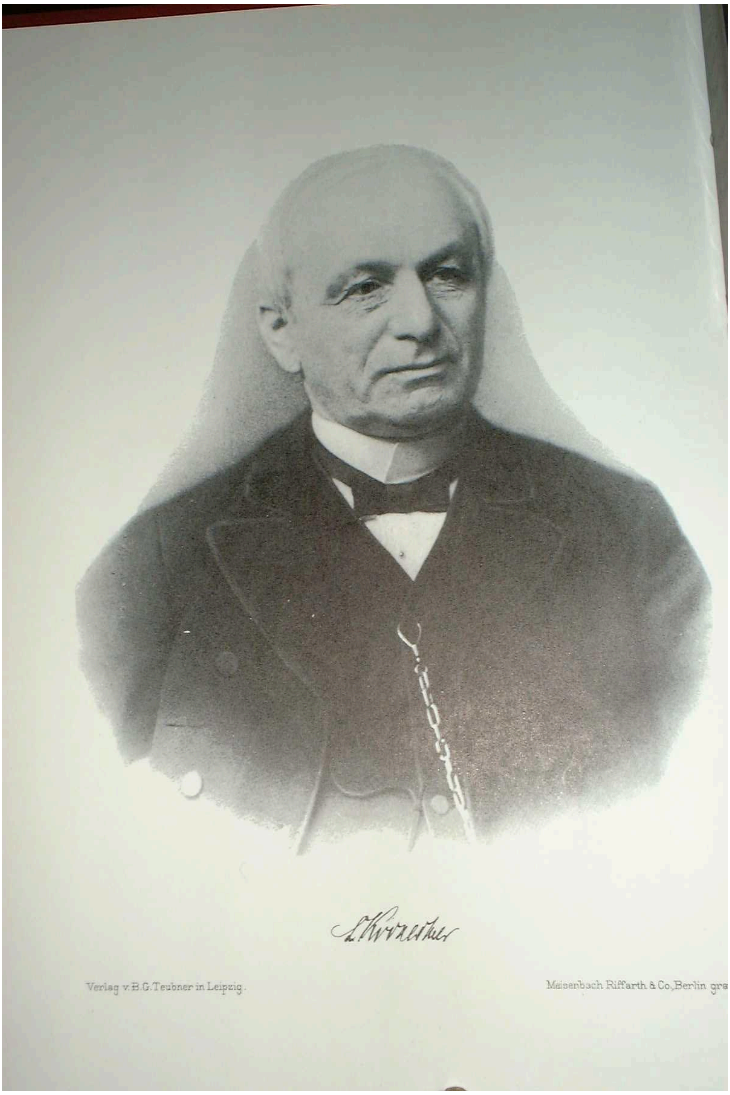


Leopold Kronecker
1823–1891

Revue d'histoire des mathématiques,
7 (2001), p. 207–275.

TEXTES & DOCUMENTS

'SUR LE CONCEPT DE NOMBRE EN MATHÉMATIQUE' COURS INÉDIT DE LEOPOLD KRONECKER À BERLIN (1891)

Retranscrit et commenté par
Jacqueline Boniface et Norbert Schappacher (*)

Résumé. — Le texte que nous présentons est le dernier cours du mathématicien berlinois Leopold Kronecker (1823–1891). Ce cours, publié ici pour la première fois, nous donne des informations importantes sur la philosophie des mathématiques de Kronecker, en particulier sur sa conception du nombre. Il précise, en outre, la position que Kronecker occupa dans le mouvement d''arithmétisation' des mathématiques et permet de mieux comprendre comment, et pourquoi, il se situe à contre-courant de la tendance dominante (animée notamment par Weierstrass, Cantor et Dedekind). Kronecker définit le concept de nombre de façon purement mathématique et vise à intégrer l'algèbre et l'analyse dans une arithmétique telle qu' il l'entend. Certaines de ses positions apparaissent aujourd'hui comme des anticipations de principes constructivistes ou intuitionnistes du XX^{e} siècle.

Abstract. — 'on the concept of number in mathematics' : Leopold Kronecker's 1891 Berlin lectures. — The text published here is the last lecture course, on the notion of number in mathematics, taught by the Berlin mathematician Leopold Kronecker (1823–1891). These lectures, published here for the first time, give interesting insights into Kronecker's philosophy of mathematics and in particular into his concept of number. They clarify Kronecker's position within the movement of 'arithmetization' and allow, in particular, for a better understanding of why and how Kronecker opposed the dominant viewpoint within this movement (held by Weierstrass, Cantor, Dedekind, and others). Kronecker introduced whole numbers mathematically, and proposed to integrate all of algebra and analysis into arithmetic. Today certain positions held by Kronecker may be seen as anticipating constructivist or intuitionist principles of the twentieth century.

(*) Texte reçu le 25 février 2002.

J. Boniface, Équipe GRIMM, Université de Toulouse 2, Département de Mathématiques-Informatique, 5 Allée Antonio Machado, 31058 Toulouse Cedex (France). Courrier électronique : boniface@univ-tlse2.fr.

N. Schappacher, Fachbereich 4 – Mathematik, AG2 Schlossgartenstr. 7, 64289 Darmstadt (Allemagne). Courrier électronique : schappacher@mathematik.tu-darmstadt.de.

Mots clés : nombres, arithmétique, arithmétisation, philosophie des mathématiques, Kronecker.

Classification AMS : 00A30, 01A55, 03A05.

INTRODUCTION

Le document qui suit est la retranscription, augmentée de notes explicatives, du cours que Kronecker prononça à l'Université de Berlin, au second semestre (*Sommersemester*) de l'année universitaire 1890–1891, sous l'intitulé : « Sur le concept de nombre en mathématique ». L'original est un manuscrit établi par plusieurs personnes à partir de notes sténographiques : on ne connaît ni l'auteur des notes, ni ceux du manuscrit qui en a été tiré. Ce cours, qui est le dernier de Kronecker (décédé le 29 décembre 1891), est intéressant à plus d'un titre. D'abord il nous donne une idée vivante de la manière dont Kronecker professait et de son rapport à ses contemporains ainsi qu'à ses maîtres. Ensuite et surtout ce « chant du cygne » constitue une importante source d'information directe sur les conceptions de Kronecker concernant les fondements des mathématiques, notamment la notion de nombre. Kronecker [1887] avait déjà rendu publique sa conception du nombre, ainsi que son programme d'arithmétisation des mathématiques pures. C'est dans la préface programmatique de cet article « Sur le concept de nombre » que selon J. Molk [1909, p. 158, note 78], élève de Kronecker, le verbe 'arithmétiser' (*arithmetisieren*), du moins dans son emploi transitif, apparaît pour la première fois dans la littérature mathématique. Dans le cours présenté ici, Kronecker reprend les thèses de l'article de 1887, tout en y ajoutant des remarques plus générales sur sa philosophie des mathématiques et des précisions concernant les sources de ses conceptions et de ses méthodes. Le ton employé dans le cours est plus libre que dans l'article : le contenu y est émaillé de remarques et d'anecdotes.

Les successeurs immédiats de Kronecker furent très loin de donner unanimement à son programme d'arithmétisation la place qu'il méritait. Par exemple, dans le discours qu'il prononça à l'occasion du 80^{e} anniversaire de Weierstrass, Felix Klein reprenait la notion d'arithmétisation introduite par Kronecker en englobant sous ce terme des tendances aussi opposées que la « rigueur weierstrassienne » (*die Weierstrass'sche Strenge*) dans les fondements de l'analyse et l'axiomatique de Peano [Klein 1895, p. 233]. Pire encore, deux ans après le disours de Klein, David Hilbert, dans la préface de son célèbre *Zahlbericht* [Hilbert 1897], dressait le vaste tableau du développement des mathématiques pures, « placées sous le signe du nombre », sans même citer le programme d'arithmétisation de

Kronecker. À peu près au même moment, Alfred Pringsheim citait, dans l'*Enzyklopädie*, le programme de Kronecker comme une simple variante de l'arithmétisation des nombres irrationnels, à côté des définitions de ces nombres par Weierstrass, Cantor et Dedekind [Pringsheim 1898, p. 58, § 8]. Le compte rendu de Pringsheim critiquait en outre le programme de Kronecker sans prendre en compte sa motivation constructiviste. La version française de ce chapitre de l'*Encyclopédie*, rédigé par Molk, bien qu'elle accordât au point de vue de Kronecker plus d'espace, de détails et de sympathie, concluait tout de même par une note sceptique, assez proche de la critique de Pringsheim [Molk 1909, p. 163][1]. Ainsi à la fin du XIXe siècle, ce programme était soit carrément passé sous silence, soit privé de son fondement philosophique.

À l'opposé des comptes rendus très globalisants sur l''arithmétisation', le cours de Kronecker reproduit ici permet de comprendre pour quelles raisons et de quelle manière Kronecker voulait 'arithmétiser' les mathématiques pures. Les raisons de cette arithmétisation et la manière dont elle est accomplie se manifestent dans les thèses 'philosophiques' de Kronecker et dans l'énoncé d'un principe constructiviste qui place Kronecker en opposition radicale à tous les auteurs de l'arithmétisation au sens précédent. Ce principe affirme que « les définitions des sciences empiriques, c'est-à-dire des mathématiques et des sciences de la nature [...] ne doivent pas seulement être non contradictoires, mais [qu'] elles doivent être puisées dans l'expérience. Et, ce qui est encore plus essentiel, [qu'] elles doivent comporter en elles-mêmes le critère selon lequel on peut décider, dans chaque cas particulier, si la notion donnée est, ou non, à subsumer sous cette définition » (p. 28)[2]. Kronecker souligne une conséquence de ce principe, qui sera ensuite au centre des thèses intuitionnistes : « J'aimerais ajouter que le théorème de contradiction est à employer seulement avec la plus grande prudence et que les déductions par l'absurde ne démontrent quelque chose que si elles peuvent immédiatement être transformées en conséquences positives » (p. 29).

Kronecker expose ses principales idées 'philosophiques' sur les mathématiques dans les quatre premières leçons de ce cours et les résume en

[1] Pour Molk, voir par exemple [Hermite 1884].

[2] La pagination indiquée est celle du manuscrit, reproduite en marge du texte publié plus loin.

quatre thèses, énoncées dans la leçon 4. La première thèse : « la discipline mathématique ne tolère aucun esprit de système » (p. 17), justifie la forme même du cours, suite d'aphorismes plutôt que présentation systématique. La deuxième thèse permet de comprendre la conception kroneckerienne du nombre. Elle affirme que « la mathématique est à traiter comme une science de la nature, car ses objets sont aussi réels que ceux de ses sciences-sœurs » (p. 18). Cette conception des mathématiques, notamment de l'arithmétique, était moins surprenante en 1891 qu'elle ne l'est aujourd'hui. Et Kronecker est absolument conséquent en n'acceptant, comme objets de cette science, que les seuls nombres naturels (ordinaux), qui constituent selon lui *le* donné immédiat. Rappelons cependant que cette conception 'dogmatique' du nombre entier était loin d'être partagée par tous les mathématiciens de l'époque ; Heine ou Hankel, par exemple, adoptaient une position plus formaliste et considéraient les nombres comme simples signes ; *a contrario*, le courant logiciste auquel s'oppose explicitement Kronecker, initié par G. Frege, cherchait à fonder le nombre dans la logique.

Les troisième et quatrième thèses citées par Kronecker sont au cœur même de son programme d'arithmétisation. Elles énoncent la nécessité d'éviter tout empiètement d'une discipline sur une autre (3^e thèse) et d'utiliser, dans chaque discipline, une méthode conforme à la matière étudiée (4^e thèse). Le respect de cette nécessaire séparation des disciplines est évoqué dans le titre même du cours, qui indique bien qu'il s'agit, pour Kronecker, de rechercher les fondements de la mathématique *dans* la mathématique elle-même et non dans une autre discipline. Ce faisant, Kronecker évite deux écueils. Le premier, qu'il considère comme une maladie infantile dont ont souffert les sciences de la nature et la mathématique, au début du XIX^e siècle, par manque de confiance dans leurs méthodes, consiste en un empiètement de la philosophie sur ces sciences. Sont accusés de cet empiètement Hegel et Schelling. Le second écueil est au contraire une maladie de vieillesse : il consiste à penser que la mathématique peut dominer tout le réel, que tout peut être mathématisé. Kronecker vise ici explicitement Peirce et Peano, c'est-à-dire un formalisme qu'il trouve excessif.

La séparation des différentes disciplines doit aussi, selon Kronecker, s'appliquer à l'intérieur de la mathématique. Kronecker y distingue trois parties qu'« il faut, pour l'analyse des notions mathématiques fondamentales, séparer les unes des autres de la façon la plus stricte » (p. 8). Ce sont « la mécanique, qui opère avec la notion de temps, la géométrie, qui étudie les relations spatiales indépendantes du temps, et la mathématique dite pure, dans laquelle n'interviennent ni le temps ni l'espace, et que je veux appeler 'arithmétique' » (p. 10–11). La nécessité de cette séparation vaut surtout pour les concepts fondamentaux qu'il faut fixer de façon univoque ; un concept trop général est, en effet, flou. Kronecker pense notamment au concept de grandeur qui perd en précision lorsqu'il est utilisé pour les trois disciplines mathématiques. Il souligne (p. 15) que « tout ce qui n'appartient pas à la mécanique et à la géométrie, et que je veux rassembler sous l'intitulé d'arithmétique, devrait être effectivement arithmétisé ». 'Arithmétiser' consiste, pour Kronecker, non seulement à *réduire* les objets mathématiques aux entiers positifs, mais aussi à n'utiliser que des méthodes arithmétiques. Ainsi l'arithmétique, notamment celle incarnée dans l'œuvre de Gauss, doit servir de modèle, selon Kronecker, à la mathématique pure tout entière. L'adjonction d'indéterminées et l'utilisation de congruences par lesquelles Kronecker *évite* les concepts de nombre négatif et de nombre fractionnaire, par exemple, sont d'origine gaussienne.

Après l'exposé de sa 'philosophie' des mathématiques, Kronecker entreprend le développement de sa conception du nombre. Celle-ci s'appuie sur deux notions, fondamentales pour Kronecker, qui sont héritées de Gauss : la notion d'*équivalence* et la notion d'*invariant*. Une définition de la relation d'équivalence, très proche de la définition actuelle, est donnée dans la leçon 5. La notion d'invariant est liée à celle de relation d'équivalence ; elle permet à Kronecker d'éviter l'utilisation des classes d'équivalence. Le terme 'invariant', dû à Sylvester, provient de la théorie des formes algébriques. La théorie des invariants se développe dans la seconde moitié du XIX^{e} siècle d'une part en Angleterre, grâce aux travaux de Cayley et de Sylvester, d'autre part en Allemagne, notamment avec les travaux de Aronhold, Clebsch, Gordan et Hilbert. Selon Kronecker, la recherche des invariants, dans le sens le plus général, est « le plus beau problème de la mathématique », c'est même « son seul problème », plus encore « c'est l'unique problème de toutes les sciences en général » (p. 21).

Pour définir le nombre cardinal, Kronecker prend la relation de bi-univocité entre systèmes finis d'objets distincts comme relation d'équivalence, et un système de la classe, ou plus précisément, la collection des premiers nombres ordinaux (voire de doigts de la main), comme invariant. Ainsi, par exemple, « trois doigts est avant tout l'invariant caractéristique de la classe qui consiste seulement en la collection de trois objets » (p. 26). Cette définition du nombre par Kronecker diffère fondamentalement de la définition du nombre, héritée d'Euclide, comme collection d'unités. Kronecker critique entre autres la définition de Weierstrass, reprise par Biermann dans son ouvrage sur la théorie des fonctions analytiques [Biermann 1887], qui est sur ce modèle. La définition de Kronecker est en fait assez proche des définitions logicistes de Frege ou Russell. Selon ce dernier, « le nombre d'une classe est la classe de toutes les classes semblables à une classe donnée » [Russell 1903, § 111, p. 115]. La définition de Frege, antérieure de 18 ans à sa 'redécouverte' par Russell en 1901, énonce en termes de concepts ce que Russell a énoncé en termes de classes : « le nombre qui appartient au concept F est l'extension du concept : 'équinumérique au concept F' » [Frege 1884, § 68, p. 194]. Le point commun aux trois définitions est qu'elles s'appuient sur une relation d'équivalence : la bi-univocité entre classes (ou entre extensions de concepts). La définition de Kronecker diffère par deux points des deux définitions logicistes. D'abord en ce qu'elle suppose *donnée* la suite naturelle des nombres ordinaux, alors que les deux autres définitions prétendent définir le nombre à partir de la seule logique. Ensuite en ce que Kronecker remplace la classe des classes russellienne, ou l'extension du concept 'équinumérique au concept F' frégéenne, qui en général contiennent une infinité de classes ou de concepts, par *un* représentant de cette classe. Le premier point de divergence permet à Kronecker d'ancrer sa définition du nombre dans la mathématique et non dans la logique. Le second point, le remplacement d'une classe par un représentant de celle-ci, est, selon Kronecker, utilisé avec profit par toutes les sciences. « Ainsi, dit-il, la logique ne connaît vraiment qu'un seul homme mortel, Cajus [...], alors que dans la science juridique c'est toujours Titus qui doit payer comme bouc-émissaire. Il apparaît ainsi à chacun, même sans document d'authentification, que dans un cas Cajus, dans l'autre Titus, représente l'espèce humaine en général » (p. 32). Sa conception du nombre apparaît à Kronecker satisfaisante tant du point de vue logique que du point de vue pratique. Par cet ancrage de l'arithmétique dans le réel, elle parvient à éviter un double écueil ; elle évite, par le choix d'un représentant concret, la manipulation des classes infinies, source de paradoxes, et elle évite le *hiatus* qui apparaît entre la définition logiciste et les nombres de la réalité.

À partir de son concept de nombre, Kronecker peut sans peine définir les opérations directes de l'arithmétique, l'addition et la multiplication ; ce qu'il fait de façon assez classique. En ce qui concerne les opérations réciproques, la soustraction et la division, ses vues sont beaucoup plus originales ; ce sont elles qui lui ont valu de nombreuses critiques. Elles sont en fait les conséquences directes des principes qui régissent sa philosophie des mathématiques. Selon Kronecker, en effet, le concept de nombre est un concept purement arithmétique lié à l'idée de dénombrement et doit demeurer tel. L'élargissement du concept de nombre aux nombres négatifs, puis aux nombres fractionnaires, corrélatif de l'usage de la soustraction et de la division, conduirait nécessairement, selon Kronecker, à une *dévaluation* de ce concept à laquelle il s'oppose. Il propose une alternative à celle-ci à partir de la critique du manuel d'arithmétique de Hermann Schubert [1885]. Cette alternative évite les concepts de nombre négatif et de nombre fractionnaire par le moyen des indéterminées et des congruences.

Les concepts de nombre négatif et de nombre fractionnaire étant évités en tant que concepts fondamentaux de l'arithmétique, celui de nombre irrationnel le sera *a fortiori*. L'irrationalité est un concept géométrique et doit, selon Kronecker, rester dans le domaine géométrique. Notons que c'est dans la discussion sur les « grandeurs irrationnelles » que le cours de 1891 s'écarte le plus de l'article « Sur le concept de nombre » de 1887. Dans ce dernier, Kronecker réservait un sort particulier aux nombres irrationnels algébriques. Ceux-ci sont en effet complètement connus, à conjugaison près, de manière incontestablement arithmétique, par les polynômes dont ils sont les racines : il suffit donc d'opérer avec les polynômes, à congruence près modulo une équation irréductible. De plus, Kronecker donnait, dans la dernière partie de l'article, une méthode de séparation des conjugués réels, dérivée de la méthode de Sturm. Dans le cours, le cas des nombres irrationnels algébriques n'est pas traité à part. Une discussion générale sur les irrationnels rappelle celle que l'on trouve dans le grand traité de 1888 *Sur la théorie des nombres complexes* *généraux et des systèmes de modules*[3]. Ainsi Kronecker aborde le sujet (p. 61) par la recherche d'une approximation rationnelle de π, déduite du calcul de volumes de boules dans l'espace.

Dans la dernière partie du cours, Kronecker apporte des précisions sur sa conception de l'arithmétisation de l'analyse[4]. Les points essentiels de cette dernière partie peuvent se résumer comme suit :

(I) Dans les applications de l'analyse, une approximation rationnelle, à un certain ordre de précision, est souvent suffisante pour la connaissance d'une quantité irrationnelle.

(II) Lorsque cela est nécessaire, on peut connaître une quantité irrationnelle de façon exacte par la méthode des indéterminées et des congruences (les *Modulsysteme* de Kronecker).

(III) Les théories qui définissent l'ensemble des nombres réels à partir d'ensembles infinis de nombres rationnels, suites de Cauchy ou coupures de Dedekind *arbitraires*, sont inacceptables du point de vue constructiviste de Kronecker.

Le cours se termine par une très brève allusion aux nombres complexes généraux qui rappelle le début du traité sur les *Modulsysteme* [Kronecker, *Werke*, III-2, p. 3–4], ainsi que sur quelques réflexions pédagogiques qui peuvent paraître un peu naïves. Quant aux réactions des contemporains à ce cours de Kronecker, nous connaissons celle, agacée, de Georg Cantor (voir note 51 *infra*).

Sans prendre parti pour l'arithmétique de Kronecker contre le « brouillard (*Nebel*) de généralité » qui enveloppe, selon lui, la théorie de Dedekind (p. 70–71), on ne peut que reconnaître aujourd'hui la très grande rigueur et l'intérêt tant pratique que théorique des méthodes finitaires de Kronecker. Et l'on est tenté d'évoquer Hermann Weyl, qui, dans son ouvrage *Das Kontinuum*, fut amené à se limiter à une notion arithmétique du continu (selon des règles logiques précisément explicitées), beaucoup plus pauvre que celle utilisée dans l'analyse classique. Les problèmes abordés par Weyl étaient tout à fait analogues à ceux qu'avait affrontés Kronecker :

[3] On peut rapprocher la fin de la onzième leçon du cours de [Kronecker 1888, p. 80–84]. Et les deux dernières leçons (12 et 13) des développements de [Kronecker 1888, p. 90 *sqq.*].

[4] On peut consulter aussi à ce propos [Molk 1909, p. 159–163], et [Kronecker 1901, p. 4] où Kronecker associe l'arithmétisation de l'analyse aux travaux de Dirichlet.

presqu'en écho à ce dernier, il mettait en évidence un cercle vicieux qui en dérivait, « voilé par la nature nébuleuse (*nebelhafte Natur*) de la théorie habituelle des ensembles et des fonctions » [Weyl 1918, p. 23].

LE MANUSCRIT

Le cahier transcrit ici fait partie d'une collection de notes de cours de Kronecker que Kurt Hensel avait dans sa bibliothèque et qui lui a servi de base pour la publication partielle des cours de Kronecker réalisée au début du XX^e^ siècle. Après la mort de Hensel (le 1er juin 1941 à Marburg), une de ses belles-filles a mis en vente sa très importante bibliothèque mathématique. Seules les *Reichsuniversitäten* fondées dans un but idéologique par le régime hitlérien, en terrre nouvellement conquise (à Poznan, Prague, Strasbourg et Vienne) disposaient, pendant la guerre, de fonds d'acquisition importants. C'est à Strasbourg qu'elle fut vendue et intégrée, après la guerre, à la bibliothèque de l'Institut de mathématique, aujourd'hui bibliothèque de l'Institut de Recherche Mathématique Avancée (IRMA) de Strasbourg[5].

On trouve donc aujourd'hui dans le coffre de la bibliothèque de mathématiques, à Strasbourg, 25 cahiers de notes de cours manuscrites, parfois en plusieurs exemplaires, la plupart superbement reliés. L'essentiel de cette collection donne diverses versions des cours récurrents que donnait Kronecker sur l'arithmétique (allant jusqu'aux techniques analytiques en théorie des nombres), sur la théorie des déterminants et la théorie des équations algébriques. Il y a aussi deux cahiers sur les intégrales définies.

Le cours transcrit ici est plutôt isolé dans cet ensemble. Nous n'avons qu'un seul cahier relié, écrit par deux personnes différentes (la première jusqu'à la page 32, la seconde de 33 à la fin). Elles l'ont fait à partir de notes sténographiques dont nous ne disposons plus. Le lecteur trouvera, dans cet article, des échantillons des deux graphies. Le cahier mesure

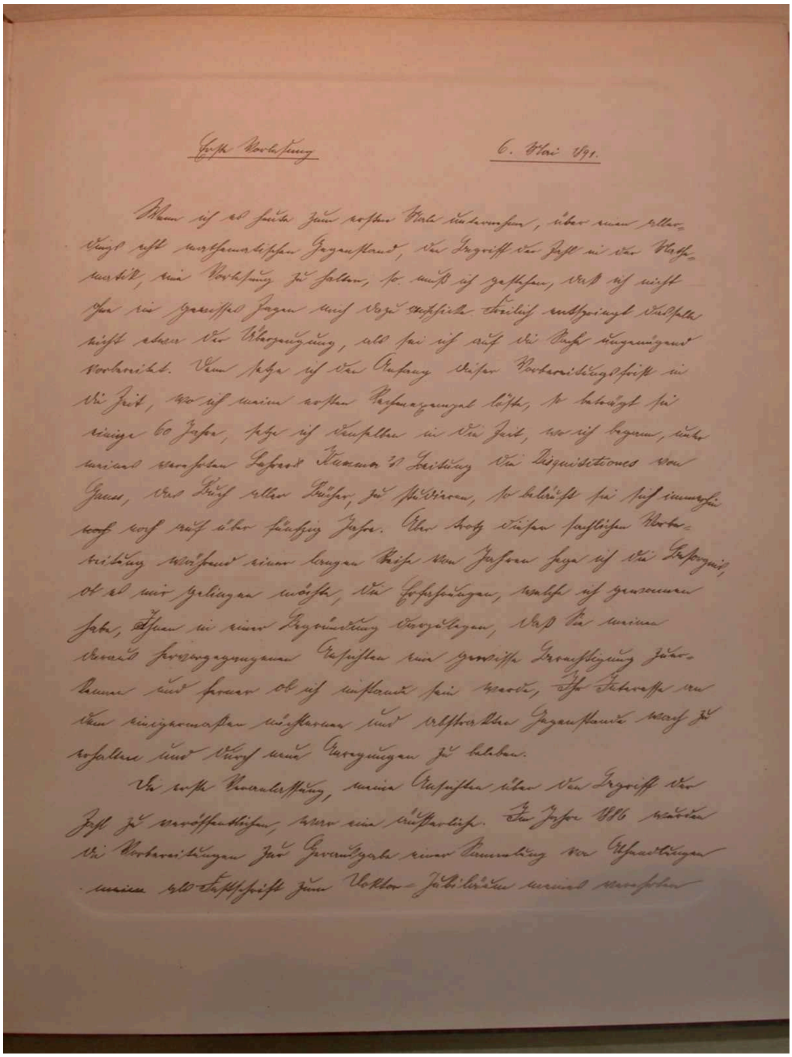
[5] Les détails de la vente se trouvent dans la correspondance de Helmut Hasse dans la *Handschriftenabteilung* de la *Staats- und Universitätsbibliothek de Göttingen.*

Signalons en passant que la correspondance de Kronecker, qui était aussi en la possession de Kurt Hensel, ne fut pas vendue avec sa bibliothèque, mais donnée à Helmut Hasse à Göttingen. D'après les recherches de H.M. Edwards, elle fut détruite après la guerre lors d'une explosion dans le réseau de mines de sel, près de Göttingen, où on l'avait transférée, pour la protéger des raids aériens (dont Göttingen fut finalement presque épargnée).

20×25 cm. Seul le recto de chaque page a été utilisé, exception faite de la citation complète du poème de Schiller sur le verso de la page 21. Les autres citations données par Kronecker dans le cours et indiquées par des numéros dans le manuscrit n'y figurent pas ; nous les avons restituées lorsque cela nous a été possible. Et nous avons placé entre crochets la version corrigée des erreurs évidentes des scribes (notamment dans l'écriture de noms, de citations en langue étrangère ou dans les formules). Nous avons pris le parti d'unifier la présentation des débuts de leçon selon le modèle établi par le premier scribe (le second n'inscrit que la date, en haut à droite du texte de la leçon). La pagination originale du cahier est indiquée dans la marge. Les notes explicatives en bas de pages sont évidemment les nôtres.

Remerciements

Nous remercions vivement Christine Disdier, bibliothécaire, dont la disponibilité sans faille nous a facilité l'accès au coffre de la Bibliothèque des mathématiques de Strasbourg.



Manuscrit du cours de L. Kronecker
conservé à la bibliothèque de l'IRMA, Strasbourg

ÜBER DEN BEGRIFF DER ZAHL IN DER MATHEMATIK

Öffentliche Vorlesung des Herrn Prof. Dr. L. Kronecker,

gehalten an der Friedrich Wilhelms Universität zu Berlin im Sommer Semester 1891.

Nach stenographischen Aufzeichnungen.

Erste Vorlesung — 6. Mai 1891.

Wenn ich es heute zum ersten Male unternehme, über einen allerdings echt mathematischen Gegenstand, den Begriff der Zahl in der Mathematik, eine Vorlesung zu halten, so muß ich gestehen, daß ich nicht ohne ein gewisses Zagen mich dazu entschließe. Freilich entspringt dasselbe nicht etwa der Überzeugung, als sei ich auf die Sache ungenügend vorbereitet. Denn setze ich den Anfang dieser Vorbereitungsfrist in die Zeit, wo ich meine ersten Rechenexempel löste, so beträgt sie einige 60 Jahre, setze ich denselben in die Zeit, wo ich begann, unter meines verehrten Lehrer Kummer's Leitung die Disquisitiones von Gauss[6], das Buch aller Bücher, zu studieren, so beläuft sie sich immerhin noch auf über fünfzig Jahre. Aber trotz dieser sachlichen Vorbereitung während einer langen Reihe von Jahren hege ich die Besorgnis, ob es mir gelingen möchte, die Erfahrungen, welche ich gewonnen habe, Ihnen in einer Begründung darzulegen, daß Sie meinen daraus hervorgegangenen Ansichten eine gewisse Berechtigung zuerkennen und ferner, ob ich imstande sein werde, Ihr Interesse an dem einigermaßen nüchternen und abstrakten Gegenstande wach zu erhalten und durch neue Anregungen zu beleben.

Die erste Veranlassung, meine Ansichten über den Begriff der Zahl zu veröffentlichen, war eine äußerliche. Im Jahre 1886 wurden die Vorbereitungen zur Herausgabe einer Sammlung von Abhandlungen als
1|2 Festschrift zum Doktor-Jubiläum meines verehrten | Kollegen Herrn Zeller getroffen, deren erste ein Aufsatz von Helmholtz war. Zu derselben Zeit hatte ich in der Akademie eine Vorlesung gehalten über die Art, wie ich den Zahlbegriff in meinen Kollegien vorzubereiten pflege. Helmholtz meinte, es sei wohl sehr am Platze, daß ich meine Ansicht auch in der Zeller-Sammlung kundthäte. Dieser Aufforderung bin ich nachgekommen

[6] *Cf.* [Gauss 1801].

und habe meine Arbeit in einer geeigneten Einschränkung in derselben abdrucken lassen. Ich habe dann dieselbe in einer etwas ausführlicheren Fassung in dem Journal für Mathematik nochmals gegeben[7]; es ist literarisch daran angeknüpft worden und es hat natürlich an Einwürfen nicht gefehlt. So wurde ich zu einer eingehenden Ausführung meiner Ansichten veranlaßt, welche ich in einer Reihe von Publikationen niedergelegt habe.

Gestatten Sie mir, daß ich an die Erwähnung dieser äußeren Veranlassung noch eine persönliche Reminiszenz knüpfe. Eine gestrige Begegnung mit meinem früheren Lehrer, dem Philosophen Werder[8], erinnerte mich an den Beginn meiner Studienzeit. Es sind jetzt genau fünfzig Jahre her, daß ich auf der hiesigen Universität meine erste akademische Vorlesung hörte; — ich bin also jetzt nach der studentischen Redeweise in mein 101. Semester eingetreten. Damals in meinem ersten Semester hörte ich nicht nur Zahlentheorie und eine Anwendung der Analysis bei Dirichlet, sondern auch « über Logik und Metalogik » bei Werder. Ihn, der jetzt im 86. Lebensjahre steht, traf ich gestern in voller Frische auf einem Spaziergange im Tiergarten. Zu seiner Zeit, unter dem Ministerium Altenstein, stand die
2|3 Hegelsche Philosophie im blühendsten | Ansehen. Werder war ein Schüler Hegels. Er wußte die trockene Hegelsche Logik und Metaphysik durch seine poetische und phantastische Art ihrer Behandlung schmackhaft zu machen und die Zuhörer durch den Schwung seiner Rede zu begeistern. Im Jahre 1841 gab Werder den ersten Teil eines Kompendiums heraus als Kommentar und Ergänzung zu Hegels Logik. Die Logik in dem Werderschen Buche schließt mit folgender Erörterung der 'Eins' (1)[9].

---

[7] *Cf.* [Kronecker 1887].

[8] Karl Werder fait partie des représentants dits 'vieux hégéliens' (*althegelianisch*) de l'école hégélienne. Concernant l'attribution des postes universitaires, cette école fut systématiquement protégée par la politique du ministère prussien de la culture (voir l'allusion de Kronecker à ce sujet quelques lignes plus loin). Pour l'orientation générale, on pourra consulter [Stuke 1974].

[9] Citation manquante de [Werder 1841]. Le texte principal du chapitre "Eins, Viele Eins, Ein Eins" (p. 211–216 de la première édition 1841) se termine comme suit : « Als Ein Eins zu seyn ist die Wahrheit des Eins, nur so ist es, und so ist es für sich oder unendlich. So aber spricht es sich aus, indem es sich vernimmt als Nichts-Anderes. Dies Negative ist seine Kraft, sein Leben, sein Geist, der springende Punkt in ihm, seine Qualität. Als Eins ist es nur geworden — es ist wohl da, aber nicht für sich — so ist es nur erst in sich, einfach, verschlossen, unbegreiflich sich selber. Als Nichts-Anderes erklärt es sich als die Fülle seiner selbst und ist das Werden alles dessen, was zu ihm geworden, als sein Werden aus sich. Es ist für sich dies Alles als es selber, als Eins.

Auch bei Hegel kommt ein Kapitel über die Zahl vor. Er beginnt mit der Quantität und geht alsdann über zum Quantum. Das Quantum wird in seiner Bestimmtheit die Zahl. Dieselbe wird im Vergleich mit andern Begriffen schlecht gemacht : « Die Zahl ist die gleichgültige Bestimmtheit, sie ist träge »[10]. Aber auch sehr wertvolle Bemerkungen finden sich bei Hegel. So sagt er von Euklid : « Diese Alten haben auch ihren Wissenschaften plastischen Charakter gegeben, ihre Vorstellung streng in der Eigentümlichkeit des Stoffs gehalten »[11]. Dann aber wieder sehr viel Absurdes, z.B. über die Auflösung der Gleichungen höheren Grades (2)[12]. Diese Äußerungen haben jedoch wenig Anstoß bei seinen Lesern erregt, wahrscheinlich weil sich nur wenige wirkliche Mathematiker unter ihnen befunden haben. Dagegen sind die Absurditäten, welche sich in Hegels Naturphilosophie häufen, mehr an die große Glocke gehängt worden. Dort hat er z.B. auf aprioristischem Wege die Anzahl der Planeten berechnet, und glücklicherweise hat ihn der Himmel nicht die Zeit erleben lassen, in welcher die Planeten beinahe zahllos entdeckt wurden[13]. An anderer Stelle

Alles Qualitative zu seyn, das ist seine Qualität. Es ist dies Alles als Eins und Eins als dies Alles — in Einem. So ist es Ein Eins. »

[10] *Cf.* [Hegel 1833, p. 236] : « Die Arithmetik betrachtet die Zahl und deren Figuren, oder vielmehr betrachtet sie nicht, sondern operiert mit denselben. Denn die Zahl ist die gleichgültige Bestimmtheit, träge ; sie muß von außen betätigt und in Beziehung gebracht werden. »

[11] *Cf.* [Hegel 1833, p. 242] : « Diese Alten haben auch ihren Wissenschaften plastischen Charakter gegeben, ihre Vorstellung streng in der Eigentümlichkeit ihres Stoffes gehalten ».

[12] Citation manquante. On peut penser que Kronecker se réfère ici au passage suivant de [Hegel 1833, p. 244] : « ... In dem soeben Dargestellten liegt weiter der Grund, warum teils die Auflösung der höhern Gleichungen in der Zurückführung auf die quadratische bestehen muß, teils warum die Gleichungen von ungeraden Exponenten sich nur formell bestimmen, und gerade wenn die Wurzeln rational sind, diese sich nicht anders als durch einen imaginären Ausdruck, d.h. der das Gegenteil dessen ist, was die Wurzeln sind und ausdrücken, finden lassen. » S'il en est bien ainsi, les trois citations qui précèdent sont toutes issues de la « première remarque » qui suit l'article *Die Zahl* dans [Hegel 1833]. Notons que cette remarque est beaucoup moins développée dans la première édition de la logique de Hegel (Nürnberg 1812).

[13] Kronecker fait référence à un passage de la dissertation de Hegel sur les orbites des planètes [Hegel 1801] repris dans d'autres ouvrages de Hegel. Dans ce texte, Hegel proposait une série de nombres permettant de déterminer les distances des planètes au soleil. La série de Hegel justifiait en particulier le grand intervalle vide entre Mars et Jupiter. Or l'année même de la parution de la dissertation, les astronomes découvraient l'existence d'un objet (l'astéroïde Cérès, redécouvert par Gauss en 1802) à l'endroit où Hegel avait décrété qu'il n'y avait rien. Une grande quantité d'autres astéroïdes furent

drückt er sich treffend aus über die ungeeignete Art, mathematisch die philosophischen Untersuchungen zu führen und spricht auch sehr richtig
3|4 | über den einseitigen pädagogischen Wert der Mathematik[14].

Noch mehr als Hegel leistete Schelling in Übergriffen der Philosophie auf Naturwissenschaften und Mathematik. Ja, man kann sagen, daß in den ersten Jahrzehnten dieses Jahrhunderts die Naturwissenschaften überhaupt an einer Kinderkrankheit litten, indem sie zu der induktiven Methode zu wenig Vertrauen zeigten und sich als Motto den Goetheschen Ausspruch setzten :

« Geheimnisvoll am lichten Tag
« Läßt sich Natur des Schleiers nicht berauben
« Und was sie deinem Geist nicht offenbaren mag
« Das zwingst du ihr nicht ab mit Hebeln und mit Schrauben »[15].

Die letzte Zeit dieses Jahrhunderts leidet dagegen unter einer Alterskrankheit. Man bestrebt sich jetzt, die Zeichen der Mathematik anzuwenden, um alles Geistige zu beherrschen, — ich erinnere nur an den Amerikaner Peers[16] und an Peano[17], — und andererseits will man die Grundbegriffe der Mathematik auf philosophische Säulen stellen. Es giebt eine fast unübersehbar gewordene Literatur über die Philosophie der Mathematik. Nun, ich bin der Ansicht, daß man diesen Übergriffen des einen Wissensgebietes in das andere entschieden entgegentreten soll. Der Naturphilosophie ist es niemals gelungen, auch nur das kleinste objektive Faktum zu Tage zu fördern, alle ihre Untersuchungen sind stets nur Spekulationen a posteriori gewesen. Soweit sie sich in die Zukunft wendeten oder
4|5 generalisierten, sind sie immer nachträglich desavouiert worden. | Zu der Zeit der mathematischen Wirksamkeit eines Jacobi, Dirichlet, Kummer, wo die mathematischen Errungenschaften sich häuften, hat niemand

découverts par la suite, fragments possibles d'une planète unique.

[14] Il s'agit sans doute de l'allusion qui se trouve à la fin de la « deuxième remarque » qui suit l'article "Die Zahl" dans [Hegel 1833].

[15] J.W. Goethe, *Faust* I, 'Nacht', vers 672–675.

[16] Il s'agit très probablement du mathématicien, logicien et philosophe Charles Sanders Peirce (1839–1914), dans lequel on peut voir un représentant du courant algébriste en logique. Son travail *Sur l'algèbre de la logique* [Peirce 1885, notamment §§ 365–375], introduit un calcul propositionnel très proche par certains aspects de la procédure axiomatique.

[17] Le mathématicien Giuseppe Peano (1858–1932) est célèbre pour ses travaux de formalisation et d'axiomatisation des mathématiques. *Cf.* notamment [Peano 1889].

daran gedacht, Mathematik und Philosophie zu vermischen, obwohl diese in größtem Ansehen stand. Kummer war durch und durch Hegelianer, — aber in keiner seiner mathematischen Arbeiten finden sich philosophische Bemerkungen. Nur an einer einzigen Stelle, nämlich bei der Einführung der idealen Zahlen[,] ist die Philosophie, aber auch da nur für eine Analogie[,] herangezogen[18].

Und mit diesen Worten glaube ich nun genügend klargelegt zu haben, warum ich im Titel ausdrücklich hinzugefügt habe : über den Begriff der Zahl 'in der Mathematik'.

Die folgenden Auseinandersetzungen werden nicht lediglich aus positiven Äußerungen bestehen, sondern auch aus negativen oder kritischen, insofern als ich darlegen muß, warum ich die eine oder die andere Ansicht verwerfe. Jedoch wird die Scheidung weder zeitlich, noch systematisch thunlich sein, wie ich denn überhaupt jede Systematik für Untersuchungen über diesen Gegenstand wenn nicht überhaupt für unmöglich, so doch für nicht ersprießlich halte. Daher wäre es mir am liebsten, wenn Sie von einer durchgehenden Methodik in der Einteilung des Stoffes absähen und diese Vorlesungen mehr als eine Reihe von Aphorismen betrachteten. Und da möchte ich Ihnen noch einige klassische Worte des großen Dirichlet über die Bedeutung der Systematik für unsere besondere Wissenschaft, die Mathematik, vorlesen. Sie sind enthalten in dem Entwurfe zu einem Vortrage, welchen ich in seinem Nachlasse vorgefunden habe[19]. Dirichlet
5|6 wollte diesen Vortrag halten, um als Ordinarius | in die Fakultät eintreten zu können; die Abhandlung, welche er zu demselben Behufe geschrieben hat, ist die berühmte : « de compositione formarum secundi gradus. »

In jenem Entwurfe beginnt er damit, daß er bereits zwanzig Jahre Professor sei und in dieser langen Zeit das Wort an sich erfahren habe : Docendi discimus. Er gibt alsdann die propositio thematis an : er wolle zeigen, in welche Gefahr man sich begebe, wenn man Dinge, welche man kaum erkannt hätte, schon in eine bestimmte Reihenfolge zu bringen sich anmaßte (certum ordinem sibi arrogare). Es sei bekannt, daß viele Mathematiker die einzelnen Teile der Wissenschaft so auseinandersetzen

[18] S'il s'agit, comme nous le pensons, du passage bien connu du mémoire de Kummer sur la théorie des nombres complexes, l'analogie est alors avec la chimie et non avec la philosophie (*cf.* [Kummer 1851, p. 447–448, CP. p. 433–434]).

[19] Reproduit dans le tome 2 de [Lejeune-Dirichlet, *Werke*, p. 364–367]. La paraphrase de Kronecker est assez fidèle.

zu müssen glaubten, wie sie am Faden der Geschichte auf einander folgten und so glaubten, von einem niedern Teile zu einem höheren aufzusteigen. Sie wären der Ansicht, daß man bei der Behandlung der partiellen Differential-Gleichungen mit den gewöhnlichen beginnen müsse und nicht eher die höhere Analysis (analysis sublimior) in Angriff nehmen dürfe, als die Lehre von der Auflösung der algebraischen Gleichungen abgethan sei. Aber die Geschichte zeige, daß die Wissenschaft durchaus nicht immer graden Weges von den niederen Gebieten zu den höheren emporginge. So habe z.B. Euler das Fundamentaltheorem für die elliptischen Funktionen aus der Betrachtung der Differentialgleichungen gewonnen, Jacobi sei zur Auflösung des Problems der kürzesten Linien auf dem Ellipsoid von einem weit höheren Standpunkte gelangt, und das scheinbar in die Anfangsgründe der Algebra gehörende Problem der Kreisteilung habe erst
6|7 mit Hülfe sehr tiefgehender arithmetischer Untersuchungen erledigt |
werden können. Und wer könne endlich sagen, ob Differentialrechnung vor die Integralrechnung zu stellen sei oder umgekehrt ?

Dirichlet schließt mit folgenden beherzigenswerten Worten von Pascal : *La dernière chose qu'on trouve en faisant un ouvrage c'est de savoir celle qu'il fallait mettre la première*[20].

Zweite Vorlesung — 13. Mai 1891.

Dirichlets Zitat aus Pascal, welches ich am Schlusse der vorigen Vorlesung anführte, klingt wie eine Klage, es soll jedoch keineswegs eine solche sein. Aber eine sehr tiefe Wahrheit liegt in dem Satze, es ist dieselbe, welche auch die Hegelsche Philosophie ausspricht mit den Worten : Von den Phänomenen ausgehend soll man vordringen zu den Wahrheiten. Die Richtigkeit des Pascalschen Satzes läßt sich an vielen Beispielen aufzeigen. So hat Jacobi einige Jahre nach der Veröffentlichung der Fundamenta[21], seine Vorlesungen mit denjenigen Untersuchungen begonnen, welche den Schluß seines berühmten Werkes ausmachen. Ähnlich habe ich in meiner Festschrift mit der Aufstellung von Begriffen begonnen, welche am Ende der Arbeit als vollkommen entbehrlich aufgezeigt werden und so am Schlusse gesagt wird, was bei systematischer Behandlung den Anfang

---

[20] La citation que donne Dirichlet dans [Lejeune-Dirichlet, *Werke*, p. 367] est : « La dernière chose qu'on trouve, en faisant un ouvrage, est de savoir celle qu'il faut mettre la première ».

[21] [Jacobi 1829].

hätte bilden sollen[22]. Ebenso fängt die Physik und die Chemie nicht mit der Erklärung des Begriffes der Materie an.

7|8 Den geringen Wert oder wenigstens die Wandelbarkeit der | Systematik für die Mathematik sucht Dirichlet in jenem Entwurfe durch einen merkwürdigen Vergleich in helles Licht zu setzen. Die Mathematiker aller Zeiten, sagt er, seien als die gemeinsamen Verfasser eines großen Buches aufzufassen, von denen ein jeder einige Seiten oder auch nur wenige Zeilen des Buches verfaßte, ein jeder nach seinen Kräften. So sei es denn unmöglich, daß jeder Teil des Buches eine methodische Ordnung erfülle; viele Lücken blieben, welche die Nachwelt auszufüllen habe, anderes müßte von ihr abgeändert, manches gestrichen werden. Wessen Name und Aufzeichnungen durch alle Seiten in dem Buche erhalten blieben, darüber entschiede erst eine späte Generation[23].

Für die Richtigkeit dieser letzten Worte bedarf es keines Beweises. Daß aber die Gegenwart in der Bezeichnung neuer Erfindungen keine Gerechtigkeit ausübt und nicht ausüben kann, dafür sei als eines von vielen Beispielen die Pellsche Gleichung angeführt. Pell war ein allerdings bedeutender englischer Mathematiker, welcher von 1610–1685[24] lebte und u.a. Cromwells Bevollmächtigter in der Schweiz war. Von seinen Schriften sind nur die astronomischen auf die Nachwelt gekommen. Er hat sich allerdings auch mit der Pellschen Gleichung beschäftigt, jedoch keine wesentlichen Resultate erlangt, vielmehr gebührt das Verdienst um die Erledigung des Problems Euler und Lagrange. Ähnlich hatte Dirichlet in seiner Gedächtnisrede auf Jacobi darauf hingewiesen, man solle doch die Thetafunktionen Jacobische Funktionen nennen, ohne daß sich die Bezeichnung eingebürgert hat[25].

8|9 Man hat häufig gesagt, die Mathematik müßte mit | Definitionen beginnen, und aus ihnen zusammen mit den postulierten Grundsätzen seien die mathematischen Sätze abzuleiten. Nun sind aber Definitionen an sich schon eine Unmöglichkeit, wie Kirchhoff zu sagen pflegte, denn jede Definition braucht ihre Begriffe, welche wieder zu definieren sind u.s.f.

---

22 *Cf.* [Kronecker 1881, dernier paragraphe, p. 387].

23 *Cf.* le paragraphe précédant et la citation de Pascal, dans [Lejeune-Dirichlet, *Werke*, p. 367].

24 Plutôt 1611–1685.

25 [Lejeune-Dirichlet, *Werke*, vol. 2, p. 239].

Man kann doch nicht, wie es allerdings die Hegelsche Philosophie thut, aus dem Nichts das Sein entwickeln! Ferner sagte Kirchhoff[26], die Aufgabe der Mechanik und der Naturwissenschaften überhaupt sei, die Phänomene einfach und vollständig zu beschreiben. Nun ist aber die Mathematik nichts anderes als eine Naturwissenschaft und es kommt also auch bei ihr darauf an, die Erscheinungen « einfach und vollständig zu beschreiben ». Die Begründung ergiebt sich dann von selbst. An diese wenig mathematisch scheinende Auffassung will ich gleich die Äußerung meines Hauptgegensatzes zu den neueren Bestrebungen knüpfen. Mein Bemühen geht dahin, die mathematische Formelsprache und mit ihr die mathematische Präzision auf die Grundbegriffe der Mathematik selbst anzuwenden und ich stelle mich damit denjenigen gegenüber, welche unsere Wissenschaft auf unpräzisen, logisch-philosophischen Fundamenten aufbauen wollen.

Damit will ich mich jedoch nicht gegen das Unpräzise in den andern Wissenschaften überhaupt wenden. Im Gegenteil glaube ich, daß man häufig mit Unrecht von mathematischer Schärfe und Exaktheit spricht, wenn es sich um andere Wissensgebiete handelt. Die Mathematik kann aber nur infolge der besonderen Art ihres Stoffes so streng in der Beweismethode sein und hat daher eigentlich kein Recht, sich dieser Strenge zu
9|10 rühmen. Wird die zu | behandelnde Materie eine andere, so wechselt auch die Art der Untersuchung, sodaß jeder Wissenschaft eine besondere Methode und eine besondere Genauigkeit in der Beweisführung durchaus eigentümlich ist. So erwiderte ich in einer juristischen Gesellschaft einmal einem Rechtsanwalt, welcher « den mathematischen Beweis » für einen juristischen Satz erbringen wollte, daß ihm derselbe wohl schwerlich gelingen möchte. Um diese meine Behauptung zu erhärten, führte ich aus, daß der Zeugenbeweis, welcher vom Standpunkte der Rechtswissenschaft vollkommene Gültigkeit hat, nur dann ein mathematischer Beweis sei, wenn man zur Evidenz bringen könnte, daß nicht nur gewisse Eigenschaften auf einen bestimmten Menschen paßten, sondern auch, daß es keinen zweiten geben auf welchen dieselben Indizien zutreffend wären. Für diese Verschiedenheit in der Beweisart der einzelnen Wissenschaften findet sich ein sehr hübscher Ausspruch in dem Vorwort von Cauchy zu seinem Werke

---

[26] *Cf.* par exemple [Kirchhoff 1876, p. 1] : « Die Mechanik ist die Wissenschaft von der Bewegung; als ihre Aufgabe bezeichnen wir : die in der Natur vor sich gehenden Bewegungen *vollständig* und *auf die einfachste Weise* zu beschreiben ».

Cours d'analyse algébrique (3)[27].

Aber nicht nur für die einzelnen großen Gebiete menschlicher Forschung, welche man als Wissenschaften sondert, auch in den besonderen Disziplinen, welche jede derselben umfaßt, müssen die Methode der Behandlung und der Beweise von einander geschieden werden. Es würden viele Begriffsverwirrungen unterbleiben, wenn man die Begriffe der drei mathematischen Gebiete stets auseinander gehalten hätte. Als die speziellen Disziplinen unserer Wissenschaft betrachte ich nämlich : die Mechanik, welche mit dem Begriffe der Zeit operiert, die Geometrie, welche die von der Zeit freien, raümlichen Verhältnisse untersucht und die von Raum und von Zeit freie, sogen[annte] reine Mathematik, welche ich als 'Arithmetik' **10|11** bezeichnen möchte. | Gewiß ist die Arithmetik infolge ihrer Anwendbarkeit auf die Geometrie gefördert worden, aber man kann nicht dieselbe Strenge wie von der reinen Wissenschaft von ihr fordern, nachdem man sie einer andern Disziplin angepaßt hat. Dem Begriffe der Stetigkeit, welcher in der Geometrie oder der Mechanik in gewisser Weise vorhanden ist, steht die Diskontinuität der Zahlenreihe gegenüber. Diesen Gegensatz hat man auf alle mögliche Weise zu überbrücken versucht und die Stetigkeit in der Arithmetik auf irgend eine Weise hervorzaubern wollen. Mir fällt bei diesen vergeblichen Bemühungen immer das Wort aus der Hexenküche ein :

« Ein vollkommener Widerspruch
« Ist gleich geheimnisvoll für Weise und für Thoren »[28]. —

Man ist so weit gegangen, zu sagen, daß bestimmte Epochen der mathematischen Geschichte weniger Exaktheit in ihren Untersuchungen zeigen als andere. So hat ein namhafter Mathematiker das Zeitalter Eulers als das naive bezeichnet. Nun, ich bin nicht so naiv zu glauben, daß wir heute nicht naiv wären. Freilich geht in der neuesten Zeit eine sehr große Anzahl von Mathematikern darauf aus, die mathematischen Grundbegriffe einer

---

[27] Citation manquante ; probablement [Cauchy, *Œuvres*, vol. 3, série 2, p. VII] : «*Soyons donc persuadés qu'il existe des vérités autres que les vérités de l'algèbre, des réalités autres que les objets sensibles. Cultivons avec ardeur les sciences mathématiques, sans vouloir les étendre au-delà de leur domaine ; et n'allons pas nous imaginer qu'on puisse attaquer l'histoire avec des formules, ni donner pour sanction à la morale des théorèmes d'algèbre ou de calcul intégral*».

[28] J.W. Goethe, *Faust* I, 'Hexenküche', vers 2257–2258 : « Denn ein vollkommner Widerspruch / Bleibt gleich geheimnisvoll für Kluge wie für Thoren ».

genauen Prüfung zu unterziehen, indem sie glauben, das nachholen zu müssen, was man in früherer Zeit unterlassen hat. Und doch wird niemand leugnen, daß die größten mathematischen Errungenschaften im vorigen Jahrhundert und in der Wende zu dem unsrigen einem Euler, Lagrange, Laplace, Cauchy, Gauss zu verdanken sind. Die falschen Resultate in den Werken dieser Männer sind trotz der vermeintlichen Mangelhaftigkeit der
11|12 Begründung des Fundaments | mit der Lupe zu suchen. Ich möchte Ihnen diese merkwürdige Erscheinung wieder durch einen Vergleich verständlich machen. Sie kennen alle das Rätselspiel, wonach jemand sämtlichen Personen einer Gesellschaft vorschreibt, jede für sich solle sich eine bestimmte Zahl denken. Alsdann läßt er mit derselben eine Anzahl Rechenoperationen ausführen und bringt es schließlich dahin, daß er von sämtlichen Beteiligten zu aller Erstaunen das gleiche Resultat verkündigen lassen kann. Die Mathematiker wissen, daß sich die von jeder Person gedachte beliebige Zahl eliminiert hat. — Das sind die Erklärungsarten der mathematischen Grundbegriffe; die schließlichen Resultate sind von diesen vollständig unabhängig.

Dritte Vorlesung — 27. Mai 1891.

Aus der großen Anzahl der mir infolge der Ankündigung dieser Vorlesung zugekommenen Schriften über die Grundlagen der Mathematik will ich die von Herrn Briggs[29] mir übergebene Broschüre herausheben. In derselben befindet sich folgender Passus : (4)[30].

Dieser Charakterzug der Mathematik ist allen Spezialwissenschaften gemeinsam, und sie zeigen ihn mit Recht wie ich im Gegensatz zu Herrn B. behaupten muß. Das einzelne, das Materielle muß erst vorhanden sein, ehe die Methode gewonnen wird, welche sich ja wie ein Instrument nach der Arbeit richten muß, welche damit verrichtet werden soll. Allerdings ist — wie auch Herr B. hervorhebt, — der Charakterzug der neuern
12|13 Bestrebungen auf | mathematischem Gebiete, daß sie nun auf einmal das Versäumte nachholen wollen und von Tage zu Tage neue Arbeiten über denselben Gegenstand erscheinen. Jedoch widerlegen diese Schriften

[29] Il s'agit probablement de W. Brix dont l'article « Über den mathematischen Zahlbegriff » a été publié dans Wilhelm Wundt, *Philosophische Studien*, V, p. 671 *sqq*, Leipzig : Engelmann (réimpression chez Bonset à Zandvoort en 1973) et commenté dans [Husserl 1891, p. 27 et p. 47–49].

[30] Citation manquante.

großenteils den andern Ausspruch des Herrn B, daß dies nicht der minderwertigste Zug dieses Jahrhunderts ist. So ist z.B. mir dieser Tage wieder von Herrn [Husserl], einem Dozenten in Halle, der erste Band eines Werkes übersandt worden, welches sich 'Die Philosophie der Arithmetik' betitelt. Die übrigen Bände sind in Aussicht gestellt, dieser erste endigt kaum mit der Erörterung des Zahlbegriffs. Meine Ansichten werden in demselben in recht strenger oder sogar absprechender Weise als unrichtig hingestellt[31]. —

Was Genauigkeit und Strenge der Methode anlangt, so haben Cauchy, Gauss und Dirichlet immer als Muster gegolten. Freilich will ich nicht verhehlen, daß sich in der allerneuesten Zeit eine merkwürdige Unterschätzung Cauchy's, wenigstens in Bezug auf die Gründlichkeit seiner Methode, in der Literatur zu erheben beginnt, und auch in der erwähnten Broschüre des Herrn B ist gleich anfangs von der mangelhaften Begründung der Cauchyschen Funktionentheorie die Rede. Dieser Tadel ist jedoch nichts gegenüber den wahrhaft monströsen Ausfällen, welche Hankel in seinem Buche über die komplexen Größen sich gegen Cauchy's Äußerungen über die Natur derselben erlaubte (5,6)[32]. Wenn man dazu

[31] *Cf.* [Husserl 1891, p. 190–198].

[32] Citations manquantes. Il s'agit probablement de la critique par Hankel [1867, p. 14] de la citation suivante de Cauchy (la citation est reproduite dans le texte de Hankel) : « En analyse, on appelle expression symbolique ou symbole toute combinaison de signes algébriques qui ne signifie rien par elle-même, ou à laquelle on attribue une valeur différente de celle qu'elle doit naturellement avoir. On nomme de même équations symboliques toutes celles qui, prises à la lettre et interprétées d'après les conventions généralement établies, sont inexactes ou n'ont pas de sens, mais desquelles on peut déduire des résultats exacts, en modifiant et altérant selon des règles fixes ou ces équations elles-mêmes, ou les symboles qu'elles renferment. ... Parmi les expressions ou équations symboliques dont la considération est de quelque importance en analyse, on doit surtout distinguer celles que l'on a nommées imaginaires » [Cauchy 1821, p. 173]. Hankel commente comme suit la citation de Cauchy : « Sollte man eine Kritik dieses Raisonnements geben, man wüsste in der That nicht, wo anfangen. Da soll etwas 'was nichts bezeichnet', oder 'was etwas anderes bezeichnet, als es naturgemäß bezeichnen sollte', etwas 'Unsinniges' oder 'Ungenaues', mit anderem derselben Art gepaart, Reelles erzeugen. Da sollen 'algebraische Zeichen' — sind dies Zeichen für Grössen oder wofür ? denn etwas muss doch ein Zeichen bezeichnen — mit einander kombiniert werden auf eine Weise, die 'nichts bezeichnet'. Ich glaube nicht zu viel zu sagen, wenn ich dies ein unerhörtes Spiel mit Worten nenne, das der Mathematik, die auf die Klarheit und Evidenz ihrer Begriffe stolz ist und stolz sein soll, schlecht ansteht. [...] ».

bedenkt, daß derselbe Hankel, in seiner ersten Arbeit, über die Gammafunktion nur falsche Resultate geliefert hat, so wird man diese unerhörte Kampfesweise einigermaßen würdigen können.

13|14 Die drei genannten großen Mathematiker, Cauchy, Gauss und | Dirichlet, welche sich ganz besonders durch die Strenge ihrer Methode ausgezeichnet haben, beschäftigten sich fast gar nicht mit den Grundbegriffen. Nur Gauss hat einige Male Äußerungen über dieselben veröffentlicht, während Dirichlet über die Grundlagen der Mathematik und Arithmetik niemals etwas publiziert hat. Nun möchte ich Ihnen vorlesen, wie einer der allergrößten Mathematiker, C.G.J. Jacobi über die Strenge in der Beweisführung der drei Genannten in einem Briefe an Humboldt geurteilt hat (7)[33]. Der Anlaß zu dem Briefe ist ebenso interessant wie sein Inhalt. Humboldt sandte die an ihn adressierten Briefe Jacobi's an Dirichlet, und ich bin infolge einer letztwilligen Bestimmung des letzteren in den glücklichen Besitz dieses sehr merkwürdigen Briefwechsels gekommen. Der Anlaß zu dem vorliegenden Briefe war der folgende. Gegen Ausgang des Jahres 1846 wurde von dem Mathematiker Schweins[34] in Heidelberg, — von welchem wohl nur wenige der Herren bisher etwas gehört haben, — die Anfrage an den Professor der Physik an der hiesigen Universität, Magnus gerichtet, ob Dirichlet vielleicht für einen Lehrstuhl an der Heidelberger Universität zu gewinnen sei. Magnus teilte dies Jacobi mit und der letzere wandte sich sogleich mit seiner gewohnten Energie in einem unterthänigsten Schreiben an den König Friedrich Wilhelm IV. am 21. Dezember 1846 und zu gleicher Zeit an Humboldt, welchem er eine Abschrift seiner Eingabe an den König beilegte.

Wie Lessing in der Mitte des vorigen Jahrhunderts sich gedrungen fühlte, über die Grenzen der Malerei und Poesie zu schreiben, so würde
14|15 heute ein großer Geist die Grenzen der | Philosophie und Mathematik festsetzen müssen. Aber auch die einzelnen Teile der Mathematik sollten schärfer unter einander gesondert werden. Alles, was nicht zur Mechanik und Geometrie gehört und was ich also unter dem Namen der Arithmetik zusammenfassen möchte, müßte auch wirklich arithmetisiert werden. Von denjenigen, welche die verschiedenen Gebiete zusammen mengen, gilt das

---

[33] Citation manquante.

[34] Franz Ferdinand Schweins (1780–1856) passa son habilitation à Göttingen en 1809, puis fut nommé à Heidelberg en 1810, où il obtint une chaire en 1835.

französische Sprichwort :

Qui trop embrasse, mal le traîne [*étreint*].

Wenn wir den Größenbegriff z.B. ganz allgemein fassen, sodaß er auch noch für Geometrie und Mechanik gilt, so muß er mehr und mehr verschwimmen. Als Beispiel will ich Ihnen eine Stelle aus dem Büchlein von Dr. Max Simon, Lehrer am Lyceum zu Straßburg, vorlesen, welches derselbe für Gymnasiallehrer geschrieben hat (8)[35].

Ich bin nicht der Meinung, daß die Vermischung der Disziplinen, auch in den Ausdrücken, gefahrbringend sei; nur glaube ich, daß, wenn man auf die Grundbegriffe eingeht, eine Trennung unbedingt erforderlich sei. Was das Erste betrifft, so spricht auch Gauss beständig vom 'Flächenintegral' und 'Volumenintegral' und zweifelt nicht an der Unantastbarkeit seines Beweises über die Existenz der Wurzeln einer algebraischen Gleichung, wenn er die Richtigkeit des geometrischen Inhalts des Satzes gründlich zur Evidenz gebracht hat. Will man aber z.B. den Begriff der Zahl erörtern, so muß man denselben im allerengsten Sinn, nämlich als Anzahl fassen und darf ihm nicht beimischen, was ursprünglich nicht darin liegt. Eindeutig kann man freilich den Begriff nicht fixieren, da es überhaupt
15|16 keinen eindeutigen Begriff im | mathematischen Sinne giebt, aber die Vieldeutigkeit muß so gering wie möglich sein. Ist dies nicht der Fall, so gleicht die Zahl einer abgegriffenen Münze, deren Prägung nicht mehr recht zu erkennen ist – oder ich kann den Besitz eines solchen Zahlbegriffs demjenigen des Geldes vergleichen in einem Staate, wo nicht mehr Gold – und Silberwährung alleine, sondern auch Papierwährung besteht. Ähnlich ist es mit den andern Begriffen. Der Begriff der 'Addition' besagt nicht das bloße Hinzufügen, sondern eine bestimmte arithmetische Operation und daher sollte man nicht von einer 'Addition von Strecken' sprechen. Auch das Wort 'Gleichheit' sollte man nicht mehr gebrauchen, wenn von einer vollkommenen Gleichheit nicht mehr die Rede ist — alsdann ist das wundervolle Wort « Äquivalenz » am Platze.

Warum sollen wir nun nicht das ausgezeichnete Darstellungsmittel, welches uns in der so vollkommenen arithmetischen Zeichensprache zur Verfügung steht, auch gleich bei Untersuchungen über die mathematischen Grundbegriffe uns zu nutze machen? Schon die Philosophie hat das Bedürfnis, an Stelle der vieldeutigen Begriffe der gewöhnlichen Sprache,

[35] Citation manquante.

besondere technische Bezeichnungen sich zu bilden. Um wieviel mehr muß die Mathematik darauf bedacht sein, die grundlegenden Untersuchungen nicht in abgegriffenen Worten anzustellen! « Anzahl », « Einheit », « eins » — was bezeichnen diese Wörter nicht alles in der Sprache des gewönlichen Lebens, so mathematisch eindeutig sie auch klingen mögen! Und dann
16|17 die Kopula 'ist'! | Was ist die eine, feste Bedeutung des arithmetischen Gleichheitszeichens unter der Fülle von dem, was durch das Wörtchen 'ist' ausgedrückt wird!

Vierte Vorlesung — 3. Juni 1891.

Bevor ich jetzt dazu übergehe, eine speziell-mathematische Deduktion des Zahlbegriffs zu geben, will ich Ihnen die allgemeinen Gesichtspunkte, welche ich im Vorhergehenden bereits des Näheren dargelegt habe, noch einmal in vier Thesen zusammenfassen. Diese sind :

1. Die mathematische Disziplin duldet keine Systematik. Diesen Grundsatz habe ich Ihnen besonders mit den Worten Dirichlets zu begründen gesucht. Ich hätte vielleicht auch anführen können, daß eine der Thesen, welche ich bei meiner Doktor-Promotion mit Glück verteidigt habe, — man hat ja dabei gewöhnlich Glück, — die folgende war :

Mathesis et ars et scientia dicenda est[36].

Gegen diese These hat mein verstorbener Freund, der berühmte Mathematiker Eisenstein, in höchst geistreicher Weise angekämpft, aber nicht etwa in dem Sinne, welchen sie vielleicht vermuten, daß die Mathematik von einer Kunst nichts an sich habe; — er hat im Gegenteil behauptet, sie sei nur Kunst. Und in dieser Beziehung hatte Eisenstein Recht : die mathematische Forschung ist allerdings Sache der Eingebung, der schaffenden Phantasie, — und soweit die Mathematik Kunst ist, verträgt
17|18 sie keine Systematik. |

2. Die Mathematik ist wie eine Naturwissenschaft zu behandeln, denn ihre Gegenstände sind ebenso wirklich wie diejenigen ihrer Schwesterwissenschaft. Daß dem so ist, fühlt ein jeder, der von mathematischen 'Entdeckungen', nicht aber von mathematischen 'Erfindungen' spricht. Denn entdeckt kann doch nur dasjenige werden, was bereits wirklich existiert;

[36] *Cf.* [Kronecker, *Werke*, vol. 1, p. 73] où l'on trouve les quatre thèses proposées par Kronecker.

was aber der menschliche Geist aus sich hervorbringt, das heißt 'Erfindung'. Daher 'entdeckt' der Mathematiker die Resultate durch Methoden, welche er zu diesem Behufe 'erfunden' hat.

3. Der dritte Gesichtspunkt ist derjenige, daß man bei Untersuchungen über die Grundbegriffe der Mathematik die einzelnen mathematischen Disziplinen auf das allerstrengste von einander sondern soll unbeschadet der so offensichtlich fruchtbringenden Anwendungen der einzelnenen Teile auf einander und auch auf Astronomie, Physik und selbst Statistik, wenn es sich um den weiteren Ausbau der Wissensgebiete handelt.

4. Die vierte These ist : man soll die jeder einzelnen Disziplin eigentümliche Methode selbst zur Festlegung und Verdeutlichung der Grundbegriffe verwenden und ferner den ganzen reichen Inhalt der Wissenschaft bei der Klarstellung der Grundbegriffe zu Rate ziehen. Denn ein vernünftiger Baumeister wird doch, wenn er ein Fundament zu legen hat, sich zuvörderst sorgfältig über das Gebäude unterrichten, welchem jenes als Grundlage dienen soll. Ferner ist es thöricht, sich der Überzeugung verschließen zu wollen, daß mit der reicheren Entfaltung einer Wissenschaft die Notwendigkeit auftritt, die ihr zu Grunde liegenden Begriffe und
18|19 Prinzipien zu verändern. Es geht auch | in diesem Punkte der Mathematik nicht anders wie den Naturwissenschaften : neue Erscheinungen stürzen die alten Hypothesen um und setzen andere an ihre Stelle. So hat Cauchy seine Ansichten über das Imaginäre mehrere Male geändert, und je andere und andere Erscheinungen er im Komplexen entdeckte, um so anders hat er den Begriff des Imaginären einführen zu sollen geglaubt. In derselben Beziehung hat Gauss eine geradezu klassische Inkonsequenz gezeigt. In seinem ersten Beweise des Fundamentalsatzes der Algebra hat er sich der Anwendung imaginärer Größen enthalten, in der Abhandlung über das Reziprozitätsgesetz hat er fast mit wunderbarem Eigensinn dieselben vermieden, um sie dann bald darauf in der *commentatio secunda theoriae residuorum biquadraticorum* prinzipiell einzuführen. So möchte ich Ihnen denn überhaupt mit dem Hinweis auf diese klassischen Beispiele die Inkonsequenz, — freilich nicht diejenige des Charakters, sondern die Wandelbarkeit Ihrer wissenschaftlichen Anschauungen, — als eine gute Eigenschaft anrühmen. Ich erinnere hier noch an ein ebenfalls klassisches Wort unseres großen Bismarck, welcher jemandem, der ihm Inkonsequenz seiner Anschauungen vorwarf, zurief : « Ja, wer in seinem ganzen Leben

nur einen einzigen Gedanken gehabt hat, der kann gut konsequent sein. »

Es gibt allerdings auch Forscher, welche Hypothesen aufstellen, die erst von den späteren Erscheinungen als berechtigt erwiesen werden, z.B. Hamilton und Maxwell. Solche geniale Männer sind als die Propheten auf wissenschaftlichem Gebiete zu bezeichnen, und sie nehmen auch dieselbe Stellung ein, wie die Propheten der Bibel in ethischer und religiöser
19|20 Beziehung. Im allgemeinen aber werden die Hypothesen | nicht vorher aufgestellt. Hierüber sagt Schiller scherzhaft und poetisch in dem Gedichte 'Die Weltweisen' :

« Doch hat Genie und Herz vollbracht,
« Was Lock' und Descartes nie gedacht,
« Sogleich wird auch von diesen
« Die Möglichkeit bewiesen »[37]. —

Nunmehr will ich die Entwicklung des Zahlbegriffs selbst beginnen. Aber ich betone nochmals, daß ich dieselbe nicht so geben werde, wie man sie auch mathematischen Kindern oder Laien vorsetzen kann; sondern sie ist für solche bestimmt, welche eine ausreichende Kenntnis der mathematischen Lehren besitzen. Denn nur dann ist es möglich, den Begriff in seiner ganzen Klarheit und Schärfe vor Augen zu führen, so, wie es durch bloße philosophische Definitionen niemals möglich ist. Ich knüpfe deshalb an Erscheinungen der höheren Arithmetik an. Euler war der erste, welcher die Aufgaben der diophantischen Analytik verallgemeinerte für quadratische Gleichungen. Während es ihm aber bloß darauf ankam, gewisse Aufgaben zu lösen, begann Lagrange, die quadratischen Ausdrücke für sich zu betrachten, und begründete damit die Theorie der quadratischen Formen, deren Ausbildung wir Gauss verdanken. Lagrange schrieb die quadratischen Formen in der Gestalt

$$ax^2 + bxy + cy^2$$

und suchte die ganzzahligen Werte x und y, für welche $ax^2+bxy+cy^2 = n$ ist, wo n eine ganze Zahl bedeutet. Gauss tat nun den großen Schritt, daß er nicht mehr x und y als Fragewörter betrachtete, sondern als
20|21 Unbestimmte, *indeterminatae*. Alsdann ging er weiter | und bezeichnete

[37] Schiller, *Die Weltweisen*, vers 24–28, dans la version remaniée. La version originale (*Horen*, 11. Stück, 'Die Taten der Philosophe', 1795) contient 'Leibniz' au lieu de 'Descartes'.

die quadratische Form $ax^2 + bxy + cy^2$ einfach durch (a, b, c). Er führte damit zum ersten Male ein System von drei diskreten Größen ein. Nun ist klar, daß wenn die Gleichung $ax^2 + bxy + cy^2$ durch ganze Zahlen gelöst ist, die andere $a'x'^2 + b'x'y' + c'y'^2$, welche aus der ersten durch die Substitution $x = \alpha x' + \beta y', y = \gamma x' + \delta y'$, wo $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ganze Zahlen und $\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$ ist, hervorgeht, gleichfalls, durch Hinzunahme der Substitutionsgleichungen, gelöst ist. Zwei solche Formen nannte schon Lagrange einander äquivalent. Ich führe die Bezeichnung ein :

Es ist :

$$(a, b, c) \sim (a', b', c')$$

unter der Bedingung, daß die beiden aus diesen Zahlen gebildeten Formen einander äquivalent sind. Rechnet man a', b', c' aus, so erhält man : $(a\alpha^2 + b\alpha\gamma + c\gamma^2, 2a\alpha\beta + b(\alpha\delta + \gamma\beta) + 2c\gamma\delta, a\beta^2 + b\beta\delta + c\delta^2)$ und dies ist eine einfach unendliche Schar von äquivalenten Systemen. Wir rechnen dieselben nach der Bezeichnung von Gauss zu einer und derselben Klasse. Haben wir eine solche Äquivalenz eingeführt, welche jedoch, wie ich in der nächsten Vorlesung zeigen werde, stets an eine bestimmte Bedingung gebunden ist, so drängt sich uns die Frage auf : Giebt es Funktionen der Zahlen (a, b, c), welche so beschaffen sind, daß sie für sämtliche Systeme derselben Klasse identisch sind ? Ist eine solche Funktion vorhanden, so legen wir ihr die von Sylvester[38] so außerordentlich glücklich gewählte, obgleich von ihm nur für einen ganz speziellen Fall gebrauchte Bezeichnung

'Invariante'

21|22 zu. Jedoch habe ich mir neuerdings in Anlehnung an das von den | Griechen in dieser Bedeutung gebrauchte Wort ατροπος statt 'Invariante' die Bezeichnung 'Atropie' gebildet, hauptsächlich wegen der Adjektive 'atrop' und 'isotrop', deren Bildung im Anschluß an das lateinische Wort unzweckmäßig erschien. Es heißen zwei Funktionen f und φ isotrop, wenn ihre Differenz $f - \varphi$ atrop ist.

Und nun noch ein Wort über die Bedeutung dieser Begriffe. Das Aufsuchen der Invarianten ist eine schöne, ja sogar die schönste Aufgabe der Mathematik ; aber noch mehr, es ist sogar ihre einzige Aufgabe. Und

---

[38] *Cf.* par exemple [Sylvester *CP.*, t. 1, p. 200].

auch damit ist es noch nicht genug : es ist die einzige Aufgabe aller Wissenschaften überhaupt. Das Setzen von Äquivalenzen und das Aufsuchen ihrer Invarianten, — das ist seinerseits die Invariante jeder Forschung und jeder geistigen Arbeit. Und um nur eins von den unerschöpflich vielen als Beispiel hier anzuführen : ein jeder Begriff ist die Invariante der Individuen, welche unter ihm als sein Inhalt gedacht werden. Wollen wir aber diesen Begriff, welcher allüberall in der Sphäre menschlichen Denkens und Schaffens die unbeschränkte Herrschaft führt, in ein königliches Gewand kleiden, so können wir nur wieder die Worte Schillers zitieren, welcher die Forscherarbeit des Weisen in den einzelnen Wissensgebieten schildert und dann zusammenfassend sagt :

« Der Weise sucht den ruhenden Pol in der Erscheinungen Flucht »[39].

5. Vorlesung — 10. Juni 1891.

Ich will jetzt den Äquivalenzbegriff für unsere mathematische Disziplin in ganz bestimmer Weise fixieren. Es sei mit (z) ein System von
22|23 beliebig vielen Größen bezeichnet, ein anderes System mit (z'). | Dann will ich eine Äquivalenz der beiden Systeme $(z) \sim (z')$ statuieren, wenn ich imstande bin, auf irgend eine, aber eindeutig bestimmte Weise das System (z') aus dem System (z) abzuleiten. Man kann sich z.B. denken, daß eine Rechenvorschrift gegeben ist, durch welche man das System (z') aus dem System (z) herstellen kann. Natürlich hat es nur dann einen Zweck, eine Äquivalenz aufzustellen, wenn wir unendlich viele Systeme herstellen können, welche unter einander äquivalent sind, ebenso wie es umgekehrt unsinnig wäre, von einer unendlichen Schar von Systemen zu reden, wenn nicht gleichzeitig eine Methode an die Hand gegeben wird, vermittelst derer man sich jedes System herstellen kann. Ferner ist folgendes notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenzberechtigung einer Äquivalenz.

---

[39] Sur le verso de la page 21 du cahier se trouve la citation complète des vers 129–134 de l'élégie 'Der Spaziergang' dans la version remaniée (version originale *Horen*, 10. Stück, 'Elegie', 1795) :

« Aber im stillen Gemach entwirft bedeutende Zirkel
« Sinnend der Weise, beschleicht forschend den schaffenden Geist,
« Prüft der Stoffe Gewalt, der Magnete Hassen und Lieben,
« Folgt durch die Lüfte dem Klang, folgt durch den Äther dem Strahl,
« Sucht das vertraute Gesetz in des Zufalls grausenden Wundern,
« Sucht den ruhenden Pol in der Erscheinungen Flucht ».

Es sei (z'') auf dieselbe Weise aus (z) hergeleitet wie (z'), sodaß also 1) $(z) \sim (z')$ und 2) $(z) \sim (z'')$. Die Äquivalenz hat dann und nur dann Gültigkeit, wenn

3) $(z') \sim (z'')$ ist. Oder in Worten :

Wenn ein System zwei verschiedenen äquivalent ist, so müssen die letzteren auch einander äquivalent sein. Eine Folge dieser Bedingung ist : Jedes System ist sich selbst äquivalent : d.h. es muß möglich sein, mittelst desselben Prinzips das System aus sich selbst abzuleiten. Nehmen wir nämlich (z') und (z'') als identisch an, so fallen die Äquivalenzen 1) und 2) in eine einzige zusammen und es wird mit 3) : $(z') \sim (z'')$.

23|24 Eine zweite Folgerung ist die, daß jede Äquivalenz auch | rückwärts gelesen werden kann. Wenn $(z) \sim (z')$ ist, so muß auch $(z') \sim (z)$ sein. Setzen wir nämlich in 2) an Stelle von (z'') (z) ein, so wird aus 1) und 2) : $(z) \sim (z')$; $(z) \sim (z)$ und aus 3) $(z') \sim (z)$. Man kann diesen Schluß auch noch etwas anders machen. Vertauscht man die Äquivalenzen 1) und 2), so wird

$(z) \sim (z'')$; $(z) \sim (z')$, folglich $(z'') \sim (z')$. D. h. also :

Wenn ein System einem zweiten äquivalent ist, so ist auch dieses zweite dem ersten äquivalent.

Es ist klar, daß die hier aufgestellte Bedingung bei der erörterten Äquivalenz der quadratischen Formen erfüllt ist.

Wir kommen jetzt zu der Betrachtung der Invarianten äquivalenter Systeme und stellen uns die Frage : giebt es Funktionen der Elemente, welche für die ganze Klasse äquivalenter Systeme denselben Wert haben ? Man kann antworten : es giebt für jede beliebige Äquivalenz stets Invarianten in dem angeführten Sinne. Dies ist eigentlich eine triviale, weil völlig nichtssagende Wahrheit, da nur der weitgreifende Begriff der Funktion uns ermöglicht, die Anwort zu geben. Nehmen wir wieder die genannte Äquivalenz für Systeme von drei ganzen Zahlen, so können wir die Elemente eines beliebig herausgegriffenen Systems als charakteristische Invarianten begreifen. Die Elemente sind Invarianten, weil ich von jedem System zu diesem einen gelangen kann, und sie sind die charakteristischen Invarianten, weil sie ein System repräsentieren, welches nur der einen bestimmten Klasse, aber keiner anderen zugehört. Man wählt in diesem typischen Falle der quadratischen Formen die Elemente desjenigen Systems als die charakteristischen Invarianten der Klasse, welche den

24|25 kleinsten | Wert haben und nennt die daraus gebildete Form schon seit Lagrange die reduzierte Form (*forme réduite*). Aus derselben kann man sich natürlich die ganze Klasse von Formen herstellen.

Ich unterscheide die Invarianten als arithmetische, algebraische und analytische Invarianten nach der Methode, durch welche sie aus den Elementen eines Systems hergeleitet werden. Jede reduzierte Form ist z.B. eine arithmetische Invariante, weil es eines Algorithmus, welcher mit einer Kettenbruchentwicklung Ähnlichkeit hat, bedarf, um sie aus den Elementen der Systeme herzuleiten. Algebraische Invarianten sind in speziellen Fällen rational, wenn sie nämlich rationale Funktionen der Elemente sind. Bei analytischen Invarianten, — und solche giebt es eigentlich für jede Äquivalenz, — tritt ein Limes auf. Um z.B. für die Klasse äquivalenter quadratischer Formen $(a, b, c), (a', b', c'), \ldots$ eine analytische Invariante zu finden, bilde man eine beliebige Funktion $f(a, b, c)$, und alsdann die Summe $\sum f(a, b, c)$, erstreckt über alle Systeme der Klasse. Konvergiert dieselbe, was natürlich nur bei ganz besonderer Beschaffenheit von f eintritt, so erhalten wir eine Invariante. Hat man nun aber die Scylla der Divergenz glücklich überwunden, so liefert eine böse Charybdis Werte, welche von der Beschaffenheit der Klasse unabhängig und Konstante sind, etwa gleich 1, also nicht als charakteristische Invarianten der einen Klasse gelten können. Das schmale Fahrwasser, in welchem die Invarianten noch auf der Grenze der Konvergenz stehen, aber doch so, daß sie für die verschiedenen Klassen verschiedene Werte annehmen, kann allein zum Ziele führen. So sind für die quadratischen Formen mit negativer Determinante
25|26 die elliptischen Funktionen die charakteristischen | Invarianten, welch erstere dadurch nicht nur vollkommen erklärt sind, sondern auch meines Erachtens in diesen Eigenschaften ihren wahren Ursprung haben.

Mit dem Begriff der Äquivalenz und der Invariante ist nun der Zahlbegriff mit der größten Klarheit und Leichtigkeit zu fassen. Um überhaupt zum Begriff der Zahl zu gelangen, muß ich unterschiedene, diskrete Objekte besitzen. Ferner muß ich dieselben in beliebiger Weise zu 'Scharen' oder 'Systemen' zusammenfassen können. Jetzt definiere ich zwei Scharen dann als einander äquivalent, wenn ich dieselben dadurch in einander überführen kann, daß ich je ein Element der einen Schar durch je eines der anderen ersetze. Wie man unmittelbar sieht, genügt diese Äquivalenz-Erklärung der Bedingung, daß, wenn ein System einem

zweiten und einem dritten äquivalent ist, diese beiden auch einander äquivalent sind. Wir wissen jetzt, daß jeder Repräsentant einer Klasse von äquivalenten Scharen eine charakteristische Invariante dieser Schar ist. Es fragt sich nun, was für eine Schar wir als den Repräsentanten nehmen oder m.a.W., welche Schar wir als die ‘reduzierte’ annehmen wollen. Da würden wir zunächst geneigt sein, diejenige Schar zu nehmen, welche uns zur Hand oder geradezu an der Hand ist, nämlich die Schar, welche aus der bestimmten Anzahl Finger besteht. So sind z.B. drei Finger zunächst die charakteristische Invariante der Klasse, welche nur aus Scharen von je 3 Objekten besteht. Wir können uns aber, — und das ist ein wesentlicher Forschritt, — die Aufgabe der Fixierung einer « reduzierten Schar » vereinfachen, wenn wir uns die Objekte einer bestimmten Schar in
26|27 einer gewissen Weise | angeordnet denken. Dann repräsentiert nämlich das letzte Element eigentlich die ganze Schar, indem alle übrigen, d.h. alle vorhergehenden, durch Nennung des einen mitgedacht werden. Halte ich z.B. die Ordnung der Finger : Daumen, Zeigefinger, Mittelfinger u.s.f. fest, so sind jetzt nicht mehr drei beliebige Finger die charakteristische Invariante der Klasse von Scharen mit je drei beliebigen Objekten, sondern der Mittelfinger ist dieselbe. Wie gesagt, ist aber eigentlich die Anzahl der Invarianten auch hier gleich drei, weil man sich ‘Daumen’ und ‘Zeigefinger’ hinzuzudenken hat. Unter den Scharen von Objekten, welche in bestimmter Weise geordnet sind, werden wir nun noch am zweckmäßigsten diejenigen wählen, welche im übrigen am bedeutungslosesten sind, — und das ist die Reihe der Ordnungszahlen. Jede Ordnungszahl charakterisiert also eine bestimmte Klasse von äquivalenten Scharen.

Diese Auffassung des Zahlbegriffs beruhigt uns nicht nur in logischer Beziehung, sondern sie ist auch das wirkliche Fundament, auf welchem wir die Gesetze von den Eigenschaften der Zahlen und dem Rechnen mit denselben aufbauen können.

6. Vorlesung — 17. Juni 1891.

Ich habe Ihnen vor acht Tagen den Zahlbegriff in arithmetischer Weise deduziert, indem ich an Begriffe und Methoden anknüpfte, welche in der Lehre von den Zahlen selbst ausgebildet sind und Ihnen auszuführen versucht, warum ich eine solche Art der Deduktion für die sachgemäßeste
27|28 halte. Heute will ich noch etwas näher auf die | Mängel einiger andern Definitionen eingehen, die sich in Publikationen über den Gegenstand

finden, von welchen mir wöchentlich einige oder wenigstens eine neue zugeschickt werden, — aber gleichzeitig vor einer fehlerhaften Ansicht warnen, welche man mit der von mir gegebenen Definition zu verbinden geneigt sein könnte. Der Standpunkt, welcher mich von vielen andern Mathematikern trennt, gipfelt in dem Grundsatz, daß die Definitionen der Erfahrungswissenschaften, — d.h. der Mathematik und der Naturwissenschaften, welche man neuerdings unter jenem Namen von den übrigen Wissenschaften, den sogen. Geisteswissenschaften trennt, — nicht bloß in sich widerspruchsfrei sein müssen, sondern auch der Erfahrung entnommen sein müssen, und was noch wesentlicher ist, das Kriterium mit sich führen müssen, durch welches man für jeden speziellen Fall entscheiden kann, ob der vorliegende Begriff unter die Definition zu subsumieren ist, oder nicht. Eine Definition, welche dies nicht leistet, mag von Philosophen oder Logikern gepriesen werden, für uns Mathematiker ist sie eine bloße Wortdefinition und ohne jeden Wert.

Neuerdings habe ich den Abdruck einer Antrittsrede des verdienten Mathematikers Herrn Stolz[40] erhalten, welcher augenblicklich Rektor der Universität Innsbruck ist und mit welchem mich ein gewisses Freundschaftsverhältnis verbindet. Vor einigen Jahren war ich mit ihm in Meran zusammen, wo wir unsere abweichenden Ansichten in häufigen Gesprächen erörtert haben. Ich glaube, daß diese Unterhaltungen den Anlaß dazu gegeben haben, eine Stelle der genannten Rede, welch letztere den Titel *Größen und Zahlen* führt, über die Verhältnisse näher auszuführen. Diese
28|29 Stelle lautet (9)[41] | Ich möchte hinzufügen, daß der Satz des Widerspruchs nur mit der größten Vorsicht anzuwenden ist, und negative Schlüsse nur dann etwas beweisen, wenn sie in entsprechende positive Folgerungen ohne weiteres umgewandelt werden können.

Ferner will ich eine Definition der Zahl anführen, welche Herr Biermann in seinem Buche über die Theorie der analytischen Funktionen nach Äußerungen von HH. Weierstrass und Cossack wiedergiebt. Dort heißt es : « Der Begriff der Zahl wird durch die Zusammensetzung von Gegenständen aus gleichartigen Bestandteilen gegeben und ist gradezu als die Vorstel-

[40] Otto Stolz (1842–1905) suivit à Berlin, de 1869 à 1871, les cours de Weierstrass, Kummer et Kronecker.

[41] Citation manquante.

lung der Vielheit gleichartiger Bestandteile zu definieren »[42]. Das sind ebenso viel Worte, als solche, gegen welche ich mich kritisch zu wenden habe. Die Zahl ist keine Vorstellung, wenigstens diejenige Zahl nicht, mit welcher wir es in der Mathematik zu thun haben ; Vielheit und Zahl ist dasselbe. Ferner muß nicht das Gleichartige des zu Zählenden, sondern grade das Unterscheidbare, Diskrete betont werden. Und dann Bestandteile ! Wovon denn ? Von etwas, was man erst noch zu definieren hat ? Das Gleichartige ist also unnütz, das Wort « Vielheit » in der Definition ist das zu definierende, die « *Vorstellung* » ist unbrauchbar. Von dem überall aushelfenden Gebrauch dieses letzteren Wortes kann man mit einer Variante des bekannten Goetheschen Ausspruchs sagen : « Denn da, wo die Bestimmtheit fehlt, da stellt « die Vorstellung » zur rechten Zeit sich ein »[43], ferner leidet die Definition an dem Mangel, daß sie nicht anwendbar ist. « Vorstellungen » kann man nicht addieren, nicht multiplizieren.

Einige Autoren legen aber ihren Betrachtungen dieselbe Definition des
29|30 Zahlbegriffs zu Grunde, welche ich Ihnen hier entwickelt | habe. Vor allem möchte ich von diesen erwähnen Lipschitz in seinem Buche über Analysis[44] und eine neuerdings in Boston und New York erschienene Publikation von B. Fine, prof. of mathematics in Prinstone Colledge [Princeton College]. Er hebt ausdrücklich hervor, daß « separateness and distinctness of the objects » das erste sei, was man postulieren müsse und spricht an einer anderen Stelle davon, daß die Zahl diejenige Eigenschaft unterscheidbarer Gegenstände sei, welche bei einem Wechsel der Gruppen zurückbleibe[45]. Dann muß ich noch des berühmten Aufsatzes von Helmholtz in der Zeller-Sammlung, betitelt *Zählen und Messen, erkenntnistheoretisch betrachtet*, Erwähnung thun. H[elmholtz] beginnt mit dem Zählen, während ich es vorziehe mit der Zahl anzufangen. Er sagt : « Das Zählen ist ein Verfahren, welches darauf beruht, daß wir uns imstande finden, die Reihenfolge

[42] [Biermann 1887, p. 1].

[43] *Cf.* J.W. Goethe, *Faust* I, 'Studierzimmer', vers 1994–1996, Mephistopheles :
« Schon gut ! Nur muß man sich nicht allzu ängstlich quälen ;
« Denn eben, wo Begriffe fehlen,
« Da stellt ein Wort zur rechten Zeit sich ein ».

[44] [Lipschitz 1877, p.1].

[45] [Fine 1890, p. 3] : « [. . .] separateness and distinctness is a primary cognition, being necessary even to the cognition of things as individuals, as distinct from other things ».

[. . .] »[46] Im übrigen sind wir zu ähnlichen Resultaten gekommen, wie H[elmholtz] auch S. 33 l.c. anführt[47].

Was nun die mangelhaften Definitionen betrifft, um darauf noch einmal zurückzukommen, so giebt es dafür ein gradezu klassisches Beispiel in der Erklärung des Verhältnisses im 5. Buch von Euklids Elementen. Er definiert dort zuerst den Teil, meros, die kleinere Größe, dann das Vielfache und schließlich das Verhältnis. Wie wurde nun das Verhältnis vor zwei Jahrtausenden erklärt ? (10)[48] In deutscher Übersetzung heißt diese klassische Definition : «Das Verhältnis ist das Verhalten zweier homogener Größen derselben Art in Bezug auf ihre Größe. » Als vierte Definition kommt alsdann die berühmte Erklärung der Analogie oder der Gleichheit zweier Verhältnisse, welche noch heute Wort für Wort gilt und
30|31 uns zur Bewunderung des Scharfsinns der | Griechen anhält[49]. Man hat angenommen, — und ich halte diese Ansicht für durchaus begründet, — daß seine absolut nichtssagende dritte Definition und die berühmte vierte unmöglich von demselben Mathematiker geschrieben sein können, und daß die Erklärung des Verhältnisses vielmehr von irgend einem Ausleger oder Kopisten hinzugefügt worden ist.

Über den Begriff des Verhältnisses sagt Herr Stolz a.a.O. mit Recht, daß das Verhältnis etwas ganz Unbestimmtes sei und erst seinen Inhalt

---

[46] La suite de la citation manque dans le manuscrit. Dans [Helmholtz 1887, p. 21] on lit : « Das Zählen ist ein Verfahren, welches darauf beruht, daß wir uns imstande finden, die Reihenfolge, in der Bewusstseinsacte zeitlich nach einander eingetreten sind, im Gedächtnis zu behalten. Die Zahlen dürfen wir zunächst als eine Reihe willkürlich gewählter Zeichen betrachten, für welche nur eine bestimmte Art des Aufeinanderfolgens als die gesetzmässige, oder nach gewöhnlicher Ausdrucksweise 'natürliche' von uns festgehalten wird. Die Bezeichnung der 'natürlichen' Zahlenreihe hat sich wohl nur an eine bestimmte Anwendung des Zählens geknüpft, nämlich an die Ermittlung der *Anzahl* gegebener reeller Dinge. [. . .] »

[47] [Hemholtz 1887, p. 33]. Une note en bas de page renvoie au cours de Kronecker (*cf.* p. 2 du manuscrit retranscrit ici).

[48] Euclide, *Livre* 5, définition 3 : « Λογοσ εστι δυο μεγεθωνς ομογενων η κατα πηλικοτητα ποια σχεσισ » (Un rapport est la relation, telle ou telle, selon la taille, [qu'il y a] entre deux grandeurs du même genre (trad. B. Vitrac)).

[49] Il s'agit sans doute, référencée ici par Kronecker comme quatrième définition, de la célèbre définition 5 qui explique à quelles conditions quatre grandeurs sont en proportion (*cf.* par exemple [Vitrac 1994, p. 41 *sv.*]). Notons cependant qu'à la page 50, Kronecker fait clairement référence à cette même définition en l'appelant définition 5. Heiberg — et aussi Hermann Hankel, dans l'annexe de son livre d'histoire auquel Kronecker fait référence plus loin (p. 50) — donnent comme quatrième définition : « αναλογια δε η των λογων ταυτοτησ », et la rejettent comme une interpolation tardive.

dadurch empfange, daß man erklärt, welche Verhältnisse einander gleich sind. Wir können noch präziser sagen : Ein Verhältnis ist nichts anderes, als ein System von zwei Größen (a, b) und erhält erst dadurch eine bestimmte Bedeutung, daß man festsetzt, welche Systeme man als äquivalent betrachtet. So ist durch die Äquivalenz

$(a, b) \sim (xa, xb)$ das geometrische Verhältnis
durch $(a, b) \sim (a + c, b + c)$ das arithmetische Verhältnis definiert.

Jetzt möchte ich noch auf einen Punkt in der Ihnen von mir gegebenen Erklärung des Zahlbegriffs aufmerksam machen. Wenn ich von dem reduzierten System einer Klasse spreche, so muß man sich wohl bewußt sein, daß die Wahl des reduzierten Systems eine ganz willkürliche ist und für sie z.B. bei den quadratischen Formen irgend welche anderen Eigenschaften als die möglichste Kleinheit der Zahlen postuliert werden kann. Nur so hält man sich stets gegenwärtig, daß das reduzierte System nicht als spezielles eine Rolle spielt, sondern einzig und allein als Repräsentant der ganzen Klasse. Das Setzen eines Individuums an die Stelle des Gattungs-
31|32 begriffs ist ja in allen Wissenschaften sehr gebräuchlich, und es | liegt auch meist keine Gefahr vor, daß das Individuum nur als solches aufgefaßt wird; aber in der Mathematik thut man gut, immer ausdrücklich darauf hinzuweisen. So kennt die Logik eigentlich nur einen Menschen, welcher sterblich ist, und zwar ist das der Cajus, während in der Rechtswissenschaft stets der Titus als Sündenbock herhalten muß. Hier leuchtet jedem auch ohne Beglaubigungsurkunde ein, daß in dem einen Falle der Cajus, in dem anderen der Titus die Menschheit *in genere* repräsentiert. Wenn ich aber in der Mathematik schreibe : $\sum_{n=1,2,3,\ldots} a_n$, so braucht der Laie noch nicht ohne weiteres einzusehen, daß die Punkte einen Fortgang in der natürlichen Zahlenreihe bedeuten. — Ich habe in diesem Punkte einmal eine eigentümliche Erfahrung gemacht, welche ich Ihnen mitteilen möchte. Von einer verwandten Familie wurde ich einmal sozusagen als mathematischer Arzt für ihren Sohn, einen Tertianer des hiesigen Wilhelmsgymnasiums, konsultiert welchem die Mathematik Schwierigkeiten machte, der aber im übrigen ein vorzüglicher Schüler war. Ich gab ihm Privatunterricht und war mit ihm zu meinem Erstaunen sehr zufrieden, bis ich ihn einmal einen Beweis für eine andere Figur machen ließ als diejenige war, welche in seinem Lehrbuche gezeichnet stand. Da rief mein kleiner Tertianer : « Aber für diese Figur ist es ja gar nicht bewiesen ! »

32|33 |

7. Vorlesung — 24.6.91.

Wenn die psychologische Betrachtung auch dazu neigt, die Zahl zu verflüchtigen zu etwas Subjektivem, zu einer « Vorstellung », so kennzeichnet sich doch die Zahl durch sich selbst beständig als objektiv. Bei aller ihr wirklich anhaftenden augenblicklichen Veränderlichkeit ist sie mit der Unterscheidbarkeit der Objekte in jedem Momente bestimmt. Nur wo bei monströsen Bildungen eine Trennung der Individuen nicht angeht, wird die Aufstellung äquivalenter Scharen, ihre Zusammenfassung in eine Klasse und die Bestimmung der Zahl als der Invarianten der Klasse sinn- und bedeutungslos.

In der Geschichte der Wissenschaften tritt mit jedem Fortschritt die Notwendigkeit ein, diese oder jene Klasse äquivalenter Systeme in 'Unterklassen' zu scheiden. Während Lagrange und Gauss als äquivalent zunächst alle diejenigen quadratischen Formen $ax^2 + bxy + cy^2$ ansahen, welche in einander übergehen durch die Substitution :

$$\begin{aligned} x &= \alpha x' + \beta y' \\ y &= \gamma x' + \delta y' \end{aligned} \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$$

schränkte noch Gauss selbst die eigentliche Äquivalenz ein auf die Bedingung : $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$[50]. Zu Untersuchungen über elliptische Funktionen waren später die Substitutionskoefficienten noch modulo 2 zu betrachten, wobei
33|34 jede Gauss'sche Klasse | in sechs zerfiel.

Eine ähnliche Trennung hat die Allgemeinheit mit ihrem instinktiven Sinn längst schon an den Klassen vorgenommen, als deren Invariante die Zahl definiert wurde. Sobald nämlich den für einander zu substituierenden Objekten ein bestimmter, specieller Charakter gegeben wird — wie es im praktischen Leben wohl immer geschieht — so geht aus der ganzen Klasse der durch eine bestimmte Zahl zusammengehaltenen Scharen eine unerschöpfliche Reihe specieller Klasse[n] hervor. Der Tauschhandel beweist, daß schon auf einer niederen Stufe der Kultur die Völker implicite einen ganz klaren Begriff solcher besonderen Äquivalenzen haben. Denn für den Tausch sind ja zwei Scharen von einer gleichen Zahl von Objekten noch keineswegs äquivalent, sondern die Tauschmittel müssen vor allem

[50] *Cf.* [Gauss 1801, § 157].

Objekte eines bestimmten Charakters sein. Sondern es ist z.B. eine Schar von Rindern äquivalent einer anderen, wenn beiderseitig für je ein Objekt der einen Schar eines der anderen substituiert werden kann. Die Invariante, der « Wert » solcher besonderen Systeme ist nicht mehr eine abstrakte Zahl, wird aber ganz zu Unrecht bezeichnet : « benannte Zahl ». Der Ausdruck widerspricht sich selbst und der Sache. Eine « Apfelvier » wäre vielleicht eine benannte Zahl. In dem Ausdruck « vier Äpfel » aber ist die Zahl aus der substantivischen in eine adjektivische Rolle hinabgedrückt. In
34|35 Wahrheit sind die | benannten Zahlen « gezählte Benennungen », gezählte Dinge. Deshalb ist auch ihre frühere Bezeichnung als *nombres complexes* nicht ganz sachgemäß. Unter solchen verstand man nämlich früher das, was heut[e] Zahlen mit verschiedener Benennung heißt, z.B. die Angabe einer Summe Geldes in Thalern, Groschen, Pfennigen.

Aber selbst wenn die Bildung des Begriffes der benannten Zahlen berechtigt wäre, so wäre es seine weitere Existenz doch noch nicht. Denn nachdem einmal die reine Zahl abstrahiert ist, bedeuten die « benannten Zahlen » lediglich den Rückschritt einer zu engen, an dem jeweiligen besonderen Charakter der Objekte haftenden Abstraktion. Die Unabhängigkeit von solcher Besonderheit macht aber gerade das Wesen der Zahl aus, und die Rechnung mit den Zahlen bleibt deshalb dieselbe, ob sie nun von diesen oder jenen Objekten herstammen, mit dieser oder jener Benennung verbunden sind. Deshalb wird die Entwicklung der grundlegenden Gesetze über die Zahlen auch an solchen Scharen von Objekten zu erfolgen haben, denen keinerlei Besonderheit anhaftet, und das sind die Zahlen selbst.

Den ersten Hauptpunkt bei der Deduktion pflegt gegenwärtig die Unabhängigkeit der Zahl von der Reihenfolge beim Zählen der Objekte zu bilden. Während frühere Arithmetiker sie als Thatsache annahmen, verwendet z.B. Herr von Helmholtz darauf eine eingehende Untersuchung.
35|36 (« Zählen und Messen ».) Der Satz wird | wieder selbstverständlich, wenn die Zahl erklärt wird als die Invariante für alle die Systeme, welche durch Substitution je eines Elementes für je eines in einander transformiert werden können. Danach ist das Zählen lediglich die Überführung irgend einer Gruppe von Objekten in das äquivalente System der ersten Ordnungszahlen. Ein Zählen in verschiedener Reihenfolge ist ein Permutieren der Objekte vor der Substitution der Ordnungszahlen. Alle durch Permutation der Elemente aus einer Schar hervorgehenden Scharen bleiben aber

der ersten Schar äquivalent, weil solche Permutationen geradezu mit Substitutionen identisch sind. Es sind also alle nur durch Permutation der Elemente verschiedenen Scharen derselben reducierten Schar von Ordnungszahlen äquivalent. Die letzte der zur Verwendung kommenden Ordnungszahlen, welche ja die Zahl giebt, ist also immer die nämliche.

Beim Zählen treten also die Zahlen auf als ein unendlicher Vorrat von Zeichen, mittels dessen sich jedes System von Objekten in ein äquivalentes und, falls es nützlich, reduciertes System von Objekten keinerlei besonderen Charakters transformieren läßt. Gerade in ihrer Bedeutungslosigkeit liegt die Bedeutung der Zahlen. Deshalb ist es von vornherein zu vermuten, daß die Zahl sich am schönsten als Invariante aller unter ihr enthaltenen Systeme bewähren wird, wenn die Elemente derselben aus dem eigenen
36|37 Reiche der Zahl entnommen werden. | Äquivalent sind alle Systeme (x, y, z), wo x, y, z irgendwelche positiven ganzen Zahlen bedeuten. Die zugehörige Invariante ist die Zahl 3. Andererseits läßt sich rein mathematisch als Invariante dieser Systeme jede von ihnen symmetrisch gebildete Funktion (mit endlichem Werte) auffassen. Eine solche ist die dreifache Summe :

$$\sum_{x,y,z} (x \cdot y \cdot z)^{-1-\rho} \qquad (x, y, z = 1, 2, 3, \ldots, \infty).$$

Dirichlet schon gebraucht :

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^{\rho+1}} = \frac{1}{\rho} + \delta_\rho, \qquad \text{wobei} \qquad \lim_{\substack{\rho \to 0 \\ \text{von } \rho > 0}} \frac{\delta_\rho}{\frac{1}{\rho}} = 0.$$

Es folgt daraus unmittelbar :

$$\sum_{x,y,z} \frac{q}{(x \cdot y \cdot z)^{1+\rho}} = \frac{1}{\rho^3} + \delta'_\rho \qquad (x, y, z = 1, 2, 3, \ldots, \infty)$$

wobei mit der Abnahme von ρ gegen null δ'_ρ gegen $\frac{1}{\rho^3}$ verschwindet. Mit variablem ρ ist es also in der That allein die Zahl 3, welche für die dreifachen Summen invariant bleibt.

Das Resultat verschönert sich, wenn es verallgemeinert wird. Ist nämlich $f(x, \rho)$ irgend eine mit wachsendem x abnehmende, aber beständig positive und überall integrierbare Funktion, so bestehen die Relationen :

$$f(n+1, \rho) < \int_n^{n+1} f(x, \rho) dx < f(n, \rho) \qquad (n > 0),$$

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} f(n+1,\rho) < \int_1^\infty f(x,\rho)dx < \sum_{n=1}^{n=\infty} f(n,\rho),$$

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} f(n,\rho) = \int_1^\infty f(x,\rho)dx + \delta \cdot f(1,\rho) \qquad (0<\delta<1).$$

37|38 |

Als eine Invariante aller aus ν Zahlen gebildeter Systeme ergibt sich hieraus unmittelbar die ν fache Summe :

$$\sum_{n_1,n_2,\ldots,n_\nu} f(n_1,\rho)f(n_2,\rho) \quad \cdots f(n_\nu,\rho) = \Big(\int_1^\infty f(x,\rho)dx\Big)^\nu + R,$$

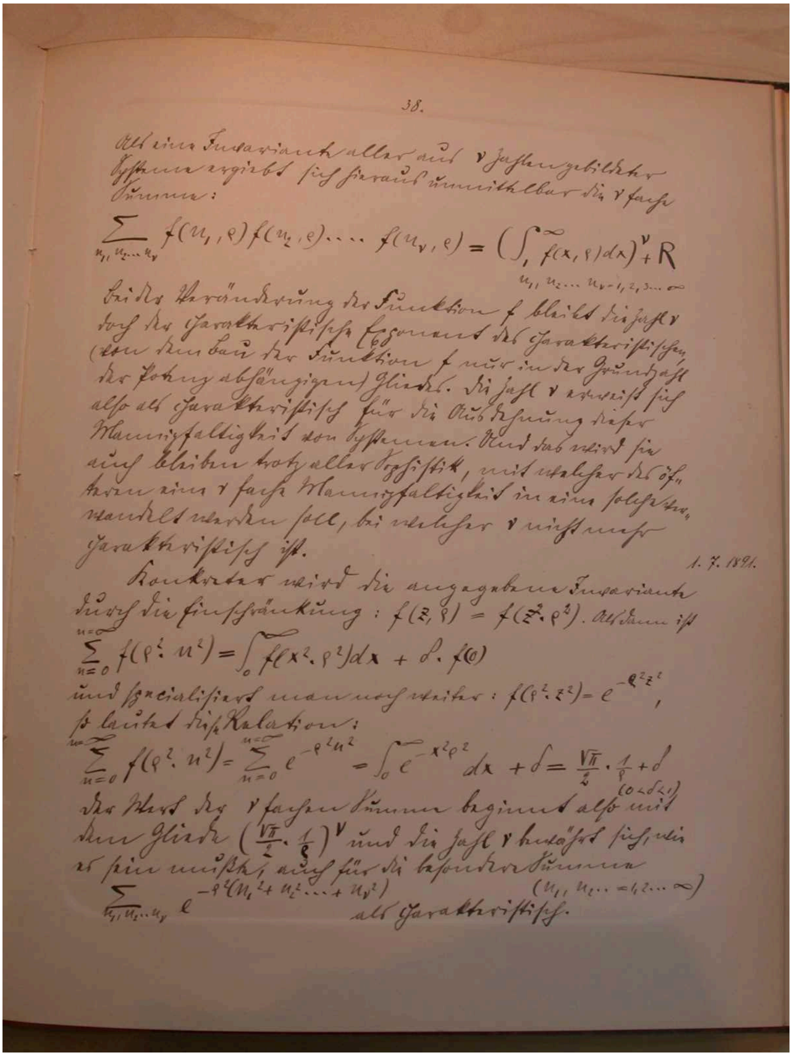
$$n_1, n_2, \ldots, n_\nu = 1, 2, 3, \ldots, \infty.$$

Bei der Veränderung der Funktion f bleibt die Zahl ν doch der charakteristische Exponent des charakteristischen (von dem Bau der Funktion f nur in der Grundzahl der Potenz abhängigen) Gliedes. Die Zahl ν erweist sich also als charakteristisch für die Ausdehnung dieser Mannigfaltigkeit von Systemen. Und das wird sie auch bleiben trotz aller Sophistik, mit welcher des öfteren eine ν fache Mannigfaltigkeit in eine solche verwandelt werden soll, bei welcher ν nicht mehr charakteristisch ist[51].

---

[51] Ce passage a été ressenti par Georg Cantor comme une critique méchante et infondée de ses travaux, en particulier de son article [Cantor 1878], dans lequel il avait établi une bijection entre l'intervalle unité et ses puissances, et dont la publication dans le *Journal* de Crelle avait apparemment été retardée par Kronecker — voir [Purkert, Ilgauds 1987, p. 50–51]. Cantor se montre très agacé par tout le cours de Kronecker dans une lettre à W. Thomé du 21 septembre 1891, où il dit de Kronecker (cité d'après [Purkert, Ilgauds 1987, p. 217]) : « Daß er seit zwanzig Jahren meine mathematischen Arbeiten und damit mich selbst schlecht zu machen sucht, ist mir längst bekannt gewesen [...] Nichtsdestoweniger hatte ich ihm aus Rücksicht auf sein Alter und die Stellung, welche er sich gemacht hat, die Ehre zu Theil werden lassen, daß er den Eröffnungsvortrag [lors de la première réunion de la Deutsche Mathematiker-Vereinigung en automne 1891] halten sollte. Diese Abmachung datirt von den Osterferien. Da wäre doch für einige Monate Suspension seiner Feindseligkeiten gegen mich am Platze gewesen ! Allein im Gegentheil : aus einer Nachschrift seines Publicums über den Zahlbegriff, welches er im Sommersemester gelesen hat, die mir zufällig in die Hände gekommen und in meinen Besitz übergegangen ist, geht urkundlich hervor, daß er in der boshaftesten Weise und *ohne den Schein wissenschaftlicher Begründung* meine im *Crelleschen Journal* veröffentlichten Arbeiten vor seinen unreifen Zuhörern als 'Mathematische Sophistik' denuncirt hat. Die ganze Vorlesung ist ein wirres oberflächliches Gemisch von unverdauten Ideen, Prahlereien, unmotivierten Schimpfereien und faulen Witzen. » W. Purkert nous a écrit que l'exemplaire des notes du cours mentionné par Cantor ne se trouve pas dans son *Nachlass*.

Notons d'autre part que le travail de Peano « Sur une courbe qui remplit toute une aire plane » venait d'être publié quand Kronecker faisait son cours (*cf.* [Peano 1890]).



38.

Als eine Invariante aller aus ν Zahlen gebildeten Systeme ergibt sich hieraus unmittelbar die ν fache Summe:

$$\sum_{n_1, n_2 \ldots n_\nu} f(n_1,\varrho) f(n_2,\varrho) \ldots f(n_\nu,\varrho) = \left(\int_1^\infty f(x,\varrho)\,dx\right)^\nu + R$$

$n_1, n_2 \ldots n_\nu = 1, 2, 3 \ldots \infty$

bei der Veränderung der Funktion f bleibt die Zahl ν doch der charakteristische Exponent des charakteristischen (von dem Bau der Funktion f nur in der Grundzahl der Potenz abhängigen) Gliedes. Die Zahl ν erweist sich also als charakteristisch für die Ausdehnung dieser Mannigfaltigkeit von Systemen. Und das wird sie auch bleiben trotz aller Sophistik, mit welcher des öfteren eine ν fache Mannigfaltigkeit in eine solche verwandelt werden soll, bei welcher ν nicht mehr charakteristisch ist.

1. 7. 1891.

Konkreter wird die angegebene Invariante durch die Einschränkung: $f(z,\varrho) = f(z^2 \cdot \varrho^2)$. Alsdann ist

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} f(\varrho^2 \cdot n^2) = \int_0^\infty f(x^2 \cdot \varrho^2)\,dx + \delta \cdot f(0)$$

und specialisiert man noch weiter: $f(\varrho^2 \cdot z^2) = e^{-\varrho^2 z^2}$, so lautet diese Relation:

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} f(\varrho^2 \cdot n^2) = \sum_{n=0}^{n=\infty} e^{-\varrho^2 n^2} = \int_0^\infty e^{-x^2\varrho^2}\,dx + \delta = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{1}{\varrho} + \delta \quad (0 < \delta < 1)$$

Der Wert der ν fachen Summe beginnt also mit dem Gliede $\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{1}{\varrho}\right)^\nu$ und die Zahl ν behauptet sich, wie es sein müßte, auch für die besondere Summe

$$\sum_{n_1, n_2 \ldots n_\nu} e^{-\varrho^2(n_1^2 + n_2^2 + \ldots + n_\nu^2)} \quad (n_1, n_2 \ldots = 1, 2 \ldots \infty)$$

als charakteristisch.

Manuscrit du cours de L. Kronecker
conservé à la bibliothèque de l'IRMA, Strasbourg

8. Vorlesung — 1.7.1891.

Konkreter wird die angegebene Invariante durch die Einschränkung : $f(z,\rho) = f(z^2 \cdot \rho^2)$. Alsdann ist

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} f(\rho^2 \cdot n^2) = \int_0^\infty f(x^2 \cdot \rho^2)dx + \delta \cdot f(0),$$

und spezialisiert man noch weiter : $f(\rho^2 \cdot z^2) = e^{-\rho^2 z^2}$, so lautet diese Relation :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{n=\infty} f(\rho^2 \cdot n^2) &= \sum_{n=0}^{n=\infty} e^{-\rho^2 n^2} \\ &= \int_0^\infty e^{-x^2\rho^2}dx + \delta = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{1}{\rho} + \delta \qquad (0 < \delta < 1).\end{aligned}$$

Der Wert der ν fachen Summe beginnt also mit dem Gliede $(\frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{1}{\rho})^\nu$ und die Zahl ν bewährt sich, wie es sein mußte, auch für die besondere Summe

$$\sum_{n_1,n_2,\ldots,n_\nu} e^{-\rho^2(n_1^2+n_2^2+\cdots+n_\nu^2)} \qquad (n_1,n_2,\ldots,n_\nu = 1,2,3,\ldots,\infty)$$

38|39 als charakteristisch. | So deduciert sich der Zahlbegriff an der Zahl selbst. Um aber die Zahlen selbst als Objekte nehmen zu können, bedurfte man einer Bezeichnung, welche *promiscue* die verschiedenen Zahlen darstellt. Dies leistet die Einführung der Buchstaben. Von ähnlicher Bedeutung war der Fortschritt von der Behandlung einzelner Zahlen zu Zahlensystemen. Aller Nutzen, den die Brüche, die komplexen Zahlen und ähnliche Bildungen der Wissenschaft brachten, liegt begründet in der gleichzeitigen Betrachtung mehrerer Zahlen (nicht aber in dieser oder jener formalen Vereinigung derselben zu einer « Größe ».) Solche Systeme führen auch schon zur Entwicklung der fundamentalen Gesetze, gleich anfangs z.B. zur

Addition.

Sehr nahe liegt der Gedanke, zwei Systeme von Objekten (a,b,c,d) und (α,β,γ) zu vereinigen zu einem neuen System $(a,b,c,d;\alpha,\beta,\gamma)$ und unmittelbar ergiebt sich die Frage, wie — und ob — sich die

Invariante des neuen Systems aus denen der alten bildet. Diese Invariante ist wiederum eine Zahl. Sie wird bezeichnet als die Summe der ursprünglichen zwei Invarianten. Es werden diese beiden « addiert ». Die anfänglich gegebenen Systeme werden nämlich ersetzt durch « reducierte », aber nicht (a, b, c, d) durch das der Zahlen $(1, 2, 3, 4)$ und (α, β, γ) durch $(1, 2, 3)$; denn in dem neuen System $(1, 2, 3, 4; 1, 2, 3)$ wäre die Sonderung der Elemente nach ihrem Ursprung beschwerlich. Sondern als « reduciert » wird außer dem ersten System (a, b, c, d) das ganze System gewählt, d.h. an Stelle von (α, β, γ) tritt $(5, 6, 7)$. Die Invari-
39|40 ante des neuen Systems $(1, 2, 3, 4; 5, 6, 7)$ ist evident | die Zahl 7. Sie bildet sich also — ganz allgemein — so, daß von der Invarianten des ersten Systems um die des zweiten weiter gezählt wird. Addieren heißt : weiter zählen. Wollte man aber das Addieren nur so erklären, so wäre erst der Beweis zu erbringen, daß $n_1 + n_2 = n_2 + n_1$. Selbstverständlich ist aber die Form des Satzes, daß die Invariante des vereinigten Systems unabhängig ist von der Reihenfolge der Systeme. Schon eine geeignete Bezeichnung der Scharen macht das ersichtlich. So sind z.B. $\big((1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5)\big);$
$\big((2, 1), (2, 2) \ldots (2, 7)\big)$ zwei reducierte Systeme, deren Elemente durch die ersten, die Stelle von Indices vertretenden Ziffern doch vor einer Vermischung bewahrt sind. Jetzt heißt die Invariante des gesamten Systems $5 + 7$; nach der Umstellung der Scharen würde sie aber lauten $7 + 5$[52]. Und so ist ganz allgemein $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n_\alpha + n_\beta + \cdots + n_\rho$, wo $\alpha, \beta, \ldots, \rho$ eine beliebige Anordnung der Zahlen $1, 2, \ldots, r$ bedeutet.

Die Addition gleicher Zahlen heißt Multiplication. Es wird erklärt :

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_r = r \cdot n \quad \text{falls} \quad n_1 = n_2 = n_3 = \cdots = n_r = n.$$

Bei einer geeigneten Bezeichnung der Elemente leuchtet der erste Hauptsatz der Multiplication : $r \cdot n = n \cdot r$ wieder von selbst hervor. Vereinigt man nämlich zu einem System die n_1 Scharen (h_1, h_2), in denen der Reihe nach $h_1 = 1, 2, \ldots, n_1$ und für jeden einzelnen dieser Werte $h_2 = 1, 2, \ldots, n_2$, so hat das so gebildete System

$$\big\{(1, 1), (1, 2), \ldots, (1, n_2); (2, 1), (2, 2), \ldots, (2, n_2); \ldots ; \\ (n_1, 1), (n_1, 2), \ldots, (n_1, n_2)\big\}$$

[52] Kronecker reprend l'exemple « $7 + 5 = 12$ » utilisé par Kant dans la *Critique de la raison pure* et devenu standard dans la littérature philosophique.

die Invariante $n_1 \cdot n_2$. Ordnet man aber das System nach steigenden Werten von h_2 so an, daß für jeden einzelnen Wert von h_2 die Größe h_1 alle ihre
40|41 Werte | in steigender Reihenfolge durchläuft, so entsteht das System

$$\big\{(1,1),(2,1),\ldots,(n_1,1);(1,2),(2,2),\ldots,(n_1,2);\ldots;\\ (1,n_2),(2,n_2),\ldots,(n_1,n_2)\big\}$$

mit der Invariante $n_2 \cdot n_1$. Aus der Äquivalenz beider System folgt $n_1 \cdot n_2 = n_2 \cdot n_1$.

Eine entsprechende Erweiterung dieses Verfahrens ergiebt : $n_1 \cdot n_2 \cdots n_r = n_\alpha \cdot n_\beta \cdots n_\rho$, wo $\alpha, \beta, \ldots, \rho$ irgendeine Permutation der Zahlen $1, 2, \ldots, r$ ist.

Ganz unnötig ist die Beschwerung dieser ersten Gesetze mit *terminis technicis*, wie die Bezeichnung des Satzes

$n_1 + n_2 = n_2 + n_1$

$n_1 \cdot n_2 = n_2 \cdot n_1$

als Kommutations-Gesetz,

$n_1 + (n_2 + n_3) = n_1 + n_2 + n_3$ — Associations-Gesetz,

$(m+n)r = mr + nr$ — Distributions-Gesetz.

Letzteres folgt unmittelbar aus der Addition der Gleichungen :

$m_1 + m_2 + \cdots + m_r = r \cdot m \qquad (m_k = m)$

$n_1 + n_2 + \cdots + n_r = r \cdot n \qquad (n_k = n) \qquad (k = 1, 2, \ldots, r)$

Denn $r \cdot m + r \cdot n = (m_1 + n_1) + (m_2 + n_2) + \cdots + (m_r + n_r) = r(m+n)$.

Die Einführung der durch die Hinzunahme von Indices ins Unerschöpfliche vermehrten Buchstaben hat die Mathematik in die Höhe gebracht. In der Mathematik tötet der Buchstabe nicht, sondern macht lebendig, weil er den Geist in sich faßt. Denn durch die ihm innewohnende Allgemeinheit giebt er die Möglichkeit, von allem Speciellen der einzelnen Zahlen zu abstrahieren. Allerdings darf die ausgiebige Verwendung der Buchstaben
41|42 nicht zu | dem Mißbrauch verleiten, daß man in das ganz Formale verfällt und am Zeichen allein etwas zu haben glaubt. Das Zeichen soll immer bedeuten, daß bei Einsetzung positiver ganzer Zahlen für die Buchstaben diese oder jene Operationen zu vollziehen sind. Denn die ganze Mathematik ist dazu da, um angewendet zu werden.

9. Vorlesung — 8.7.1891.

Die umgekehrten Rechnungsarten.

Während bei der Addition $a + b = c$ die Zahlen a, b als gegeben, c als gesucht angenommen werden, kann umgekehrt auch die Frage gestellt werden, aus a und c die Zahl b zu bestimmen, welche die angegebene Gleichung erfüllt. An diese Frage hat sich der Begriff der Subtraktion, an diesen im Laufe der Geschichte eine sehr eingehende Diskussion geknüpft.

Zunächst steht aber doch fest, daß die Bestimmung der Summe c aus den Summanden a und b subjektiv gewiß verschieden ist von der Ermittlung des einen Summanden aus der Summe und dem anderen Summanden, daß aber unmöglich doch diese oder jene Stellung der Aufgabe die einfache Wahrheit $a + b = c$ in zwei zu zerspalten vermag. Aus solch einer rein subjektiven Änderung des Gesichtspunktes, ob c vor
42|43 oder nach b da ist, kann die Wissenschaft ebensowenig neue Resul- | tate gewinnen, wie die Eigenschaften einer algebraischen Gleichung andere werden, je nachdem ihre Variable als Unbekannte oder als Unbestimmte behandelt wird.

Auf die Forderung, b aus der Gleichung $a + b = c$ zu bestimmen, ist nicht lediglich zu antworten, « daß » dieselbe erfüllt werden kann. So ein « daß »ist ohne das zugehörige « Wie » immer « fehlerhaft ». Und macht die Frage gar eine Lösung unmöglich, so soll man das « daß » nicht zu retten suchen, sondern die Aufgabe mit dem Bescheide der Unerfüllbarkeit ablehnen. Statt dessen aber wurde das Zahlengebiet durch die negativen Zahlen erweitert und in Wahrheit der Zahlbegriff dadurch verflüchtigt. In mannigfachster Weise hat die neuere und die neueste Zeit die Rechtfertigung dieses Schrittes versucht. Die Mehrzahl dieser Versuche geht darin fehl, daß sie nicht die Mathematik selbst mit ihren Bedürfnissen und ihren Ergebnissen, sondern philosophisch schwankende Worte zum Ausgangspunkt nimmt. Aber noch hat Hankels Phrase vom Prinzip der Permanenz der formalen Gesetze[53] nicht eine mathematische Erkenntnis geliefert. Die Mathematik ist Naturwissenschaft, und nicht besser, nicht vollständiger und nicht einfacher kann sie die Erscheinungen beschreiben,

[53] *Cf.* [Hankel 1867, p. 11] : « Wenn zwei in allgemeinen Zeichen der *arithmetica universalis* ausgedrückte Formen einander gleich sind, so sollen sie einander auch gleich bleiben, wenn die Zeichen aufhören, einfache Grössen zu bezeichnen, und daher auch die Operationen einen irgend welchen anderen Inhalt bekommen ».

als mathematisch. Freilich darf sie dabei keine Zeichen haben für konfuse
43|44 Begriffe, sondern muß sich in ihrer Formelsprache diejenige Klarheit |
bewahren, welche einst Fourier — in der Vorrede zu seiner Wärmetheorie — zu einem fast überschwenglichen Lobe auf die Analyse begeisterte.

Vielleicht ist es zumeist die 'Einfachheit' der Beschreibung, welche bei der hergebrachten Einführung der negativen Zahlen zu wünschen bleibt. Sachlich schildern die guten Lehrbücher wenigstens wohl alles richtig; ihre Deduktion leidet aber unter der vorsichtigen Umgehung von mancherlei Schwierigkeiten, die durch eine einfache, naturgemäße Behandlung von vornherein zu überwinden sind. So betont z.B. Schubert in seinem System der Arithmetik und Algebra[54] ausdrücklich, daß $a - b$ für den Fall $a < b$ eine bloße Vereinigung dreier Zeichen ist. Denn in diesem Fall könne ja $a - b$ nicht das Resultat einer Zählung, also auch nicht eine Zahl sein. Und doch — ihren Sinn hätten solche Differenzen $a - b$ ($a < b$) aber doch auch. Man verspreche, sagt Schubert, daß man für $(a - b) + b$ immer, auch für $a < b$, a setzen wolle, und zur Verbannung solcher Differenzen aus der Arithmetik sieht er umso weniger Grund, als sie der Formelsprache eine wesentliche Vereinfachung gewähren.

Die ganze Erklärung läuft also darauf hinaus, daß, wie gleich anfangs erwähnt, in der Gleichung $a = c - b$ gar keine Subtraktion vorkommt. Vielmehr findet dieser Ausspruch $a = c - b$ seine Deutung erst in der
44|45 Gleichung : $a + b = c$. | Dieser also giebt dem Zeichen $(-)$ überhaupt einen Sinn. Ist aber dieses « Minus » ein Zeichen, so thut man auch gut, es äußerlich als solches auch zu bezeichnen. Durch den Buchstaben s (für *signum*) mag dies geschehen. Dieses s ist also erklärt durch die Gleichung : $(a + sb) + b = a$.

Jetzt lassen sich Schuberts Überlegungen ganz explizit mathematisch darstellen. Wenn er so scharf betont, daß in der Gleichung $7-9 = 3-5$ von dem Gleichheitszeichen ein ganz neuer Gebrauch gemacht würde, so will das sagen, daß eine Gleichung mit dem Zeichen s gar keine gewöhnliche Gleichung mehr ist. Und doch kann man sie in eine solche verwandeln, wenn man mit dem Zeichen s wie mit einer Zahlengröße zu rechnen und seine wahre Bedeutung aus den sich daraus ergebenden Folgerungen und Forderungen festzustellen versucht. Dann geht nämlich $(a + sb) + b = a$ über in die Gleichung :

---

[54] [Schubert 1885].

$(a + sb) + b = a + b(s + 1) = a$,
$b(s + 1) = 0$ und, da $b \neq 0$,
$\underline{s + 1 = 0}$.

Dies also ist die notwendige und hinreichende Bedingung für das Bestehen der Ausgangsgleichung $a + sb + b = a$ $(b \neq 0)$. Mit dem Zeichen s ist, wie Schubert sagen würde, zu versprechen, daß $s+1$ überall gleich null gesetzt werden soll. Für dieses « Versprechen » hat aber die Arithmetik eine
45|46 klassische Bezeichnung | erhalten durch die Gauss'schen Kongruenzen. In diesen ist es ja eine reine Identität, daß $s + 1 \equiv 0 \pmod{s + 1}$ und demzufolge, daß $(a + sb) + b \equiv a \pmod{s + 1}$.

So ordnen sich die « Gleichungen » mit dem s der gewöhnlichen, in reinen Identitäten verlaufenden mathematischen Sprechweise ein, wenn man sie in Kongruenzen modulo $s+1$ verallgemeinert. Diese Kongruenzen ersetzen nicht nur die Einführung des negativen Zeichens vollständig, sondern enthalten wegen der Variabilität von s selbstverständlich wesentlich mehr, als die aus der « Definition » : $(a - b) + b = a$ abgeleiteten Gleichungen. Vor allem treten durch Vermittlung dieser Kongruenzen alle Rechenregeln über das negative Zeichen als reine Identitäten mühelos in Evidenz. So ist z.B. das fundamentale Gesetz : $(-) \cdot (-) = +$ nur eine Übersetzung der Kongruenz : $s^2 \equiv 1 \pmod{s + 1}$.

Eine analoge Betrachtung gilt für die

<u>Division.</u>

Der « Bruch » $\frac{a}{b}$ wird « definiert » durch die Gleichung $\frac{a}{b} \cdot b = a$. Was ein solcher Bruch an und für sich sein soll, läßt sich gar nicht sagen. Einen Sinn haben allein die Gleichungen, in welchen er vorkommt, die
46|47 Identitäten, welche durch ihn erfüllt werden sollen. | Und wirkliche Identitäten stellen sich wiederum erst dann ein, wenn für den Bruch $\frac{1}{b}$ — denn dessen Betrachtung genügt ja — ein Zeichen : q_b eingeführt und dieses von einem Zeichen zu einer Variablen erhoben wird. — Daß $b \cdot q_b = 1$, ist nicht zu sehen. Eine reine Identität aber ist $b \cdot q_b \equiv 1 \pmod{bq_b - 1}$ und bei der Hinzuziehung dieses Moduls findet die gewünschte Gleichung $\frac{a}{b} \cdot b = a$ ihren identischen Ausdruck in der Kongruenz :

$$a \cdot q_b \cdot b \equiv 1 \pmod{bq_b - 1}.$$

Aber auch die komplicierteren Bruchrechnungsgesetze setzen sich unmittelbar in solche Kongruenzen um. Die Formel

$$(1) \qquad \frac{a}{m} + \frac{b}{n} = \frac{an + bm}{m \cdot n}$$

behauptet z.B. :

$$\text{(I)} \quad aq_m + bq_n \equiv (an + bm)q_{mn} \ (\text{modd} : mq_m - 1; nq_n - 1; m \cdot nq_{mn} - 1)$$

(denn als Moduli müssen ja alle Größen $zq_z - 1$ auftreten, welche in die zu erhärtende Relation eingehen). Die Gleichung (1) läßt sich nur dadurch rechtfertigen, daß sie durch Multiplication mit dem « Generalnenner » in eine identische Relation zwischen ganzen Zahlen umgesetzt wird. Bei der Kongruenz (I) aber führt die Multiplication mit $m \cdot n$ noch nicht bis an das gewünschte Ziel. Allerdings ergiebt sie : $mn\{aq_m + bq_n - anq_{mn} - bmq_{mn}\} = na(mq_m - 1) + bm(nq_n - 1) - an(mnq_{mn} - 1) - bm(mnq_{mn} - 1)$. |
47|48 Damit aber der Faktor $m \cdot n$, welcher den Schluß auf die Kongruenz noch verhindert, wieder verschwindet, muß diese Identität noch mit q_{mn} multipliziert werden, wobei ja $mnq_{mn} \equiv 1$ wird.

Ganz ebenso ist die Gleichung

$$(2) \qquad \frac{a}{m} \cdot \frac{b}{n} = \frac{ab}{mn}$$

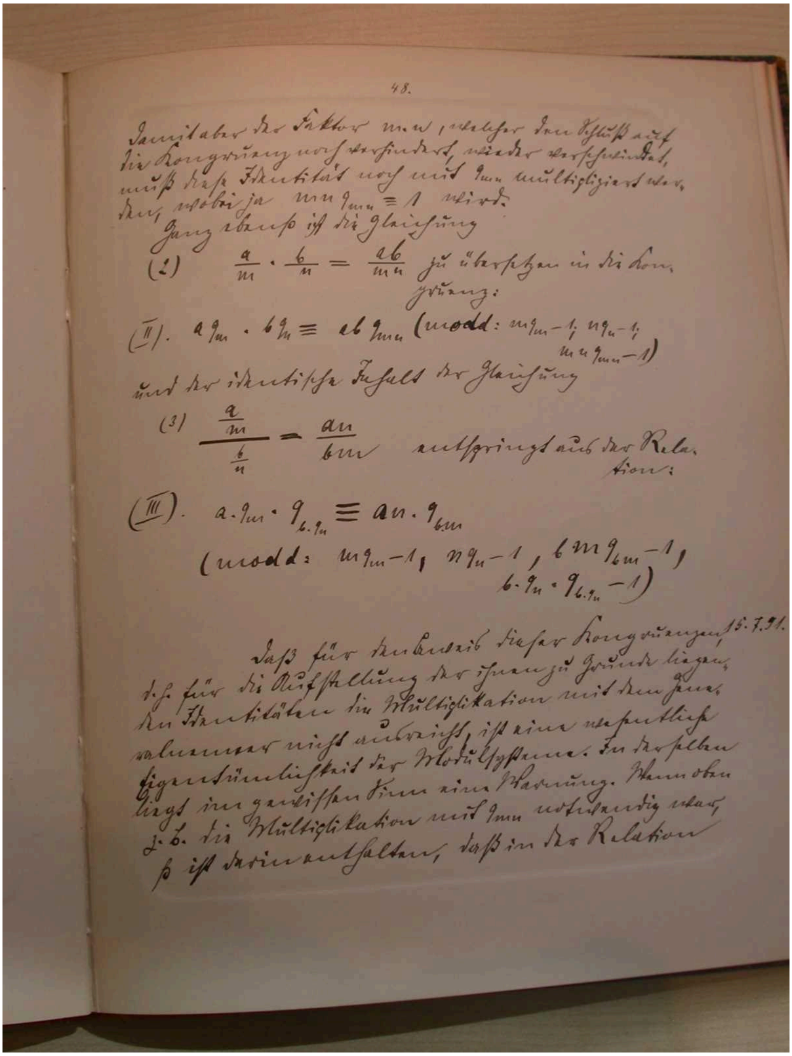
zu übersetzen in die Kongruenz :

$$\text{(II)} \qquad aq_m \cdot bq_n \equiv abq_{mn} \ (\text{modd} : mq_m - 1; nq_n - 1; mnq_{mn} - 1)$$

und der identische Inhalt der Gleichung

$$(3) \qquad \frac{\frac{a}{m}}{\frac{b}{n}} = \frac{an}{bm}$$

entspringt aus der Relation :
(III)
$a \cdot q_m \cdot q_{bq_n} \equiv an \cdot q_{bm}$ (modd : $mq_m - 1; nq_n - 1; bmq_{bm} - 1; b \cdot q_n \cdot q_{bq_n} - 1$).


48.

Damit aber der Faktor mn, welcher den Schluß auf die Kongruenz noch verhindert, wieder verschwindet, muß diese Identität noch mit q_{mn} multipliziert werden, wobei ja $mn\,q_{mn} \equiv 1$ wird.

Ganz ebenso ist die Gleichung

(2) $\frac{a}{m} \cdot \frac{b}{n} = \frac{ab}{mn}$ zu übersetzen in die Kongruenz:

(II). $a q_m \cdot b q_n \equiv ab\, q_{mn}$ (modd: $mq_m - 1$, $nq_n - 1$, $mn\,q_{mn} - 1$)

und der identische Inhalt der Gleichung

(3) $\frac{\frac{a}{m}}{\frac{b}{n}} = \frac{an}{bm}$ entspringt aus der Relation:

(III). $a \cdot q_m \cdot q_{b \cdot q_n} \equiv an \cdot q_{bm}$
(modd: $mq_m - 1$, $nq_n - 1$, $bm\,q_{bm} - 1$, $b \cdot q_n \cdot q_{b \cdot q_n} - 1$)

15.7.91.

Daß für den Beweis dieser Kongruenzen, d.h. für die Aufstellung der ihnen zu Grunde liegenden Identitäten die Multiplikation mit den Nennern nicht ausreicht, ist eine wesentliche Eigentümlichkeit der Modulsysteme. In derselben liegt in gewissem Sinne eine Warnung. Wenn oben z.B. die Multiplikation mit q_{mn} notwendig war, so ist darin enthalten, daß in der Relation

Manuscrit du cours de L. Kronecker
conservé à la bibliothèque de l'IRMA, Strasbourg

10. Vorlesung — 15.7.1891.

Daß für den Beweis dieser Kongruenzen, d.h. für die Aufstellung der ihnen zu Grunde liegenden Identitäten die Multiplication mit dem Generalnenner nicht ausreicht, ist eine wesentliche Eigentümlichkeit der Modulsysteme. In derselben liegt im gewissen Sinn eine Warnung. Wenn oben z.B. die Multiplication mit q_{mn} notwendig war, so ist darin enthalten, daß
48|49 in der Relation | zwischen den Brüchen nicht das Produkt aller Nenner verschwinden darf. Denn selbstverständlich muß q_{mn} eine endliche Größe bleiben, wenn es zum Beweise verwendet werden soll. Die « Definition » der Größe q_{mn} durch die Forderung $m \cdot nq_{mn} = 1$ kann aber unmöglich einen endlichen Wert q_{mn} ergeben, wenn $m \cdot n = 0$.

So sind nun auch die Grundgesetze der Bruchrechnung in vollkommene Identitäten gefaßt. Entstanden sind die Brüche freilich aus dem Begriffe der Teilung. Aber sollte ihre systematische Behandlung und theoretische Begründung nicht über die genetische Fundierung hinauskommen dürfen ? Auch Jules Tannery betont in der Vorrede zu seiner *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable*[55], daß « Teile der Einheit » sinnlose Worte sind und daß die Rechnung mit Brüchen schließlich einzig und allein auf Relationen zwischen ganzen Zahlen hinauskommt. Aber mit Unrecht glaubt er, sich die Begründung der Bruchrechnung als etwas zu Einfaches entgehen lassen zu dürfen. Bei der Durchführung seines richtigen Princips wäre seine ganze Theorie des Irrationalen zu Falle gekommen.

Für die Ungleichheiten der Brüche bilden die Modulsysteme nicht mehr ein bequemes Ausdrucksmittel. Sie haben das Nötige bereits geleistet.
49|50 Denn entweder läßt sich $\frac{\alpha}{\mu} < \frac{\beta}{\nu}$ | dadurch erklären, daß von den neuen Einheiten $\frac{1}{\mu\nu}$ in $\frac{\beta}{\nu}$ mehr als in $\frac{\alpha}{\mu}$ enthalten sind, d.h. daß $a\nu < b\mu$. Oder aber es wird den ganzen Zahlen analog erklärt : $\frac{\alpha}{\mu} < \frac{\beta}{\nu}$, wenn $\frac{\alpha}{\mu} + \frac{\alpha'}{\mu'} = \frac{\beta}{\nu}$ $(0 < \alpha, \alpha', \beta, \mu, \mu', \nu)$.

Der Sinn dieser Addition ist ja durch die Modulsysteme bestimmt. Unmöglich aber ist es, nach dieser Ausdehnung der Begriffe größer und kleiner auf die Brüche diese in einer geraden Linie ihrer Größe nach anzuordnen. Für eine endliche Zahl gegebener Brüche ist diese Ordnung wohl möglich. Für eine endliche Zahl ist sie aber nicht nötig, für alle Brüche nicht möglich.

---

[55] *Cf.* [Tannery 1886].

Das Bürgerrecht in der Wissenschaft haben sich die Brüche verhältnismäßig sehr spät erworben. (Notizen darüber finden sich bei Hankel[56] und unter anderem auch sehr gedrängt inhaltsreich in einem Büchlein des amerikanischen Professors Fine[57].)

Diophant gebraucht die Brüche schon, während bei Euklid sie sich noch nicht finden. Dies ist umso charakteristischer, als Euklid einen möglichst umfassenden Gebrauch macht von einem Begriff, der im Laufe der Zeiten mit dem des Bruches geradezu identifiziert worden ist, nämlich von dem Verhältnis. Im fünften Buch unter (5) erklärt Euklid die αναλογια : $x\colon y = x'\colon y'$.

Sachlich ist dieselbe die Einführung der Äquivalenz zweier Systeme
50|51 $(x, y) \sim (x', y')$ unter der | Erklärung : $x \cdot y' = y \cdot x'$ (oder $\frac{x}{y} = \frac{x'}{y'}$). Als reduciertes System einer Klasse bietet sich — analog dem reducierten Bruch — von selbst das der Klasse zugehörige System der absolut kleinsten Zahlen. Die Invariante der Klasse bildet dieses reducierte System (oder irgendein von ihm charakterisiertes). Faßt man das Verhältnis zweier Zahlen auf als Einzelzahl, im allgemeinen also als Bruch, so werden aus den äquivalenten Systemen gleiche Brüche. Daß zuvor auch schon die Verhältnisse als « gleich » bezeichnet werden, will ja weiter nichts sagen, als daß eine Äquivalenz der Systeme besteht.

Euklid blieb also, wie schon erwähnt, streng bei der Gleichheit und Ungleichheit der Verhältnisse stehen. Auch die neuere Zeit bietet ein eklatantes Beispiel dafür, wie die Arbeit von Jahrhunderten nötig sein kann zum Übergang von einem Begriff auf einen anderen, der im Bewußtsein der späteren Geschlechter mit jenem unlöslich zusammenfließt. Kepler hat — worauf Laplace aufmerksam macht — im Grunde das Newtonsche Gesetz schon besessen. Nur ist er niemals auf den Gedanken gekommen, von der Zusammensetzung der Geschwindigkeiten, die ihm ganz geläufig war, fortzuschreiten zur Zusammensetzung der Kräfte.

Übrigens ist doch aber recht fraglich, ob die Brüche im Vergleich zu
51|52 den Proportionen sachlich | ein wirklicher Fortschritt sind. Die Scheu der Griechen, zwei Zahlen anzusehen als eine Zahl, war vielleicht begründet in ihrer großen Schärfe und feinen Genauigkeit. In einem Punkte tritt bei Euklid dieser Vorzug der Griechen in einer wunderbaren Weise hervor.

[56] Sans doute [Hankel 1874, en particulier, p. 56–63].

[57] [Fine 1890].

Bevor er nämlich die Ungleichheit zweier Verhältnisse : $x\colon y > x'\colon y'$ erklärt in der noch heute üblichen Weise, daß nämlich ein System (m, n) existiert, für welches

$$mx > ny,\ mx' < ny', \quad \text{d.h.} \quad \frac{x}{y} > \frac{n}{m} > \frac{x'}{y'},$$

giebt er für die Gleichheit der Verhältnisse die unanfechtbare Definition : die Proportion $x\colon y = x'\colon y'$ findet statt, wenn für <u>alle</u> Zahlen (m, n) mit der Relation $mx \gtreqless ny$ verbunden ist die jeweilig entsprechende : $mx' \gtreqless ny'$. Also mit allen Zahlen (m, n) (positiven, ganzen Zahlen) soll versucht werden, welche der Relation $mx \gtreqless ny$ eintritt und dann, ob für (x', y') stets die analoge Ungleichheit oder Gleichheit statthat. — Wie dieser Versuch durchzuführen ist, das sagt er nicht und kann er nicht sagen. Aber er setzt es doch — in der alleine möglichen Weise — durch, bei der Aufstellung der Proportion $x\colon y = x'\colon y'$ zu verzichten auf die Voraussetzung, daß sich zwei Zahlen (m, n) so finden lassen, daß $mx = ny$ und $mx' = ny'$.

Offenbar ist das angegebene Auskunftsmittel aufgefunden oder vielmehr
52|53 ersonnen | zur Aufstellung solcher Sätze, daß sich z.B. eine Kreisperipherie verhält zu ihrem Radius, wie irgend eine andere zu dem ihr zugehörigen. Denn die Arithmetik Euklids hat ja einen durchaus geometrischen Ursprung. Der Begriff der Incommensurabilität zwingt ihn, für eine allgemeingiltige Erklärung der αναλογια über Voraussetzungen hinaus zu gehen, die bei der Proportionalität incommensurabeler Strecken nicht mehr erfüllt sind. Und so begegnet er dann gleich im fünften Buch dem Fall, daß die Verhältnisse « irrational » werden, während seine Motive, die Begriffe συμμετροσ und ασυμμετροσ erst im zehnten Buch eingeführt werden.

Für die Gegenwart ist die Aufgabe die umgekehrte : jetzt ist der Begriff des Irrationalen wieder von der Geometrie loszulösen. Weil er aber schließlich seine sichere Anwendung wieder in der Geometrie findet, ist es doch nützlich, diese Theorien auf eine etwas breitere und allgemeinere Basis zu stellen, als es für die reine Arithmetik nötig wäre.

11. Vorlesung — 22.7.1891.

Auch in der Euklidischen Behandlung wird es klar, daß erst in der Proportion das Verhältnis eine Bedeutung hat, für sich allein aber nichts

sagt und nichts ist. Das Verhältnis zweier Zahlen, so etwa heißt es bei
53|54 Euklid, ist ihr Verhalten. | (Wahrscheinlich ist wohl erst von einem Späteren dieser rohe Versuch einer unmöglichen Erklärung der klassischen Definition der Proportion vorangestellt worden.) Und doch wird ganz allgemein das Wort Verhältnis gebraucht, ganz allgemein gesprochen von dem Verhältnis der Kreisperipherie zum Radius. In dem scheinbar Tadelnswerten ist aber der Regel nach etwas Richtiges enthalten, und gemeinhin sind es nicht grobe Irrtümer, welche die Welt durchziehen. So liegt auch in jenem Gebrauch des Wortes Verhältnis (für sich alleine) eine Wahrheit. In Wirklichkeit ist mit einem solchen Verhältnis gemeint stets eine Proportion. Erst wer da weiß, daß eine Kreisperipherie sich verhält zu ihrem Radius, wie irgend eine zweite zu ihrem, der erst wird von dem Verhältnis der Peripherie zum Radius reden.

An Verhältnisse dieser Art hat sich, wie die Geschichte lehrt, heraus aus der Geometrie der Begriff des Irrationalen und Incommensurabelen geknüpft. Nicht aber hat man — wie es nach manchen Darstellungen scheinen könnte — $\sqrt{2}$ fingiert als diejenige Größe, deren Quadrat 2 ist. Und weil die Geometrie eine besondere Disciplin der Mathematik ist, deshalb können in einer geometrisch sehr rationalen Weise Beziehungen auftreten, die arithmetisch sehr irrational und irrationell sind.

Nun soll zwar die am Anfange gegebene Warnung vor einer Vermi-
54|55 schung der Disciplinen voll | und ganz aufrecht erhalten werden. Aber deshalb braucht nicht geleugnet zu werden, daß die Arithmetik doch nicht nur allein um ihrer selbst willen, sondern auch als Helferin für verwandte Wissenschaften ausgebildet ist. Es ist ja auch ganz unverkennbar, daß die Arithmetik mit einer Reihe von Begriffen arbeitet, welche in der Geometrie ursprünglicher und natürlicher sind. So sind «größer» und «kleiner» ursprünglich räumliche Eigenschaften. Kleiner ist derjenige Raum, welcher im größeren Platz hat.

Bei diesem notwendigen Übergreifen der einzelnen Wissenschaften — dem aber die einzelnen Disciplinen niemals die reinliche, selbständige Ausbildung ihrer Begriffe aufopfern dürfen — stellt sich von selbst das Problem, wie weit die Arithmetik operieren kann mit Begriffen und Objekten, welche nicht mehr einen rein arithmetischen Charakter haben.

In dieser Beziehung hat sich einerseits das Bestreben geltend gemacht, die Operationen ganz loszulösen von den Objekten, mit welchen operiert werden soll. Bei den Engländern und Amerikanern ist der Operationen-Calcül ganz geläufig geworden. Gerade dies ist die Sphäre, für welche die Permanenz der formalen Gesetze erfunden ist[58].

55|56 Da, wo man nicht bis zu dieser völligen, | natürlich unmöglichen Abstraktion hat vordringen wollen, da hat man andererseits die arithmetischen Begriffe « erweitert », um sie auf nicht-arithmetische Größen übertragen zu können. So werden denn außer den Zahlen auch Strecken und sonst die verschiedensten geometrisch-physikalischen Gebilde addiert. Herr von Helmholtz z.B. stellt in dem Aufsatze : « Zählen und Messen » ein charakteristisches Merkmal dafür auf, unter welchen Bedingungen die physische Verknüpfung zweier Größen als deren Addition zu betrachten sei[59].

Alle solche Operationen aber lassen sich in einer ganz anderen Weise « beschreiben », die der Arithmetik viel näher steht als die Verflüchtigung der arithmetischen Begriffe. Wie die ganze Deduktion der Zahl, so entspringt auch diese Methode in den unerschöpflichen Lagrange-Gaussischen Begriffen der Äquivalenz, der Invariante, der Klasse.

In der Theorie der quadratischen Formen ist ein Kapitel aufgetreten einzig und allein seit Gauss und durch Gauss und vollkommen charakteristisch für seinen gewaltigen Geist : die Komposition der quadratischen Formen[60]. Niemand vor ihm hat sie angegriffen und — wenige nach ihm. Erst Dirichlet hat durch seine klassische Darstellung in der Schrift, mit welcher er sich zum ordentlichen Professor habilitierte, das mathematische
56|57 Publicum ein wenig mit der Komposition | der quadratischen Formen bekannt gemacht[61].

Weil Gauss ein echter Prophet der Wissenschaft ist, deshalb reichen die Begriffe, die er aus der Tiefe der Wissenschaft schöpft, weit hinaus über den Zweck, zu welchem sie aufgestellt wurden. Die ganze neuere Theorie der komplexen Zahlen, auch Kummers berühmte Theorie der idealen Teiler ist nichts als Gaussische Komposition[62].

---

[58] *Cf.* [Hankel 1867].

[59] [Helmholtz 1887, p. 42].

[60] *Cf.* [Gauss 1801, §§ 238 *sqq.*].

[61] [Lejeune-Dirichlet 1851].

[62] Le passage qui suit, dans lequel Kronecker explique comment la composition des formes quadratiques introduite par Gauss dans les *Disquisitiones Arithmeticæ* se géné-

Auch der wahre Operationen-Calculus findet seinen adäquaten Ausdruck als eine allgemein genommene Komposition. Wenn Operationen als Addieren bezeichnet werden, die nicht mehr eine Addition positiver ganzer Zahlen sind, so hat das ja freilich den Vorzug einer geläufigen Sprechweise. Aber dieser Vorteil wird vollkommen paralysiert durch die Verlockung, aus dem Bekannten, dem Alten, dem Ursprünglichen unbewußt Eigenschaften in das neue, noch zu erforschende Verfahren mit hinüberzunehmen. Deshalb lieber « Komposition », die gar so viele Operationen unter sich faßt, weil sie so allgemein ist, und deshalb so allgemein ist, weil sie sich auf <u>Systeme</u> von Größen erstreckt.

Es sei irgend ein System von Objekten beliebiger Art bezeichnet $(z_1, z_2, \ldots, z_r) = (\mathfrak{z})$ und zwischen einer unbestimmten Anzahl von solchen
57|58 Systemen $(\mathfrak{z}), (\mathfrak{z}'), (\mathfrak{z}''), \ldots$ sei eine 'vernünftige' Äquivalenz postuliert. | Aus zwei Systemen $(\mathfrak{z})$ und $(\mathfrak{z}')$ sei nun in irgend einer Weise, die aber aus den Elementen der Systeme ganz eindeutig bestimmt ist, ein drittes $(\mathfrak{z}'')$ abgeleitet. Die dabei zu vollziehende Operation sei angedeutet durch die Scheibweise :

$$\theta\{(\mathfrak{z}), (\mathfrak{z}')\} \sim (\mathfrak{z}'').$$

Solche Kompositionen kommen in der Natur in den mannigfaltigsten Formen vor. Jede (andere) Art derselben hat andere Bedingungen zu erfüllen, und es ist eine ganz naturgemäße Aufgabe, eine möglichst geringe Zahl von Bedingungen aufzustellen, aus denen Eigenschaften von besonders weiter Anwendbarkeit abgeleitet werden können.

Um eine große Zahl arithmetischer und diesen verwandter Gesetze zu umspannen, sind besonders die folgenden Annahmen geeignet : zunächst sei erfüllt die Bedingung

$$\text{(C}'\text{)} \qquad \theta\{(\mathfrak{z}), \theta\{(\mathfrak{z}'), (\mathfrak{z}'')\}\} \sim \theta\{(\mathfrak{z}'), \theta\{(\mathfrak{z}), (\mathfrak{z}'')\}\}.$$

Ferner soll für <u>ein bestimmtes</u> System $(\mathfrak{z}')$ ein System $(\mathfrak{z}^0)$ existieren, so daß

---

ralise en une notion abstraite de composition, à l'aide d'une relation d'équivalence, reprend essentiellement le § 1 de [Kronecker 1870] sur le nombre de classes de nombres idéaux. Rappelons en passant que cet article de Kronecker est un des documents clés recensés par Hans Wussing dans sa recherche historique de versions implicites de lois de groupes. *Cf.* [Wussing 1969, p. 44–48] qui parle d'« axiomatisation de la notion implicite de groupe par Kronecker ».

$\theta\{(\mathfrak{z}^0), (\mathfrak{z}')\} \sim (\mathfrak{z}')$ (Für die Addition würde $(\mathfrak{z}^0)$ also die Null sein.)

58|59 Tritt noch die Annahme hinzu, daß sich zu diesem | $(\mathfrak{z}')$ für jedes $(\mathfrak{z})$ ein $(\mathfrak{z}'')$ so finden läßt, daß

$$\text{(C)} \qquad \theta\big\{(\mathfrak{z}''), (\mathfrak{z}')\big\} \sim (\mathfrak{z}),$$

so läßt sich behaupten, daß der Satz

$\theta\{(\mathfrak{z}^0), (\mathfrak{z}')\} \sim (\mathfrak{z}')$ nicht an das bestimmte System $(\mathfrak{z}')$ gebunden ist, sondern gilt für jedes System $(\mathfrak{z})$. Die Bedingung (C') nämlich ergiebt :

$\theta\{(\mathfrak{z}''), \theta\{(\mathfrak{z}^0), (\mathfrak{z}')\}\} \sim \theta\{(\mathfrak{z}^0), \theta((\mathfrak{z}''), (\mathfrak{z}')\}\}$

und hieraus folgt unter Berücksichtigung von

$\theta\{(\mathfrak{z}^0), (\mathfrak{z}')\} \sim (\mathfrak{z}')$ und $\theta\{(\mathfrak{z}''), (\mathfrak{z}')\} \sim (\mathfrak{z})$, daß

$\theta\{(\mathfrak{z}''), (\mathfrak{z}')\} \sim \theta\{(\mathfrak{z}^0), (\mathfrak{z})\}$ oder also

$\theta\{(\mathfrak{z}^0), (\mathfrak{z})\} \sim (\mathfrak{z})$.

Es ist also wirklich $(\mathfrak{z}^0)$ in Verbindung mit jedem System $(\mathfrak{z})$ eine Art « Nullsystem ».

Tritt dazu noch die Annahme :

$$\text{(C}''\text{)} \qquad \theta\big\{(\mathfrak{z}), (\mathfrak{z}')\big\} \sim \theta\big\{(\mathfrak{z}'), (\mathfrak{z})\big\},$$

so sind dies im ganzen wohl die geringsten Voraussetzungen, deren Konsequenzen aus der Arithmetik z.B. solche Sätze wie den der Kommutation und Distribution unter sich fassen.

Es sei nur angedeutet, daß jede Vergleichung zweier Volumina durch Komposition und Dekomposition von Systemen nicht nur ersetzt werden

59|60 kann, sondern wirklich eine | Komposition und Dekomposition <u>ist</u>. Die Ausmessung irgend eines Volumens ist lediglich die Dekomposition desselben in Würfel. Und weil jedes Volumen aus gleichen Würfeln zusammengesetzt gedacht wird, deshalb sind von besonderer Wichtigkeit für die Volumina die potenzartigen Kompositionen :

$$\theta\big\{(\mathfrak{z}^{(1)}), (\mathfrak{z}^{(1)})\big\} \sim (\mathfrak{z}^{(2)})$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\theta\big\{(\mathfrak{z}^{(m)}), (\mathfrak{z}^{(1)})\big\} \sim (\mathfrak{z}^{(m+1)}).$$

Auch gebrochene Exponenten lassen sich dabei ganz gut erklären, nämlich durch die Äquivalenz :

$\theta^{(n)}(\mathfrak{z}^{(m/n)}) \sim \theta^{(m)}(\mathfrak{z}^{(1)}) \sim (\mathfrak{z}^{(m)})$.

Die Exponenten vertreten die Maßzahlen. Ein cbm [Kubikmeter] z.B. ist ein Volumen, welches im Metermaß den Index 1 hat. Die Inkommensurabilität und mit ihr die Irrationalität tritt dadurch auf, daß sich die Vergleichung zweier Volumina (bei derselben Maßeinheit) auch mit gebrochenen Indices nicht ermöglichen läßt. Jede Irrationalität wird infolgedessen vermieden, wenn für jede neue Inkommensurabilität nach Art eines Moduls ein neuer Typus von Systemen eingeführt wird. In der Zahl π ist dies thatsächlich ja auch geschehen.

Wenn nun auch der physischen Verknüpfung zweier Volumina die Addition der zugehörigen Indices parallel geht, soll man deshalb doch
60|61 diese Opera- | tion nicht eine Addition der Volumina nennen. Was wäre die Konsequenz solcher Bezeichnungsart ?

Die Zahlen lassen sich für manche Zwecke sehr vorteilhaft darstellen in der Form :

$N = p_1^{z_1} p_2^{z_2} \cdots p_n^{z_n} = (z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n)$

wobei $p_1, p_2, \ldots, p_n$ die ersten n Primzahlen bedeuten. Das Produkt zweier so dargestellter Zahlen wird gefunden durch Addition der Repräsentanten. Darf man also bei der Addition der Bezeichnungen auch von einer Addition der Objekte reden ?

12. Vorlesung — 29.7.1891.

Die Ausmessung eines Volumens besteht, wie schon erwähnt, in der Dekomposition desselben in gleiche, hinreichend kleine Würfel und der Bestimmung von deren Anzahl. Bei der Kugel z.B. erfolgt die Zerlegung in Würfel mit der Kante 1 am bequemsten in der Art, daß ihr Mittelpunkt eingeschlossen wird durch drei aufeinander senkrechte Ebenen, deren jede vom Mittelpunkt den Abstand 1/2 hat, und daß sodann einer jeden Ebene parallel eine genügende Schar von Ebenen mit dem jedesmaligen Abstand 1 konstruiert wird. Bezeichnen (a, b, c) die sich auf diese Weise ergebenden Koordinaten irgendeines Würfelschnittpunktes, so liegen innerhalb der Kugel mit dem Radius n sicher alle diejenigen Würfel, für welche $a^2 + b^2 + c^2 \leq (n-1)^2$. Denn für die Würfel, welche ihren Mittelpunkt etwa auf der Oberfläche selbst haben, ist ja $a^2 + b^2 + c^2 = n^2$. Liegt ein |
61|62 Würfel genau im Innern der Kugel, so steht sein Mittelpunkt von der Oberfläche mindestens ab um $\frac{1}{2}\sqrt{3}$, vom Kugelmittelpunkt also höchstens um $n - \frac{1}{2}\sqrt{3}$. Umgekehrt : wenn der Mittelpunkt des Würfels höchstens

um $n-\frac{1}{2}\sqrt{3}$ oder gar um $n-1$ vom Kugelmittelpunkt absteht, so liegt der ganze Würfel im Innern der Kugel. Andererseits ist evident, daß unter den Würfeln, für welche $a_1^2+b_1^2+c_1^2 \leq (n+1)^2$ noch alle diejenigen mitgezählt sind, von denen irgendein Stück in die Kugel hineinragt.

Sowohl die Anzahl der Systeme (a,b,c) für welche $a^2+b^2+c^2 \leq (n-1)^2$, wie die Anzahl der Systeme $a_1^2+b_1^2+c_1^2 \leq (n+1)^2$ repräsentiert zusammen mit der gewählten Maßeinheit bis zu einer gewissen Annäherung das Volumen der Kugel. Die Arithmetik lehrt, daß der Überfluß der zweiten Anzahl über die erste immer proportional n^2 bleibt. Die Brüche

$$\frac{1}{n^3}\cdot\text{Anzahl}\{a^2+b^2+c^2 \leq (n-1)^2\} \text{ und } \frac{1}{n^3}\cdot\text{Anzahl}\{a^2+b^2+c^2 \leq (n+1)^2\}$$

schließen sich mit wachsenden n immer näher an einander. Mit wachsendem n bildet die obere wie die untere Reihe eine Reihe von gegen einander konvergierenden Brüchen von der Art, daß jeder Bruch der zweiten Reihe größer bleibt als jeder der ersten. Nun ist zu beachten : wohl ist ein Vol-
62|63 umen | da — nämlich die Kugel — welchem sich die Gesamtheit der im Innern bleibenden, wie die Gesamtheit der bis ins Äußere erstreckten Würfel mit der Verkleinerung der Kante derselben immer mehr nähert. Nicht aber ist eine Zahl da, welcher die konvergierenden Bruchreihen zustreben. Wie es Lipschitz in seiner Analysis[63] ausführt, sagt man in solchem Falle, daß für die Reihen eine Grenze vorhanden sei. Und so lange das Sagen eine rein formale Phrase bleibt, ist es auch ganz korrekt. Nur bleibt es nicht ein Sagen, sondern verführt durch die formale Bequemlichkeit zu einer Fülle stillschweigender Voraussetzungen, hinter denen sich nicht allein eine ebenso große Fülle von Schwierigkeiten, sondern geradezu von Unmöglichkeiten verbirgt.

Das Kriterium dafür, daß eine Reihe von Brüchen $\frac{\varphi(k)}{\psi(k)}$ gegen einander konvergieren, lautet sehr einfach :

$$(\mathrm{C}_0) \qquad \left|\frac{\varphi(m)}{\psi(m)}-\frac{\varphi(n)}{\psi(n)}\right| < \tau \qquad (n=m+1, m+2, \ldots, \text{in inf.})$$

$$(\tau \text{ beliebig klein gegeben}).$$

In Wirklichkeit ist (C_0), wie durch die Multiplication mit $\psi(m)\cdot\psi(n)$ und dem Nenner von τ ersichtlich wird, eine Bedingung in ganzen Zahlen. Sie

[63] [Lipschitz 1877].

pflegt wohl auch geschrieben zu werden :

$$\lim_{m=\infty} \lim_{n=\infty} \left| \frac{\varphi(m)}{\psi(m)} - \frac{\varphi(n)}{\psi(n)} \right| = 0.$$

63|64 |

Durch solche Konvergenz werden nicht Größen 'definiert', sondern Äquivalenzen zwischen Größen festgesetzt. Der Bereich, dem die Brüche überhaupt zufallen können, wird nämlich eingeteilt in eine Reihe von Intervallen $(r_1, r_3), (r_3, r_5), \ldots$, und als äquivalent werden betrachtet alle Werte r_{2k} für welche $r_{2k-1} \leq r_{2k} \leq r_{2k+1}$.

Überall in der Praxis, beim Messen, in der Statistik u.s.f. werden die Zahlen nur so weit berechnet, daß man weiß, in welches Äquivalenzintervall sie hineingehören. Mit anderen Worten : die Reihe der Brüche $\frac{\varphi(K)}{\psi(K)}$ wird abgeschnitten an derjenigen Stelle, von der aus sämtliche Brüche einem und demselben Intervall angehören. Wie aber läßt sich dies entscheiden ? Bei der Bedingung (C_0), in welcher τ natürlich klein gedacht wird im Verhältnis zu den Äquivalenzintervallen, ist gewiß hinreichend :

$$r_{2k-1} + \tau \leq \frac{\varphi(m)}{\psi(m)} \leq r_{2k+1} - \tau.$$

Keiner der auf $\frac{\varphi(m)}{\psi(m)}$ folgenden Brüche kann dann das Intervall überschreiten.

Die Lücken, welche dabei zu beiden Seiten der Teilpunkte verbleiben, lassen sich nur in besonderen Fällen zu null vermindern.

Ob bei einer bestimmten Teilung ($\mathfrak{r}$) die Reihe $\frac{\varphi(k)}{\psi(k)}$ in das Innere
64|65 eines Intervalles hinein | oder gegen einen Teilpunkt konvergiert, ist ein bloß subjektiver Unterschied. Wenn aber bei allen denkbaren Teilungen Konvergenz in das Innere hinein stattfindet, so haben diese Reihen ein besonderes Charakteristikum. Es sind diejenigen, welche gegen keine rationale Zahl r konvergieren. Umgekehrt muß dann für jede rationale Zahl r eine Teilung ($\mathfrak{r}$) so aufgefunden werden können, daß r außerhalb desjenigen Intervalles liegt, in dessen Inneres hinein die Reihe konvergiert. Dazu ist notwendig, daß

$$\left| r - \frac{\varphi(m_{\delta\tau})}{\psi(m_{\delta\tau})} \right| > \delta\tau \qquad (0 < \delta < 1)$$

wobei $m_{\delta\tau}$ die erste (von $\delta\tau$ und r abhängige) Zahl m ist, für die $\left|\frac{\varphi(m)}{\psi(m)} - \frac{\varphi(n)}{\psi(n)}\right| \leq \delta\tau \quad (n = m+1, m+2, \ldots)$. Neben die Konvergenzbedingung tritt also als mindestens ebenso wichtig eine Divergenzbedingung. Wo das Bildungsgesetz $\frac{\varphi(k)}{\psi(k)}$ diese Divergenzbedingung nicht in sich trägt, da können zwei Reihen gegen einander konvergierender Brüche weder addiert noch gar multipliziert werden. Bloß zu sagen, daß die Reihen sich einer rationalen Grenze nicht nähern, reicht nicht aus.

65|66 Und da, wo eine rationale, also wirkliche | Grenze für die Reihe existiert, ist durchaus die Reihe an und für sich mit der Grenze zu verwechseln. Alle Überlegungen und Spekulationen über die als Grenzen definierten Größen versagen, sobald es sich um einen mehrfachen *limes* handelt. Ein Beispiel dafür ist schon der einfache Bruch :

$$\frac{3 \cdot 0,333\ldots + 11 \cdot 0,2727\ldots - 4}{6 \cdot 0,333\ldots + 11 \cdot 0,2727\ldots - 5}$$

Bei gleichzeitiger Ausführung der beiden Grenzübergänge

$$\begin{aligned} \lim 0,3333\ldots &= 1/3, \\ \lim 0,2727\ldots &= 3/11, \end{aligned}$$

ist der Bruch sinnlos. Bei Vorwegnahme des *limes* für 3/11 lautet der Bruch :

$$\frac{3 \cdot 0,333\ldots + 3 - 4}{6 \cdot 0,333\ldots + 3 - 5} = \frac{3 \cdot 0,333\ldots - 1}{2([3\cdot]0,333\ldots - 1)} = \frac{1}{2}.$$

Bei der Ausführung des Grenzüberganges für 1/3 allein lautet der Wert des Bruches aber

$$\frac{11 \cdot 0,2727\ldots - 1}{11 \cdot 0,2727\ldots - 1} = 1 \qquad \left[\ \frac{11 \cdot 0,2727\ldots - 3}{11 \cdot 0,2727\ldots - 3} = 1\ \right]$$

Es ist ja auch bekannt genug, daß $\lim\limits_{x=0} \lim\limits_{y=0} \frac{x}{y}$ und $\lim\limits_{y=0} \lim\limits_{x=0} \frac{x}{y}$ sehr verschieden sind.

Für eine Funktion von einer Variablen ist ein lange nicht gesehenes Beispiel :

$$\begin{aligned} \lim \tfrac{x^n-1}{x^n+1} &= +1 \qquad \text{wenn } |x| > 1, \\ &= -1 \qquad \text{wenn } |x| < 1, \end{aligned}$$

oder

$$\lim_{x=1} \lim_{n=\infty} \frac{x^n - 1}{x^n + 1} = 1, -1$$

66|67 je nachdem *limes* von $x > 1$ oder $x < 1$ nach $x = 1$. | Oft genug ist $\lim_{x=0} f(x)$ nicht dasselbe wie $f(0)$. Man verwechsele darum nicht den Dezimalbruch mit dem Wert, welchem er sich nähert. Das ist da nur gestattet, wo die Größen im Sinne der Äquivalenz-Intervalle genommen werden. Für physikalische Anwendungen mag diese eine Seite der Sache immer, in geometrischer Beziehung und auch pädagogisch vielfach genügen. Für viele arithmetische Fragen aber sind die Zahlen durchaus absolut zu betrachten. Daß $10^{\overset{10}{\log} 3} = 3$, ist gewiß. Je die Natur des Problems aber entscheidet darüber, ob die Einsetzung eines angenäherten Wertes für $\log 3$ hinreicht, oder ob genau für $10^{\log 3} - 3$, aber für keinen angenäherten Wert null zu setzen ist. Im letzteren Falle tritt ganz von selbst und ganz unvermeidlich der Modul $10^{\lambda} - 3$ auf. Überhaupt überall da, wo das Irrationale im absoluten Sinn, d.h. nicht seinem Werte, sondern seiner Erklärung nach zu verwenden ist, läßt sich das Auftreten der Modulsysteme, auch wenn sie nicht hingeschrieben werden, gar nicht umgehen. Das Modulsystem beschreibt, was gemacht werden soll, in der einfachsten und vollständigsten Weise.

67|68 |

13. Vorlesung — 1.8.1891.

Wie tief der Unterschied zwischen dem angenäherten und dem absoluten Wert einer Zahl zu greifen vermag, dafür ist lehrreiches Beispiel die Fouriersche Reihe :

$$\lim_{n=\infty} \sum_{k=1,\ldots,n} \frac{\sin k(1-v)\pi}{k} = \frac{1}{2}v \qquad (0 < v < 1),$$
$$= 0 \qquad (v = 0, 1).$$

Auf beliebig viele Dezimalen mag man setzen $v = 0,999\ldots$. Der Wert der Reihe wird etwa $0,5$. Sobald aber v direkt auf den Wert 1 übergeht, springt der Wert sofort über auf $\sum = 1$.

Wegen dieser Verschiedenheit dürfte das Verlangen nach <u>einer</u> typischen Darstellung für alle Zahlengrößen auch stets unerfüllt bleiben. Sehr gebräuchlich ist es, diesen Typus anzuknüpfen an die Potenzreihen, speciell an die Dezimalbrüche. Kennt man aber von Dezimalbrüchen weiter nichts als ihre Ziffern bis zu einer bestimmten Stelle, so kann man nicht einmal zwei von ihnen addieren. Denn notwendiger Weise müßten

alle diejenigen ausgeschlossen werden, bei denen von einer Stelle ab alle
Ziffern den Wert 9 erhalten. Noch weniger ist es möglich, solche Dezi-
malbrüche zu multiplizieren, und vor allem ist es nicht möglich, sie in
68|69 einen Kettenbruch zu verwandeln. | Unter Umständen kann sich schon
der erste Teilnenner verhüllen. Denn es reicht ja nicht aus, daß man den
reciproken Wert des Bruches bis auf einem bestimmten Fehler berechnen
kann, sondern die größten Ganzen sind zu bestimmen. Bei $a = 0,3333\ldots$
kann aber $[1/a]$ so gut 3 wie 2 sein. Immer wieder wird aber verwech-
selt, ob ein Dezimalbruch bis zu einer bestimmten Stelle, oder ob sein
Bildungsgesetz $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{10^n}$ bekannt ist, d.h. $f(n)$ für jedes n.

Von vornherein läßt sich eine Grenze gar nicht ziehen dafür, was in
dem Bildungsgesetz $f(n)$ alles enthalten sein muß, damit die « Zahl »
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{10^n}$ als « definiert » zu betrachten ist. Wozu ist sie definiert und
zu definieren? Kein Mathematiker kann sagen, was die Zukunft für
Operationen ausbilden wird. So lange das Bildungsgesetz nicht derartig
bestimmt ist, daß alle arithmetischen Operationen mit den Reihen wie
mit endlichen Zahlen ausführbar sind, ist die Reihe nicht brauchbar. Und
ist das Bildungsgesetz so vollkommen bestimmt, dann ist die Theorie
der unendlichen Reihen, welche irrationale Zahlen definieren, nicht nötig.
Denn die ganze Theorie läuft dann darauf hinaus, daß Größen, welche so
69|70 gegeben sind, daß sie sich addieren und multi- | plizieren lassen, sich eben
addieren und multiplizieren lassen. Die mathematische Natur läßt sich
nicht überlisten, aber die Mathematiker haben sich in erschreckendstem
Maß überlisten lassen. Und wie das vielfach so gepriesene Wolzanosche
[Bolzanosche] Buch beweist, ist die Täuschung mit den rohesten Mitteln
gelungen. Wolzano [Bolzano] will beweisen, daß eine Funktion von x, die
an einer Stelle des Stetigkeitsbereiches positiv, an einer anderen negativ
ist, notwendig inzwischen einmal null ist. Und immer wird dabei so
geschlossen : Entweder es giebt einen Wert, an dem die Funktion null ist,
oder aber es giebt keinen. Die einzige Schlauheit Wolzanos [Bolzanos] ist
die, daß er nicht nach dem Argument, sondern auf der Kurve fortschreitet.
Dazu aber müßte man wissen, wie lange die Funktion von einer Stelle
an noch positiv, wie lange noch negativ ist. An solchen Funktionen, wie
$\sum\limits_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin n^2 x}{n^2}$ kann man aber gleich sehen, daß man es nicht sehen kann.

Nicht einmal für die Wurzeln ganzer Funktionen lassen sich Wolzano

[Bolzanos] Ausführungen anwenden. Und das ist der beste Beweis, daß sie falsch sind.

Und doch hat die neueste Zeit durch ganz ähnliche Schlüsse, wie Wolzano [Bolzano] sie macht, das Irrationale begründen wollen. Früher hüteten sich wenigstens die Franzosen vor den in den Nebel der Allge-
70|71 meinheit gehüllten Wunderlichkeiten | der Theorie. Neuerdings hat Jules Tannery diese gesunde Abneigung durchbrochen. Nach einer, wie er sagt, Bertrandschen Idee giebt er in der *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable* eine für die Begründung der Rechnungsgesetze ganz unbrauchbare Erklärung des Irrationalen. Man behauptet, sie sei von der Dedekindschen verschieden[64]. Im wesentlichen aber ist auch noch Tannery das Irrationale nur die Bezeichnung — *une lettre* — für einen Schnitt durch die rationalen Zahlen.

Dedekind hat diese Theorie für eine große Entwicklung gehalten.Und doch ist sie nichts als eine Abstraktion sehr einfachen Ursprungs. Dedekind läßt sich leiten durch Betrachtung einer solchen Funktion wie $x^2 - 2$ und unterscheidet zwischen den rationalen Zahlen $\frac{m}{n}$, für welche $\left(\frac{m}{n}\right)^2 - 2 < 0$ und denen, wo $\left(\frac{m'}{n'}\right)^2 - 2 > 0$. Diese Scheidung ist gewiß löblich, und es ist auch eine sehr wertvolle Erkenntnis, daß man der $\sqrt{2}$, wie man sagt, beliebig nahe kommen kann. Die Behauptung aber, daß durch das Verschwinden einer stetigen Funktion $f(x)$ eine Scheidung vollzogen wird zwischen den rationalen Zahlen, für die $f(x) > 0$ und denen, wo $f(x) < 0$, ist so lange ganz sinnlos, wie es nicht möglich ist die verschiedenen Wurzeln von $f(x) = 0$ zu isolieren. Schon bei gewöhnlichen algebraischen
71|72 Gleichungen ist diese Isolierung recht schwer, bei anderen | Gleichungen vielfach ganz undurchführbar. Wo aber die Isolierung der Wurzeln einmal gelungen ist, da ist alles gethan, was zu thun ist. (Es sei in dieser Beziehung verwiesen auf die am 12. April 1888 in der Gesamtsitzung der Akademie gehaltene Vorlesung : Zur Theorie der komplexen Zahlen durch Modulsysteme[65].)

Es ist schon erwähnt, daß die Dedekind-Tanneryschen Deduktionen schon vor der Entwicklung einer irrationalen Zahl in einen Kettenbruch versagen. Und gerade die Verwandlung der Zahlen in Kettenbrüche ist

---

[64] Kronecker se réfère évidemment à la première édition [Tannery 1886]. Tannery corrige son erreur d'attribution dans la deuxième édition de 1904.

[65] [Kronecker 1888]. *Cf.* notre introduction.

deshalb so stark erstrebt, weil diese den Vorzug haben, daß sie dann und auch nur dann abbrechen, wenn sie rational sind. Diesen Vorzug teilen mit ihnen die in mancher Beziehung noch vorzuziehenden Reihen : $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{c_n}{n!}$ $(0 \leq c_n \leq n-1)$. Jeder positive echte Bruch läßt sich in solche Reihen entwickeln. Wird der Fall ausgeschlossen, daß von einer Stelle ab alle c_n gleich $n-1$ sind, so ist die Darstellung eindeutig und auch dann und nur dann rational, wenn sie abbricht.

Entstanden sind diese Reihen nach einer Betrachtung, welche auch Herr Christoffel angestellt hat[66]. Er fragte sich bei einem beliebigen Bruch, wie viele ν^{tel} er enthielte für $\nu = 2, 3, \ldots$. Die Funktion[en] $\varphi(\nu)$, welche diese Frage beantworten (so daß $\varphi(\nu)/\nu < m/n < (\varphi(\nu)+1)/\nu$)
72|73 haben die Eigen- | schaft, daß sie mit dem Steigen des ν um 1 selbst steigen um 0 oder 1. Diese Steigungen $d(\nu)$ nimmt Christoffel geradezu als Charakteristicum für den Bruch. Nun ist klar, daß jedem Bruch ein Charakteristicum, nicht aber einem solchen auch wieder ein Bruch entsprechen muß. Christoffel mühte sich ab, die Bedingungen für eine vernünftige Charakteristik zu finden. Sein Ziel war, auf diese Weise einen Unterschied zwischen rationalen und irrationalen Zahlen zu erhalten. Wegen der Willkürlichkeit der Annahme der Koefficienten (c) in $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{c_n}{n!}$ mußte er scheitern.

So sehr jeder Schriftsteller sich in seiner Weise davor hütet, eine irrationale Zahl als etwas Wirkliches zu betrachten, so ist sicher, daß die Reihen $\sum \frac{c_n}{n!}$ wirklich vorhanden sind. Wo man die irrationalen Zahlen angenähert braucht, erforsche man diese Reihen. Wo sie im absoluten Sinn zu nehmen sind ersetze man sie durch Modulsysteme.

Immer absolut zu betrachten ist das Imaginäre. i^2+1 ist der von der Natur gegebene Modul, nach welchem $a+bi$ zu behandeln ist. Zwar will Hankel gegen Cauchy den Einwand geltend machen, daß es nicht ausreiche,
73|74 $i^2+1=0$ zu setzen. Aber sein eigenes Beispiel, $\log i$, wi- | [der]legt ihn. Denn gerade deshalb ist $\log i = \frac{\pi i}{2} + 2k\pi i$, weil, wenn dieser Wert in die Reihe $e^x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ eingesetzt und dann für i^2+1 immer null gesetzt wird, der Wert i resultiert.

[66] *Cf.* [Kronecker, 1888 p. 103 n.].

Aller Dogmatismus lehnt die vielen Anwendungen ab, welche bei der Auffassung des i als einer Unbestimmten möglich sind. Neben dem dogmatischen i kann nicht bestehen $i', i'', \ldots$, aber neben dem Modul i^2+1 sehr wohl das Modulsystem $i'^2+1, i''^2+1, \ldots$. Und z.B. schon in der Theorie der elliptischen Funktionen treten Formeln auf — entsprechend etwa dem Gesetz von Moivre — bei denen sich die Einführung mehrerer solcher i als unumgänglich erweist. Weil i nur das Mittel zu einer äußerlichen Verbindung mehrer[er] Größen ist, so müssen überhaupt überall da, wo i mit i zu multiplizieren ist, die i von einander getrennt werden. Unterscheidet man die Punkte $x+yi$ und $x'+y'i'$, so entzieht man sich all den schlimmen Rechnungsmethoden, welche seit Hamilton eingeführt sind. Aber auch Grassmann hat diese Trennung der Einheiten nicht vollzogen. Wer es thun will, der kann aus seiner Methode wirklich Vorteil ziehen, aber auch nur formalen. Große Geister werden solche formalen Hilfsmittel
74|75 nicht nötig haben. | Die wahre Mathematik bedarf aus der Arithmetik ausschließlich der ganzen Zahlen. Zu wünschen wäre, daß auch in der Pädagogik die ganze Zahl ausgenützt würde, als das, was sie ist. Nachdem durch das Dezimalsystem die Brüche überwunden sind, sollten die Kinder nicht mehr gequält werden mit Divisionen wie $\frac{2}{3} : \frac{7}{8}$, die sie nicht brauchen und die sie nicht einsehen. Werden erst wieder die ganzen Zahlen allein als hinreichend betrachtet, so wird hoffentlich die Mathematik viel populärer werden und einst auch in der Hand des Handwerkers das brauchbare Instrument sein, welches sie für die menschliche Gesellschaft sein soll und sein kann.

BIBLIOGRAPHIE

Biermann (Otto)

[1887] *Theorie der analytischen Funktionen*, Leipzig : Teubner, 1887.

Cantor (Georg)

[*Werke*] *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts, Hrsg. von E. Zermelo nebst einem Lebenslauf Cantors von A. Fraenkel*, Berlin, 1932 ; Nachdruck Springer Verlag, 1990.

[1878] Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre, *Journal für reine und angewandte Mathematik*, 84 (1878), p. 242–258 ; [*Werke*], p. 119–133.

Cauchy (Augustin Louis)

[*Œuvres*] *Œuvres complètes*, Paris : Gauthier-Villars, 26 vols., 1882–1858.

[1821] *Cours d'analyse de l'École royale polytechnique*, Paris : Debure, 1821 ; réimp. Paris : Gabay, 1989.

LEJEUNE-DIRICHLET (Johann Peter Gustav)

[*Werke*] *Werke* (sous la direction de L. Kronecker, puis de L. Fuchs), 2 vol., Berlin : Reimer, 1889–1897.

[1851] *De formarum binarium secundi gradus compositione, commentatio qua ad audiendam orationem pro loco in facultate philosophica rite obtinendo die VI. Mens. Maii hor. XII. Publice habendam invitat auctor P.G. Lejeune Dirichlet, phil. Doc. Prof. Publ. Ord. Desig., berolini typis academicis, 1851*, reproduit en version remaniée dans [*Werke*, 2, p. 105–114].

FINE (Henry Burchard)

[1890] *The Number System of Algebra Treated Theoretically and Historically*, Boston & New-York : Leach, Shewell & Sanborn, 1890.

FREGE (Gottlob)

[1884] *Die Grundlagen der Arithmetik, eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*, Breslau : W. Koebner, 1884 ; trad. fr. et introd. par C. Imbert, Paris : Éd. du Seuil, 1972.

GAUSS (Carl Friedrich)

[1801] *Disquisitiones arithmeticæ*, Leipzig : Gerhard Fleischer, 1801 ; trad. fr. parue chez Jacques Gabay, Paris, 1989.

HANKEL (Hermann)

[1867] *Vorlesung über die komplexen Zahlen und ihre Funktionen*, 1e partie : *Theorie der complexen Zahlensysteme*, Leipzig : Voss, 1867.

[1874] *Zur Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter*, Leipzig, 1974 ; rééd. sous la direction de J.E. Hofmann, Hildesheim : Olms, 1965.

HEGEL (Georg Wilhelm Friedrich)

[1801] *Dissertatio philosophica de orbitis planetarum*; trad. allemande dans *Erste Druckschriften*, Leipzig : Lasson, 1928 ; trad. fr. avec introd. par F. de Gandt, “Les orbites des planètes”, Paris : Vrin, 1979.

[1833] *Wissenschaft der Logik*, Ester Band : *Die objective Logik*, dans Hegel, *Werke*, éd. par L.v. Henning, 1833/1834.

HELMHOLTZ (Hermann)

[1887] “Zählen und Messen”, dans *Philosophische Aufsätze, Eduard Zeller zu seinem fünfzigjährigen Doctor-Jubiläum gewidmet*, Leipzig : Fues, 1887, p. 17–52 ; republié dans *Wissenschaftliche Abhandlungen von Hermann von Helmholtz*, vol. 3, 1895, p. 356–391.

HERMITE (Charles)

[1884] Rapport sur la thèse de J. Molk (24 juillet 1884), Annexe 1 de Gispert (Hélène), *La France mathématique*, *Cahiers d'histoire et de philosophie des sciences*, 34 (1991), p. 337.

HILBERT (David)

[1897] Die Theorie der algebraischen Zahlkörper, *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 4 (1897), p. 175–546 ; reproduit dans Hilbert, *Gesammelte Abhandlungen*, I, p. 63–363.

HUSSERL (Edmund)

[1891] *Philosophie der Arithmetik*; trad. fr. *Philosophie de l'Arithmétique*, par J. English, Paris : PUF, 1972).

JACOBI (Carl Gustav Jacob)

[1829] Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum, Königsberg, 1829.

KIRCHHOFF (Gustav Robert)

[1876] *Vorlesungen über mathematische Physik, Mechanik*, Leipzig : Teubner, 1876.

Klein (Felix)

[1895] Über Arithmetisierung der Mathematik, discours (2 novembre 1895) devant l'Académie des sciences à Göttingen, *Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, Heft 2 (1895) ; *Gesammelte mathematische Abhandlungen*, éd. par Fricke, Vermeil, tome 2, Berlin : Springer, 1922, p. 232–240.

Kummer (Ernst Eduard)

[*CP*] *Collected Papers*, vol. I, *Contributions to Number Theory*, éd. par A. Weil, Berlin-Heidelberg-New York : Springer-Verlag, 1975.

[1851] Mémoire sur la théorie des nombres complexes composés de racines de l'unité et de nombres entiers, *Journal de mathématiques pures et appliquées* XVI, p. 377-498.

Kronecker (Leopold)

[*Werke*] *Leopold Kroneckers Werke*, cinq tomes, éd. par Kurt Hensel, Leipzig, 1895–1930 ; réimp. New York, 1968.

[1870] Auseinandersetzung einiger Eigenschaften der Klassenzahl idealer complexer Zahlen, *Monatsbericht der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin* 1870, p. 881–889 ; [*Werke*], I, p. 273–282.

[1881] Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen, *Festschrift zu Herrn Ernst Kummers fünfzigjährigem Doctor-Jubiläum*, 10. September 1881, Berlin : Reimer ; republié dans *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 92 (1882), p. 1–122 ; reproduit dans [*Werke*, II, p. 239–387].

[1887] Über den Zahlbegriff, dans *Philosophische Aufsätze, Eduard Zeller zu seinem fünfzigjährigen Doctor-Jubiläum gewidmet*, Leipzig 1887, N° VIII, p. 261–274 ; remanié et republié dans *Journal reine angew. Math.*, 101, p. 337–355 ; reproduit dans [*Werke* III–1, p. 251–274] ; trad. fr. avec introd. par J. Boniface dans *Gazette des Mathématiciens*, 81 (1999), p. 49–70.

[1888] Zur Theorie der allgemeinen complexen Zahlen und der Modulsysteme, *Sitzungsber. Kgl. Preuss. Akad. Wiss. Berlin* 1888, p. 429–438, 447–465, 557–578, 595–612, 983–1016 ; [*Werke*, III–2, p. 3–114].

[1901] *Vorlesungen über Zahlentheorie*, Erster Band, 1. bis 31. Vorlesung, bearbeitet und herausgegeben von Kurt Hensel, Leipzig : Teubner, 1901 ; reprint Springer 1978.

Lipschitz (Rudolf Otto Sigismund)

[1877] *Lehrbuch der Analysis*, 1e partie : "Grundlagen der Analysis", Bonn : Cohen & Sohn, 1877.

Molk (Jules)

[1909] *Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées*, tome I : Arithmétique, Paris : Gauthier-Villars, et Leipzig : Teubner, 1909 ; section I 3 : Nombres irrationnels et notion de limite (exposé, d'après l'article allemand de A. Pringsheim (Munich), par J. Molk), p. 133–208.

Peano (Giuseppe)

[1889] *Arithmetices principia, nova methodo exposita*, Torino : Bocca, 1889.

[1890] Sur une courbe qui remplit toute une aire plane, *Mathematische Annalen*, 36 (1890), p. 157–160.

Peirce (Charles Sanders)

[1885] On the Algebra of Logic : a Contribution to the Philosophy of Notation, *American Journal of Mathematics* 7, n° 2, p. 180–202.

PRINGSHEIM (Alfred)
[1898] *Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen*, Erster Band, Leipzig : Teubner, 1898–1904 ; I A 3 : "Irrationalzahlen und Konvergenz unendlicher Prozesse", p. 47–146.
PURKERT (Walter) & ILGAUDS (Hans Joachim)
[1987] Georg Cantor 1845–1918 ; *Vita Mathematica*, vol. 1, Basel-Boston-Stuttgart : Birkhäuser, 1987.
RUSSELL (Bertrand)
[1903] *Principles of Mathematics*, London : Allen & Unwin LTD ; trad. fr. dans "Écrits de logique philosophique", Paris : PUF, 1989.
SCHUBERT (Hermann)
[1885] *System der Arithmetik und Algebra als Leitfaden für den Unterricht in höheren Schulen*, Potsdam : Aug. Stein, 1885.
STUKE (H.)
[1974] "Hegelianismus", dans Ritter (Joachim H.), éd., *Historisches Wörterbuch der Philosophie*, vol. 3, Darmstadt, 1974, p. 1026–1030.
SYLVESTER (James Joseph)
[*CP*] *The Collected Mathematical Papers of James Joseph Sylvester*, 4 vols, Cambridge : Cambridge Univ. Press, 1904–1912 ; réimp., New York : Chelsea Publ. Co., 1973.
[1851] On the General Theory of Associated Algebraical Forms, *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, vi. (1851), p. 289–293 ; reproduit dans [*CP*, I, p. 198–202].
TANNERY (Jules)
[1886] *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable*, Paris : Hermann, 1886.
VITRAC (Bernard)
[1994] Euclide, *Les Éléments*, Paris : PUF, vol. 2, 1994.
WEYL (Hermann)
[1918] *Das Kontinuum, Kritische Untersuchung über die Grundlagen der Analysis*, Leipzig : Veit & Comp., 1918.
WERDER (Karl)
[1841] *Logik, als Commentar und Ergänzung zu Hegels Wissenschaft der Logik*, 1. Abt., Berlin : Veit, 1841.
WUSSING (Hans)
[1969] *Die Genesis des abstrakten Gruppenbegriffs, Ein Beitrag zur Entstehungsgeschichte der abstrakten Gruppentheorie*, Berlin : VEB Verlag der Wissenschaften, 1969 ; trad. angl. *The Genesis of the Abstract Group Concept.* A Contribution to the History of the Origin of Abstract Group Theory, Cambridge Ma. : MIT Press, 1984.