de la surface fantôme ont confirmé que notre schématisation correspondait bien à la démarche du scribe, puisque la méthode fournissait, pour la première fois, une explication complète de toutes les valeurs d'aires.

Nous avons aussi pu montrer que le procédé, que l'on pensait totalement isolé, avait une parenté cachée avec le calcul des quadrilatères quelconques par la règle des arpenteurs, si fréquent dans le monde mésopotamien pendant des siècles.

Ce travail, qui conforte les tâtonnements de F. Thureau-Dangin et leur offre un système explicatif à base géométrique, aurait pu, en hommage au grand savant, s'intituler «deux cadastres chaldéens».

Remerciements

Je tiens à remercier Christine Proust et Bertrand Lafont qui m'ont incité à entreprendre ce travail et m'ont apporté leur appui, Stefan Maul qui m'a autorisé à utiliser la copie de Wengler 36, et tous ceux qui ont bien voulu me lire et me critiquer, les rapporteurs de la revue et aussi Gregory Chambon, Jöran Friberg, François Quillien, Marcelo Rede, Joëlle Rigollet et Aline Tenu.

BIBLIOGRAPHIE

DAMEROW, (Peter)

- [2001] 'Kannten die Babylonier den Satz des Pythagoras', dans Hoyrup (Jens) and Damerow (Peter), éd., *Changing Views on Ancient Near Eastern Mathematics*, Berliner Beiträge zum Vorderen Orient, 19 (2001), p. 219–310.

DEIMEL (Anton)

- [1922] Wengler 36, *Orientalia*, V (1922), p. 60–62.

DUNHAM (Sally)

- [1986] Sumerian words for foundation. Part 1 : Temen, *Revue d'assyriologie*, 80 (1986), p. 31–64.

FRIBERG (Jöran)

- [1990] Mathematik, *Reallexikon der Assyriologie*, 7 (1987–1990), p. 542.

LAFONT (Bertrand)

- [1999] Article 'Sumer', *Supplément au dictionnaire de la Bible*, 72 (1999), p. 125–204.

- LIVERANI (Mario)
[1990] The shape of neo-sumerian fields, *Bulletin on Sumerian Agriculture*, V (1990), p. 148–154.
- MAEKEWA, (Kazuya)
[1996] The 'temples' and the 'temple Personnel' of Ur III Girsu-Lagaš, dans Kazuko Watanabe, éd., *Priests and Officials in the Ancient Near East*, Papers of the second Colloquium of the Ancient Near East held at Tokyo 1996, Heidelberg, p. 61–99.
- NISSEN (Hans), DAMEROW (Peter), ENGLUND (Robert K.),
[1993] *Archaic Bookkeeping*, Chicago, 1993.
- OPPERT, (Jules)
[1898] Quelques mots sur le cadastre chaldéen, *Revue d'assyriologie*, 4 (1898), p. 28–33.
- POWELL (Marvin)
[1990] Masse und Gewichte, *Reallexikon der Assyriologie*, 7 (1987–1990), p. 457–517.
- REISNER (George)
[1896] Notes on the Babylonian system of measures of area, *Zeitschrift für Assyriologie*, 11 (1896), p. 417–424.
- THUREAU-DANGIN, (François)
[1898] Un cadastre chaldéen, *Revue d'assyriologie*, 4 (1898), p. 13–20.
[1928] Cadastre chaldéen, *Journal des géomètres-experts français*, 35 (1928), p. 101–105.