Revue d'histoire des mathématiques,
7 (2001), p. 91–119.

RATIONALITÉ, EXPRIMABILITÉ : UNE RELECTURE MÉDIÉVALE DU LIVRE X DES *ÉLÉMENTS D'EUCLIDE*

Sabine ROMMEVAUX (*)

RÉSUMÉ. — Dans cet article, nous étudions la réception des *Éléments* d'Euclide par un mathématicien du XIII^{e} siècle : Campanus. Nous nous intéressons à la nature de son travail sur le Livre X, à propos de la théorie de l'irrationalité. Dans la version de Robert de Chester, que Campanus utilise pour son édition, apparaissent deux notions qui ne sont pas euclidiennes, celles de « droites rationnelles en longueur » et de « droites rationnelles en puissance ». Nous nous demandons si l'introduction de ces notions manifeste une théorie différente de celle d'Euclide. Pour cela, nous examinons les premières définitions du Livre X, ainsi que quelques théorèmes du Livre XIII, pour lesquels Campanus propose des ajouts, justifiés par l'introduction de ces notions.

ABSTRACT. — RATIONALITY, EXPRESSABILITY : A MEDIEVAL READING OF BOOK X OF EUCLID'S *ELEMENTS*. — In this paper, we study the reception of Euclid's *Elements* by a 13th century mathematician : Campanus. We are interested in the nature of his work on Book X, and its theory of irrationality. In Robert of Chester's version, which Campanus used for his edition, two non euclidean notions appear, the notion of straight lines 'rational in length' and 'rational in power'. We ask the question if the introduction of these notions lead to a theory which is different from Euclid's. To answer that question, we examine the first definitions of Book X and some theorems of Book XIII, to which Campanus gives some additions called for by the introduction of the above notions.

(*) Texte reçu le 18 septembre 2000, révisé le 27 juillet 2001.
S. ROMMEVAUX, CNRS, UMR 8519 'Savoirs et Textes', Université de Lille III, BP 149, 59653 Villeneuve d'Ascq CEDEX (France).
Courrier électronique : rommevaux@univ-lille3.fr.
Mots clés : Euclide, Campanus, Livre X des *Éléments*, droites rationnelles, commensurabilité.
Classification AMS : 01A51.

INTRODUCTION [1]

Campanus a composé sa version des *Éléments de géométrie* d'Euclide aux alentours de 1260[2]. Il ne s'agit pas d'une traduction, mais d'une réécriture faite à partir de traductions arabo-latines des *Éléments* réalisées au XII^e siècle et de traités originaux[3]. Dans un précédent article [Rommevaux 1999], j'ai examiné la nature du travail de Campanus sur le traité euclidien à propos de la théorie de la proportionnalité numérique du début du Livre VII. J'ai montré qu'il prend différentes formes : ajouts de définitions, d'axiomes ou de postulats, voire de propositions, explicitation de présupposés euclidiens ou de lacunes propres au texte qu'il a utilisé, commentaires explicatifs ou visant à mettre en évidence la structure logique du traité. Dans le présent article, je poursuis cette étude de la réception du traité euclidien par un mathématicien du XIII^e siècle, en examinant les premières définitions du Livre X et quelques applications de l'irrationalité dans les livres stéréométriques. Le but est là encore de caractériser le travail de Campanus sur le texte des *Éléments* qu'il a utilisé, de déterminer comment il l'a perçu et ce qu'il en a fait.

La théorie euclidienne de l'irrationalité est jugée difficile, aussi bien par les mathématiciens anciens que par les commentateurs modernes. Cette difficulté provient, d'une part, du contexte géométrique dans lequel est développée cette théorie — une transcription arithmétisante rend souvent

[1] Ce travail a fait l'objet d'une communication lors de la journée sur « la pratique des commentaires mathématiques » organisée par Karine Chemla, le 20 juin 2000. Je remercie Karine Chemla et tous les participants à cette journée pour leurs remarques. Je remercie aussi Bernard Vitrac qui a pris la peine de relire ce texte et dont les suggestions m'ont été très utiles.

[2] Pour cette étude, j'ai utilisé l'édition de 1516 des *Éléments* de Campanus ainsi que les manuscrits de la Bibliothèque Nationale de Paris, lat. 16197 (XIII^e siècle) et lat. 16198 (XIV^e siècle), que je noterai respectivement A et B.

[3] Dans son commentaire à la fin des définitions du Livre V, Campanus fait référence au second livre de l'*Arithmétique* de Jordanus dont il rapporte la définition de la similitude des rapports par l'égalité des dénominations [Campanus 1516, p. 111]. Par ailleurs il utilise largement l'ouvrage de Jordanus dans sa réécriture du Livre VII [Rommevaux 1999]. Toujours à la fin des définitions du Livre V, Campanus critique l'exposé de la proportionnalité par Aḥmad ibn Yūsuf (*Ametus filius Ioseph*) [Campanus 1516, p. 112]. Enfin, dans un ajout à la proposition XIII.9, Campanus fait référence au chapitre 9 du premier livre de l'*Almageste* de Ptolémée et lui emprunte la converse de cette proposition [Campanus 1516, p. 429]. Par ailleurs, il est probable qu'il ait utilisé pour le Livre X le commentaire d'an-Nayrîzî aux *Éléments* traduit en latin par Gérard de Crémone [Busard 1998, p. 127], [Curtze, 1899].

les résultats plus immédiatement lisibles —, et d'autre part, de l'usage d'un vocabulaire spécifique qu'il n'est pas toujours aisé d'assimiler. La difficulté débute dès les premières définitions du Livre X. En effet, Euclide commence par définir la commensurabilité et l'incommensurabilité des droites entre elles, puis l'exprimabilité et l'irrationalité des droites relativement à une droite de référence. Peu importe, pour l'instant, ce que signifient ces termes. Il nous suffit de remarquer que le parallélisme entre ces deux couples de notions n'est pas immédiat, puisque l'exprimabilité recouvre deux cas, la commensurabilité en longueur, qui est la commensurabilité proprement dite, et la commensurabilité en puissance, qui est un des cas d'incommensurabilité. Dans certaines versions arabes des *Éléments*, on voit apparaître, au détour des propositions, deux notions non euclidiennes, celles d'exprimabilité en longueur et d'exprimabilité en puissance (les médiévaux disent plutôt rationalité en longueur et rationalité en puissance), qui renforcent le parallélisme avec la commensurabilité. Campanus hérite de ces notions. Nous allons voir que cela le conduit à faire certains ajouts au texte des *Éléments*, en particulier à la proposition XIII.6. En examinant ces ajouts, nous nous demanderons si l'introduction de ces notions manifeste une conception de la théorie de l'irrationalité différente de celle d'Euclide.

Avant de commencer cette étude, il convient de déterminer la version des *Éléments* que Campanus a utilisée ou du moins d'en donner certaines caractéristiques. Le texte latin sur lequel Campanus se fonde pour sa réécriture est issu de la version la plus répandue à l'époque, celle dite « version II » ou « version Adélard II » et qui date du XII^e siècle. L'histoire de cette version est très complexe. Selon H. Busard et M. Folkerts [1992] qui ont édité ce texte, Robert de Chester pourrait en être l'auteur. Sa rédaction aurait été faite en plusieurs étapes. Dans un premier temps, l'auteur aurait compilé les énoncés à partir de versions arabes et latines : en effet, les plus vieux manuscrits de ce texte ne comportent que les énoncés. Dans un second temps, des preuves auraient été ajoutées en marge, vraisemblablement par l'auteur des énoncés, si l'on en croit H. Busard et M. Folkerts. Enfin, ces preuves auraient été insérées dans le texte en même temps qu'elles étaient retravaillées par les différentes personnes qui l'ont utilisé. Ceci explique les divergences parfois importantes entre les nombreux manuscrits qui nous sont parvenus [Busard-Folkerts

1992, p. 29–30]. Notons que ces preuves sont souvent résumées, réduites à la description des données et à la liste des propositions mises en jeu. Par ailleurs quelques commentaires émaillent le texte ; en particulier, les propositions converses l'une de l'autre sont systématiquement signalées. Campanus a utilisé une (ou des) version(s) de ce texte — la comparaison des énoncés montre en effet clairement son emprunt. C'est donc relativement à ce texte qu'il s'agit de caractériser le travail de Campanus.

I. EXPRIMABILITÉ, RATIONALITÉ.

I.1. Exprimabilité, rationalité dans les premières définitions du Livre X

Les premières définitions du Livre X[4] des *Éléments* d'Euclide présentent deux couples de termes, commensurable (*summetroi*)/incommensurable (*assumatroi*) et exprimable (*rètè*)/irrationnelle (*alogoi*). Nous reprenons ici la terminologie française adoptée par Bernard Vitrac [1998, p. 35–36] qui rend la dissymétrie des termes grecs. Pour le second couple de termes, Thomas Heath [1956, p. 10] parle quant à lui de droite rationnelle ou irrationnelle, retenant, comme nous allons le voir, la terminologie latine. La définition 1 concerne les grandeurs en général, qui sont dites commensurables lorsqu'une grandeur commune les mesure (A et B sont commensurables, s'il existe C telle que C mesure A et B). Elles sont incommensurables dans le cas contraire. Dans le cas où ces grandeurs sont des droites on parle parfois, dans les propositions, de commensurabilité en longueur, en opposition à la notion de commensurabilité en puissance introduite dans la définition 2, selon laquelle des droites sont dites commensurables (resp. incommensurables) en puissance lorsque leurs carrés sont commensurables (resp. incommensurables). Ces définitions déterminent ainsi des relations entre des couples de grandeurs, de droites ou de surfaces données.

Dans la définition 3, est introduite une droite choisie arbitrairement et qui est dite exprimable. Dans la suite du traité, Euclide posera comme droite exprimable un élément d'une figure géométrique comme le diamètre d'un cercle par exemple. Cette droite est choisie selon le contexte du problème ou du théorème. Toutefois, dès l'Antiquité, la plupart des

[4] Se reporter au tableau des définitions en annexe.

commentateurs interprèteront la droite proposée comme une unité de mesure fixée *a priori*. Ainsi, un ajout que l'on trouve dans certains manuscrits grecs, au début de la définition 3, qualifie la droite proposée de cette manière : « celle à partir de laquelle, par convention, sont prises les mesures, par exemple d'une coudée, d'une palme, d'un doigt ou d'un pied » [Vitrac 1998, p. 44]. On retrouve cette même interprétation dans le commentaire d'an-Nayrîzî à cette définition[5]. Dans la version de Campanus, par contre, la référence à cette unité de mesure ne se trouve ni dans le corps du texte, ni dans les commentaires. La seule différence entre le texte grec et celui que Campanus reprend à Robert de Chester[6] est l'ajout dans la définition 5 (définition 3 d'Euclide) de l'expression « *cum qua ratiocinamur* » pour qualifier la droite exprimable, que Campanus appelle rationnelle[7]. Elle anticipe la définition suivante des droites rationnelles, puisque c'est relativement à cette droite posée comme rationnelle (ou exprimable pour Euclide) que d'autres lignes seront dites rationnelles (exprimables pour Euclide) ou non, comme nous le voyons à présent.

Revenons à la définition 3 d'Euclide : cette droite E étant posée exprimable, une droite D est alors dite exprimable si elle est commensurable à E que ce soit en longueur ou en puissance seulement ($D = k \cdot E$ ou $D^2 = k' \cdot E^2$, avec k et k' rationnels[8]), et sinon, elle est irrationnelle. Enfin, la définition 4 caractérise les carrés ou surfaces exprimables et irrationnels. Le carré E^2 sur la droite exprimable donnée E est dit exprimable. Les surfaces S commensurables à E^2 sont dites elles aussi exprimables ($S = k \cdot E^2$, avec k rationnel). Celles qui lui sont incommensurables sont

[5] Ainsi dans la traduction latine de Gérard de Crémone, on peut lire : « *cum fuerit linea existens quantitas, cum qua relique mensurantur quantitates, sicut cubiti unius, ergo cum inceptum fuerit, et posita fuerit hec mensura, cum qua relique quantitates temptantur, invenientur quantitates infinite, scilicet linee infinite numerationis, quarum quedam erunt incommunicantes ei in longitudine tantum, et alie incommunicantes in longitudine et potentie simul* » [Curtze 1899, p. 213].

[6] Voir le tableau des définitions en annexe.

[7] Cet ajout se trouve dans certains manuscrits de la tradition arabe [Rommevaux-Djebbar-Vitrac, 2001, annexe III].

[8] Pour rendre mon propos plus immédiatement lisible par le lecteur moderne, j'utilise un langage algébrique qui n'est en rien une traduction des définitions euclidiennes. La commensurabilité ne s'énonce pas en termes de multiplication par un entier rationnel, ni chez Euclide, ni chez Campanus. C'est une notion géométrique.

irrationnelles. Et enfin, Euclide précise que le côté d'un carré égal à une surface irrationnelle est irrationnel.

Les définitions euclidiennes déroutèrent la plupart des commentateurs. En effet, pour les droites, la notion d'exprimabilité recouvre deux situations différentes relativement à la droite E posée comme exprimable : la commensurabilité en longueur, ou la commensurabilité en puissance seulement, qui est un cas d'incommensurabilité. Cette perplexité est rapportée par Pappus, dans le Livre I de son commentaire aux *Éléments* :

« Euclide, d'autre part, appelle exprimable la ligne qui est commensurable avec la ligne exprimable — quelle que soit la manière dont elle est commensurable —, sans faire aucune stipulation sur ce point : un fait qui a été cause d'une certaine perplexité pour ceux qui trouvaient chez lui certaines lignes qui sont appelées exprimables et qui sont de plus commensurables entre elles en longueur, mais incommensurables avec la ligne exprimable donnée » [Vitrac 1998, p. 43].

Pappus donne alors l'exemple suivant : soit E une droite de référence dite exprimable, on considère les droites D et D' telles que le carré sur D soit 50 fois celui sur E et celui sur D' 18 fois celui sur E ($D^2 = 50 \cdot E^2$ et $D'^2 = 18 \cdot E^2$). D et D' sont exprimables car commensurables en puissance avec E ; D et D' sont commensurables entre elles puisque[9] $D : D' :: 5 : 3$, mais D et D' sont incommensurables en longueur avec E.

En fait, la notion euclidienne de l'exprimabilité des droites dérive de la notion d'exprimabilité des surfaces. En effet, soit un carré C exprimable, $C = k \cdot E^2$. Son côté c est alors tel que $c = \sqrt{k} \cdot E$. Donc c est commensurable à E si k est un carré, sinon c est commensurable en puissance seulement avec E. Dans les deux cas, c est dit exprimable.

Examinons à présent les définitions de Campanus. Le couple de termes commensurable/incommensurable est rendu par *communicans* (ou *commensurabilis*)/*incommensurabilis* (ou *incommunicans*)[10], et exprimable/irrationnelle donne *rationalis*/*irrationalis* ou *surda*[11]. Mise à part cette

[9] $X : Y$ est le rapport entre X et Y, et $X : Y :: Z : T$ représente la proportion ou l'identité des rapports entre les quatre termes X, Y, Z et T.

[10] La terminologie de Campanus n'est pas fixée. Il emploie le plus souvent le couple de termes *communicans*/*incommensurabilis*, mais il lui arrive aussi d'utiliser les termes *commensurabilis* et *incommunicans*. Dans les traductions, j'ai fait le choix de rendre ces couples de termes par commensurable/incommensurable.

[11] Dans les manuscrits arabes on trouve les couples de termes *mushtarak*/*ghayr*

différence de vocabulaire, qui, comme nous le verrons plus loin, n'est pas sans conséquence, les définitions que Campanus reprend à Robert de Chester, qui lui-même suit de très près un texte arabe, sont proches de celles du texte grec que nous connaissons, à une exception près, en plus de celle déjà signalée plus haut dans la définition 5 (définition 3 d'Euclide) : dans la définition des droites rationnelles ou exprimables (définition 6 de Campanus, fin de la définition 3 du grec) telle qu'on la trouve chez les auteurs médiévaux, arabes et latins, il manque la précision sur le type de commensurabilité des droites : « soit en longueur et en puissance, soit en puissance seulement »[12]. En effet, la définition euclidienne est la suivante :

« [...] que la droite proposée soit appelée exprimable, et, celles [qui sont] commensurables avec elle, soit en longueur et en puissance, soit en puissance seulement, exprimables [...] »,

alors que Campanus a seulement :

« Et que toute ligne donnée avec laquelle nous raisonnons soit appelée rationnelle. Et les lignes qui lui sont commensurables sont dites rationnelles. »

Ainsi, si l'on s'en tient à la lettre du texte latin, une lecture possible de cette définition est que les droites rationnelles sont uniquement celles qui sont commensurables, au sens de la définition 1, c'est-à-dire en longueur seulement à la droite posée comme exprimable. On ne retrouve alors que le premier cas de l'exprimabilité euclidienne. C'est cette interprétation que donne Tartaglia [1565, fol. 175v] dans son édition italienne des *Éléments*[13]. Toutefois, il ne faut pas oublier que d'après la dernière définition (définition 4 d'Euclide, définition 11 de Campanus), les côtés des carrés irrationnels sont dits irrationnels. En conséquence, cela peut sous-entendre que les côtés des carrés rationnels sont dits rationnels,

---

mushtarak ou *mutabāyin* (commensurable/non commensurable ou séparé) et *munṭaq/ghayr munṭaq* ou *aṣamm* (exprimable/non exprimable ou sourd) [Rommevaux-Djebbar-Vitrac 2001, p. 259].

[12] Voir le tableau des premières définitions dans les différentes traditions dans [Rommevaux-Djebbar-Vitrac 2001, p. 287–290]

[13] Au début du Livre X, Tartaglia présente en parallèle une traduction italienne des définitions de Campanus et de celles de Zamberti. À la suite de la définition de Campanus des droites rationnelles, il explique, dans un commentaire, que sont dites rationnelles les droites qui sont commensurables, selon la définition 1, c'est-à-dire en longueur seulement, à la droite de référence. Il donne alors deux exemples numériques à l'appui de cette interprétation [Tartaglia 1565, fol. 175v].

étant donné le caractère discriminant des définitions. Or, de tels côtés peuvent être commensurables en longueur ou en puissance seulement à la droite posée comme rationnelle[14]. On retrouve alors les deux cas de l'exprimabilité euclidienne, mais de manière non explicite. Si l'on accepte cette interprétation de la dernière définition, réduire la rationalité des droites à la commensurabilité en longueur, comme le fait Tartaglia, est incorrect. Campanus ne commente pas les définitions du Livre X, si bien qu'il est difficile de savoir quelle interprétation il en donnait et s'il avait perçu l'ambiguïté de sa définition 6.

Ainsi, l'examen des premières définitions du Livre X dans la tradition médiévale nous montre une ambiguïté dans la définition de la notion de rationalité des droites, qui peut recouvrir soit le seul cas de la commensurabilité en longueur, soit aussi le cas de la commensurabilité en puissance. Par ailleurs, le choix de traduire « exprimable » (*munṭaq*) par « *rationalis* » ne semble pas très heureux. Il peut conduire les interprètes ou les commentateurs à faire le parallèle entre les droites rationnelles relativement à une droite considérée alors comme une unité et les rapports rationnels[15]. Toutefois ces deux notions ne se recouvrent pas tout à fait. En effet, une droite rationnelle ou exprimable, commensurable en puissance seulement à la droite de référence, n'a pas de rapport rationnel relativement à cette même droite. Rappelons que Campanus parle des rapports rationnels et irrationnels dans son commentaire aux définitions du Livre V et fait le lien entre la commensurabilité des grandeurs et les rapports rationnels [Campanus 1516, p. 103 et 111–112 ; A, fol. 31v, 32r–32v]. Mais Campanus ne fait jamais le lien entre « droite rationnelle »

[14] Voir plus haut ce qui a été dit de la manière de dériver l'exprimabilité des droites de l'exprimabilité des surfaces.

[15] Dans un passage probablement inauthentique de la proposition XIII.18 (il ne se trouve pas dans les versions arabo-latines), on trouve dans le texte grec deux occurrences de l'expression « dans des rapport exprimables ». Après la construction des arêtes des cinq polyèdres réguliers inscrits dans une même sphère, le texte grec précise que la pyramide (le tétraèdre régulier), l'octaèdre et le cube ont entre eux des côtés dans des « rapports exprimables », alors que ce n'est pas le cas de l'icosaèdre et du dodécaèdre entre eux et relativement aux trois autres polyèdres. Par exemple, le côté de la pyramide est en puissance double de celui du cube (en termes modernes, leur rapport vaut $\sqrt{2}$). Ce rapport est dit « exprimable » dans le sens où ce mot est utilisé pour les droites au Livre X [Vitrac, à paraître, commentaire à XIII.18]. Campanus considère, quant à lui, que les rapports rationnels sont ceux qui peuvent s'exprimer comme rapports de deux nombres.

et « rapport rationnel »[16].

Un flottement dans l'usage du terme « rationnel » est cependant perceptible dans le commentaire que Campanus fait aux propositions X.17 et 18, correspondant aux propositions X.29 et 30 du grec[17]. Dans ces propositions, il est demandé de trouver deux droites AB et BC, rationnelles, commensurables en puissance seulement (*duas lineas potentia tantum rationales commensurabiles* (ou *communicantes*)) et vérifiant $AB^2 - BC^2 = AC^2$ avec, dans le premier cas, AC commensurable en longueur avec AB, et dans le second cas, AC commensurable en puissance seulement avec AB. Dans les preuves de ces deux propositions, Campanus propose des exemples numériques. Il s'inspire ici du commentaire qui se trouve dans la version de Robert de Chester [Campanus 1516, p. 261–262 ; A, fol. 70rb–71ra]. Dans le premier cas, il considère AB rationnelle et AC telle que $AB^2 : AC^2 :: de : df$, où de et df sont dans un rapport de nombres carrés mais de et fe $(= de - df)$ ne sont pas dans un rapport de nombres carrés. Il choisit comme exemple de tels nombres $(de, df, fe) = (9, 4, 5)$. Alors $AB^2 : AC^2 :: 9 : 4$ et $AB^2 : BC^2 :: 9 : 5$ (Campanus n'écrit pas ces relations numériques). Dans le second cas, de n'est pas dans un rapport de nombres carrés avec df et Campanus propose comme exemple $(9, 6, 3)$. Alors $AB^2 : AC^2 :: 9 : 6$ et $AB^2 : BC^2 :: 9 : 3$. Dans les deux cas, AB et BC sont commensurables en puissance seulement et elles sont rationnelles, soit exprimables au sens euclidien du terme. Campanus, à la suite de la démonstration de sa proposition X.18, commente ainsi l'expression « *potentia tantum rationales commensurabiles* » et précise qu'elle recouvre deux cas distincts :

« Il faut noter que des lignes rationnelles commensurables en puissance seulement peuvent être, l'une rationnelle et l'autre irrationnelle, comme les côtés des carrés équivalents à deux aires dont l'une fait 25 pieds et l'autre 24. Ils sont rationnels commensurables en puissance seulement. En effet, le côté de la première surface est 5 et ne nombre pas le côté du second.

---

[16] Ce lien est fait par an-Nayrîzî dans son commentaire à la définition 4 selon laquelle le côté des carrés irrationnels est irrationnel : « *non invenitur, quod lateris quadrati* ⟨*ir*⟩*rationalis sit proportio rationalis ad aliquam lineam rationalium* » [Curtze 1899, p. 214].

[17] Dans les versions médiévales arabes et latines, l'ordre des propositions du début du Livre X est différent de celui du texte grec [Rommevaux-Djebbar-Vitrac 2001, p. 264–265 et p. 291]

Et ils peuvent être tous les deux irrationnels, comme les côtés des carrés équivalents à deux aires dont l'une fait 24 pieds et l'autre 23. En effet, aucun des deux n'est nombré par le côté et ils sont incommensurables en longueur d'après la dernière partie de la proposition[18] 7 ⟨du Livre X⟩ »[19].

On voit ici clairement que le terme rationnel recouvre dans la même phrase deux réalités différentes. Dans l'expression « rationnelles commensurables en puissance seulement », il correspond aux deux cas de l'exprimabilité euclidienne, mais lorsqu'il est opposé à irrationnel, il renvoie à la seule commensurabilité en longueur et, dans ce cas, $\sqrt{24}$ est dit irrationnel, alors qu'il est exprimable au sens euclidien du terme[20]. Une manière de lever l'ambiguïté serait d'introduire ici deux notions qui ne sont pas euclidiennes, mais que l'on trouve par ailleurs dans la version de Campanus, à la suite de Robert de Chester, et dans d'autres versions médiévales : celles de « rationalité en longueur » et de « rationalité en puissance » qui correspondent aux cas où les droites sont commensurables respectivement en longueur ou en puissance avec la droite de référence. Ainsi, on pourrait dire que le côté du carré de 25 pieds est rationnel en longueur et en puissance, mais que le côté du carré de 24 pieds est rationnel en puissance seulement, irrationnel en longueur et cela relativement à une ligne de 1 pied, posée implicitement *a priori* et considérée comme droite rationnelle de référence.

---

[18] C'est la proposition 9 dans l'édition de Heiberg.

[19] « *Nota etiam quod lineae tantum potentia rationales communicantes, possunt esse una rationalis et alia irrationalis, sicut latera tetragonica duarum superficierum quarum una fit 25 pedum et alia 24, sunt rationalia potentia tantum communicantia, latus enim primae superficiei est 5 latus vero secundae non numeratur. Et possunt esse ambae irrationales, ut latera tetragonica duarum superficierum quarum una fit 24 pedum et alia 23, neutrius enim numeratur latus, suntque in longitudine incommensurabilia ex ultima parte septimae* » [Campanus 1516, p. 262 ; A, fol. 70vb–71ra].

[20] Tartaglia, lorsqu'il commente la définition issue de l'édition de Zamberti des droites rationnelles (« *Et quelle linee che a questa seranno commensurabile in longhezza e in potentia, e anchora solamente in potentia, sono dette rationale* »), explique que l'usage qu'Euclide fait ici du terme rationnel n'est pas l'usage courant : « [...] *questa vole che anchoîa quelle linee che sono commensurabile solamente in potentia con la nostra proposta rationale* [...] *siano chiamate rationale, perilche seguita che quelle quantità che communamente da prattici sono dette radice sorde, et irrationale* [...] *l'Auttore vole che essendo tal quantità linee siano dette rationale* [...] » [Tartaglia 1565, fol. 176r].

I.2. Rationalité en longueur, rationalité en puissance

Grâce à l'introduction des notions de « droite rationnelle en longueur » et de « droite rationnelle en puissance », les notions de commensurabilité et de rationalité sont strictement mises en parallèle. Cette introduction n'est pas le fait de Robert de Chester. En particulier, si nous reprenons l'exemple précédent, dans la version de Gérard de Crémone[21], dans les énoncés des propositions X.24 et 25 correspondant à X.29 et 30 du grec, les deux droites cherchées sont « rationnelles en puissance et commensurables en puissance seulement » [Busard 1983, p. 251–253]. Autrement dit, au cours de la transmission du texte, quelqu'un a considéré que dans l'expression « rationnelles (ou exprimables) commensurables en puissance », l'expression « en puissance » était mise en commun et l'a répétée. On trouve cette même double occurrence dans l'énoncé de la proposition X.17 de la traduction arabe d'Isḥāq ibn Ḥunayn revue par Thābit ibn Qurra (= X.21 de l'édition de Heiberg) et cette répétition serait due à Thābit lui-même [Vitrac 1998, p. 395].

L'introduction de ces notions de rationalité ou exprimabilité en longueur et en puissance n'est pas spécifique aux versions médiévales arabes ou latines. Dès l'Antiquité, les commentateurs cherchèrent à se démarquer de la terminologie euclidienne. Ainsi, dans les *Definitiones* attribuées à Héron, à propos de l'exemple de la diagonale du carré, il est dit que le côté du carré étant posé comme exprimable, la diagonale est exprimable en puissance (*dunamei rètai*) et irrationnelle en longueur (*mèkei alogos*) avec ce côté [Vitrac 1998, p. 49].

Si l'on examine maintenant les propositions du Livre X dans la version de Campanus, ou dans celle de Robert de Chester, on distingue deux groupes de propositions. Le premier groupe contient les propositions X.1 à X.41 dans la numérotation de Campanus ou X.1 à X.47 dans celle de Heiberg[22]. Le second groupe commence à la proposition X.42 de Campanus correspondant à X.48 de l'édition de Heiberg. Ces deux groupes sont séparés par un ensemble de définitions. Dans ce second groupe de propositions, Campanus, à la suite de Robert de

[21] La version de Gérard de Crémone est une traduction faite à partir d'une version arabe ayant des caractéristiques différentes de celle utilisée par Robert de Chester.

[22] Dans les versions médiévales, ce sont dans les propositions X.1 à 32 que les changements d'ordre sont les plus importants [Rommevaux-Djebbar-Vitrac 2001, p. 264–265 et p. 291].

Chester, considère des « droites rationnelles », correspondant aux « droites exprimables » du texte grec. En particulier, les auteurs médiévaux parlent de « droite posée rationnelle ». Dans le premier groupe de propositions, on remarque que là où Euclide considère des « droites exprimables », les auteurs médiévaux parlent de droites « rationnelles en longueur » ; l'expression « droite rationnelle » n'apparaît pas, sauf dans l'expression ambiguë « droites rationnelles commensurables en puissance », comme nous venons de le voir.

Introduire des droites « rationnelles en longueur », c'est-à-dire commensurables en longueur à la droite de référence, là où l'on a, chez Euclide, des droites exprimables, c'est-à-dire commensurables en longueur ou en puissance à la droite de référence pourrait ne pas être sans conséquence. Il faut ainsi s'assurer que les résultats démontrés par Campanus dans le seul cas des droites rationnelles en longueur ne sont pas utilisés dans la suite des *Éléments* pour des droites rationnelles en puissance seulement. Prenons l'exemple de la proposition X.20 du grec qui s'énonce de la manière suivante [Vitrac 1998, p. 150] :

« Si une [aire] exprimable est appliquée sur une [droite] exprimable, elle produit comme largeur une [droite] exprimable et commensurable en longueur avec celle sur laquelle elle est appliquée. »

Dans la démonstration, il est bien précisé, dans une interpolation, que la droite exprimable AB sur laquelle est appliquée l'aire est « exprimable selon l'une des manières susdites », c'est-à-dire que AB est commensurable en longueur ou en puissance seulement avec une droite posée comme exprimable. Dans les versions de Campanus et de Robert de Chester, cette proposition s'énonce ainsi, sous le numéro 16 :

« Lorsqu'une surface rectangle rationnelle est appliquée sur une droite rationnelle en longueur, son second côté sera rationnel en longueur et commensurable en longueur au premier côté. »[23]

Dans l'énoncé même, il est précisé que la droite est rationnelle en longueur. Ainsi, un seul cas de figure est envisagé, alors que les deux cas sont considérés dans le texte d'Euclide. Toutefois, il faut remarquer que la proposition X.16 de Campanus n'est utilisée que dans la preuve

---

[23] « *Cum adiuncta fuerit lineae in longitudine rationali superficies rationalis rectangula, latus eius secundum erit in longitudine rationale, laterique primo in longitudine commensurabile* » [Campanus 1516, p. 160 ; A, fol. 70rb].

de X.22 de Campanus (= X.26 de l'édition de Heiberg)[24] et la droite sur laquelle la surface est appliquée est là aussi supposée rationnelle en longueur. Dans cette proposition, il est question de droite médiale, c'est-à-dire une droite qui est moyenne géométrique entre des droites exprimables, commensurables en puissance seulement.

Robert de Chester et, après lui, Campanus considèrent de la même manière une droite rationnelle en longueur dans l'énoncé de X.20 de Campanus (= X.19 de Robert de Chester et X.22 de Heiberg). Dans l'édition grecque, cette proposition s'énonce ainsi [Vitrac 1998, p. 154] :

« Le [carré] sur une médiale, appliqué sur une [droite] exprimable, produit comme largeur une [droite] exprimable et incommensurable en longueur avec celle sur laquelle il est appliqué. »

Campanus, quant à lui, propose l'énoncé suivant :

« Lorsqu'est appliquée sur une ligne rationnelle en longueur une surface égale au carré d'une ligne médiale, son second côté sera rationnel en puissance seulement, et incommensurable en longueur au premier côté ».[25]

Ainsi, dans la version de Campanus, la droite sur laquelle est appliquée la surface est supposée rationnelle en longueur au lieu de rationnelle. Par ailleurs, il est précisé que la largeur ainsi obtenue est rationnelle en puissance seulement, précision absente de l'énoncé de l'Euclide grec[26]. Notons que cette dernière précision se trouve aussi dans la version de Gérard de Crémone (c'est la proposition X.18) ainsi que dans les manuscrits de la version d'Isḥāq ibn Ḥunayn révisée par Thābit ibn Qurra et serait due là encore à Thābit[27]. Il faut remarquer ici que dans le cas, non envisagé par Campanus, où la droite sur laquelle est appliquée le carré de la médiale est rationnelle en puissance seulement, donc exprimable au

[24] X.22 de Campanus : « *Omnis differentia qua abundat mediale a mediali, irrationalis esse probatur* » [Campanus 1516, p. 165 ; A, fol. 71vb].

[25] « *Cum adiuncta fuerit lineae in longitudine rationali superficies aequalis quadrato lineae medialis, latus eius secundum potentialiter tantum erit rationale, lateri que primo in longitudine incommensurabile* » [Campanus 1516, p. 263 ; A, fol. 71rb].

[26] Signalons toutefois que dans le grec, au cours de la démonstration, on trouve la seule occurrence des *Éléments*, probablement interpolée, de l'expression « exprimables en puissance » [Vitrac 1998, p. 155, note 179].

[27] Voir l'ajout qui se trouve dans la preuve de X.18 de la version Isḥāq-Thābit dans lequel on rapporte le propos de Thābit lui-même selon lequel il serait l'auteur de cette précision [Vitrac 1998, p. 395].

sens euclidien du terme, la largeur peut ne pas être rationnelle en puissance seulement[28]. Il nous reste maintenant à déterminer si la restriction apportée dans l'énoncé de Campanus a des conséquences pour la suite du traité. Il faut rappeller ici que les preuves de Campanus ne sont pas toujours celles du texte grec. C'est donc à l'intérieur de la version de Campanus qu'il faut déterminer si la complétude déductive du traité est maintenue malgré la restriction apportée par l'introduction des droites rationnelles en longueur. La proposition X.20 est utilisée par Campanus dans les preuves des propositions X.21 à 23 et X.31 à 38 (= X.23, 25, 26 et X.37 à 44 de l'édition de Heiberg). Dans ces propositions on considère une droite médiale ou une aire médiale, c'est-à-dire un rectangle formé de deux droites médiales. Il faut noter ici que la notion de droite médiale est une notion relative à la droite posée comme exprimable [Vitrac 1998, p. 156]. Cette droite de référence n'est pas précisée dans le cadre de ces propositions, en particulier ce n'est pas une donnée du problème (on la notera E). Dans le cours des démonstrations, on construit une aire égale au carré de la médiale ou à l'aire médiale considérés. Cette aire est appliquée sur une droite D que l'on se donne indépendamment des données du problème et que l'on suppose exprimable dans le texte grec, rationnelle en longueur dans les versions de Robert de Chester et de Campanus. Il faut bien noter que cette exprimabilité ou rationalité s'exprime là encore relativement à la droite de référence E. On s'intéresse ensuite à la largeur de l'aire ainsi construite qui, d'après la proposition précédente, est exprimable pour Euclide, rationnelle en puissance seulement pour Campanus et, pour les deux auteurs, incommensurable à la droite donnée D. En conséquence, le fait que les auteurs médiévaux considèrent ici la droite donnée D rationnelle en longueur ne change rien à la validité des preuves ni aux résultats obtenus. En effet, il s'agit ici d'une construction auxiliaire, et prendre comme longueur D une droite rationnelle en longueur ne fait qu'ajouter une condition supplémentaire à la construction, qui de ce fait est plus particulière dans les versions de Robert et de Campanus que dans la version grecque.

---

[28] En notations algébriques modernes, si la médiale est de la forme $a\sqrt{\sqrt{k}}$, et si la droite exprimable, rationnelle en puissance, est $a\sqrt{k}$, alors la largeur est a, donc rationnelle en longueur.

En conclusion, le fait de considérer dans l'ensemble de ces premières propositions des « droites rationnelles en longueur » au lieu de « droites rationnelles » ne met pas en cause la complétude de la suite du traité.

II. LA PROPOSITION XIII.6.

Le Livre XIII s'ouvre avec un ensemble de six propositions relatives au partage en extrême et moyenne raison d'une droite donnée : une droite AB étant donnée, on la divise au point C tel que $AB : AC :: AC : BC$. Cinq de ces propositions sont utilisées dans la suite du traité[29] pour démontrer trois résultats fondamentaux. La proposition XIII.11 établit que le côté d'un pentagone inscrit dans un cercle dont le diamètre est supposé exprimable est une droite irrationnelle, appelée mineure[30]. Les propositions XIII.16 et 17 demandent de construire l'icosaèdre et le dodécaèdre, de les circonscrire par une sphère et de démontrer que les côtés d'un icosaèdre et d'un dodécaèdre inscrits dans une sphère de diamètre supposé exprimable sont des droites irrationnelles, respectivement une mineure et une apotomé. Rappelons qu'une apotomé est une droite D telle que $D = D_1 - D_2$ avec D_1 et D_2 exprimables commensurables en puissance seulement. La proposition XIII.6, lemme utilisé dans la preuve de XIII.17, nous apprend que toute ligne exprimable étant divisée en extrême et moyenne raison, chaque portion est une apotomé. Notons que cette proposition est jugée interpolée par Heiberg[31], même si elle figure dans les plus anciens manuscrits grecs et dans les versions arabo-latines des *Éléments.* Dans l'énoncé[32] de XIII.6, Campanus parle bien sûr de droite rationnelle là où Euclide envisage une droite exprimable. Ce simple changement de vocabulaire n'est pas sans conséquence. Ainsi, comme nous allons voir, Campanus remarque que la démonstration d'Euclide, qu'il

---

[29] À l'exception de la proposition XIII.2, converse de XIII.1, qui n'est pas utilisée dans la suite du Livre XIII.

[30] Une mineure est une droite D telle que $D = D_1 - D_2$ où D_1 et D_2 sont incommensurables en puissance, la somme des carrés $D_1^2 + D_2^2$ est une aire exprimable et l'aire $D_1 \cdot D_2$ est médiale.

[31] Bernard Vitrac rejette les arguments de Heiberg [Vitrac, à paraître, commentaire à XIII.6]. Heath se rallie à l'opinion de Heiberg [Heath 1956, vol. III, p. 451].

[32] On trouvera en annexe la traduction de la proposition XIII.6 dans la version de Campanus.

reprend, n'est valable que pour une droite rationnelle en longueur, et que la conclusion du théorème est légèrement différente si l'on suppose que la droite divisée est rationnelle en puissance seulement. Il propose alors une autre démonstration dans ce dernier cas. Nous verrons que le nœud de cette affaire est le choix de la droite de référence posée comme exprimable ou rationnelle.

II.1. La proposition XIII.6 dans l'édition grecque

Dans la proposition XIII.6, il est donc démontré que toute ligne exprimable étant divisée en extrême et moyenne raison, chaque portion est une apotomé. Notons que la notion d'apotomé est une notion relative. En effet, les deux droites, qui entrent dans sa définition, doivent être exprimables, et l'exprimabilité dépend du choix de la droite de référence posée comme exprimable. La démonstration repose sur l'argumentation suivante :

I) Soit AB exprimable, coupée en extrême et moyenne raison en C.

On prolonge BA et on place D tel que $AD = \frac{1}{2}AB$.

Alors $CD^2 = 5 \cdot DA^2$ (XIII.1)[33].

Donc CD^2 est commensurable à DA^2 (X.6)[34].

Or DA^2 est exprimable, car $DA = \frac{1}{2}AB$ et AB est exprimable, donc CD^2 est exprimable et CD l'est aussi.

Et d'autre part, CD et DA sont commensurables en puissance seulement (X.9)[35].

D'où $AC = CD - AD$ avec CD et AD exprimables, et commensurables en puissance seulement.

Donc AC est une apotomé (X.73)[36].

II) Ensuite, on a $AB \cdot BC = AC^2$.

---

[33] XIII.1 : « Si une ligne droite est coupée en extrême et moyenne raison, le plus grand segment augmenté de la moitié de la [droite] entière peut [produire] le quintuple du carré sur sa moitié » (traduction de Bernard Vitrac).

[34] X.6 : « Si deux grandeurs ont comme rapport l'une relativement à l'autre celui d'un nombre relativement à un nombre, les grandeurs seront commensurables » [Vitrac 1998, p. 106].

[35] Fin de X.9 : « et les carrés qui n'ont pas comme rapport l'un relativement à l'autre celui d'un nombre carré relativement à un nombre carré, n'auront pas non plus les côtés commensurables en longueur » [Vitrac 1998, p. 112].

[36] X.73 : « Si, d'une [droite] exprimable, est retranchée une [droite] exprimable qui soit commensurable en puissance seulement avec la [droite] entière, la [droite] restante est irrationnelle ; et qu'elle soit appelée apotomé. » [Vitrac 1998, p. 290].

Donc le carré sur AC l'apotomé, appliqué sur la droite exprimable AB, produit comme largeur, BC.

Donc BC est une apotomé première[37] (X.97)[38].

Ici, la droite AB divisée est posée comme droite de référence exprimable et on démontre que relativement à AB, la plus grande portion AC est une apotomé et que la plus petite CB est une apotomé première, cette dernière précision ne figurant d'ailleurs pas dans l'énoncé de la proposition.

II.2. Les ajouts de Campanus à la proposition XIII.6

Dans la version de Campanus, l'énoncé de XIII.6 est le suivant : « De toute ligne rationnelle divisée en extrême et moyenne raison, il est nécessaire que chaque portion soit une apotomé. »[39]

La démonstration est semblable à celle du texte grec, si ce n'est que l'on a « rationnelle » là où le grec dit « exprimable ». À la suite de cette démonstration, Campanus ajoute[40] :

« En outre, si de la ligne divisée comme cela a été dit la plus grande portion est rationnelle, la plus petite sera une apotomé. »[41]

Il envisage ici un autre cas de figure, celui où c'est la plus grande portion qui est posée rationnelle. La démonstration ne pose pas de difficulté. Jusqu'à ce stade, il ne semble pas, à première vue, qu'il y ait de différences fondamentales entre le texte de Campanus et celui d'Euclide. L'ajout d'un cas de figure non envisagé par Euclide est un souci assez constant de Campanus dans sa réécriture. Pour être complet, il aurait pu d'ailleurs envisager le cas où c'est la plus petite portion qui est supposée rationnelle. Logiquement, le texte de Campanus devrait s'arrêter là. Il a bien démontré la proposition XIII.6 d'Euclide, c'est-à-dire que si une droite exprimable (ou rationnelle) est divisée en extrême et moyenne raison, chaque portion

---

[37] Une apotomé première est une droite D apotomé, avec $D = D_1 - D_2$, avec $D_1^2 = D_2^2 + D_3^2$, D_3 commensurable en longueur avec D_1 et D_1 commensurable en longueur avec la droite de référence posée exprimable.

[38] X.97 : « Le [carré] sur une apotomé, appliqué sur une [droite] exprimable, produit comme largeur une apotomé première » [Vitrac 1998, p. 336].

[39] « *Omnis rationalis lineae secundum proportionem habentem medium et duo extrema divisae, utramque portionem residuum esse necesse est* » [Campanus, p. 426 ; A, fol. 113rb].

[40] Signalé comme « ajout I » dans la traduction qui se trouve en annexe.

[41] « *Amplius autem si lineae sic divisae ut proponitur maior portio fuerit rationalis, erit minor residuum* ».

est une apotomé. Or, Campanus ajoute le résultat suivant[42] :

« Et si une ligne rationnelle en puissance seulement est divisée en extrême et moyenne raison, alors il est nécessaire que chaque portion soit une apotomé. »[43]

Apparaît ici la notion non euclidienne de rationalité en puissance et on comprend *a posteriori* que dans l'énoncé de XIII.6, « rationnelle » est mis pour « rationnelle en longueur ». Ce faisant, Campanus change le statut de la droite divisée. Dans le texte d'Euclide, cette droite divisée est posée comme droite de référence, exprimable, et c'est relativement à elle que les deux portions sont dites apotomés. Campanus, quant à lui, considère implicitement une droite de référence fixée *a priori* indépendamment des données du problème (nous la notons E), et la droite divisée est supposée dans le premier cas rationnelle en longueur et, dans le second cas, rationnelle en puissance seulement relativement à cette droite E. Les portions sont elles aussi dites apotomés, mais non plus relativement à la droite divisée, mais relativement à cette droite de référence E.

II.3. La démonstration de XIII.6 dans la rédaction de Campanus

Avec ces nouvelles données, revenons à la démonstration de XIII.6 dans la version de Campanus. Le schéma de la preuve est le même que celui du texte grec (voir plus haut, II. 1). Dans une première partie, il est démontré que la plus grande portion AC est une apotomé. En effet, AC est obtenu en retranchant AD de CD et il est démontré ensuite que ces deux droites sont rationnelles commensurables en puissance seulement. En conséquence, le résultat s'obtient en appliquant la proposition X.68 de Campanus (= Heiberg X.73). Et cette démonstration est valide[44], que la droite AB soit supposée rationnelle en longueur ou en puissance seulement, car dans les deux cas, les deux droites CD et DA seront rationnelles commensurables en puissance seulement, si l'on prend cette expression

[42] Signalé comme « ajout II » dans la traduction qui se trouve en annexe.

[43] « *At vero si linea rationalis in potentia tantum secundum proportionem habentem medium et duo extrema dividatur, adhuc necesse est ut utraque portio eius sit residuum.* »

[44] En effet, $CD = \frac{1}{2}\sqrt{5} \cdot AB$ et $AD = \frac{1}{2}AB$. Donc relativement à une droite de référence donnée E, on aura $CD = \frac{1}{2}\sqrt{5} \cdot k \cdot E$ et $AD = \frac{1}{2}k \cdot E$ ou $CD = \frac{1}{2}\sqrt{5} \cdot \sqrt{k} \cdot E$ et $AD = \frac{1}{2}\sqrt{k} \cdot E$, selon que $AB = k \cdot E$ ou $\sqrt{k} \cdot E$. Et dans tous les cas, CD et AD sont rationnels, en longueur ou en puissance relativement à E, et elles sont commensurables en puissance seulement entre elles.

selon les deux sens précisés par Campanus dans son commentaire à X.18. Ainsi, la première partie de la preuve de XIII.6 qui établit que la portion la plus grande est une apotomé est valable, que la droite divisée AB soit rationnelle en longueur ou en puissance seulement à la droite de référence implicite posée *a priori*, E. C'est ce que remarque Campanus dans ce que les éditeurs de la Renaissance ont signalé comme une « annotation de Campanus » (voir annexe).

Dans la seconde partie de la preuve, on remarque que $AB \cdot BC = (AC)^2$ où AC est une apotomé et AB est rationnelle. D'après la proposition X.92 de Campanus (= Heiberg X.97), on en déduit que BC est une apotomé première. Campanus précise dans l'annotation que cette seconde partie de la démonstration n'est valable que si AB est rationnelle en longueur. Il nous faut donc examiner la proposition X.92 de Campanus qui est au cœur de la démonstration. Cette proposition nous apprend que si sur une ligne rationnelle (exprimable dans le texte grec) AB est appliquée une surface égale au carré d'une apotomé, ici AC, le second côté BC est une apotomé première. Dans le texte grec, la ligne AB supposée exprimable est prise comme droite de référence, et c'est donc relativement à elle que BC est une apotomé première. Maintenant, si, comme dans le texte de Campanus, une droite de référence E est posée implicitement, indépendamment des données du problème, et si AB est supposée rationnelle en longueur relativement à E, CB sera toujours une apotomé[45] première relativement à AB et aussi relativement à E. Mais dans le cas où AB est supposée rationnelle en puissance seulement relativement à E (AB est alors toujours exprimable au sens euclidien du terme), CB sera toujours une apotomé première relativement à AB — le rapport entre les deux droites est toujours le même — et CB sera une apotomé relativement à E mais d'un autre ordre (c'est ici une apotomé troisième, ce que ne précise pas Campanus)[46]. En conclusion, lorsque

[45] La proposition Heiberg, X.103 (= Campanus X.98) nous apprend qu'une droite commensurable en longueur avec une apotomé est une apotomé, et la même quant à l'ordre [Vitrac 1998, p. 349].

[46] Si une ligne est commensurable en puissance seulement à une apotomé, la ligne est encore une apotomé mais d'un rang différent. C'est ce que Campanus précise au cours de la preuve X.98 évoquée précédemment : « *Quod autem linea communicat residuo in potentia tantum, ipsam quoque necesse est esse residuum, sed non eiusdem speciei* » [Campanus 1516, p. 331, A, fol. 85ra].

Campanus dit que la seconde partie de la preuve de XIII.6 n'est pas valable quand la droite AB est supposée rationnelle en puissance, il sous-entend que, pour lui, les notions d'apotomé, d'apotomé première, etc., sont relatives à une droite de référence E posée implicitement *a priori* et indépendante des données du problème, et ne sont pas relatives à l'un des éléments du problème, ici AB, comme c'est le cas pour Euclide. Il est donc conduit à proposer une autre démonstration dans le cas où AB est rationnelle en puissance seulement. Cette démonstration est la suivante :

Soit AB exprimable en puissance seulement. On la divise en extrême et moyenne raison au point C.

Soit aussi DE exprimable en longueur divisée en F selon la même proportion.

Alors[47] d'après XIV. 2, $AB : DE :: AC : DF :: CB : FE$.

Donc, puisque AB est commensurable en puissance avec DE, AC est commensurable en puissance avec DF et CB avec FE, d'après la première partie[48] de X.10.

Et puisque chaque portion de la ligne DE est une apotomé, comme il est clair d'après ce qui précède, il s'ensuit[49] d'après X.98 que chaque portion de AB est aussi une apotomé.

Au cours de la preuve, Campanus utilise un résultat du Livre XIV. Ce faisant, il rompt avec l'ordre de déroulement logique des propositions dans le traité euclidien. Mais Campanus précise que la preuve de XIV. 2 n'utilise aucun des résultats des livres précédents[50]. Il n'y a donc pas de

[47] Campanus, XIV. 2 : « *Quicquid accidit uni lineae divisae secundum proportionem habentem medium et duo extrema, omni lineae similiter divisae probatur accidere* » [Campanus 1516, p. 452 ; B, fol. 67r].

[48] Campanus, début de X.10 : « *Omnium quatuor quantitatum proportionalium, si fuerit prima communicans secundae, tertia quoque erit communicans quartae* » [Campanus 1516, p. 252 ; A, fol. 68va].

Heiberg, X.11 : « Si quatre grandeurs sont en proportion et que la première soit commensurable avec la deuxième, la troisième sera aussi commensurable avec la quatrième. » [Vitrac 1998, p. 131] La démonstration est faite dans l'hypothèse où les droites sont commensurables en longueur. Campanus ajoute à la suite de la démonstration : « *Quod autem adiunximus, videlicet quod si a communicat cum b in potentia tantum, c communicat cum d in potentia tantum* ». C'est cet ajout qui est utilisé ici.

[49] Voir note *supra*.

[50] « *quae sine adminiculo alicuius eorum quae sequuntur, inconcussa demonstrationem roboratur* » [Campanus 1516, p. 426 ; A, fol. 113va].

risque de raisonnement circulaire.

II.4. Utilisation de XIII.6 dans XIII.17

Dans la proposition XIII.17, il s'agit de construire un dodécaèdre circonscrit à une sphère et de démontrer que le côté de ce dodécaèdre est une apotomé. On construit un cube inscrit dans la sphère. Il est démontré ensuite que si le côté de ce cube est coupé en extrême et moyenne raison, le côté du dodécaèdre cherché est égal au plus grand segment de cette division. Or, il a été démontré dans la proposition XIII.15 que le diamètre de la sphère est en puissance triple de celui du côté du cube inscrit[51]. Dans la version grecque, le diamètre de la sphère est supposé exprimable — il est posé comme droite de référence —, alors le côté du cube est lui aussi exprimable selon la définition X.3. Donc, le côté du cube, exprimable, étant divisé en extrême et moyenne raison, le plus grand segment est une apotomé d'après la proposition XIII.6. Or ce plus grand segment est égal au côté du dodécaèdre. Donc le côté du dodécaèdre est une apotomé.

Dans la version de Campanus, le diamètre de la sphère est supposé « rationnel en longueur ou en puissance ». Une droite de référence a donc été posée implicitement *a priori* et c'est relativement à elle que le diamètre de la sphère est supposé rationnel. Campanus précise même « en longueur ou en puissance ». La suite de l'argumentation est alors la même que dans le grec. Puisque le diamètre de la sphère est en puissance triple du côté du cube, Campanus en déduit que le côté du cube est rationnel en puissance[52]. Il utilise alors ce que nous avons signalé comme son ajout 2 à la proposition de XIII.6 pour conclure[53].

---

[51] Si D est le diamètre de la sphère et C le côté du cube, on a $D^2 = 3 \cdot C^2$.

[52] Notons que le côté du cube peut être rationnel en longueur (donc aussi en puissance) dans le cas où le diamètre de la sphère serait un multiple de $\sqrt{3} \cdot E$, où E est la droite rationnelle de référence. Campanus ne fait pas cette remarque.

[53] Dans la version de Robert de Chester ainsi que dans les autres versions latines médiévales, celles d'Adélard de Bath et de Gérard de Crémone [Busard-Folkerts 1992, p. 325–326 ; Busard 1983a, p. 370–372 ; Busard 1983b, p. 406–408], c'est le côté du cube qui est posé comme exprimable ou rationnel, si bien que l'on déduit directement par XIII.6 que le côté du dodécaèdre, plus grande section dans la division en extrême et moyenne raison du côté du cube, est une apotomé. Le passage par le diamètre de la sphère n'est plus nécessaire. Campanus n'a pas choisi cette facilité et a posé, comme dans le grec, le diamètre de la sphère rationnel, ce qui, compte tenu de l'énoncé, est plus naturel.

CONCLUSION

L'examen des ajouts à la proposition XIII.6 et de son annotation nous a fourni un exemple du travail effectué par Campanus sur le texte euclidien qui lui a été transmis par Robert de Chester. Ce dernier texte a des caractéristiques propres, des divergences avec le texte grec que nous connaissons. Ainsi, la théorie de la rationalité que l'on trouve dans cette version, à la suite des versions arabes, diffère de la théorie de l'exprimabilité d'Euclide par l'introduction des notions non euclidiennes de rationalité en longueur et de rationalité en puissance, qui rend plus immédiat le parallélisme avec la commensurabilité. Nous avons vu, en particulier à propos de la proposition XIII.6, que le fait de considérer des droites rationnelles en longueur là où Euclide parle de droites rationnelles, a pour conséquence, non explicitée par les médiévaux, de changer la droite de référence. Dans la version de Campanus, mais aussi dans celle de Robert de Chester et de ses prédécesseurs arabes, la rationalité ou l'irrationalité des droites se définissent relativement à une droite de référence fixée implicitement *a priori*. J'insiste sur le fait que ce choix est implicite ; à aucun moment, ces auteurs médiévaux ne désignent cette droite qui est définie au tout début du Livre X. Dans le texte euclidien, par contre, la droite de référence, dite exprimable, est fixée selon les problèmes, généralement comme un élément de la figure considérée.

Il ne faut pas exagérer la portée mathématique de ces divergences. En particulier il serait hâtif de déduire de l'introduction, même implicite, de cette droite de référence posée une fois pour toute et indépendamment des données des problèmes, les prémisses d'une arithmétisation[54] du Livre X dans la version de Campanus. D'une part, il faut remarquer que cette droite n'est à aucun moment considérée par Campanus comme une unité de mesure, contrairement à ce que l'on a pu voir dans le commentaire d'an-Nayrîzî. Elle n'est même pas explicitée par Campanus. Ce n'est pas le seul exemple numérique qui figure dans les propositions X.17 et 18 qui pourrait nous faire dire le contraire, même s'il est le reflet d'une tension entre un usage « commun » du terme rationnel et celui des *Éléments*. Il ne sert que d'illustration à des fins pédagogiques (y a-t-il d'autres choix que

[54] Il semblerait que cette arithmétisation du Livre X ait commencé dans les mathématiques de langue arabe, par exemple chez al-Māhānî [Matvievskaya 1987], [Ben Miled 1999]. Toutefois, aucun de ces textes n'a été traduit en latin au Moyen Âge.

de prendre des nombres comme exemples ?) et ne saurait être mis sur le même plan que le corps du texte. D'autre part, arithmétiser le Livre X signifierait traduire les différentes notions, interpréter les énoncés et les démonstrations en termes d'opérations algébriques sur les nombres. Ce n'est absolument pas le cas dans la version de Campanus. Le cadre est toujours celui de la géométrie euclidienne[55]. Campanus reste fidèle au texte qu'il édite, même s'il l'aménage ou le complète.

L'intérêt du travail de Campanus est ailleurs. Nous avons vu que, comme pour le Livre VII, il est soucieux de la cohérence logique du traité. Ainsi, il tire de l'introduction des notions de « rationalité en longueur » et de « rationalité en puissance » toutes les conséquences mathématiques. En particulier, il signale ce qui relève de l'un ou l'autre cas, comme nous l'avons vu pour la proposition XIII.6, et ajoute, si nécessaire, les démonstrations dans le cas de la rationalité en puissance. Les ajouts de ces cas de figure par Campanus ne sont pas systématiques, dans un souci de complétude, mais sont motivés par leur utilisation mathématique ultérieure. Ainsi dans la proposition XIII.17 apparaît une droite rationnelle en puissance, le côté du cube inscrit dans la sphère, ce qui explique son second ajout à XIII.6. Campanus fait ainsi preuve d'une vision d'ensemble du traité tout à fait remarquable, et son travail contribue à renforcer la structure et la cohérence des *Éléments*.

[55] De même, si an-Nayrîzî interprète la droite de référence comme une unité de mesure, à aucun moment, dans la suite de son commentaire, il ne traduit les notions d'apotomé, de médiale, etc, en termes de nombres algébriques. Le cadre est, là aussi, purement géométrique.

ANNEXE : LES PREMIÈRES DÉFINITIONS DU LIVRE X

Euclide grec[57]	**Campanus**	
1a Sont dites grandeurs commensurables celles qui sont mesurées par la même mesure,	**1** Quantitates quibus fuerit una quantitas communis eas numerans, dicentur communicantes.	**1** Des quantités pour lesquelles il y a une quantité commune les nombrant, seront dites commensurables[58].
1b et incommensurables, celles dont aucune commune mesure ne peut être produite.	**2** Quibus vero non fuerit una communis quantitas eas numerans, dicentur incommensurabiles.	**2** Et celles pour lesquelles il n'y a aucune quantité commune les nombrant, seront dites incommensurables.
2a Des droites sont, en puissance, commensurables quand les carrés [décrits] sur elles sont mesurés par la même aire,	**3** Lineae in potentia communicantes dicuntur, quarum superficies quadratas una communis superficies numerat.	**3** Sont dites commensurables en puissance des lignes dont une surface commune nombre les surfaces carrées.
2b et incommensurables quand aucune aire, commune mesure aux carrés [décrits] sur elles, ne peut être produite.	**4a** Lineae incommensurabiles in potentia dicuntur, quarum superficies quadratas non numerat una communis superficies.	**4a** Des lignes sont dites incommensurables en puissance, celles dont aucune surface commune ne nombre les surfaces carrées.

[56] Les traductions sont de Bernard Vitrac [1998, p. 25–37].

[57] Pour le choix de traduction, voir la note 10.

Euclide grec	**Campanus**	
3a Cela étant supposé il est démontré que par rapport à une droite proposée, il existe des droites, infinies en multitude, commensurables ou incommensurables [avec elle], les unes en longueur seulement, les autres aussi en puissance.	**4b** Quae cum ita sint, manifestum est quia omni lineae positae, multae aliae sunt incommensurabiles, quaedam in longitudine tantum, quaedam in longitudine et potentia.	**4b** Et puisqu'elles sont ainsi, il est clair que relativement à toute ligne donnée, beaucoup d'autres [lignes] sont incommensurables, certaines en longueur seulement, certaines en longueur et en puissance.
3b D'une part donc que la droite proposée soit appelée exprimable,	**5** Omnis autem linea cum qua ratiocinamur posita, vocetur rationalis.	**5** Et que toute ligne donnée avec laquelle nous raisonnons soit appelée rationnelle.
3c et, celles [qui sont] commensurables avec elle, soit en longueur et en puissance, soit en puissance seulement, exprimables ;	**6** Lineaeque ei communicantes, dicuntur rationales[59].	**6** Et les lignes qui lui sont commensurables sont dites rationnelles.
3d d'autre part que celles [qui sont] incommensurables avec elle soient appelées irrationnelles.	**7** Eidem autem incommunicantes, dicuntur irrationales sive surdae[60].	**7** Et celles qui lui sont incommensurables, sont dites irrationnelles ou sourdes.
4a Et que d'une part soit appelé exprimable le carré [décrit] sur la droite proposée	**8** Omnis vero quadrata superficies de qua per hypothesin ratiocinamur, dicitur rationalis.	**8** Et toute surface carrée à partir de laquelle, par hypothèse, nous raisonnons, est dite rationnelle.

[58] Campanus 1516 a « *rationes* ». A omet « *dicuntur rationales* ».

[59] A omet « *irrationales* » et « *surdae* ».

Euclide grec	**Campanus**	
4b et exprimables les [aires] commensurables avec celui-ci,	**9** Superficies vero ei communicantes, dicuntur rationales.	**9** Et les surfaces qui lui sont commensurables sont dites rationnelles.
4c irrationnelles d'autre part celles qui sont incommensurables avec celui-ci	**10** Eidem autem incommensurabiles superficies, dicuntur irrationales sive surdae.	**10** Et les surfaces qui sont incommensurables à la même sont dites irrationnelles ou sourdes.
4d et irrationnelles les [droites] pouvant les produire : s'il s'agit de carrés, les côtés eux-mêmes, s'il s'agit de certaines autres [figures] rectilignes, celles qui décrivent des carrés [qui] leur [sont] égaux.	**11** Latera vero quae in illas quadratas possunt, dicuntur irrationalia.	**11** Et les côtés qui sont en puissance de ces carrés sont dits irrationnels.

La proposition XIII.6 dans la version de Campanus

De toute droite rationnelle divisée en extrême et moyenne raison[60], il est nécessaire que chaque portion soit une apotomé.

⟨I⟩. — Soit une ligne AB rationnelle, divisée au point C selon le rapport habituel. Je dis que chacune de ses portions est une apotomé. En effet, soit AC sa plus grande portion à laquelle est adjointe en ligne droite AD égale à la moitié du tout AB. DA sera aussi rationnelle d'après la proposition 6 du dixième livre et par définition. Par ailleurs, on constate d'après la première proposition de ce livre que le carré de la ligne DC est le quintuple du carré de la ligne DA. Donc la ligne DC est commensurable à la ligne DA en puissance par définition, mais pas en longueur d'après la dernière partie de la proposition 7 du dixième livre. Donc, d'après la proposition 68 du

[60] J'ai gardé la terminologie usuelle. L'expression latine est « *secundum proportionem habentem medium et duo extrema* ».

dixième livre, AC est une apotomé, puisque les deux lignes CD et DA sont l'une et l'autre rationnelles commensurables en puissance seulement.

⟨II⟩. — Et puisque, par ailleurs, si à la ligne rationnelle AB est adjointe une surface égale au carré de la ligne AC, qui est une apotomé, son second côté sera la ligne CB d'après la première partie de la proposition 16 du sixième livre, il est nécessaire d'après la proposition 92 du dixième livre que la ligne CB soit une apotomé première. En conséquence, la proposition est assurée.

⟨Ajout I⟩. — En outre, si de la ligne divisée comme il a été dit, la plus grande portion est rationnelle, la plus petite sera une apotomé.

Démonstration. — Si, comme précédemment, AB est divisée en C selon le rapport dit, si sa plus grande portion AC est rationnelle et qu'elle est divisée en deux parties égales en D, on aura d'après la troisième proposition de ce livre que le carré DB est le quintuple du carré DC. Mais puisque DC est rationnelle (en effet sa moitié est AC), il s'ensuit que les deux lignes DB et DC sont rationnelles commensurables en puissance seulement. Donc, comme auparavant, la ligne CB est une apotomé.

⟨Ajout II⟩. — Mais si une ligne rationnelle en puissance seulement est divisée en extrême et moyenne raison, alors il est nécessaire que chaque portion soit une apotomé.

En effet, soit AB rationnelle en puissance seulement divisée comme cela a été dit au point C. Que soit prise quelque ligne rationnelle en longueur, DE, qui soit elle aussi divisée en F selon le rapport susdit. Alors, d'après la proposition 2 du quatorzième livre qui est corroborée par une démonstration ferme sans le secours d'aucune proposition qui suit, il est clair que le rapport de AB à DE est comme celui de AC à DF et comme celui de CB à FE. Donc, puisque AB est commensurable à DE en puissance, il s'ensuit d'après la première partie de la proposition 10 du dixième livre que AC est commensurable à DF et CB à FE, en puissance. Et puisque chaque portion de la ligne DE est une apotomé, comme cela est clair d'après le résultat précédent, il s'ensuit d'après la proposition 98 du dixième livre que chaque portion de la ligne AB est aussi une apotomé, mais pas de la même espèce, comme cela a été démontré ici même.

Donc, il est assuré que de toute ligne rationnelle en longueur ou en puissance seulement, divisée en extrême et moyenne raison, chaque portion est une apotomé.

Annotation de Campanus. — Et il est à noter que la première partie de la précédente démonstration[61], qui prouve que la plus grande portion d'une ligne divisée en extrême et moyenne raison est une apotomé si la ligne entière est rationnelle, résulte de raisons suffisantes, que la ligne entière soit posée rationnelle ou bien en longueur ou bien en puissance seulement. Mais la seconde partie[62] qui démontre à propos de la plus petite qu'elle est aussi une apotomé si la ligne entière est rationnelle, ne résulte pas de raisons suffisantes si ce n'est lorsque la ligne entière est rationnelle en longueur. Et la troisième partie[63], qui prouve que la plus petite portion est une apotomé, résulte de raisons suffisantes, que la plus grande portion soit rationnelle en longueur ou en puissance seulement. Donc, pour conclure au sujet de la plus grande portion de la ligne divisée de la manière susdite qu'elle est une apotomé, il suffit de poser que la ligne entière divisée est rationnelle en puissance seulement, mais pour conclure aussi cela au sujet de la plus petite portion au moyen de la plus grande, il suffit de poser que la plus grande portion est semblablement rationnelle en puissance seulement, et pour conclure cela de la plus petite portion au moyen de la ligne entière, il est nécessaire de poser que la ligne entière est rationnelle en longueur, ou bien l'on doit utiliser XIV.2 comme cela a été dit.

BIBLIOGRAPHIE

Ben Miled (Marouane)

[1999] Les commentaires d'al-Māhānî et d'un anonyme du Livre X des *Éléments* d'Euclide, *Arabic Sciences and Philosophy*, 9 (1999), p. 89–156.

Busard (Hubert L.L)

[1983a] *The first Latin Translation of Euclid's* Elements *Commonly Ascribed to Adelard of Bath*, Toronto : Pontifical Institute of Medieval Studies, 1983.

[1983b] *The Latin Translation of the Arabic Version of Euclid's* Elements *Commonly Ascribed to Gerard of Cremona*, Leiden : New Rhine Publishers, 1983.

[1991] *Jordanus de Nemore*, De elementis arithmetica artis, *A Medieval Treatise on Number Theory*, Stuttgart : Franz Steiner Verlag, 1991.

[1998] Über den lateinischen Euklid im Mittelalter, *Arabic Sciences and Philosophy*, 8 (1998), p. 97–129.

[61] Ce que j'ai noté I.

[62] Ce que j'ai noté II.

[63] Campanus fait ici référence à ce que j'ai identifié comme son premier ajout.

BUSARD (Hubert L.L.), FOLKERTS (Menso)
[1992] *Robert of Chester's (?) Redaction of Euclid's* Elements, *the So-Called Adelard II Version*, Basel, Boston, Berlin : Birkhäuser Verlag, 1992.

CAMPANUS
[1516] *Euclidis megarensis geometricorum elementorum libri XV – Campani galli transalpini in eosdem commentariorum libri XV –, Theonis Alexandrini Bartolomeo Veneto Zamberto interprete in tredecim priores commentariorum libri XIII – Hypsiclis Alexandrini in duos posteriores eodem Bartolomeo Zamberto interprete, commentariorum libri II*, Paris : in officina Henrici Stephani, 1516.

CURTZE (Maximilian)
[1899] *Anaritii in decem libros priores Elementorum Euclidis Commentarii*, dans Heiberg (I.L.) et Menge (H.), *Euclidis Opera omnia, Supplementum*, Leipzig : B.G. Teubner, vol. IX, 1899.

HEATH (Thomas Little)
[1956] *Euclide, The Thirteen Books of Euclid's* Elements, trad. anglaise de T.L. Heath, réimpression de la 2e édition de 1926, New York : Dover Publications, 1956.

MATVIEVSKAYA (Galina)
[1987] The Theory of Quadratic Irrationals in Medieval Oriental Mathematics, dans King (D.) et Saliba (G.), *From Deferent to Equant*, Annals of the New York Academy of Science, vol. 500, New York : New York Academy of Science, 1987, p. 253–277.

ROMMEVAUX (Sabine)
[1999] La proportionnalité numérique dans le Livre VII des *Éléments* de Campanus, *Revue d'histoire des mathématiques*, 5 (1999), p. 83–126.

ROMMEVAUX (Sabine), DJEBBAR (Ahmed), VITRAC (Bernard)
[2001] Remarques sur l'histoire du texte des *Éléments* d'Euclide, *Archive for History of Exact Sciences*, 55 (2001), p. 221–295.

SCHRADER (Sister M.)
[1961] *The 'Epistola de proportione et proportionalitate' of Ametus filius Iosephi*, The University of Wisconsin, Ph. D., 1961.

TARTAGLIA (Niccolo)
[1565] *Euclide … diligentemente rassetato e alla integrita ridotta … con una ampla espositione…*, Venise, 1565.

THOMSON (W.)
[1930] *The Commentary of Pappus on Book X of Euclid's* Elements, éd. et trad. anglaise de W. Thomson, commentaires de C. Junge et W. Thomson, Cambridge (Massachusetts) : Harvard University Press, 1930.

VITRAC (Bernard)
[1990] Euclide, *Les Éléments*, vol. I, Introduction générale de Maurice Caveing ; Livres I à VI, trad. française et commentaires de Bernard Vitrac, Paris : PUF, Bibliothèque d'histoire des sciences, 1990.
[1998] Euclide, *Les Éléments*, vol. III, Livre X, trad. française et commentaires de Bernard Vitrac, Paris : PUF, Bibliothèque d'histoire des sciences, 1998.
[à paraître] Euclide, *Les Éléments*, vol. IV, Livres XI à XIII, trad. française et commentaires de Bernard Vitrac, Paris : PUF, Bibliothèque d'histoire des sciences, à paraître.