

L'ORIGINE DES MÉTHODES MULTIPAS POUR L'INTÉGRATION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES

Dominique TOURNÈS (*)

RÉSUMÉ. — L'histoire des méthodes multipas pour l'intégration numérique des équations différentielles ordinaires a été peu étudiée. Ces méthodes peuvent être rattachées à la formule de quadrature de Gregory-Newton, qui a été appliquée pour la première fois à un système différentiel par Clairaut, en 1759, à l'occasion du retour de la comète de Halley. Les méthodes multipas proprement dites sont ensuite inventées à plusieurs reprises et de façon indépendante par J.C. Adams (1855), G.H. Darwin (1897), W.F. Sheppard (1899) et C. Størmer (1907). Elles donnèrent lieu à de gigantesques calculs de tables numériques pour répondre à des problèmes complexes de mathématiques appliquées. Fruit du savoir-faire des astronomes britanniques, ces méthodes marquent l'apogée d'une époque de l'histoire de l'analyse numérique.

ABSTRACT. — **THE RISE AND DEVELOPMENT OF MULTISTEP METHODS FOR THE NUMERICAL INTEGRATION OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS.** — The story of the rise and development of multistep methods to integrate ordinary differential equations has been somewhat neglected so far. These methods may be viewed as originally stemming from the Gregory-Newton formula, involving quadratures, this being applied first by Clairaut to a system of differential equations, in his calculations of the motion of Halley's comet on its return in 1759. This pointed the way for the rise of multistep methods proper, these subsequently being arrived at independently at various times, by J.C. Adams (1855), G.H. Darwin (1897), W.F. Sheppard (1899), and C. Størmer (1907). These methods called for the computation of massive numerical tables, to cater for the requirements of highly involved problems in applied mathematics. These methods, originating as they did in the mathematical skills of British astronomers, stand out as the apogee of one era in the history of numerical analysis.

INTRODUCTION

Soit à calculer approximativement la valeur, en un point x , de la

(*) Texte reçu le 31 août 1997, révisé le 12 avril 1998.

Dominique TOURNÈS, IUFM de La Réunion, allée des Aigues Marines, Bellepierre, 97487 Saint-Denis CEDEX (France). Courrier électronique : tournes@univ-reunion.fr.

solution y du « problème de Cauchy » $dy/dx = f(x, y)$ et $y(x_0) = y_0$. Dans la *méthode des différences finies à pas séparés* ou à *un pas*, on considère une subdivision $(x_0, x_1, \dots, x_n = x)$ et on remplace, sur chaque intervalle, l'équation différentielle par une équation aux différences finies ne faisant intervenir que les différences premières. Il en résulte que la détermination des $y_i = y(x_i)$ se fait progressivement et de façon indépendante jusqu'à $y_n = y(x)$: à chaque pas, le calcul de y_{i+1} n'utilise que la valeur y_i précédemment calculée. Déjà présente en substance chez les fondateurs du calcul infinitésimal, la méthode à pas séparés a été principalement développée par Euler puis, vers la fin du XIX^e siècle, par les mathématiciens allemands C. Runge, K. Heun et W. Kutta.

Au contraire, dans la *méthode des différences finies à pas liés* ou *multipas*, le calcul de y_{i+1} fait intervenir plusieurs des valeurs précédemment calculées, avec leurs différences finies d'ordre supérieur. Les variantes de la méthode multipas sont souvent évoquées dans la littérature spécialisée actuelle sous le terme générique de « méthodes d'Adams », du nom de celui qui a, semble-t-il, mis en œuvre pour la première fois l'idée des pas liés. Bien que recevant généralement les faveurs des calculateurs, ces méthodes ont mis beaucoup de temps à être connues et à s'imposer. On peut situer leur origine dans les travaux de l'école anglaise, en particulier de Newton, sur le calcul des différences finies, l'interpolation polynomiale et l'application au calcul approché des intégrales. Les techniques de quadrature ainsi dégagées ont été régulièrement pratiquées aux XVIII^e et XIX^e siècles, notamment par les astronomes : ce sont ces techniques de quadrature qui permettaient de concrétiser, sous forme numérique, l'idée des approximations successives. Cela dit, les méthodes multipas naissent très précisément d'une transformation de la version numérique des approximations successives en une nouvelle méthode de calcul des courbes intégrales par arcs successifs, susceptible de rivaliser avec la méthode des différences finies à pas séparés. Plusieurs savants réalisent cette transformation, à peu près indépendamment les uns des autres, au cours de la période 1850–1910. On peut citer, par ordre d'entrée en scène, J.C. Adams vers 1855, G.H. Darwin [1897], W.F. Sheppard [1899] et C. Størmer [1907].

Les techniques multipas appartiennent en totalité aux mathématiques appliquées. Créées par des physiciens et des astronomes, elles n'ont pas été publiées pour elles-mêmes dans des revues mathématiques, mais sont

apparues en tant qu'outils dans des textes dont l'objet principal était toujours l'étude d'un phénomène physique. Ceci explique sans doute que chacune d'elles, conçue pour répondre à un besoin précis et spécifique, soit ensuite passée inaperçue auprès de la communauté mathématique. Un fait significatif le confirme : dans l'article de l'*Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften* consacré à l'intégration numérique et graphique des équations différentielles, modèle d'érudition s'appuyant sur environ cent trente références bibliographiques, Runge et Willers [1915] ignorent totalement les méthodes multipas. Parmi les quatre savants que nous avons mentionnés ci-dessus, ils ne citent que Sheppard, en rattachant à tort son article de 1899 aux méthodes à pas séparés de Runge, Heun et Kutta!

Cette méconnaissance a perduré jusqu'à nos jours. Quelques travaux récents ([Goldstine 1977], [Kiro et Chal'tseva 1981], [Gear et Skeel 1990], [Hairer, Nørsett et Wanner 1993], [Chabert *et al.* 1994]) permettent d'esquisser une histoire des méthodes multipas mais ils sont loin d'avoir épuisé le sujet. Face à cette situation, il nous a semblé utile de reprendre la question de façon systématique.

1. LES QUADRATURES NUMÉRIQUES UTILISANT LES DIFFÉRENCES FINIES¹

Rappelons brièvement certaines techniques d'interpolation utilisées à partir du XVII^e siècle pour calculer numériquement l'intégrale

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(u) du,$$

c'est-à-dire, en fait, pour intégrer de façon approchée l'équation différentielle la plus simple $dy/dx = f(x)$, avec la condition initiale $y(x_0) = y_0$.

1.1. Les formules de Gregory-Newton

Supposons qu'on connaisse les valeurs de f en $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$. Dans la pratique, ces valeurs peuvent être calculées au moyen d'une formule

¹ Cette première partie n'a pas pour but de présenter l'histoire de ces quadratures. Pour cela, on pourra se reporter à Goldstine [1977] ou à Chabert [1994]. Notre intention est simplement de rappeler la terminologie, les résultats mathématiques essentiels et quelques repères chronologiques de façon à faciliter la compréhension de l'exposé historique qui suit.

analytique, lues dans une table ou issues de mesures expérimentales. À partir de ces données, le problème est de construire une table analogue pour la primitive y , autrement dit de calculer des valeurs approchées de y aux points x_i .

Le cas le plus simple et le plus fréquent est celui de valeurs équidistantes de la variable. Si h désigne le pas utilisé, on a alors $x_i = x_0 + ih$ pour $i = 0, 1, 2, \dots$. En posant $f_i = f(x_i)$, on peut former le tableau des différences finies *progressives*

$$\begin{array}{cccccc}
 f_0 & & f_1 & & f_2 & & f_3 & & f_4 & & \dots \\
 & \Delta f_0 & & \Delta f_1 & & \Delta f_2 & & \Delta f_3 & & \dots & \\
 & & \Delta^2 f_0 & & \Delta^2 f_1 & & \Delta^2 f_2 & & \dots & & \\
 & & & \Delta^3 f_0 & & \Delta^3 f_1 & & \dots & & & \\
 & & & & \Delta^4 f_0 & & \dots & & & &
 \end{array}$$

Ces différences sont définies, de proche en proche, par $\Delta f_i = f_{i+1} - f_i$ et $\Delta^m f_i = \Delta^{m-1} f_{i+1} - \Delta^{m-1} f_i$.

Une des premières formules d'interpolation, utilisée dès le XVII^e siècle, est la *formule de Gregory-Newton progressive*. En posant $t = (x - x_0)/h$, elle s'écrit

$$f(x) = f_0 + t\Delta f_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\Delta^3 f_0 + \dots$$

Remarquons que, par troncature au rang n , on obtient l'approximation

$$\begin{aligned}
 f(x) \approx P_n(x) = f_0 + \frac{x-x_0}{1!h}\Delta f_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2!h^2}\Delta^2 f_0 \\
 + \dots + \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})}{n!h^n}\Delta^n f_0,
 \end{aligned}$$

où P_n est le polynôme de degré au plus n qui coïncide avec f en les $n+1$ points x_0, x_1, \dots, x_n . Ce n'est rien d'autre que le polynôme d'interpolation redécouvert plus tard, sous une autre forme, par Lagrange.

La valeur de y en x_1 , soit y_1 , s'obtient alors par intégration terme à terme de la série

$$\begin{aligned}
 y_1 &= y_0 + \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx = y_0 + h \int_0^1 f(x_0 + ht) dt \\
 &= y_0 + hf_0 + h \int_0^1 t dt \Delta f_0 + h \int_0^1 \frac{t(t-1)}{2!} dt \Delta^2 f_0 \\
 &\quad + h \int_0^1 \frac{t(t-1)(t-2)}{3!} dt \Delta^3 f_0 + \dots \\
 &= y_0 + h \left\{ f_0 + \frac{1}{2} \Delta f_0 - \frac{1}{12} \Delta^2 f_0 + \frac{1}{24} \Delta^3 f_0 - \frac{19}{720} \Delta^4 f_0 + \frac{3}{160} \Delta^5 f_0 - \dots \right\}.
 \end{aligned}$$

On peut recommencer à partir de y_1 pour calculer y_2 , et ainsi de suite. Les calculs peuvent être organisés dans une seule table.

Peut-on adapter cette méthode de quadrature numérique à une équation différentielle générale $dy/dx = f(x, y)$, avec la condition initiale $y(x_0) = y_0$? Pour un calcul analogue de $y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x_1} f(u, y(u)) du$ par différences finies d'ordre n , il faudrait connaître $f(x_0, y_0), f(x_1, y_1), \dots, f(x_n, y_n)$, autrement dit les valeurs y_1, \dots, y_n que l'on souhaite précisément calculer. On voit aussitôt l'obstacle majeur qui a sans doute dissuadé nombre de mathématiciens de poursuivre dans cette voie, si du moins ils en eurent un jour l'intention.

Une version de la formule de Gregory-Newton progressive fut d'abord énoncée sans justification par James Gregory, vers 1670, comme un procédé destiné à un double usage : interpoler entre les valeurs d'une table numérique et quarrer n'importe quelle figure. De son côté, Newton a abordé la théorie de l'interpolation et des différences finies à plusieurs reprises, à partir de 1675, dans le cadre plus général de valeurs non équidistantes de la variable. Outre la formule de Gregory, Newton a mis en évidence de nombreuses autres techniques d'interpolation d'une courbe par des « lignes paraboliques » (courbes représentatives de fonctions polynomiales), à tel point qu'on peut le considérer comme le véritable fondateur de la théorie de l'interpolation polynomiale. Supposons désormais qu'on connaisse les valeurs de la fonction f en des points $\dots, x_{-n}, \dots, x_{-1}, x_0$, précédant x_0 , et qu'on veuille encore calculer la valeur de y en x_1 (il s'agit, cette fois, d'un processus d'extrapolation). On peut définir, par récurrence, des différences finies *régressives*, en posant $\nabla f_i = f_i - f_{i-1}$ et $\nabla^m f_i = \nabla^{m-1} f_i - \nabla^{m-1} f_{i-1}$, de manière à obtenir un tableau illimité vers la gauche

$$\begin{array}{cccccc}
 \dots & f_{-4} & & f_{-3} & & f_{-2} & & f_{-1} & & f_0 \\
 & \dots & \nabla f_{-3} & & \nabla f_{-2} & & \nabla f_{-1} & & \nabla f_0 & \\
 & & \dots & \nabla^2 f_{-2} & & \nabla^2 f_{-1} & & \nabla^2 f_0 & & \\
 & & & \dots & \nabla^3 f_{-1} & & \nabla^3 f_0 & & & \\
 & & & & \dots & & \nabla^4 f_0 & & &
 \end{array}$$

En posant toujours $t = (x - x_0)/h$, la *formule de Gregory-Newton régressive* s'écrit

$$f(x) = f_0 + t\nabla f_0 + \frac{t(t+1)}{2!}\nabla^2 f_0 + \frac{t(t+1)(t+2)}{3!}\nabla^3 f_0 + \dots,$$

d'où, par intégration terme à terme,

$$y_1 = y_0 + h \left\{ f_0 + \frac{1}{2} \nabla f_0 + \frac{5}{12} \nabla^2 f_0 + \frac{3}{8} \nabla^3 f_0 + \frac{251}{720} \nabla^4 f_0 + \frac{95}{288} \nabla^5 f_0 + \dots \right\}.$$

À présent, l'adaptation à une équation différentielle semble possible. Pour pouvoir calculer y_1 , il suffit de connaître $f(x_{-n}, y_{-n}), \dots, f(x_0, y_0)$. Ainsi, la méthode est praticable à l'ordre n à condition de disposer déjà des valeurs de la solution pour n pas. Évidemment, la détermination de ces valeurs de démarrage doit se faire par une autre méthode. Voici l'idée, en apparence toute simple, qui sera mise en œuvre par Adams en 1855 et par d'autres ensuite, de façon plus ou moins indépendante.

1.2. Autres formules d'interpolation

En plus des différences progressives et régressives, on fait appel, de nos jours, à la notation $\delta f_i = f(x_i + \frac{1}{2}h) - f(x_i - \frac{1}{2}h)$ des différences centrales. Concrètement, il suffit de savoir que les trois sortes de différences sont liées par les égalités $\Delta f_i = \nabla f_{i+1} = \delta f_{i+\frac{1}{2}}$. Aussi, dans un souci de simplification, nous n'utiliserons plus dans la suite que les différences finies progressives.

Pour construire les formules de Gregory-Newton, on n'exploite qu'un seul côté de la valeur initiale. On a parfois intérêt à utiliser simultanément tous les points $\dots, x_{-n}, \dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$, de façon à ne faire intervenir que les différences situées sur la colonne correspondant à la valeur initiale et sur les colonnes adjacentes (voir fig. 1). On obtient alors les formules d'interpolation progressive et régressive de *Newton-Gauss* et, en faisant leur moyenne arithmétique, la formule d'interpolation de *Newton-Stirling*.

Par intégration des séries précédentes, on obtient trois formules de quadrature qui ne sont pas pleinement satisfaisantes car, alors que l'intégration devait être faite sur l'intervalle $[x_0, x_1]$, on a centré la construction des formules d'interpolation sur le point x_0 (voir fig. 1). Deux idées simples permettent de rétablir la symétrie et, par voie de conséquence, de faire disparaître au cours de l'intégration toutes les différences d'ordre impair.

- Première idée : utiliser une série d'interpolation de *Newton-Stirling* centrée sur $x_{\frac{1}{2}} = x_0 + \frac{1}{2}h$. En posant désormais $t = (x - x_{\frac{1}{2}})/h$, on

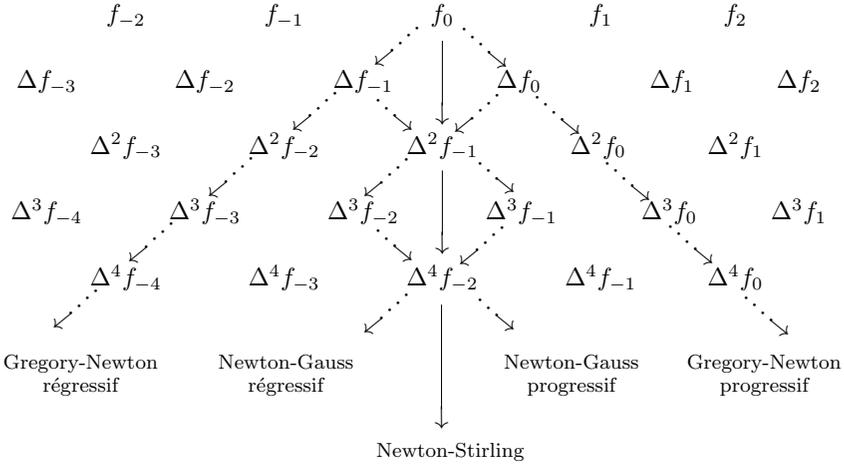


Figure 1. Schéma des principaux procédés d'interpolation

obtient

$$f(x) = f_{\frac{1}{2}} + t \frac{\Delta f_{-\frac{1}{2}} + \Delta f_{\frac{1}{2}}}{2} + \frac{t^2}{2!} \Delta^2 f_{-\frac{1}{2}} + \frac{t(t^2 - 1)}{3!} \frac{\Delta^3 f_{-\frac{3}{2}} + \Delta^3 f_{-\frac{1}{2}}}{2} + \frac{t^2(t^2 - 1)}{4!} \Delta^4 f_{-\frac{3}{2}} + \dots$$

Une intégration entre $-\frac{1}{2}$ et $+\frac{1}{2}$ conduit alors à la formule de quadrature

$$(1) \quad y_1 = y_0 + h \left\{ f_{\frac{1}{2}} + \frac{1}{24} \Delta^2 f_{-\frac{1}{2}} - \frac{17}{5760} \Delta^4 f_{-\frac{3}{2}} + \frac{367}{967680} \Delta^6 f_{-\frac{5}{2}} - \frac{27859}{464486400} \Delta^8 f_{-\frac{7}{2}} + \dots \right\}.$$

L'inconvénient de cette première idée est évidemment que les valeurs de la primitive ne sont pas calculées aux mêmes points que les valeurs données de la fonction (pour calculer la primitive en $\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots$, il faut connaître la fonction en $\dots, x_{-\frac{1}{2}}, x_{\frac{1}{2}}, x_{\frac{3}{2}}, \dots$).

- Deuxième idée : faire la moyenne arithmétique d'une série de Newton-Gauss progressive centrée sur x_0 et d'une série de Newton-Gauss régressive centrée sur x_1 . Le résultat de la manipulation n'est autre que la formule d'interpolation de *Newton-Bessel* qui s'écrit, en revenant à la notation

$$t = (x - x_0)/h,$$

$$f(x) = \frac{f_0 + f_1}{2} + (t - \frac{1}{2})\Delta f_0 + \frac{t(t-1)}{2!} \frac{\Delta^2 f_{-1} + \Delta^2 f_0}{2} \\ + \frac{t(t-1)(t-\frac{1}{2})}{3!} \Delta^3 f_{-1} + \frac{t(t^2-1)(t-2)}{4!} \frac{\Delta^4 f_{-2} + \Delta^4 f_{-1}}{2} + \dots$$

L'intégration conduit ensuite à la formule de quadrature

$$(2) \quad y_1 = y_0 + h \left\{ \frac{f_0 + f_1}{2} - \frac{1}{12} \frac{\Delta^2 f_{-1} + \Delta^2 f_0}{2} + \frac{11}{720} \frac{\Delta^4 f_{-2} + \Delta^4 f_{-1}}{2} \right. \\ \left. - \frac{191}{60480} \frac{\Delta^6 f_{-3} + \Delta^6 f_{-2}}{2} + \frac{2497}{3628800} \frac{\Delta^8 f_{-4} + \Delta^8 f_{-3}}{2} - \dots \right\}.$$

Au XVIII^e siècle, les formules d'interpolation et de quadrature de Gregory-Newton constituent l'outil de base des astronomes, plus généralement des calculateurs de tables numériques. Au XIX^e siècle, ces formules ont tendance à être abandonnées au profit des séries plus perfectionnées de Stirling et de Bessel, et des formules de quadrature associées (1) et (2). Il est difficile de dire qui a véritablement inventé ces formules (1) et (2). Les astronomes les attribuent presque toujours à Encke [1837], mais on sait que ce dernier les avait puisées dans l'enseignement de Gauss (voir § 2.2). En France, Legendre [1826] revendique également la formule (1) comme une création personnelle. La vérité réside sans doute dans une constatation simple : toutes les formules d'interpolation étant déjà présentes chez Newton, n'importe quel mathématicien doué d'un minimum d'habileté pouvait en déduire tout seul des formules de quadrature performantes.

1.3. Quadratures doubles

De nombreux problèmes conduisent à une équation différentielle de la forme $d^2y/dx^2 = f(x)$, avec des conditions initiales $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = y'_0$, autrement dit à la *quadrature double*

$$(1) \quad y(x) = y_0 + (x - x_0)y'_0 + \int_{x_0}^x du \int_{x_0}^u f(v) dv.$$

Plutôt que d'appliquer deux fois les formules de quadrature simple, il peut être intéressant de disposer de formules directes de quadrature double. Toujours à partir de points équidistants $x_i = x_0 + ih$, écrivons

la relation (1) pour $x = x_0 + h$, puis pour $x = x_0 - h$, et faisons la demi-somme. Nous obtenons

$$(2) \quad y_1 = 2y_0 - y_{-1} + \int_{x_0}^{x_0+h} du \int_{x_0}^u f(v) dv + \int_{x_0}^{x_0-h} du \int_{x_0}^u f(v) dv.$$

En remplaçant f par sa série d'interpolation de Newton-Stirling et en effectuant la double intégration, la relation (2) devient

$$(3) \quad y_1 = 2y_0 - y_{-1} + h^2 \left\{ f_0 + \frac{1}{12} \Delta^2 f_{-1} - \frac{1}{240} \Delta^4 f_{-2} + \frac{31}{60480} \Delta^6 f_{-3} - \frac{289}{3628800} \Delta^8 f_{-4} + \dots \right\}.$$

Par une double intégration des séries de Gregory-Newton ou de Newton-Bessel, on pourrait naturellement construire d'autres formules de quadrature double du même type.

La formule (3), obtenue en 1826 par Legendre, figure dans son *Traité des fonctions elliptiques*, à la suite du résultat analogue pour les quadratures simples [Legendre 1826, p. 58]. Il l'utilise, avec un pas assez petit permettant de s'arrêter aux différences quatrièmes, dans le cadre de la construction de tables de valeurs des intégrales elliptiques de première et de seconde espèce. Legendre s'est interrogé sur l'extension de la formule (3) aux équations différentielles générales :

«Il serait à désirer qu'on pût calculer par des procédés semblables et avec des suites aussi convergentes, les valeurs successives d'une fonction U donnée par une équation différentielle du premier ordre $dU/d\varphi = \text{fonct.}(U, \varphi)$, ou même par une équation différentielle d'un ordre plus élevé. Ce problème est de la même nature que ceux qui concernent les intégrales simples ou multiples ; mais sa résolution offre beaucoup plus de difficultés et jusqu'à présent nous ne voyons pas d'autre moyen d'y parvenir que la formule de Taylor [...] qui sert à calculer la différence finie d'une fonction par le moyen des coefficients différentiels successifs de cette fonction» [Ibid., p. 59].

Ainsi, Legendre est contraint de s'en tenir à l'ancienne méthode d'Euler avec développement de Taylor, pour les mêmes raisons que nous avons évoquées à propos de la formule progressive de Gregory-Newton : si l'on cherche à appliquer la formule (3) à l'équation différentielle $d^2y/dx^2 = f(x, y)$, dans le but de calculer y_1 , les différences finies $\Delta^2 f_{-1}, \Delta^4 f_{-2}, \dots$

font intervenir les valeurs $f(x_1, y_1), f(x_2, y_2), \dots$ que l'on ne connaît pas encore. Notons que si, au lieu de la formule de Stirling et des différences situées au centre de notre schéma (fig. 1), on utilisait la formule de Gregory-Newton régressive et les différences situées du côté gauche, on pourrait retrouver la formule de quadrature double

$$(4) \quad y_1 = 2y_0 - y_{-1} + h^2 \left\{ f_0 + \frac{1}{12} \Delta^2 f_{-2} + \frac{1}{12} \Delta^3 f_{-3} + \frac{19}{240} \Delta^4 f_{-4} + \frac{3}{40} \Delta^5 f_{-5} + \dots \right\}$$

qui, elle, s'étend sans problème à l'équation différentielle puisqu'elle ne fait intervenir que les anciennes valeurs $\dots, f(x_{-2}, y_{-2}), f(x_{-1}, y_{-1}), f(x_0, y_0)$. Comme nous le verrons plus loin, la formule (4) sera construite et utilisée par Størmer en 1907. Cette remarque est instructive quant au processus de découverte en mathématiques : Legendre, mathématicien de talent et calculateur expérimenté, pleinement conscient de la nature et des difficultés du problème, ayant à sa disposition tous les outils techniques nécessaires, passe pourtant à côté de sa solution en 1826.

2. LES QUADRATURES MÉCANIQUES DES ASTRONOMES

Pour comprendre l'origine des méthodes multipas, il faut d'abord se faire une idée de la façon dont les formules précédentes de quadrature, malgré leur inadaptation foncière aux équations différentielles, ont cependant été utilisées en astronomie pour l'intégration approchée du problème des n corps. Pour étudier le mouvement d'un astre, l'idée est de se limiter, en première approximation, à l'attraction la plus importante qu'il subit de la part des corps environnants (celle du Soleil pour une planète, celle de la planète mère pour un satellite...). L'astre décrit alors, à chaque instant, une orbite képlérienne idéale, appelée *orbite osculatrice*. Dans un deuxième temps, on fait intervenir les attractions secondaires des autres corps en présence, conçues comme des forces perturbant l'orbite képlérienne instantanée. De façon générale, on regroupe sous le terme de *méthode des perturbations* toutes les techniques qui consistent à travailler par approximations à partir du mouvement képlérien non perturbé.

Jusqu'au début du XX^e siècle, les préférences des astronomes allaient à la *méthode des perturbations générales*, c'est-à-dire à la recherche d'une expression analytique des solutions sous forme de développements en séries

de sinus et de cosinus (avec des arguments fonctions linéaires du temps). Une description analytique présente indéniablement un double avantage : les valeurs numériques des solutions s'obtiennent par simple substitution dans les formules et, de plus, le comportement de ces solutions peut être étudié de manière théorique. Il y a cependant des cas où cette démarche se révèle inadaptée en donnant naissance à des séries impropres au calcul. On a alors recours à la *méthode des perturbations spéciales*, c'est-à-dire à des intégrations numériques directes des équations différentielles, appelées *quadratures mécaniques*. Cette dernière méthode est surtout employée pour des corps subissant de fortes perturbations (les comètes, certains satellites), mais aussi pour des astéroïdes dont la théorie analytique ne mérite pas d'être développée.

2.1. Schéma de l'application des formules de quadrature aux équations différentielles

Plusieurs façons d'aborder le problème des perturbations spéciales ont été imaginées mais, quel que soit le point de vue adopté, on doit travailler avec un système différentiel du sixième ordre. Dans quelques cas assez rares, les quadratures mécaniques se faisaient par la méthode d'Euler. Les inconvénients étaient, à l'ordre 1, une trop faible précision et, pour les ordres supérieurs, la complication prohibitive du développement de Taylor. À la place de la méthode d'Euler, il ne faut donc pas s'étonner d'assister, tout au long des XVIII^e et XIX^e siècles, à un emploi relativement fréquent des formules de quadrature utilisant les différences finies. Présentons l'idée générale qui sous-tend cette technique, dans le cas simple d'une seule équation du premier ordre $y' = f(x, y)$.

À partir de la valeur initiale (x_0, y_0) , on veut dresser une table des valeurs y_0, y_1, \dots, y_n que prend la solution y en des points équidistants x_0, x_1, \dots, x_n . Ces valeurs sont données par les formules exactes

$$(1) \quad \begin{cases} y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x_1} f(t, y(t)) dt, \\ y_2 = y_0 + \int_{x_0}^{x_2} f(t, y(t)) dt, \\ \dots \\ y_n = y_0 + \int_{x_0}^{x_n} f(t, y(t)) dt. \end{cases}$$

Pour le calcul, on remplace chacune des intégrales des seconds membres par une formule approchée de quadrature numérique. Il faut s'arranger

pour que ces formules ne fassent pas intervenir d'autres points que les points de subdivision x_0, x_1, \dots, x_n ; à cet effet, on peut être amené à utiliser des formules différentes selon qu'il s'agit de points situés au début, au milieu ou à la fin de l'intervalle (une autre possibilité est de travailler sur un intervalle légèrement plus grand que celui auquel on s'intéresse). Quoi qu'il en soit, on aboutit toujours à un système d'équations numériques du type

$$(2) \quad \begin{cases} y_1 = Q_1(y_1, y_2, \dots, y_n), \\ y_2 = Q_2(y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \dots \\ y_n = Q_n(y_1, y_2, \dots, y_n). \end{cases}$$

Concrètement, le système (2), qui détermine implicitement les y_i , est résolu par approximations successives. Assez souvent, les valeurs initiales sont obtenues dans le système (1), en donnant à la fonction inconnue y la valeur constante y_0 ; en mécanique céleste, on peut aussi prendre pour première série de valeurs celles de la solution du mouvement non perturbé, solution que l'on sait calculer exactement.

D'une certaine façon, la résolution itérative du système numérique (2) est le pendant, sous forme tabulaire, de la résolution itérative de l'équation fonctionnelle $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$. Les schémas de différences des astronomes préfiguraient donc, dans la réalité du calcul numérique, les idées abstraites de Picard. C'est toutefois la lourdeur de ces calculs itératifs qui rebutait Legendre et qui lui faisait souhaiter que l'on pût, un jour, découvrir des formules explicites. En attendant, seuls des astronomes aguerris semblaient capables de se lancer sans effroi dans de tels « calculs astronomiques ».

2.2. Les calculs de Clairaut et de Gauss

Clairaut, dans le cadre de ses recherches sur la comète de Halley, est sans doute le premier à avoir exploité une formule de quadrature numérique pour la résolution approchée d'un système différentiel. Vers le milieu de 1757, Clairaut entreprit de prévoir par le calcul la date précise du retour de la comète, c'est-à-dire l'instant de son passage au périhélie (point de son orbite le plus proche du Soleil). L'enjeu était d'importance : une prédiction correcte semblait de nature à confirmer avec éclat la validité

de la théorie newtonienne de l'attraction². En novembre 1758, Clairaut [1759] put annoncer devant l'Académie des sciences que le passage au périhélie aurait lieu vers le milieu d'avril 1759, en prenant toutefois la précaution de mentionner que cette date, résultant de nombreuses approximations, devait être considérée comme entachée d'une incertitude d'un mois. Le passage de la comète fut effectivement observé le 13 mars, à la limite inférieure des prévisions de Clairaut. Ce dernier, qui avait mené ses recherches dans la précipitation afin, bien entendu, de ne pas être devancé par la comète, reprit ses réflexions à tête reposée, améliora ses approximations et publia, en 1760, une théorie plus complète [Clairaut 1760], accompagnée de calculs plus précis, grâce à laquelle il ramena le passage au périhélie à la date du 4 avril.

Concrètement, Clairaut prend comme première approximation l'orbite elliptique de 1682, dont les tables avaient été dressées par Halley à partir des observations. En des points régulièrement espacés de cette orbite approchée, choisis avec un pas assez petit, il calcule les forces perturbatrices des planètes (essentiellement Jupiter et Saturne) puis, par une intégration numérique des équations du mouvement, il obtient une orbite corrigée proche de l'orbite réelle et le mouvement de la comète sur cette orbite. Les calculs sont faits pour deux révolutions (1607–1682 et 1682–1759), afin d'évaluer avec précision leur différence de durée. Il aurait été évidemment possible de recommencer le processus pour déterminer une seconde correction de l'orbite mais, face à la quantité énorme de calculs à effectuer, Clairaut en est resté à une seule itération. La formule de quadrature utilisée nous est décrite ainsi :

«Pour quarrer [une] courbe [...], je la prends d'abord pour un assemblage de lignes droites. Ensuite je retranche de chaque aire rectiligne le douzième de la somme des secondes différences : j'ajoute le vingt-quatrième de la somme des troisièmes : je retranche les 19/720 de la somme des quatrièmes ; Et ainsi de suite, s'il est nécessaire» [Clairaut 1760, p. 12].

² Dans la première moitié du XVIII^e siècle, l'application de la théorie de la gravitation de Newton avait fait surgir diverses difficultés. En particulier, en travaillant au mouvement de l'apogée de la Lune, Clairaut, d'Alembert et Euler avaient tous trois trouvé des valeurs qui ne s'accordaient pas avec les observations. On en était arrivé à un point tel que certains mécaniciens célestes envisageaient de modifier la loi de l'attraction universelle.

Autrement dit, il s'agit de la formule de quadrature issue de la série progressive de Gregory-Newton (voir § 1.1). Sur chaque intervalle de la subdivision, elle s'écrit

$$y_{i+1} - y_i = h \left\{ \frac{1}{2} (f_i + f_{i+1}) - \frac{1}{12} \Delta^2 f_i + \frac{1}{24} \Delta^3 f_i - \frac{19}{720} \Delta^4 f_i + \dots \right\}.$$

Dans le « Mémoire sur la comète de 1682 », Clairaut donne quelques indications sur la façon dont les calculs ont été organisés pratiquement :

« Il fallait donc se résoudre à calculer premièrement un nombre considérable de ces situations respectives des deux corps, et à quarrer ensuite les courbes où entrent les lignes qui les joignent ; opérations qui sont l'une et l'autre très pénibles. [...] »

On ne sera pas étonné que dans le nombre immense d'opérations dont je viens de parler, j'aie cherché à me soulager au moins d'une partie de celles que de simples Arithméticiens pouvaient faire. J'ai trouvé plusieurs moyens de les employer facilement et sans danger, soit en construisant pour eux des tables particulières qui réduisaient les opérations que je leur confiais à de simples additions et à la recherche de nombres dont on a les logarithmes, soit en vérifiant l'ensemble de leurs calculs par des méthodes imaginées pour cet effet. Mais malgré tous les secours de cette espèce que j'ai pu emprunter, il m'a fallu faire moi-même une quantité innombrable de calculs arithmétiques et accepter les offres de M. de la Lande qui a voulu se charger de beaucoup d'opérations pénibles» [Clairaut 1759, p. 42–43].

Voici un bel exemple de division du travail. Lalande, astronome professionnel, était chargé de dresser la table des forces perturbatrices³ [Lalande 1759]. Clairaut, de son côté, préparait les tables particulières dont parle le texte ci-dessus, de sorte que le calcul puisse être effectué par de simples calculateurs. Dans un dernier temps, Clairaut se chargeait de vérifier l'ensemble des résultats. Tout le monde pouvait travailler simultanément : il suffisait de s'organiser pour avancer de concert, pas à pas, chacun communiquant au fur et à mesure ses résultats au maillon suivant de la chaîne.

Contrairement à ce qu'on aurait pu prévoir, le résultat de cet énorme calcul ne souleva pas un enthousiasme unanime. Les astronomes trouvaient que l'erreur d'un mois était considérable et que, finalement, Clairaut n'apportait pas grand chose par rapport à la prévision de Halley. On

³ Lalande fut aidé pour les calculs par Madame Lepaute.

trouvait aussi que la solution de Clairaut n'avait rien d'original, qu'il ne s'agissait que de l'adaptation d'une solution antérieure du problème des trois corps. Toutes ces polémiques ont certainement contribué à dévaloriser le travail de Clairaut et à rejeter dans l'ombre sa méthode d'intégration numérique. Pourtant, il est clair que le calcul de Clairaut constitue un maillon essentiel d'une chaîne reliant les méthodes de Gregory-Newton pour le calcul approché des intégrales aux méthodes d'Adams pour l'intégration approchée des équations différentielles.

Le maillon suivant se trouve dans l'œuvre de Gauss. Au tout début du XIX^e siècle, on découvrit l'existence d'astéroïdes gravitant entre les orbites de Mars et de Jupiter. Gauss s'intéressa aussitôt à ces nouveaux objets, dont les plus importants sont Cérès, Pallas, Junon et Vesta. Les méthodes employées pour les anciennes planètes s'avérant impraticables, il imagina des techniques de quadrature mécanique analogues à celles de Clairaut. Traditionnellement, les méthodes de Gauss sont attribuées à son élève J.F. Encke, tout simplement parce que Gauss, de son vivant, n'a rien publié sur le sujet. Divers documents permettent cependant de reconstituer avec assez de précision ce qui s'est passé.

Dans un article de 1830 sur l'interpolation, Encke indique qu'il s'est inspiré des cours de Gauss donnés en 1812. L'application des techniques d'interpolation au calcul des perturbations spéciales a fait l'objet d'un mémoire ultérieur d'Encke [1837]. Dans ce mémoire, considéré comme fondamental par les astronomes, Encke précise encore davantage ce qu'il doit à Gauss. Par ailleurs, une lettre de Gauss à Encke du 13 octobre 1834 [Gauss 1834] confirme que le maître avait bien donné le feu vert à son disciple pour la publication de ses nouvelles techniques de calcul. En dehors des mémoires d'Encke, on dispose de deux documents de première main sur les formules de quadrature employées par Gauss. Tout d'abord, dans une lettre de Gauss à Bessel du 27 janvier 1816 [Gauss 1816], il y a une brève description de la formule de quadrature utilisant les différences centrales qui est associée à la série de Newton-Stirling. Beaucoup plus intéressant est un texte posthume, retrouvé dans les papiers de Gauss, contenant un compte rendu détaillé des recherches sur le mouvement de Pallas [Gauss 1812]. On y trouve les formules de quadrature simple et double issues de la série de Newton-Stirling et de la série de Newton-Bessel. Ce sont ces formules que Gauss a employé pour intégrer numériquement,

par approximations successives, le système différentiel déterminant le mouvement de Pallas, en faisant effectuer une bonne partie des calculs par son élève Encke!

Les méthodes d'intégration numérique de Gauss ont été transmises par Encke, par l'intermédiaire de l'article de 1837 déjà cité et d'un second article important paru un peu plus tard, en 1852 [Encke 1852]. Globalement, les articles de Encke ont figé la situation en Allemagne et en France. Vers la fin du XIX^e siècle, on retrouve leur contenu, sans grand changement, dans le traité d'Oppolzer [1880], une référence classique souvent citée, et dans celui de Tisserand [1896, chap. 11]. On peut mentionner aussi la thèse de Gruyey [1868], dont l'objectif apparent était de traduire les travaux d'Encke et d'en faire une synthèse destinée aux astronomes français. De ces références concordantes, on peut conclure que, pour les astronomes continentaux, les méthodes d'intégration numérique de Gauss semblaient sinon définitives, du moins difficilement perfectibles. Apparemment, on s'en contentait sans engager de recherches pour les améliorer ou les remplacer par d'autres.

2.3. Des embryons de méthodes multipas

Dans les pays anglo-saxons, la situation est différente. Assez tôt, dans un mémoire de 1849, l'astronome américain G.P. Bond⁴ se montre insatisfait des méthodes courantes (il faut comprendre celles de Gauss et Encke) et souhaite introduire plus de simplicité dans les calculs. Bond emploie des notations personnelles. Étant donnée une fonction A de la variable indépendante t , les dérivées première et seconde de A sont notées respectivement V et F . Pour un pas de subdivision τ , on convient d'écrire $t = n$ au lieu de $t = n\tau$. Les tables des différences de A , V et F sont alors

⁴ George Philipp Bond (1825–1865) est moins connu que son père William Cranch (1789-1859), avec lequel il travailla. Ensemble, ils découvrirent Hyperion (le huitième satellite de Saturne) en 1848, et furent les premiers à appliquer la photographie à l'astronomie.

présentées ainsi

$$\begin{array}{rccccccc}
 t = 0 & A_0 & & & & & & \\
 & & \Delta_0^1 & & & & & \\
 t = 1 & A_1 & & \Delta_0^2 & & & & \\
 & & \Delta_1^1 & & \Delta_0^3 & & & \\
 t = 2 & A_2 & & \Delta_1^2 & & \Delta_0^4 & & \\
 & & \Delta_2^1 & & \Delta_1^3 & & & \\
 t = 3 & A_3 & & \Delta_2^2 & & & & \\
 & & \Delta_3^1 & & & & & \\
 t = 4 & A_4 & & & & & & \\
 \\
 t = -\frac{3}{2} & V_{-\frac{3}{2}} & & & & & & \\
 & & D_{-\frac{3}{2}}^1 & & & & & \\
 t = -\frac{1}{2} & V_{-\frac{1}{2}} & & D_{-\frac{3}{2}}^2 & & & & \\
 & & D_{-\frac{1}{2}}^1 & & D_{-\frac{3}{2}}^3 & & & \\
 t = +\frac{1}{2} & V_{+\frac{1}{2}} & & D_{-\frac{1}{2}}^2 & & D_{-\frac{3}{2}}^4 & & \\
 & & D_{+\frac{1}{2}}^1 & & D_{-\frac{1}{2}}^3 & & & \\
 t = +\frac{3}{2} & V_{+\frac{3}{2}} & & D_{+\frac{1}{2}}^2 & & & & \\
 & & D_{+\frac{3}{2}}^1 & & & & & \\
 t = +\frac{5}{2} & V_{+\frac{5}{2}} & & & & & & \\
 \\
 t = -2 & F_{-2} & & & & & & \\
 & & d_{-2}^1 & & & & & \\
 t = -1 & F_{-1} & & d_{-2}^2 & & & & \\
 & & d_{-1}^1 & & d_{-2}^3 & & & \\
 t = 0 & F_0 & & d_{-1}^2 & & d_{-2}^4 & & \\
 & & d_0^1 & & d_{-1}^3 & & & \\
 t = 1 & F_1 & & d_0^2 & & & & \\
 & & d_1^1 & & & & & \\
 t = 2 & F_2 & & & & & &
 \end{array}$$

Les formules de quadrature simple et double retenues, qui permettent d'obtenir les différences premières et secondes de A à partir des valeurs de V et de F , sont celles qui sont issues de la série d'interpolation de Newton-Stirling (voir § 1.2, formule (1) et § 1.3, formule (3)). Avec les notations de Bond, elles s'écrivent

$$(1) \quad \Delta_n^1 = V_{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{24} D_{n-\frac{1}{2}}^2 - \frac{17}{5760} D_{n-\frac{3}{2}}^4 + \frac{367}{967680} D_{n-\frac{5}{2}}^6 - \&c.;$$

$$(2) \quad \Delta_n^2 = F_{n+1} + \frac{1}{12}d_n^2 - \frac{1}{240}d_{n-1}^4 + \frac{31}{60480}d_{n-2}^6 - \&c.$$

Jusque-là, rien de bien nouveau. C'est un peu plus loin, dans l'organisation des calculs, que Bond introduit une procédure tout à fait originale. Pour l'analyser, il suffira de se pencher sur le premier exemple du mémoire. Il s'agit de l'équation différentielle déterminant le rayon vecteur d'une orbite képlérienne

$$(3) \quad Fr^2 = \frac{2\mu}{r} - \frac{2\mu}{a},$$

dans laquelle μ est la somme des masses du Soleil et de la planète, a le demi-grand axe de l'orbite et, comme ci-dessus, F l'opérateur dérivée seconde. Selon les méthodes traditionnelles de quadrature mécanique, à la façon de Clairaut et Gauss, on dresserait d'abord une table complète (pour toute l'orbite) des valeurs de Fr^2 et de leurs différences en se servant de valeurs provisoires du rayon vecteur, puis on calculerait des valeurs corrigées de ce même rayon vecteur au moyen de la formule de quadrature double (2). De son côté, Bond propose une procédure nouvelle : son idée est d'avancer pas à pas en corrigeant les valeurs au fur et à mesure, c'est-à-dire de construire *simultanément* les tables de différences de r^2 et de Fr^2 . L'avantage pour le calculateur est de pouvoir remplir directement des tables définitives.

Voyons comment Bond s'y prend concrètement. On suppose que l'on connaît les deux premières valeurs r_0 et r_1 , à partir desquelles on calcule F_0 et F_1 au moyen de l'équation différentielle (3), ainsi que les différences Δ_0^1 et d_0^1 (voir tableau ci-dessous). Le problème est de calculer les valeurs suivantes, indiquées entre parenthèses

$t = 0$	F_0		r_0^2		
		d_0^1		Δ_0^1	
$t = 1$	F_1	(d_0^2)	r_1^2	(Δ_0^2)	
		(d_1^1)		(Δ_1^1)	
$t = 2$	(F_2)		(r_2^2)		

Pour avancer d'un pas, on suppose d'abord que $\Delta_0^2 = F_1$, ce qui permet d'obtenir, dans l'ordre, des valeurs provisoires de $\Delta_1^1, r_2^2, F_2, d_1^1$ et d_0^2 . Avec cette dernière valeur de d_0^2 , on recalcule Δ_0^2 par la formule plus précise $\Delta_0^2 = F_1 + \frac{1}{12}d_0^2$, d'où toutes les valeurs définitives cherchées. On procède

de même pour chacun des pas suivants. En résumé, il s'agit d'un processus de *prédiction-correction*, au sens que les numériciens modernes accordent à l'expression. Bond prédit une première valeur de r_2^2 à l'aide de la formule de quadrature (2) limitée à son premier terme, puis corrige cette valeur avec la même formule (2), mais en faisant intervenir le second terme.

Ainsi, la méthode de Bond est bien une méthode à pas liés analogue à celles d'Adams. Toutefois, elle ne fonctionne que si l'on décide de ne pas aller au-delà des différences secondes. Pour pouvoir prendre en compte des différences d'ordre supérieur au second, il faudrait prédire, à chaque étape, plusieurs des valeurs suivantes de la fonction. Chaque nouvelle valeur dépendant non seulement des précédentes mais aussi des suivantes, il ne s'agirait plus d'une méthode de calcul par arcs successifs : on retomberait sur les anciens schémas d'approximations successives portant simultanément sur tout un groupe de valeurs.

Si Bond a bien perçu l'intérêt d'avancer par arcs successifs plutôt que de recourir à des approximations successives, il est toutefois resté prisonnier — comme Legendre — des formules de quadrature utilisant les différences centrales, lesquelles, ainsi que nous l'avons vu, sont incompatibles avec l'idée des pas liés. Dans la mesure où le procédé de 1849 ne s'étend pas à un ordre quelconque, il serait abusif de prétendre que Bond soit l'inventeur des méthodes multipas modernes. Malgré tout, l'apport de l'astronome américain est capital : après Clairaut et Gauss, nous voyons en Bond l'avant-dernier maillon d'une chaîne cohérente reliant Newton à Adams. En effet, il est difficile de ne pas remarquer que Bond a écrit à destination des astronomes anglo-américains, dans une revue qu'Adams lisait probablement, six ans avant que ce dernier n' imagine les fameuses méthodes qui portent son nom.

Quoique rien ne soit sûr dans le cas d'Adams, il est possible de prouver que, globalement, les idées de Bond ont eu une influence non négligeable sur les astronomes britanniques. En effet, on retrouve ces idées dans les travaux de P.H. Cowell et A.C.D. Crommelin, célèbre tandem qui s'est notamment distingué lors du retour de la comète de Halley, en 1910. À l'issue de trois ans de calculs, ils purent prédire le passage au périhélie avec une erreur inférieure à trois jours et remportèrent un prix de 1000 marks. La méthode mathématique suivie, entièrement nouvelle et due principalement à Cowell, consistait à abandonner l'hypothèse de

départ d'une trajectoire elliptique et le processus classique de correction, pour les remplacer par une intégration numérique directe, arc par arc, des équations différentielles de la trajectoire exprimées en coordonnées rectangulaires.

C'est par une courte étude sur l'orbite du huitième satellite de Jupiter que Cowell et Crommelin [1908] avaient pu mettre au point la méthode qui allait leur servir ensuite pour le problème bien plus redoutable de la comète de Halley. Soient x, y, z les coordonnées jovicentriques du satellite et X, Y, Z leurs accélérations, exprimées en tenant compte de l'attraction principale de Jupiter et de l'attraction perturbatrice du Soleil. Pour avancer pas à pas dans le calcul de l'orbite, Cowell propose la formule

$$(4) \quad x_{n+1} = x_n + (x_n - x_{n-1}) + X_n + P_n,$$

avec $P_n = \frac{1}{12}(X_{n+1} - 2X_n + X_{n-1})$, et des formules analogues pour les deux autres coordonnées. L'intervalle d'intégration, choisi pour unité de temps, n'apparaît pas directement. Avec nos notations habituelles, la formule (4) s'écrirait

$$\Delta^2 x_{n-1} = (\Delta t)^2 (X_n + \frac{1}{12} \Delta^2 X_{n-1}).$$

Comme cette formule est implicite (P_n fait intervenir X_{n+1} , donc les valeurs $x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1}$ que l'on souhaite calculer), on utilise un processus de prédiction-corrrection : une valeur provisoire de P_n est fixée à l'aide des valeurs de P_{n-2}, P_{n-1} , ce qui permet de calculer x_{n+1} (et de même y_{n+1}, z_{n+1}) puis X_{n+1} , à partir duquel on détermine la valeur définitive de P_n , etc. Nous retrouvons exactement la méthode de Bond : même formule de quadrature (formule de Newton-Stirling limitée à ses deux premiers termes), même façon de prendre l'intervalle tabulaire pour unité afin de ne pas le faire apparaître dans la formule de quadrature, même processus de prédiction-corrrection.

L'ensemble des résultats des calculs réalisés par Cowell et Crommelin pour prédire la date du retour de la comète de Halley en 1910 a été publié dans un appendice à l'annuaire de l'observatoire de Greenwich pour l'année 1909 [Cowell et Crommelin 1910]. La méthode suivie est un approfondissement de celle mise au point pour le huitième satellite de Jupiter. La formule de quadrature a été améliorée par la prise en compte

de différences d'ordre supérieur. Avec des notations très simples, l'indice i marquant la différence i -ème, Cowell l'écrit

$$(5) \quad x_2 = X_0 + \frac{1}{12} X_2 - \frac{1}{240} X_4 + \frac{1}{1951} X_6.$$

Il s'agit toujours de la formule de quadrature double associée à la série de Newton-Stirling (voir § 1.3, formule (3))

$$\Delta^2 x_{-1} = (\Delta t)^2 \left(X_0 + \frac{1}{12} \Delta^2 X_{-1} - \frac{1}{240} \Delta^4 X_{-2} + \frac{31}{60480} \Delta^6 X_{-3} \right)$$

à la différence près que Cowell, afin de faciliter l'exécution du calcul, a remplacé la fraction $31/60480$ par la fraction « égyptienne » très voisine $1/1951$ ($60480/31 = 1950,96\dots$).

Avec la formule de quadrature (5), il n'est plus possible de concevoir un calcul progressif par pas liés, contrairement à ce qui avait été fait pour le huitième satellite de Jupiter. Cowell imagine donc une procédure mixte, tenant à la fois des idées de Bond et de celles de Gauss, qui nécessite le calcul de deux tables successives des coordonnées x, y, z de la comète. Une première table est calculée selon la méthode de Bond, en limitant la formule (5) à ses deux premiers termes. Cette table provisoire sert à calculer les accélérations X, Y, Z . Avec ces valeurs des accélérations, on recalcule les coordonnées x, y, z à l'aide de la formule (5), en faisant entrer en jeu les différences quatrièmes et sixièmes. Il s'agit donc encore d'une méthode par approximations successives, mais optimisée en ce sens que la première approximation, au lieu d'être issue de la classique ellipse osculatrice, est celle fournie par la méthode à pas liés de Bond. Très grossièrement, on peut estimer que cela permet d'atteindre en une seule itération (et donc en diminuant de moitié le volume de calcul) la précision que Gauss atteignait en deux itérations.

2.4. De Clairaut à Adams

Après que Clairaut eut adapté la formule de Gregory-Newton à l'intégration numérique des équations différentielles, on s'est trouvé à un point de bifurcation. Deux possibilités s'offraient aux calculateurs pour améliorer la technique de Clairaut : soit conserver l'idée des approximations successives et rechercher des formules de quadrature à convergence plus rapide, soit se contenter de la formule de Gregory-Newton et optimiser les calculs en l'utilisant non plus globalement mais par arcs successifs. En inventant les formules de quadrature de Newton-Stirling et de

Newton-Bessel, Gauss a choisi la première voie, si séduisante du point de vue théorique. L'autorité de Gauss et le charisme de son élève Encke ont ensuite imposé cette voie sur le continent européen, avec tant de rigidité qu'aucune recherche alternative ne put s'y développer avant 1914. Ce fut la voie glorieuse, propre aux astronomes, des quadratures mécaniques par approximations successives, assurément un grand moment de l'histoire de l'analyse numérique mais, au bout du compte, une impasse. Dans les pays anglo-saxons, naturellement plus proches de la tradition originelle de Gregory et de Newton, le carcan se desserra plus tôt : dès 1849, Bond fit un pas en arrière et songea à l'autre voie possible. On vit alors apparaître des méthodes mixtes, combinant l'idée des pas liés et celle des approximations successives, mais ces tentatives, dont la plus aboutie fut celle de Cowell, se heurtaient encore et toujours à l'obstacle des différences centrales. Pour donner naissance aux véritables méthodes de différences finies à pas liés, il fallait combiner l'idée primitive de Clairaut d'exploiter la formule de Gregory-Newton et l'idée de Bond de calculer par arcs successifs. Dans la suite, nous étudierons comment la combinaison en question a été réalisée, à plusieurs reprises, pendant la seconde moitié du XIX^e siècle.

3. LA THÉORIE DE LA CAPILLARITÉ : BASHFORTH ET ADAMS

C'est dans un obscur traité du physicien Francis Bashforth, publié à Cambridge en 1883 sous un titre fort long [Bashforth 1883], que l'on trouve le premier exposé complet d'une méthode multipas pour l'intégration approchée des équations différentielles. Dans l'introduction de l'ouvrage, Bashforth rapporte avec force détails l'historique de sa recherche. Un peu avant 1855, il avait entrepris des travaux sur la théorie de la capillarité, en se proposant notamment de comparer des formes de gouttes de liquide mesurées expérimentalement avec les formes théoriques déduites de l'équation différentielle de Laplace. Pour l'intégration numérique de cette équation, Bashforth s'était adressé au célèbre astronome J.C. Adams⁵.

⁵ John Couch Adams (1819–1892) se fit remarquer par des talents précoces d'astronome et de calculateur prodige. Il découvrit la planète Neptune par le calcul en 1845, avant son concurrent français Le Verrier, mais, malheureusement pour lui, sa prédiction ne fut pas prise en considération et ses résultats tardèrent à être publiés. Adams devint président de la Royal Astronomical Society en 1851 et directeur de l'Observatoire de Cambridge en 1861.

Ce dernier avait alors imaginé une méthode numérique nouvelle et avait effectué une première série de calculs. Le 27 octobre 1855, s'appuyant sur ces résultats partiels, Bashforth déposa une demande de subvention auprès de la Royal Society afin de pouvoir financer la réalisation des calculs restants. Une subvention de £ 50 fut accordée, qui permit de compléter les calculs en 1857. À la suite d'une nomination sur un poste de professeur dans une école d'officiers d'artillerie, Bashforth se détourna de ses travaux en cours sur la capillarité au profit de recherches en balistique, et ce n'est qu'en 1882 qu'il put finalement reprendre et achever le traité de l'action capillaire, pour une publication en 1883. Ainsi que le confirme le titre (*«with an explanation of the method of integration employed in constructing the tables which give the theoretical forms of such drops, by J.C. Adams»*), c'est bien Adams qui a conçu et rédigé la partie mathématique du traité, à savoir l'essentiel du chapitre III. Nous avons là un exemple typique de collaboration entre un physicien utilisateur et un mathématicien répondant à une commande.

3.1. Mise en équation de la forme d'une goutte de liquide reposant sur un plan

Dans le chapitre I de son ouvrage, Bashforth fait un rappel historique des théories de l'action capillaire⁶. L'un des premiers résultats obtenus dans ce domaine est celui de Jurin (1718), selon lequel l'élévation d'un liquide dans un tube capillaire est inversement proportionnelle au diamètre du tube. Clairaut (1743) tente d'expliquer le phénomène par l'attraction mutuelle des particules de liquide et l'attraction des particules du tube sur celles du liquide. Se dégage peu à peu l'idée que ces forces d'attraction ne sont sensibles qu'à de très petites distances. De façon indépendante, Young (1804), Laplace (1806), Gauss (1830) et Poisson (1831), malgré des hypothèses différentes sur les lois de l'attraction moléculaire, arrivent à des conclusions similaires et obtiennent une équation différentielle de même forme pour décrire la surface du liquide.

Dans le chapitre II, Bashforth fait un compte rendu détaillé des nombreuses tentatives de ses devanciers pour tester expérimentalement la validité de ces explications théoriques. Constatant que, presque toujours, on a cherché à mesurer la hauteur à laquelle s'élève un liquide

⁶ Pour une étude historique récente de ces théories, voir Dahan Dalmedico [1992].

dans un tube, il souligne les imperfections de cette approche : difficultés expérimentales (irrégularités du calibre des tubes, impossibilité de nettoyer les tubes trop fins) et théoriques (la hauteur de liquide prévue par la théorie n'est qu'une approximation qui cesse d'être valable pour des tubes de grand diamètre). Pour sa recherche personnelle, il préfère s'intéresser à une goutte de liquide reposant, sans le mouiller, sur un plan horizontal et se propose de comparer la forme mesurée de la goutte avec la forme prévue par la théorie.

Bashforth expose une façon d'obtenir l'équation différentielle de la surface de la goutte, en reprenant, parmi les diverses démarches possibles, celle de Laplace. Le liquide est supposé en équilibre sous l'action de la gravité et d'une tension superficielle uniforme. Soient T cette tension uniforme, R et R' les rayons de courbure principaux en un point quelconque de la surface, p la pression en ce point ; selon la première loi de la capillarité de Laplace, on peut écrire

$$(1) \quad \frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = \frac{p}{T}.$$

Pour des raisons de symétrie, la surface de la goutte est une surface de révolution autour d'un axe vertical et, de plus, coupe cet axe à angle droit. Pour un point quelconque d'une section méridienne de la surface (avec le repère indiqué sur la figure 2), Bashforth désigne par x la coordonnée horizontale, z la coordonnée verticale, ρ le rayon de courbure de la section méridienne, ϕ l'angle que fait la verticale avec la normale à la surface et s l'abscisse curviligne de la section, mesurée à partir de l'origine.

En prenant pour unité de longueur le rayon de courbure à l'origine, Bashforth parvient à mettre la relation (1) sous la forme simplifiée

$$\frac{1}{\rho} + \frac{\sin \phi}{x} = 2 + \beta z,$$

où β est une constante ne dépendant que des paramètres physiques de la goutte de liquide. Il ne lui reste plus qu'à exprimer ρ et ϕ en fonction de x et z pour parvenir à l'équation différentielle du second ordre

$$\frac{d^2z}{dx^2} + \left\{ 1 + \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 \right\} \frac{dz}{x dx} = (2 + \beta z) \left\{ 1 + \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 \right\}^{\frac{3}{2}},$$

avec, pour $x = 0$, les conditions initiales $z = 0$ et $dz/x dx = 1$. Ce travail de mise en équation terminé, s'avouant impuissant face à

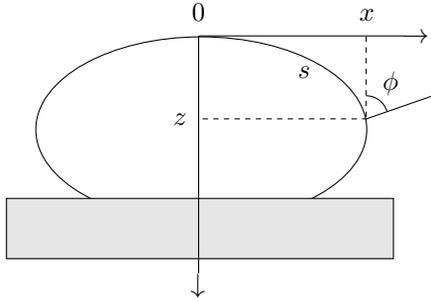


Figure 2. Mise en équation de la courbe méridienne d'une surface capillaire

l'équation différentielle obtenue, le physicien Bashforth passe la parole au mathématicien Adams.

3.2. Les méthodes d'Adams

Adams commence par rappeler ce qui semble être, à son époque, la méthode usuelle d'intégration numérique d'une équation différentielle du second ordre : pour construire une courbe intégrale par arcs successifs à partir d'un point connu, on fait appel à la méthode d'Euler avec développement de Taylor, ainsi qu'elle avait été exposée, en 1769, dans le second tome des *Institutiones calculi integralis*. Cette méthode paraît incontournable pour déterminer les premiers points de la courbe mais, ensuite, Adams préfère s'en écarter. L'idée directrice est d'éviter, dès que possible, le calcul fort pénible des dérivées successives requises par la formule de Taylor pour, au contraire, travailler directement avec l'équation, en exploitant les points déjà calculés. Le détail de la méthode est, à partir de là, exposé pour une équation du premier ordre $dy/dt = q = f(y, t)$. Constatons qu'Adams s'éloigne quelque peu du problème physique original qui a conduit à une équation du second ordre, sans doute dans le souci d'exposer d'abord ses idées dans un cadre très général. Plus loin, il reviendra à l'équation du second ordre, en la remplaçant par un système équivalent de deux équations du premier ordre.

Résumons brièvement la nouvelle méthode imaginée par Adams. Considérons une progression arithmétique $t = t_0 + n\omega$, de raison ω suffisamment petite (n pouvant prendre des valeurs positives ou négatives), et

supposons qu'on ait déjà trouvé les valeurs $\dots, y_{-4}, y_{-3}, y_{-2}, y_{-1}, y_0$ de y , ainsi que les valeurs correspondantes $\dots, q_{-4}, q_{-3}, q_{-2}, q_{-1}, q_0$ de q . Adams forme le tableau suivant des différences de ces quantités

n	q				
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
-4	q_{-4}	\dots	\dots	\dots	\dots
		Δq_{-3}		\dots	\dots
-3	q_{-3}		$\Delta^2 q_{-2}$	\dots	$\&c.$
		Δq_{-2}		$\Delta^3 q_{-1}$	
-2	q_{-2}		$\Delta^2 q_{-1}$	$\Delta^4 q_0$	$\&c.$
		Δq_{-1}		$\Delta^3 q_0$	
-1	q_{-1}		$\Delta^2 q_0$		
		Δq_0			
0	q_0				

Nous avons conservé les notations originales : remarquons qu'il s'agit des différences régressives, mais avec la notation Δ au lieu de la notation actuelle ∇ . Adams fait ensuite appel à la formule d'interpolation

$$q = q_0 + \Delta q_0 \frac{n}{1} + \Delta^2 q_0 \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} + \Delta^3 q_0 \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \Delta^4 q_0 \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \&c.$$

d'où, par intégration entre 0 et n ,

$$y = y_0 + \omega \left\{ q_0 n + \Delta q_0 \frac{n^2}{2} + \Delta^2 q_0 \int \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} dn + \Delta^3 q_0 \int \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} dn + \&c. \right\}.$$

Dans les cas particuliers $n = -1$ et $n = 1$, on obtient les séries

$$(1) \quad y_0 - y_{-1} = \omega \left\{ q_0 - \frac{1}{2} \Delta q_0 - \frac{1}{12} \Delta^2 q_0 - \frac{1}{24} \Delta^3 q_0 - \frac{19}{720} \Delta^4 q_0 - \frac{3}{160} \Delta^5 q_0 - \frac{863}{60480} \Delta^6 q_0 - \frac{275}{24192} \Delta^7 q_0 - \frac{33953}{3628800} \Delta^8 q_0 - \frac{8183}{1036800} \Delta^9 q_0 - \&c. \right\};$$

$$(2) \quad y_1 - y_0 = \omega \left\{ q_0 + \frac{1}{2} \Delta q_0 + \frac{5}{12} \Delta^2 q_0 + \frac{3}{8} \Delta^3 q_0 + \frac{251}{720} \Delta^4 q_0 + \frac{95}{288} \Delta^5 q_0 + \frac{19087}{60480} \Delta^6 q_0 + \frac{5257}{17280} \Delta^7 q_0 + \frac{1070017}{3628800} \Delta^8 q_0 + \frac{2082753}{7257600} \Delta^9 q_0 + \&c. \right\}.$$

On reconnaît dans ces deux séries l'adaptation immédiate à une équation différentielle des formules de quadrature de Gregory-Newton (voir § 1.1). La formule (2) est directement la formule régressive; d'autre part, pour retrouver dans (1) la formule progressive, il suffit d'envisager les points dans l'ordre inverse $t_0, t_{-1}, t_{-2}, \dots$. Dans la série (2), on peut être surpris qu'Adams, calculateur de génie, n'ait pas vu la simplification $\frac{2082753}{7257600} = \frac{25713 \times 81}{89600 \times 81} = \frac{25713}{89600}$, alors que toutes les autres fractions figurant dans le traité sont données sous forme irréductible. En fait, les coefficients d'ordre élevé ne servent jamais : Adams conseille de choisir le pas ω assez petit pour ne pas avoir à aller au-delà des différences quatrièmes.

La série (2) permet de calculer directement la nouvelle valeur y_1 à partir des précédentes, qui sont connues; on peut alors calculer $q_1 = f(y_1, t_1)$, ajouter une nouvelle diagonale au tableau des différences finies et recommencer. Cette méthode d'intégration numérique est connue aujourd'hui sous le nom de *méthode d'Adams explicite* ou *méthode d'Adams-Bashforth*. Il y a là un contresens puisque ce n'est pas cette méthode qui sera utilisée pour le problème physique de Bashforth, mais bien l'autre! En effet, bien que la série (2) paraisse relativement simple à exploiter, Adams lui préfère la série (1) qui, supposant seulement connues les valeurs de y jusqu'à y_{-1} , permet d'exprimer la valeur suivante y_0 de façon implicite, par l'intermédiaire d'une équation de la forme $y_0 = \varphi(y_0)$. Pratiquement, la valeur de y_0 est calculée par la méthode de Newton-Raphson, avec une première approximation (y_0) conjecturée à l'aide de la table des valeurs déjà connues (en considérant comme constantes les dernières différences prises en compte). Ce second procédé, qui nécessite à chaque pas la résolution d'une équation numérique par approximations successives, est appelé à présent *méthode d'Adams implicite* ou *méthode d'Adams-Moulton* (du nom de celui qui la développa ultérieurement avec des variantes [Moulton 1926, 1930]).

Adams justifie son choix en remarquant que les coefficients de la série (1) sont plus petits et diminuent plus vite que ceux de la série (2). Pour un même nombre de termes conservés, on obtiendra donc une meilleure précision avec la série (1). On pourrait effectivement justifier ces affirmations de façon rigoureuse : le coefficient de $\Delta^n q_0$ est de l'ordre de $1/\ln n$ pour la série (2), alors qu'il est de l'ordre de $1/(n \ln n)$ pour la série (1). Malgré cela, on peut continuer à s'interroger sur la pertinence

du choix d'Adams : plutôt que d'utiliser la méthode implicite à l'ordre 4, avec, à chaque étape, une correction pénible par la méthode de Newton, n'aurait-il pas été plus simple d'utiliser la méthode explicite en allant éventuellement, pour obtenir la même précision, jusqu'à un ordre plus élevé? Les traités modernes d'analyse numérique permettent d'esquisser une réponse : par rapport à la méthode explicite, la méthode implicite nécessite environ un volume double de calcul mais est, par contre, beaucoup plus stable. La stabilité mesure la sensibilité aux conditions initiales et donc, d'une certaine façon, la possibilité de contrôler la propagation des erreurs d'arrondi, ce qui est évidemment fondamental pour une méthode par pas. Ainsi, guidé par son expérience et peut-être par des essais préliminaires, Adams fait le choix qui va assurer la meilleure précision réelle, même si cela doit entraîner un surcroît de calcul.

Dans la conclusion de ce chapitre III, Adams fait le lien avec les quadratures numériques connues depuis longtemps : «*In conclusion, it may be worth while to say a few words in order to point out the distinction between the method of integration above explained and that which is commonly known under the name of "Integration by Quadratures"*» [Bashforth 1883, p. 43]. Adams met bien en évidence ce qui distingue une équation générale aux variables mêlées d'une équation simple de la forme $dy/dt = q = f(t)$: «*In this case the values of q can be found, à priori [sic], for any given values of t , whereas in the more general case already treated of, where q is a function of y as well as of t , the unknown quantities y and q must be found simultaneously, and therefore we can only proceed step by step*» [Ibid.]. Adams juge sans doute utile d'insister sur la difficulté qui a arrêté ses prédécesseurs (en particulier Legendre), afin de mettre en valeur, par contraste, la nouveauté et la simplicité de sa démarche personnelle.

3.3. Organisation et réalisation des calculs

À la suite de cet exposé limpide des idées générales et de la méthode retenue, la plus grande partie du chapitre III est consacrée à la mise en œuvre pratique du processus dans le cas de l'équation particulière de Bashforth : vingt-deux pages pour la préparation et l'organisation du calcul, onze pages pour le traitement détaillé de deux exemples. Ce luxe de précisions, sans doute motivé par le fait qu'il s'agissait alors d'une méthode entièrement nouvelle, est extrêmement précieux pour l'histoire du calcul numérique. Rappelons (voir fig. 2) que Bashforth souhaite

construire, dans le système de coordonnées (x, z) , la courbe limitant la section méridienne d'une goutte de liquide. Plutôt que de travailler avec l'équation différentielle du second ordre qui permettrait d'exprimer directement z en fonction de x , Adams propose de choisir l'angle ϕ comme variable indépendante. Les coordonnées cartésiennes du point courant sont alors déterminées, en fonction du paramètre ϕ , par le système de deux équations du premier ordre

$$(1) \quad \frac{dx}{d\phi} = \rho \cos \phi, \quad \frac{dz}{d\phi} = \rho \sin \phi$$

et les conditions initiales $x = z = 0$ et $\rho = 1$ pour $\phi = 0$, en tenant compte évidemment de la relation qui exprime les lois de la capillarité

$$(2) \quad \frac{1}{\rho} + \frac{\sin \phi}{x} = 2 + \beta z.$$

Cette relation permettant de calculer ρ en fonction de ϕ , x et z , le système (1) est, en fait, de la forme

$$\frac{dx}{d\phi} = f(\phi, x, z), \quad \frac{dz}{d\phi} = g(\phi, x, z).$$

Pour la phase de démarrage, Adams ne fait pas appel, comme dans l'exposé général, au développement de Taylor mais à l'autre méthode classique, celle des coefficients indéterminés. Il calcule des développements limités de x et de z à l'ordre 12 qui fournissent des valeurs numériques très précises dans un voisinage de l'origine. Si l'on choisit un pas ω assez petit, on peut obtenir ainsi quatre ou cinq points initiaux extrêmement fiables permettant ensuite de travailler par pas liés, selon la nouvelle méthode. Adams explique alors comment adapter au système (1) l'algorithme qu'il avait exposé dans le cas le plus simple d'une seule équation du premier ordre. Ici, c'est sur le rayon de courbure que va se faire la correction, de façon à travailler par approximations successives avec une équation à une seule inconnue, de la forme $\rho_0 = \varphi(\rho_0)$. Dans un premier temps, Adams conjecture une valeur provisoire (ρ_0) , en déduit par la formule de quadrature des valeurs provisoires (x_0) et (z_0) et calcule à partir de (2) une nouvelle valeur $[\rho_0]$ du rayon de courbure. Il obtient ensuite la valeur définitive du rayon de courbure à l'aide d'une formule de correction qui fait intervenir les valeurs (ρ_0) et $[\rho_0]$ et qui revient encore à utiliser la méthode de Newton.

Les calculs voulus par Bashforth ont été réalisés sur plusieurs années, par plusieurs personnes : «*The coordinates x/b and z/b for the curves represented by Laplace's differential equation were calculated by the method of Professor Adams for values of ϕ , 5° , 10° , 15° , \dots , 175° , 180° , and for values of β , $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, 1 , $1\frac{1}{2}$, 2 , $2\frac{1}{2}$, 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 10 , 12 , 14 , 16 , 20 , 24 , 28 , 32 , 40 , 48 , 56 , 64 , 72 , 80 , 88 , 96 and 100 . For $\beta = 1$ the calculations were made by Professor Adams, for $\beta = 10$ by Professor W.G. Adams, and for the values of β , $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 3 , 6 , 16 and 32 by myself. The calculations for the remaining values of β were made by Dr C. Powalky, who was recommended for the work by the late Professor Encke.*» Les tables ont été complétées par interpolation pour les valeurs entières restantes de β . Ces tables ont permis de construire par points des courbes capillaires (fig. 3).

Ce travail considérable est donc le fruit d'une équipe de quatre calculateurs. On comprend mieux le soin avec lequel Adams a préparé le calcul, destiné à être exécuté par d'autres que lui, et la nécessité d'obtenir un financement, sans doute pour rémunérer le calculateur principal, le Dr C. Powalky⁷. De son côté, Bashforth a imaginé un dispositif expérimental de haute précision pour mesurer, à l'aide d'un microscope équipé d'un micromètre de position, les coordonnées des points du contour d'une goutte de mercure. Il y a là une dialectique intéressante entre progrès des techniques de calcul numérique et progrès des instruments de mesure. On ne sait si Bashforth a été stimulé, pour améliorer ses techniques d'expérimentateur, par les méthodes de calcul très précises d'Adams, ou si c'est le contraire qui s'est produit. D'un autre point de vue, on peut considérer que la méthode d'Adams est une intégration numérique empirique de l'équation différentielle de la capillarité, puisqu'il n'y a ni preuve de la convergence, ni évaluation *a priori* de l'erreur. Dans cette optique, les résultats numériques d'Adams et les résultats expérimentaux de Bashforth se valident mutuellement par leur concordance, en même temps que cet accord valide le modèle différentiel théorique de Laplace.

⁷ Sur ce Dr C. Powalky, élève de l'astronome allemand Encke, nous ne savons pas grand-chose. Nous avons seulement découvert qu'il s'était illustré dans la détermination de la parallaxe solaire : plus précisément, il a contribué à la préparation de l'observation du passage de Vénus devant le Soleil en 1874.

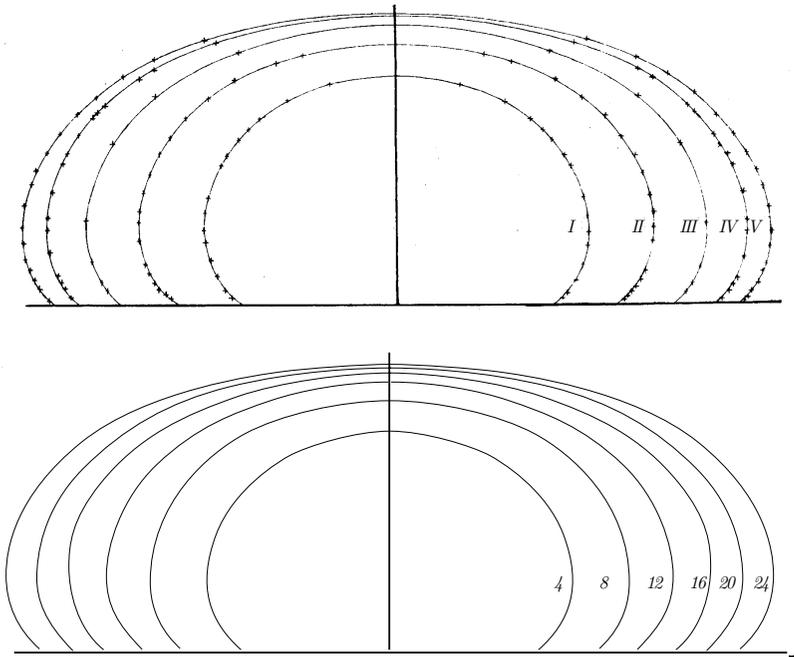


Figure 3. Quelques courbes de capillarité tracées par Bashforth : comparaison des courbes expérimentales (en haut) et des courbes théoriques obtenues par intégration numérique (en bas) [Bashforth 1883, planche en fin de volume]

4. AUTRES MÉTHODES MULTIPAS : DARWIN, SHEPPARD ET STØRMER

Dans une assez courte période succédant à la publication du traité de Bashforth et Adams, nous avons identifié trois autres méthodes multipas dans des mémoires de mathématiques appliquées de Darwin, Sheppard et Størmer. Nous verrons que ces travaux, quoique assez similaires, semblent être largement indépendants les uns des autres.

4.1. La recherche des orbites périodiques : Darwin (1897)

En 1892, dans le premier tome des *Méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, Poincaré avait souligné l'importance de la recherche des orbites

périodiques pour faire progresser l'étude du redoutable problème des trois corps. Des solutions périodiques particulières avaient déjà été trouvées par Lagrange puis, dans le cadre de ses recherches sur la théorie de la Lune, par l'astronome américain Hill. Poincaré lui-même avait distingué trois sortes de solutions périodiques possibles. C'est à ce point que G.H. Darwin⁸, astronome de Cambridge, reprend l'étude de ce problème ayant mis en échec toutes les tentatives de résolution analytique. Dès le début d'un long mémoire, Darwin explique que le recours à une intégration numérique est sans doute la seule façon de progresser :

«Notwithstanding the great interest attaching to periodic orbits, no suggestion has, up to the present time, been made by any writer for a general method of determining them. As far as I can see, the search resolves itself into the discussion of particular cases by numerical processes, and such a search necessarily involves a prodigious amount of work» [Darwin 1897, p. 101].

La démarche suivie par Darwin est simple dans son principe : dans chaque cas possible, construire l'orbite point par point à partir d'une intégration numérique des équations différentielles, en essayant diverses valeurs initiales jusqu'à ce que, aux erreurs de calcul près, la solution approchée obtenue puisse être considérée comme périodique. Darwin a consacré trois longues années à ces calculs, qualifiés de «supplice de Tantale» car sans cesse apparaissaient de nouveaux cas à traiter. Dans la suite du texte, on peut relever des informations intéressantes sur la façon dont l'astronome a géré son programme de recherche :

«In conducting extensive arithmetical operations, it would be natural to avail oneself of the skill of professional computers. But unfortunately the trained computer, who is also a mathematician, is rare. I have thus found myself compelled to forego the advantage of the rapidity and accuracy of the computer, for the higher qualities of mathematical knowledge and judgment.

In my earlier work I received the greatest assistance from Mr J.W.F.

⁸ Cinquième enfant du célèbre naturaliste Charles Darwin, George Howard Darwin (1845-1912) fait ses études à Cambridge et y devient professeur d'astronomie et de philosophie expérimentale en 1883. À ce poste, il se consacre essentiellement à des travaux de cosmologie et de géophysique. En particulier, il réalise un travail monumental sur l'analyse harmonique des observations de marées, à partir des méthodes de Laplace et de Kelvin. En 1899, il devient président de la Royal Astronomical Society.

Allnutt; his early death has deprived me of a friend and of an assistant, whose zeal and care were not to be easily surpassed. Since his death Mr J.I. Craig (of Emmanuel College) and Mr M.J. Berry (of Trinity College) have rendered and are rendering valuable help. I have besides done a great deal of computing myself. (About two thirds of the expense of these computations have been met by grants from the Government Grant and Donation Funds of the Royal Society.)

The reader will see that the figures have been admirably rendered by Mr Edwin Wilson of Cambridge, and I only regret that it has not seemed expedient to give them on a large scale» [Ibid., p. 101].

Tout cela n'est pas sans rappeler les circonstances des travaux de Bashforth : calculs étalés sur plusieurs années, recours à des calculateurs auxiliaires, course aux subventions pour pouvoir rémunérer ces collaborateurs. Malgré ce labeur gigantesque, Darwin ne parvient à publier, en 1897, que des conclusions partielles. Aussitôt, Poincaré rend compte de l'article dans le tome 3, paru en 1899, des *Méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, en regrettant toutefois que ces résultats incomplets ne permettent pas de confirmer certaines conjectures.

Le cadre général du travail de Darwin étant ainsi fixé, passons à l'étude plus précise du système différentiel en jeu et de la méthode d'intégration numérique utilisée.

Le problème restreint des trois corps

Dans le problème restreint des trois corps, on s'intéresse au cas où deux des trois corps ont un mouvement circulaire et où le troisième est de masse nulle. Si l'on suppose de plus que le mouvement est plan, le système différentiel se réduit au second ordre. Pour fixer les idées, sans qu'il s'agisse forcément d'étudier une situation réelle, Darwin désigne par S (comme Soleil) le corps le plus massif, de masse ν , par J (comme Jupiter) la planète qui tourne autour de lui, supposée de masse unité, et par P (comme planète, ou satellite) le corps infinitésimal qui se meut dans le plan de l'orbite de J (voir fig. 4). On prend pour unité de longueur le rayon SJ . Le repère de référence a pour origine S , pour axe des abscisses SJ , et l'axe des ordonnées est choisi dans le sens du mouvement orbital de Jupiter. On désigne par x, y les coordonnées héliocentriques de P (de sorte que ses coordonnées jovicentriques soient $x - 1, y$), par r, θ ses coordonnées polaires héliocentriques, par ρ, ψ ses coordonnées polaires jovicentriques.

Enfin, on note n la vitesse angulaire orbitale de Jupiter.

Darwin obtient les équations du mouvement relatif du point P par rapport au repère mobile sous la forme

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2n \frac{dy}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial x}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} + 2n \frac{dx}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial y},$$

où l'on a posé $2\Omega = \nu(r^2 + 2/r) + (\rho^2 + 2/\rho)$. On en déduit facilement l'*intégrale de Jacobi*, c'est-à-dire l'intégrale des forces vives dans le mouvement relatif : $V^2 = (dx/dt)^2 + (dy/dt)^2 = 2\Omega - C$, où V désigne la vitesse de P par rapport aux axes mobiles, et C une constante. Pour chaque point x, y de l'orbite relative de P , on note s l'abscisse curviligne, φ l'angle que fait la normale extérieure avec l'axe des abscisses, R le rayon de courbure, et on désigne par $x_0, y_0, s_0, \varphi_0, R_0$ les valeurs que prennent toutes ces quantités à l'instant initial t_0 . En choisissant l'abscisse curviligne pour variable indépendante, Darwin parvient alors à mettre le système différentiel sous la forme

$$(1) \quad \begin{cases} \varphi = \varphi_0 + \int_{s_0}^s \frac{ds}{R}, & x = x_0 - \int_{s_0}^s \sin \varphi ds, \\ y = y_0 + \int_{s_0}^s \cos \varphi ds, & n(t - t_0) = \int_{s_0}^s \frac{n}{V} ds, \end{cases}$$

compte tenu des relations

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{1}{R} = \frac{P}{V^2} - \frac{2n}{V}, \\ P = \nu \left(\frac{1}{r^2} - r \right) \cos(\varphi - \theta) + \left(\frac{1}{\rho^2} - \rho \right) \cos(\varphi - \psi), \\ V^2 = \nu \left(r^2 + \frac{2}{r} \right) + \left(\rho^2 + \frac{2}{\rho} \right) - C. \end{cases}$$

Les trois premières équations du système (1) permettent, par deux intégrations, de déterminer les coordonnées x et y , donc l'orbite relative de P . La quatrième équation, au moyen d'une intégration supplémentaire, donne le temps et, par suite, l'orbite absolue de P . Le tracé point par point de l'orbite relative ne fait ainsi intervenir que les trois premières équations. Si l'on remarque que les relations (2) permettent d'exprimer la courbure R en fonction de l'angle φ et des coordonnées polaires r, θ, ρ, ψ , c'est-à-dire, en fin de compte, en fonction de φ, x et y , il apparaît que le système à

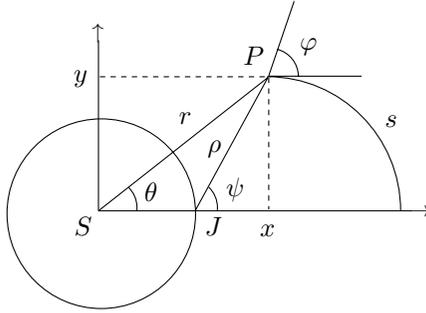


Figure 4. Le problème restreint des trois corps

intégrer est du type

$$(3) \quad \frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{R} = f(\varphi, x, y), \quad \frac{dx}{ds} = -\sin \varphi, \quad \frac{dy}{ds} = \cos \varphi.$$

La méthode d'intégration numérique de Darwin

Darwin présente d'abord, de façon indépendante, la formule de quadrature qui va être utilisée. Le contexte est une fonction u_x de x , pour laquelle les valeurs $\dots, u_{n-2}, u_{n-1}, u_n$ sont connues, mais pas encore les valeurs u_{n+1}, u_{n+2}, \dots . L'idée d'un calcul progressif par pas liés est ainsi suggérée d'entrée. La démonstration repose sur l'utilisation formelle des opérateurs $E = e^{d/dx}$ et $\Delta = E - 1$, définis par $E u_x = u_{x+1}$ et $\Delta u_x = u_{x+1} - u_x$. Les notations et le raisonnement sont tout à fait analogues à ceux que l'on trouve dans le quatrième volume de la *Mécanique céleste* de Laplace [1805, p. 205–208]. On aboutit à la formule progressive de Gregory-Newton, puis à la formule de quadrature

$$\int_n^{n+1} u_x dx = u_{n+1} - \frac{1}{2} \Delta u_n - \frac{1}{12} \Delta^2 u_{n-1} - \frac{1}{24} \Delta^3 u_{n-2} - \frac{19}{720} \Delta^4 u_{n-3} - \dots$$

Darwin parvient ainsi à la même formule implicite qu'Adams (voir § 3.2), sans toutefois évoquer, quant à lui, la possibilité d'une formule explicite. Pour ce qui est du démarrage des calculs, le procédé retenu est différent. Il n'y a pas, comme chez Adams, de procédure spécifique (méthode du développement de Taylor ou des coefficients indéterminés) pour le calcul

des premiers termes. Darwin applique dès le début la méthode multipas, en se contentant d'exploiter les différences disponibles : à l'ordre un pour le premier pas, à l'ordre deux pour le second pas, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on atteigne l'ordre souhaité et que le procédé puisse être stabilisé. Pour contrebalancer le risque que les premières valeurs soient trop peu précises, on prend au début un pas très petit, que l'on pourra augmenter par la suite.

Voyons comment la méthode, qui vient d'être exposée dans le cas d'une seule équation, est appliquée au système (3). Malgré un texte beaucoup moins précis, à ce sujet, que celui d'Adams, on peut néanmoins reconstituer les grandes étapes du calcul. Supposons que les valeurs de x , y , φ et R aient été calculées jusqu'à l'indice n et reportées, ainsi que leurs différences, dans quatre tables. On conjecture une valeur de $1/R_{n+1}$ (rien n'est dit sur la façon de faire cette conjecture, mais on peut supposer que, comme chez Adams, elle se fait au vu des différences déjà calculées). Au moyen de la formule d'intégration, arrêtée aux différences troisièmes, on calcule φ_{n+1} avec la première équation du système (3), puis x_{n+1} et y_{n+1} avec les deux autres équations. Avec ces valeurs provisoires de φ_{n+1} , x_{n+1} et y_{n+1} , on calcule une nouvelle valeur de $1/R_{n+1}$, et on recommence l'ensemble du calcul jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de variation dans la valeur de $1/R_{n+1}$. On peut ensuite compléter les tables avec les valeurs définitives et passer au pas suivant.

À la différence d'Adams, qui résolvait par la méthode de Newton les équations numériques issues de la formule implicite de quadrature, Darwin applique une technique ordinaire d'approximations successives. On peut voir un avantage dans cette façon de procéder : dans la méthode d'Adams, le calculateur doit mettre en œuvre, en alternance, deux algorithmes de calcul très différents (un pour le calcul des valeurs provisoires, un pour leur correction) tandis que, dans la méthode de Darwin, il n'y a qu'une seule procédure à appliquer, deux ou plusieurs fois à chaque étape, jusqu'à stabilisation ; dans ce dernier cas, le calcul est beaucoup plus répétitif, et demande sans doute moins de concentration.

Lorsqu'on pense à la totalité de la procédure qui conduit au tracé point par point d'une orbite, on peut se demander dans quelle mesure un calcul aussi complexe fournit des résultats fiables. Darwin se contente de tester sa méthode par le tracé préliminaire d'une orbite elliptique connue, à

partir de sa courbure. La précision constatée est, dit-il, surprenante. Nous sommes bien là face à des mathématiques empiriques : la « preuve » d'un algorithme réside dans sa capacité à fonctionner correctement dans des cas particuliers connus. C'est encouragé par le résultat de ce test que Darwin se lance avec confiance dans le calcul numérique fastidieux de nombreuses orbites périodiques (voir fig. 5).

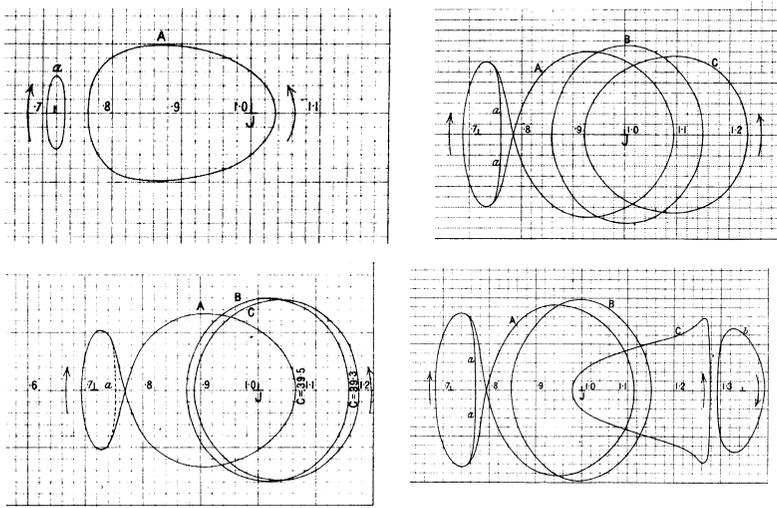


Figure 5. Quelques orbites périodiques tracées par E. Wilson d'après les calculs de Darwin [1897, planches I et II]

Comparaison entre les méthodes d'Adams et de Darwin

Comme celui d'Adams, le travail de Darwin est un beau travail d'analyse numérique. La question qui se pose à l'historien est bien sûr de savoir si Darwin a eu connaissance des recherches de son prédécesseur, ou s'il en a redécouvert les résultats de façon indépendante. Les deux hommes se connaissaient certainement puisque, à un quart de siècle d'écart, Darwin a suivi à peu près la même carrière qu'Adams à Cambridge. Au moment où Darwin devient un astronome confirmé, Adams est sans doute en train de prendre sa retraite. C'est le moment où Bashforth publie ses travaux : il est possible que Darwin ait alors discuté avec son illustre prédécesseur de la méthode d'intégration imaginée trente ans auparavant.

Pourtant, Darwin ne cite pas Adams dans son article, alors qu'il cite de nombreux auteurs, y compris sur des points de détail, pour la partie proprement astronomique de son travail. Il donne vraiment l'impression d'avoir le souci de rendre à chacun ce qui lui est dû, aussi est-on porté à le croire lorsqu'il présente sa méthode d'intégration comme une méthode personnelle. De fait, il y a de nombreuses différences avec l'exposé d'Adams. Darwin obtient la formule de quadrature à la manière de Laplace, de façon très formelle. Par rapport à la preuve élémentaire d'Adams, cette démonstration a l'avantage de mettre en évidence que les coefficients de la formule implicite sont ceux du développement en série entière de $-x/\log(1-x)$, d'où un moyen simple de les calculer. Par contre, Darwin ne présente pas de formule explicite. C'est surprenant, car son souci n'est pas d'obtenir une extrême précision : «*My object has been throughout to cover a wide field with adequate accuracy rather than a far smaller one with scrupulous exactness, for economy of labour is of the greatest importance in so heavy a piece of work*» [Darwin 1897, p. 129]. Les choix techniques faits, presque systématiquement différents de ceux d'Adams, sont effectivement cohérents avec ce moindre souci de précision : démarrage direct plutôt que par les séries, arrêt aux différences troisièmes plutôt que quatrièmes, méthode itérative ordinaire, de convergence géométrique, plutôt que méthode de Newton, de convergence rapide. Ne cherchant pas à obtenir autant de chiffres significatifs exacts qu'Adams, Darwin aurait pu se contenter de la méthode explicite, ce qui aurait à peu près divisé le volume de calcul par deux (à chaque pas, il n'y aurait pas eu d'itération à effectuer pour corriger les valeurs provisoires). Dans ces conditions, on peut émettre l'hypothèse que, s'il n'a pas adopté la méthode explicite, c'est qu'il n'y a pas pensé, et donc qu'il n'avait pas lu auparavant le traité de Bashforth.

On pourrait objecter que la construction, pour une équation du second ordre, d'une courbe solution à partir de son rayon de courbure est identique chez Darwin et chez Adams. On ne peut rien en déduire de plus car c'est une méthode ancienne, déjà classique dans la seconde moitié du XIX^e siècle. Darwin signale, d'ailleurs, qu'il s'est inspiré pour cela des travaux de Lord Kelvin (voir [Thomson 1891]) : «*This method is the numerical counterpart of the graphical process described by Lord Kelvin in his Popular Lectures, but it is very much more accurate*» [Darwin 1897,

p. 125]. À nouveau, il n'y a rien qui puisse permettre de rattacher Darwin à Adams.

En fin de compte, il est difficile de savoir si Darwin s'est inspiré des recherches d'Adams. Au vu de ce qui précède, il est possible de penser que non. Dans la seconde moitié du XIX^e siècle, et cela depuis Newton, il y avait chez les astronomes anglais une sorte de culture commune de haut niveau autour de l'interpolation, du calcul des différences finies, des quadratures numériques. Il n'est pas impossible que deux de ces astronomes, face à des équations différentielles du même type, attaquant le problème par la même méthode des rayons de courbure, aient eu séparément la même idée.

4.2. L'amélioration des tables numériques : Sheppard (1899)

Deux ans à peine après la publication de l'énorme travail de Darwin, on retrouve une méthode multipas dans un article de W.F. Sheppard⁹ [1899]. Il s'agit cette fois d'une recherche purement technique, ayant pour objet la construction et l'amélioration des tables numériques des fonctions qui sont définies par une équation différentielle.

Soit $u \equiv f(x)$ une fonction satisfaisant à l'équation différentielle $du/dx = v \equiv \phi(x, u)$ et à la condition initiale $u_0 = f(x_0)$. On note h le pas choisi pour la construction de la table et on pose $u_{\pm n} = f(x_0 \pm nh)$. Sheppard écrit la formule de Taylor pour u

$$(1) \quad u_1 = f(x_0 + h) = u_0 + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!}f''(x_0) + \frac{h^3}{3!}f'''(x_0) + \dots,$$

et développe de même les différences finies régressives de v

$$(2) \quad \begin{cases} hv_0 = hf'(x_0), \\ \Delta hv_{-1} = h^2 f''(x_0) - \frac{1}{2}h^3 f'''(x_0) + \frac{1}{6}h^4 f^{iv}(x_0) - \dots, \\ \Delta^2 hv_{-2} = h^3 f'''(x_0) - h^4 f^{iv}(x_0) + \dots, \\ \Delta^3 hv_{-3} = h^4 f^{iv}(x_0) - \dots, \\ \dots \end{cases}$$

⁹ William F. Sheppard (1863–1936) fait ses études au Trinity College de Cambridge. En 1928, il est président de la British Mathematical Association. Pour la plupart, ses travaux relèvent des statistiques et ont trait à la méthode des différences finies et à leurs applications. En particulier, c'est à Sheppard que l'on doit l'introduction des différences centrales et les notations associées.

Par élimination des dérivées entre (1) et (2), il retrouve l'une des formules d'Adams (voir § 3.2)

$$(3) \quad u_1 = u_0 + hv_0 + \frac{1}{2}\Delta hv_{-1} + \frac{5}{12}\Delta^2 hv_{-2} + \frac{3}{8}\Delta^3 hv_{-3} \\ + \frac{251}{720}\Delta^4 hv_{-4} + \frac{95}{288}\Delta^5 hv_{-5} + \dots,$$

en affirmant, sans démonstration, que les coefficients de la série (3) sont ceux du développement en série entière de $-\theta/[(1-\theta)\log(1-\theta)]$. Ainsi, il met en évidence un moyen simple de construire une table des valeurs de la fonction u , dès lors que les premières valeurs sont connues. Dans la pratique, on s'arrête aux différences quatrièmes. La précision est évaluée empiriquement par un test sur une fonction déjà connue : on constate que, pour la fonction tangente, la méthode fournit des valeurs correctes à la précision 10^{-7} .

Tout comme celui de Darwin, le texte de Sheppard semble indépendant de celui d'Adams. Tandis que Darwin ne trouvait que la formule implicite, seule apparaît, cette fois, la formule explicite. Par ailleurs, la démonstration est présentée d'une troisième façon, qui diffère autant de l'intégration terme à terme d'Adams que des séries génératrices de Darwin. Contrairement à ses prédécesseurs, Sheppard ne parle pas de formule de quadrature ou d'intégration, mais de formule de dérivation. Il raisonne en sens inverse : son objectif est d'exprimer la fonction à calculer à partir de ses dérivées, données par l'équation différentielle, et, pour faciliter le calcul, de remplacer les dérivées par les différences finies. Enfin, il affirme que sa découverte est issue d'une réflexion sur certaines méthodes traditionnelles de construction des tables des fonctions usuelles, méthodes qui exploitent les équations fonctionnelles (en particulier différentielles) vérifiées par ces fonctions pour exprimer chaque valeur de la table à partir d'une ou plusieurs des valeurs précédentes. On est loin de l'intégration numérique des équations du second ordre de la physique mathématique ou de la mécanique céleste. Indéniablement, tout porte à penser que, dans un contexte général favorable à son émergence, la méthode multipas fut inventée une troisième fois de façon autonome. Une confirmation de ce fait se trouve dans un article assez connu de L.F. Richardson [1910] : pour la création de méthodes de différences finies destinées aux équations aux dérivées partielles, Richardson déclare qu'il s'est inspiré de Sheppard, sans faire la moindre référence ni à Adams ni à Darwin.

4.3. Les aurores boréales : Størmer (1907)

À partir de 1904, dans le but d'expliquer le phénomène des aurores boréales, le physicien norvégien Carl Størmer¹⁰ s'intéresse aux trajectoires des corpuscules électrisés dans l'espace sous l'action du magnétisme terrestre. Après quelques publications préliminaires [Størmer 1906a,b], il fait paraître en 1907, sous forme de feuilleton, un mémoire de synthèse fort conséquent (139 pages) rassemblant les résultats de ses travaux [Størmer 1907]. Diverses recherches avaient déjà été conduites, à la fin du XIX^e siècle, pour tenter d'expliquer le phénomène des aurores boréales. À la suite de deux expéditions norvégiennes, en 1899–1900 et 1902–1903, Birkeland avait formulé l'hypothèse que l'aurore boréale serait due à une phosphorescence de l'air causée par l'absorption, au pôle magnétique terrestre, de rayons cathodiques émis par les taches du Soleil. Birkeland simula le phénomène avec succès en exposant un petit globe magnétique, censé représenter la Terre, à des radiations cathodiques dans l'air raréfié. Lorsque l'électro-aimant est inactif, on observe une phosphorescence régulière de l'hémisphère tourné vers la cathode ; au contraire, dès que l'électro-aimant est mis en activité, les rayons se concentrent sur deux bandes entourant les pôles magnétiques, qui rappellent précisément les ceintures de fréquence maximum des aurores boréales. L'objectif de Størmer est alors d'expliquer par l'analyse mathématique les expériences de Birkeland. Pour cela, il se propose de déterminer, de manière théorique, les trajectoires des corpuscules électriques venant de l'espace cosmique et déviés sous l'action du champ magnétique terrestre, en faisant l'hypothèse simplificatrice que le champ magnétique terrestre peut être assimilé à celui d'un aimant élémentaire placé au centre de la Terre et de même axe magnétique.

Les équations différentielles des trajectoires

Dans la première partie du mémoire de 1907, Størmer rappelle comment on obtient les équations différentielles des trajectoires. Nous passerons vite sur cette mise en équations, en nous contentant de résumer les résultats utiles à notre propos. Soient x, y, z les coordonnées d'un point de la trajectoire dans un système de coordonnées cartésiennes arbitraires,

¹⁰ Fredrik Carl Mülertz Størmer (1874–1957) fait ses études à l'Université d'Oslo. Il commence sa carrière scientifique par des travaux de mathématiques pures (en théorie des nombres) puis, à partir de 1903, s'oriente vers les mathématiques appliquées. L'étude des aurores boréales l'occupa quasiment jusqu'à sa mort.

X, Y, Z les projections de la force magnétique sur les axes de coordonnées, H_0 la valeur de la force magnétique en un point où la trajectoire lui est normale et ρ_0 la valeur correspondante du rayon de courbure. Le produit $H_0\rho_0$, caractéristique de la nature du corpuscule, peut être déterminé par l'expérience. On choisit pour variable indépendante l'arc s de la trajectoire, compté positivement dans la direction du mouvement. Avec ces notations, les équations de la trajectoire sont¹¹

$$(I) \quad \begin{cases} \pm H_0\rho_0 \frac{d^2x}{ds^2} = Y \frac{dz}{ds} - Z \frac{dy}{ds}, \\ \pm H_0\rho_0 \frac{d^2y}{ds^2} = Z \frac{dx}{ds} - X \frac{dz}{ds}, \\ \pm H_0\rho_0 \frac{d^2z}{ds^2} = X \frac{dy}{ds} - Y \frac{dx}{ds}, \end{cases}$$

avec un signe $+$ ou $-$, selon que la charge du corpuscule est positive ou négative.

Dans le cas où le champ magnétique est dû à un aimant élémentaire de moment M , situé à l'origine, avec son axe le long de l'axe des z et le pôle sud vers les z positifs, X, Y et Z sont les dérivées partielles de Mz/r^3 , où $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. La constante $c = \sqrt{M/(H_0\rho_0)}$ détermine la dimension des trajectoires : il suffit d'étudier celles-ci dans le cas où $c = 1$, les autres cas s'en déduisant par une homothétie de centre l'origine et de rapport c . On peut enfin se limiter aux trajectoires des corpuscules négatifs, si l'on observe que le changement de signe correspond à une réflexion par rapport au plan des yz . Compte tenu de ces réductions, le système (I) prend la forme (III)

$$(III) \quad \begin{cases} \frac{d^2x}{ds^2} = \frac{1}{r^5} \left[3yz \frac{dz}{ds} - (3z^2 - r^2) \frac{dy}{ds} \right], \\ \frac{d^2y}{ds^2} = \frac{1}{r^5} \left[(3z^2 - r^2) \frac{dx}{ds} - 3xz \frac{dz}{ds} \right], \\ \frac{d^2z}{ds^2} = \frac{1}{r^5} \left[3xz \frac{dy}{ds} - 3yz \frac{dx}{ds} \right]. \end{cases}$$

La symétrie par rapport à l'axe des z incite à introduire les coordonnées semi-polaires R et φ (définies par $x = R \cos \varphi$ et $y = R \sin \varphi$). Dans

¹¹ Ici, exceptionnellement, nous avons conservé la numérotation originale des formules afin que l'extrait du mémoire que nous citons ensuite reste cohérent.

le nouveau système de repérage, Størmer réussit à intégrer l'une des équations, qui devient

$$(IV) \quad R^2 \frac{d\varphi}{ds} = 2\gamma + \frac{R^2}{r^3},$$

où γ est une constante d'intégration. Pour le reste du système (III), on obtient

$$(VI) \quad \begin{cases} \frac{d^2 R}{ds^2} = \left(\frac{2\gamma}{R} + \frac{R}{r^3} \right) \left(\frac{2\gamma}{R^2} + \frac{3R^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} \right), \\ \frac{d^2 z}{ds^2} = \left(\frac{2\gamma}{R} + \frac{R}{r^3} \right) \frac{3Rz}{r^5}, \\ \left(\frac{dR}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dz}{ds} \right)^2 = 1 - \left(\frac{2\gamma}{R} + \frac{R}{r^3} \right)^2. \end{cases}$$

En introduisant la fonction $Q = 1 - \left[\frac{2\gamma}{R} + \frac{R}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \right]^2$, Størmer parvient à mettre le système (VI) sous une forme qu'il qualifie d'*élégante*

$$(VII) \quad \begin{cases} \frac{d^2 R}{ds^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial Q}{\partial R}, & \frac{d^2 z}{ds^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial Q}{\partial z}, \\ \left(\frac{dR}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dz}{ds} \right)^2 = Q. \end{cases}$$

Cette forme hamiltonienne permet des analogies mécaniques intéressantes. Grâce à l'intégrale première, qui joue le rôle d'une intégrale de la force vive, le système (VII) ramène la détermination de R et z à la résolution d'une équation différentielle du second ordre et à une quadrature. L'équation (IV) permet ensuite de trouver φ par une nouvelle quadrature. Finalement, une intégration exacte éventuelle du système (III), qui détermine les trajectoires, exigerait l'intégration d'une équation différentielle du second ordre et deux quadratures. Malgré ses efforts, Størmer ne parvient pas à intégrer l'équation du second ordre sur laquelle tout repose, et se trouve contraint de recourir à une intégration numérique directe du système (III).

La méthode d'intégration numérique de Størmer

Le chapitre III du mémoire est plus particulièrement consacré à l'intégration numérique des équations des trajectoires. Voici son introduction :

«Comme je l'ai déjà fait remarquer dans mon mémoire de 1904, il n'est nullement indispensable pour les applications physiques d'intégrer

complètement les équations différentielles (III). En effet, il existe déjà des méthodes puissantes à l'aide desquelles on peut calculer numériquement une courbe intégrale quelconque avec autant d'approximation qu'on veut, seulement il faut avoir assez de temps et de patience, car les calculs sont d'une extrême longueur :

Ce sont les méthodes d'intégration numérique, méthodes souvent employées dans l'astronomie pour calculer les perturbations et qui devraient être employées par les physiciens mathématiques beaucoup plus qu'elles ne l'ont été jusqu'ici.

Pendant plus de trois ans, j'ai entrepris de pareils calculs, aidé par une série d'étudiants en mathématiques. Nous avons d'abord suivi la méthode proposée par H.G. Darwin dans ses calculs des mouvements "des trois corps"; cependant pour notre but, cette méthode n'était pas assez pratique et j'ai simplifié ensuite considérablement le calcul en introduisant des procédés analogues à ceux employés dans la théorie des perturbations» [Størmer 1907, p. 221–222].

Størmer est très clair quant à ses sources : il a eu connaissance du travail de Darwin et, sans doute à partir de là, s'est penché avec soin sur les méthodes de quadrature mécanique des astronomes. Par contre, il ne cite pas le traité de Bashforth et Adams, nouvelle preuve que ce traité a eu une audience quasi nulle dans les années qui suivirent sa parution. Il semble d'ailleurs assez naturel qu'un mémoire comme celui de Darwin, publié dans une revue relativement connue comme les *Acta mathematica*, soit tombé plus facilement sous les yeux d'un chercheur qu'un traité publié isolément. Størmer a donc essayé, dans un premier temps, les méthodes connues de ses prédécesseurs, avant d'être contraint, de par la nature de son problème, d'en imaginer une plus pratique. Pour y voir clair, décrivons d'abord les grandes étapes du calcul. Pour commencer, on intègre numériquement le système (VI) en appliquant la nouvelle méthode, ce qui conduit à la connaissance des fonctions R et z sous forme de tables. On calcule ensuite une table de la fonction φ , à partir de l'équation (IV), par quadrature numérique selon la formule de Simpson. On peut enfin dresser des tables de valeurs des coordonnées ($x = R \cos \varphi$, $y = R \sin \varphi$, z), et construire point par point une trajectoire approchée.

Examinons de plus près la première étape du processus, la seule qui nous intéresse ici. Un point de départ (s_0, R_0, z_0) étant donné, on considère

une série de valeurs équidistantes de s

$$s_\lambda = s_0 + \lambda \Delta s, \quad (\lambda = \dots, n-2, n-1, n, n+1, n+2, \dots)$$

et on pose $R_\lambda = R(s_\lambda)$, $z_\lambda = z(s_\lambda)$, $\rho_\lambda = R''(s_\lambda)(\Delta s)^2$ et $\zeta_\lambda = z''(s_\lambda)(\Delta s)^2$. L'objectif est de construire des tables des R_λ et des s_λ . Supposons qu'on connaisse déjà les deux tableaux ci-dessous et qu'on veuille calculer les valeurs suivantes R_{n+1} et z_{n+1} .

$$\begin{array}{c} \vdots \\ s_{n-3} \\ s_{n-2} \\ s_{n-1} \\ s_n \end{array} \left| \begin{array}{cc} R_{n-3} & \Delta^2 R_{n-4} \\ & \Delta R_{n-3} \\ R_{n-2} & \Delta^2 R_{n-3} \\ & \Delta R_{n-2} \\ R_{n-1} & \Delta^2 R_{n-2} \\ & \Delta R_{n-1} \\ R_n & \end{array} \right| \begin{array}{ccc} \rho_{n-3} & \Delta^2 \rho_{n-4} & \Delta^4 \rho_{n-5} \\ & \Delta \rho_{n-3} & \Delta^3 \rho_{n-4} \\ \rho_{n-2} & \Delta^2 \rho_{n-3} & \\ & \Delta \rho_{n-2} & \\ \rho_{n-1} & & \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \vdots \\ s_{n-3} \\ s_{n-2} \\ s_{n-1} \\ s_n \end{array} \left| \begin{array}{cc} z_{n-3} & \Delta^2 z_{n-4} \\ & \Delta z_{n-3} \\ z_{n-2} & \Delta^2 z_{n-3} \\ & \Delta z_{n-2} \\ z_{n-1} & \Delta^2 z_{n-2} \\ & \Delta z_{n-1} \\ z_n & \end{array} \right| \begin{array}{ccc} \zeta_{n-3} & \Delta^2 \zeta_{n-4} & \Delta^4 \zeta_{n-5} \\ & \Delta \zeta_{n-3} & \Delta^3 \zeta_{n-4} \\ \zeta_{n-2} & \Delta^2 \zeta_{n-3} & \\ & \Delta \zeta_{n-2} & \\ \zeta_{n-1} & & \end{array}$$

On calcule d'abord ρ_n et ζ_n à l'aide des équations différentielles. Celles-ci expriment en effet $R''(s_n)$ et $z''(s_n)$ en fonction de R_n et z_n , qui sont connus. Par des soustractions, on complète ensuite les tables de différences de ρ et ζ , en y inscrivant les valeurs de $\Delta \rho_{n-1}$, $\Delta^2 \rho_{n-2}$, $\Delta^3 \rho_{n-3}$, $\Delta^4 \rho_{n-4}$, $\Delta \zeta_{n-1}$, $\Delta^2 \zeta_{n-2}$, $\Delta^3 \zeta_{n-3}$, $\Delta^4 \zeta_{n-4}$. Le problème est alors de trouver R_{n+1} et z_{n+1} par une formule de quadrature double adaptée. Dans ce but, Størmer développe la différence seconde

$$\Delta^2 R_{n-1} = R_{n+1} - 2R_n + R_{n-1} = R(s_n + \Delta s) + R(s_n - \Delta s) - 2R(s_n)$$

d'après la formule de Taylor, puis exprime les dérivées en fonction des différences finies pour aboutir à

$$\Delta^2 R_{n-1} = \rho_n + \frac{1}{12} \Delta^2 \rho_{n-1} - \frac{1}{240} \Delta^4 \rho_{n-2} + \dots$$

Cette série ne convient pas car elle fait intervenir des différences qui ne sont pas encore dans le tableau. Pour se ramener à des différences connues, on observe que

$$\Delta^2 \rho_{n-1} = \Delta^2 \rho_{n-2} + \Delta^3 \rho_{n-2} = \Delta^2 \rho_{n-2} + \Delta^3 \rho_{n-3} + \Delta^4 \rho_{n-3},$$

d'où le nouveau développement

$$\Delta^2 R_{n-1} = \rho_n + \frac{1}{12} [\Delta^2 \rho_{n-2} + \Delta^3 \rho_{n-3} + \Delta^4 \rho_{n-3}] - \frac{1}{240} \Delta^4 \rho_{n-2} + \dots$$

Si l'on néglige les différences cinquièmes, ce qui revient à considérer que les différences quatrièmes sont constantes, on peut écrire $\Delta^4 \rho_{n-2} = \Delta^4 \rho_{n-3} = \Delta^4 \rho_{n-4}$ et obtenir une formule de quadrature approchée ne faisant enfin intervenir que des différences connues

$$\Delta^2 R_{n-1} = \rho_n + \frac{1}{12} [\Delta^2 \rho_{n-2} + \Delta^3 \rho_{n-3} + \Delta^4 \rho_{n-4} - \frac{1}{20} \Delta^4 \rho_{n-4}].$$

L'expression est laissée sous cette forme, mieux adaptée au calcul à la main que la forme réduite

$$\Delta^2 R_{n-1} = \rho_n + \frac{1}{12} \Delta^2 \rho_{n-2} + \frac{1}{12} \Delta^3 \rho_{n-3} + \frac{19}{240} \Delta^4 \rho_{n-4}.$$

Ainsi, par un bricolage peu élégant mais efficace, Størmer trouve — peut-être sans en être conscient — les premiers termes d'une des formules de quadrature double associées à la série de Gregory-Newton (voir § 1.3, formule (4)). À partir de là, il est possible de calculer successivement $\Delta^2 R_{n-1}$, ΔR_n et R_{n+1} puis, de façon analogue, $\Delta^2 z_{n-1}$, Δz_n et z_{n+1} . Il reste à dire quelques mots sur la détermination des premières valeurs. Pour cela, Størmer met au point un algorithme de démarrage différent à la fois de celui d'Adams et de celui de Darwin : sur l'intervalle initial $[s_0, s_0 + 4\Delta s]$, il réalise en fait une quadrature mécanique selon un schéma classique d'approximations successives, en s'inspirant directement des techniques traditionnelles des astronomes.

Finalement, la démarche de Størmer se situe à l'opposé de l'usage en vigueur depuis Euler. Jusque-là, l'intégration numérique des équations différentielles de la physique avait en général été réalisée en ramenant les équations du second ordre à des équations du premier ordre, y compris lors des premières méthodes multiples, comme nous l'avons vu chez Adams et chez Darwin. Størmer préfère intégrer directement les

équations du second ordre. On peut y voir un double avantage : d'une part, le volume global de calcul est réduit (remplacer une équation du second ordre par deux équations du premier ordre introduirait une table de différences supplémentaire à tenir à jour) ; d'autre part, par rapport aux formules d'Adams, la formule de quadrature double de Størmer contient des coefficients plus simples, qui se prêtent bien mieux au calcul à la main.

Réalisation des calculs

Nous avons déjà vu que, comme ceux de Darwin, les calculs ont duré plus de trois ans. Pour les mener à terme, Størmer s'est fait aider par une série d'étudiants en mathématiques. Diverses notes nous permettent d'en savoir plus :

«*Le calcul a été fait par un de mes assistants, Mlle M. Geelmuyden*» [Størmer 1907, p. 151].

«*Le calcul de ces faisceaux a été fait pour la plus grande part par mes assistants Mlles A. Hals et G. Ruud et par MM. Olden, Bjerke et Vegard*» [*Ibid.*, p. 235].

«*La plus grande partie du travail a été exécutée par un de mes assistants, Mlle G. Ruud ; quelques courbes ont été calculées par Mlle Geelmuyden et M. Krekling*» [*Ibid.*, p. 237].

Ainsi, au moins sept étudiants ont été mobilisés pour ces calculs de trajectoires par intégration numérique (nous ne mentionnons pas ceux qui ont été utilisés à des calculs directs dans des cas particuliers où les équations sont intégrables). Comme pour les calculs de Bashforth et de Darwin, un financement a dû être demandé : «*La majeure partie de la dépense a été fournie par "la fondation de Fritjof Nansen pour l'avancement de la science"*» [*Ibid.*, p. 222]. Enfin, par des remarques ici et là, Størmer tient à attirer l'attention sur l'énormité du travail accompli :

«*En tout nous avons calculé plus de 120 trajectoires différentes, travail immense qui a exigé plus de 4500 heures*» [*Ibid.*, p. 222].

«*Quand on est suffisamment exercé, on calcule environ trois points (R, z) par heure*» [*Ibid.*, p. 234].

«*En moyenne, nous avons calculé 95 points pour chaque courbe, ce qui correspond à un travail de calcul de plus de 700 heures*» [*Ibid.*, p. 237]. (Il s'agit ici de courbes particulières aboutissant à l'origine.)

Dans une communication faite ultérieurement par Størmer au Congrès

de Strasbourg en 1920, nous apprenons que «*les calculs originaux, comprenant environ 3.000 pages in-folio avec 358 grandes planches, et encore 3.800 pages de développements mathématiques correspondants, appartiennent maintenant à la collection de manuscrits de la Bibliothèque de l'Université, Christiania*» [Størmer 1921, p. 243, note (1)]. Les résultats des calculs ont été publiés dans des mémoires séparés [Størmer 1913]. À côté des tables numériques, on trouve des tracés géométriques permettant de visualiser les projections planes de certaines trajectoires spatiales. Des maquettes ont même été construites pour représenter les trajectoires en trois dimensions. La photographie de l'une d'elles est insérée dans le mémoire de 1907 (voir fig. 6). Dans une des notes publiées par Størmer dans les *Comptes rendus de l'Académie des sciences* [1906b, t. 143, p. 140], on trouve aussi deux photographies côte à côte permettant d'avoir une vision stéréoscopique de la même maquette.

Les calculs monstrueux réalisés par l'équipe de Størmer ont heureusement permis d'obtenir des conclusions satisfaisantes. Le calcul numérique d'un grand nombre de trajectoires est en bon accord tant avec les expériences de Birkeland qu'avec les observations des aurores boréales. En effet, les trajectoires théoriques rencontrent l'atmosphère à l'intérieur de deux zones limitées par des cercles ayant leurs centres sur l'axe magnétique, l'une dans les régions arctiques, l'autre dans les régions antarctiques. Il y a toutefois un léger désaccord entre les latitudes calculées et les latitudes réelles, mais Størmer pense qu'il peut être attribué à l'hypothèse simplificatrice consistant à remplacer le champ magnétique de la Terre par le champ d'un aimant élémentaire. Plusieurs détails des phénomènes sont aussi expliqués, par exemple : «*Il était fort difficile d'expliquer par les théories anciennes le fait que les aurores peuvent apparaître pendant la nuit ; ce fait est une conséquence immédiate de notre théorie. En effet, nous avons vu comment les corpuscules venant du soleil peuvent faire des circuits plus ou moins complets autour de la terre et arriver à l'atmosphère en des endroits restant dans la nuit*» [Størmer 1907, p. 330]. On le constate effectivement sur la maquette : certains rayons frappent la Terre sur la face opposée au Soleil.

5. COMPARAISON ET DIFFUSION DES MÉTHODES MULTIPLES

Dans les paragraphes précédents, nous avons présenté de façon relative-

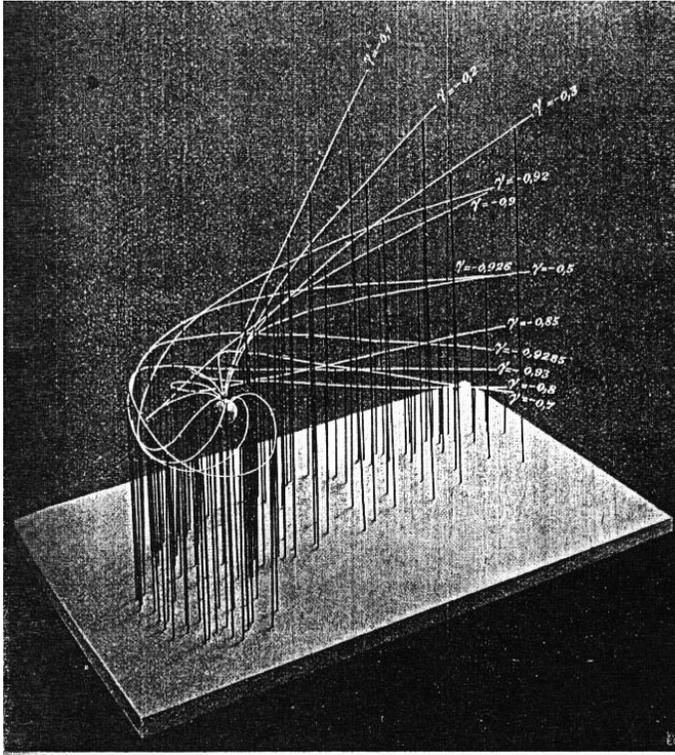


Figure 6. Trajectoires des rayons cosmiques expliquant le phénomène des aurores boréales [Størmer 1907, p. 243]

ment détaillée les premiers exemples de méthodes multipas qui surgirent, rappelons-le, entre 1855 et 1907. Cette étude, essentiellement descriptive et chronologique, était motivée par la volonté de tirer de l'oubli des textes qui, à part peut-être celui de Bashforth et Adams, semblent aujourd'hui injustement méconnus. Nous en avons profité pour broser un premier panorama de la situation et esquisser quelques analyses. Il est maintenant opportun d'y revenir de manière synthétique et comparative.

5.1. Origine et comparaison des méthodes multipas

Pour aborder un problème différentiel, on peut se ramener soit à un système d'équations du premier ordre, soit à un système d'équations du

second ordre ne faisant pas intervenir les dérivées premières. Quand on désire travailler par pas avec une équation du premier ordre $y' = f(x, y)$, on la remplace par l'équation aux différences

$$(1) \quad \Delta y_0 = y_1 - y_0 = \int_{x_0}^{x_1} f(u, y(u)) du.$$

Dans le cas d'une équation du second ordre du type $y'' = f(x, y)$, l'usage classique, afin de ne pas faire intervenir les valeurs de la dérivée première, est de considérer l'équation aux différences

$$(2) \quad \begin{aligned} \Delta^2 y_{-1} &= y_1 - 2y_0 + y_{-1} \\ &= \int_{x_0}^{x_{-1}} du \int_{x_0}^u f(v, y(v)) dv + \int_{x_0}^{x_1} du \int_{x_0}^u f(v, y(v)) dv. \end{aligned}$$

Dans (1) et (2), il reste à calculer de façon approchée les intégrales du second membre. Supposons qu'on connaisse déjà les valeurs de y en des points $x_{-n}, \dots, x_{-1}, x_0$. Dans les méthodes explicites, on remplace la fonction $u \mapsto f(u, y(u))$ par le polynôme d'interpolation de Gregory-Newton qui coïncide avec elle aux points $x_{-n}, \dots, x_{-1}, x_0$. En substance, c'est ce que font Adams et Sheppard pour le premier ordre, Størmer pour le second ordre. Les méthodes explicites, très naturelles, permettent un calcul direct de la nouvelle valeur y_1 . Par contre, dans les méthodes implicites, on fait intervenir y_1 dès le calcul de quadrature, en considérant cette fois le polynôme d'interpolation de Gregory-Newton aux points $x_{-n+1}, \dots, x_0, x_1$. La nouvelle valeur y_1 apparaît alors implicitement comme solution d'une équation à une seule inconnue. C'est le choix conscient d'Adams et Darwin dans le cas du premier ordre. Pour le second ordre, Bond et Cowell pratiquent aussi cette méthode sans le savoir, tout simplement parce que les deux premiers termes de la formule de quadrature double de Newton-Stirling sont les mêmes que ceux de la formule correspondante de Gregory-Newton! Dans la suite, nous rattacherons tout de même les travaux de Bond et Cowell aux méthodes multipas car, tant qu'on s'en tient aux différences secondes, rien ne permet de les distinguer des autres. Le tableau récapitulatif suivant montre que les quatre possibilités envisageables à partir de la série d'interpolation de Gregory-Newton (quadrature simple ou double, explicite ou implicite) ont été effectivement

explorées (plus ou moins consciemment) entre 1849 et 1908 :

Équation du premier ordre
 $y' = f(x, y)$, quadrature simple

<i>Quadrature explicite par extrapolation</i>	Adams (1855); Sheppard (1899) $\Delta y_0 = \Delta x (f_0 + \frac{1}{2} \Delta f_{-1} + \frac{5}{12} \Delta^2 f_{-2} + \dots)$
<i>Quadrature implicite par interpolation</i>	Adams (1855); Darwin (1897) $\Delta y_0 = \Delta x (f_1 - \frac{1}{2} \Delta f_0 - \frac{1}{12} \Delta^2 f_{-1} + \dots)$

Équation du second ordre
 $y'' = f(x, y)$, quadrature double

<i>Quadrature explicite par extrapolation</i>	Størmer (1907) $\Delta^2 y_{-1} = (\Delta x)^2 (f_0 + \frac{1}{12} \Delta^2 f_{-2} + \dots)$
<i>Quadrature implicite par interpolation</i>	Bond (1849); Cowell (1908) $\Delta^2 y_{-1} = (\Delta x)^2 (f_1 - \Delta f_0 + \frac{1}{12} \Delta^2 f_{-1} + \dots)$

Tableau 1. Les quatre façons d'intégrer la série de Gregory-Newton

On peut se demander pourquoi cette application directe de la formule de Gregory-Newton aux équations différentielles n'a pas été imaginée beaucoup plus tôt. Il y a une explication simple. Pour le calcul des intégrales, les savants ont vite abandonné la série de Gregory-Newton au profit de séries convergeant plus rapidement, telles les séries de Newton-Stirling ou de Newton-Bessel. L'inconvénient de ces nouvelles séries, en ce qui concerne les équations différentielles, est de faire intervenir les différences centrales et donc, comme nous l'avons souligné à plusieurs reprises, plusieurs valeurs de y qu'on ne connaît pas encore. Si l'on cherche à appliquer les formules correspondantes de quadrature numérique aux équations aux différences (1) et (2), on aboutit à des systèmes d'équations à plusieurs inconnues déterminant implicitement et simultanément plusieurs valeurs de y . Cet état de fait a conduit les astronomes à développer aveuglément de lourds schémas d'approximations successives, tout en empêchant les plus clairvoyants, tels Legendre, de concevoir les méthodes multipas. Pour progresser dans le domaine des équations

différentielles, il fallait revenir aux sources, c'est-à-dire à l'antique formule de Gregory-Newton. Paradoxalement, on peut dire que les progrès réalisés dans le calcul numérique des intégrales ont constitué un obstacle pour l'intégration numérique des équations différentielles. Plus les formules de quadrature étaient performantes pour les intégrales, moins elles l'étaient pour les équations différentielles ! Grâce à la formule de Gregory-Newton, on revient aussitôt à un calcul par pas simple et naturel, où chaque nouvelle valeur est calculée à partir des précédentes, soit explicitement, soit implicitement mais, cette fois, à partir d'une équation numérique à une seule inconnue. (La préférence, surprenante *a priori*, pour les méthodes implicites se justifie empiriquement par une meilleure précision et une meilleure stabilité.)

Si l'on exclut la tentative embryonnaire de Bond, en 1849, et le travail non encore publié d'Adams, en 1855, on peut affirmer que les méthodes multipas sont créées plusieurs fois, de façon indépendante, dans une assez courte période débutant en 1883. Ce développement se fait parallèlement aux méthodes de Runge-Heun-Kutta, qui voient le jour en Allemagne entre 1894 et 1901. Les deux courants sont complètement indépendants, quoiqu'ayant des buts communs : en fin de compte, il s'agit chaque fois d'adapter les quadratures numériques aux équations différentielles, afin de dépasser l'ancienne méthode d'Euler avec développement de Taylor. Les solutions trouvées pour éviter le calcul des dérivées successives — hantise suprême des calculateurs — sont très différentes : *pas divisés* pour les allemands, *pas multiples* pour les anglais. Il semble pertinent de comparer l'efficacité des deux démarches selon le critère proposé par Runge en 1895 : l'ordre d'une méthode par pas est défini à partir du nombre de termes communs dans les développements de Taylor de la vraie valeur $y(x_1) = y(x_0 + \Delta x)$ et de la valeur approchée $y_1 = y_0 + \Delta y_0$. De plus, la partie principale de la différence entre valeur exacte et valeur approchée fournit une estimation de l'erreur de méthode pour un pas. À titre de comparaison, rappelons que, dans les méthodes classiques de Runge-Kutta (obtenues par Kutta, en 1901, après bien des efforts), les développements de Taylor coïncident jusqu'au quatrième ordre (autrement dit, l'erreur de méthode élémentaire pour un pas est du cinquième ordre). Pour simplifier l'écriture, notons le développement de Taylor de la vraie valeur sous la

forme

$$y(x_1) = y_0 + A\Delta x + B\frac{(\Delta x)^2}{2} + C\frac{(\Delta x)^3}{6} + D\frac{(\Delta x)^4}{24} \\ + E\frac{(\Delta x)^5}{120} + F\frac{(\Delta x)^6}{720} + G\frac{(\Delta x)^7}{5040} + \dots$$

Dans le tableau 2 (voir page suivante), nous donnons, pour chacune des formules approchées effectivement utilisées dans les grandes applications de la seconde moitié du XIX^e siècle, la partie principale de l'erreur $y(x_1) - y_1$.

<i>Application</i>	<i>Formule approchée</i>	<i>Erreur</i>
Bashforth (1855)	$y_1 = y_0$ $+ \Delta x(f_1 - \frac{1}{2}\Delta f_0 - \frac{1}{12}\Delta^2 f_{-1}$ $- \frac{1}{24}\Delta^3 f_{-2} - \frac{19}{720}\Delta^4 f_{-3})$	$-\frac{3}{160}F(\Delta x)^6 + \dots$
Darwin (1897)	$y_1 = y_0$ $+ \Delta x(f_1 - \frac{1}{2}\Delta f_0 - \frac{1}{12}\Delta^2 f_{-1}$ $- \frac{1}{24}\Delta^3 f_{-2})$	$-\frac{19}{720}E(\Delta x)^5 + \dots$
Sheppard (1899)	$y_1 = y_0$ $+ \Delta x(f_0 + \frac{1}{2}\Delta f_{-1} + \frac{5}{12}\Delta^2 f_{-2}$ $+ \frac{3}{8}\Delta^3 f_{-3} + \frac{251}{720}\Delta^4 f_{-4})$	$+\frac{95}{288}F(\Delta x)^6 + \dots$
Størmer (1907)	$y_1 = 2y_0 - y_{-1}$ $+ (\Delta x)^2(f_0 + \frac{1}{12}\Delta^2 f_{-2}$ $+ \frac{1}{12}\Delta^3 f_{-3} + \frac{19}{240}\Delta^4 f_{-4})$	$+\frac{3}{40}G(\Delta x)^7 + \dots$
Cowell (1908)	$y_1 = 2y_0 - y_{-1}$ $+ (\Delta x)^2(f_1 - \Delta f_0 + \frac{1}{12}\Delta^2 f_{-1})$	$-\frac{1}{240}F(\Delta x)^6 + \dots$

Tableau 2. Ordre et erreur des méthodes multipas

On retrouve, sur ce tableau, les phénomènes qui ont guidé nos utilisateurs dans le choix d'une méthode, chaque fois qu'ils en ont comparé

plusieurs : pour un calcul poussé jusqu'au même ordre de différences finies, les méthodes implicites sont plus précises que les méthodes explicites (remarqué par Adams) et l'emploi d'une équation du second ordre plus efficace que celui d'une équation du premier ordre (souligné par Størmer). On voit aussi que, dès 1855, avait émergé la trame générale de méthodes de différences plus précises que celles de Runge-Heun-Kutta, qui devaient voir le jour quarante ans plus tard. De plus, le principe des algorithmes multipas permet d'obtenir sans effort des formules aussi précises que l'on veut : il suffit de prendre en compte de nouveaux termes dans les séries de différences. Que l'on pense, par comparaison, à l'extrême difficulté de mise au point d'une méthode de Kutta, qui demande, pour la détermination des coefficients, la résolution d'un système non linéaire à un grand nombre d'inconnues. Le seul inconvénient pratique des méthodes multipas réside évidemment dans la nécessité de déterminer des valeurs de démarrage par un autre procédé, mais cet inconvénient est négligeable quand on a ensuite un très grand nombre de valeurs à calculer par la méthode multipas proprement dite.

Notons que dans aucun des textes étudiés n'apparaît l'estimation de l'ordre de l'erreur telle que nous l'avons faite à la manière de Runge. Au lieu de ce calcul, pourtant à la portée de tous les savants rencontrés, on ne trouve que des affirmations vagues selon lesquelles l'erreur est de l'ordre des premières différences négligées. Ce n'est que tardivement, sans doute sous l'influence des articles de Runge, que l'on s'intéressera de plus près à cette erreur. Par exemple, il faut attendre 1920 pour que Størmer, dans sa communication au Congrès de Strasbourg, prouve que l'erreur de sa méthode est un «*infinitement petit du septième ordre*» [Størmer 1921, p. 247], avec le coefficient $3/40$ de notre tableau. En fait, il faudra attendre le milieu du XX^e siècle pour que le calcul d'erreur fasse des progrès décisifs. Auparavant, l'estimation de l'erreur est toujours empirique : on apprécie le nombre probable de décimales correctes en testant la méthode sur des problèmes simples dont la solution exacte est connue (Darwin et Sheppard nous racontent explicitement leurs essais ; les autres ne disent rien de précis à ce sujet, mais tout laisse à penser qu'ils eurent un comportement semblable).

Nous pouvons faire plusieurs remarques à propos de ces méthodes extrêmement précises. D'abord un constat sur la nationalité des décou-

vreurs : Bond est américain ; Bashforth, Adams, Sheppard, Darwin, Cowell et Crommelin sont britanniques ; quant à Størmer, c'est un nordique qui s'inspire directement de Darwin. Si les méthodes de Runge-Heun-Kutta sont issues de la tradition germanique, en particulier des travaux de Euler et Gauss, les méthodes multipas sont, elles, purement anglaises : elles naissent d'un retour aux séries d'interpolation de Gregory-Newton. Ensuite, un second constat quant aux problèmes : il s'agit soit de problèmes de mécanique céleste (Bond, Darwin, Cowell), soit de problèmes de physique mathématique analogues à ceux de la mécanique céleste, pour lesquels les physiciens font appel, directement (Bashforth) ou indirectement (Størmer), à des astronomes. Lorsque ces deux conditions sont réunies (problème de type mécanique céleste résistant aux méthodes classiques, astronome anglais ayant une solide culture de l'interpolation et des différences finies), une méthode multipas peut apparaître. Sans vouloir dénier à Adams la primeur de la découverte, ni sous-estimer la possible influence de ses travaux sur ses successeurs, il semble que la recette ait fonctionné plusieurs fois au tournant du siècle. Disons que les méthodes multipas sont à la fois une idée originale d'Adams et une œuvre collective des astronomes britanniques.

5.2. Un produit caractéristique des mathématiques appliquées

Un autre thème doit être abordé pour caractériser la naissance des méthodes multipas : l'aspect proprement numérique. En quoi ces méthodes correspondaient-elles aux conceptions et aux techniques de calcul en vigueur dans la seconde moitié du XIX^e siècle ?

L'évolution du concept de fonction a été abondamment étudiée. Les historiens ont analysé l'émergence, vers le milieu du XIX^e siècle, de la notion la plus générale d'une fonction y d'une variable x , conçue comme une correspondance arbitraire entre valeurs de x et valeurs de y , sans que cette correspondance s'exprime nécessairement par une loi analytique. Ce concept de fonction, abstrait, idéal, a été d'une grande fécondité mathématique : il a permis de passer de l'étude de fonctions particulières (à partir de la forme de leur expression analytique) à l'étude de classes générales de fonctions (caractérisées par un ensemble de propriétés données). Il est pourtant vraisemblable que, à la même époque, le nouveau concept de fonction n'ait eu aucune influence auprès des utilisateurs des mathématiques, qu'ils fussent physiciens ou astronomes.

Dans les applications qui nous intéressent, une fonction apparaît toujours en tant que solution d'une équation différentielle. La démarche qui est systématiquement essayée d'abord, vise à exprimer la fonction explicitement. En cas d'échec, on a recours à l'intégration numérique : il s'agit de construire, par un procédé quelconque, une table de valeurs d'une fonction condamnée à demeurer cachée. On pourrait voir là une sorte de régression, un retour au concept primitif de fonction que l'on a décelé dans les tables antiques, telles les tables de racines carrées des babyloniens ou les tables de cordes de Ptolémée. Réduire à une table une fonction définie par une formule ou une équation, c'est passer d'une information complète, mais inutilisable en pratique, à une information partielle, mais directement exploitable (que l'on songe aux éphémérides des astronomes). Au niveau des applications et du calcul numérique, on peut avancer que ce *concept tabulaire de fonction* a sans doute joué un rôle fondamental largement mésestimé. Depuis l'antiquité, une immense culture s'est peu à peu développée autour de la confection des tables numériques, de l'interpolation, des différences finies, ainsi que sur la manipulation de fonctions données sous forme de tables. Dans la pratique, c'était bien le plus souvent à partir de tables qu'il fallait interpoler, extrapoler, inverser, dériver, intégrer les fonctions qui se présentaient. Si cette culture tabulaire semble dominante à peu près jusqu'au milieu du XX^e siècle, on constate que sa place est considérablement réduite dans les ouvrages d'analyse numérique plus récents. En effet, avec l'introduction des calculateurs électroniques, le point de vue a vite changé : il est probable que, dans l'esprit d'un utilisateur d'aujourd'hui, une fonction n'est plus une table mais plutôt un algorithme ou un programme d'ordinateur fonctionnant comme une boîte noire et renvoyant, à la demande, une valeur de la fonction lorsqu'on entre une valeur de la variable.

Dans les applications que nous avons étudiées, qu'il s'agisse de la forme des gouttes de liquide de Bashforth, des orbites périodiques de Darwin, des trajectoires des corpuscules électrisés de Størmer, des éphémérides de la comète de Halley calculées par Clairaut et Cowell ou, plus généralement, du calcul des perturbations spéciales de Gauss et Encke, l'objectif est toujours de construire une table. Chez Sheppard, cas particulier un peu à part, il s'agit même d'apprendre à construire directement des tables, indépendamment de toute application. Si l'on songe que la culture de

l'interpolation et des différences finies était par excellence l'apanage des astronomes, il n'est pas surprenant, à nouveau, de retrouver des astronomes à la source de toutes les méthodes multipas.

Nous faisons ainsi le constat que les méthodes multipas, tout comme les anciennes quadratures mécaniques par approximations successives, sont un pur produit des mathématiques appliquées et du concept tabulaire de fonction. Elles sont toujours conçues en situation, pour répondre à un besoin pratique. Elles ont pour but de faciliter la construction de tables de valeurs des solutions, en s'appuyant sur le calcul des différences finies. Par opposition, les méthodes concurrentes de Runge-Heun-Kutta sont engendrées à la même époque de manière plus théorique, hors contexte : ni Runge, ni Heun, ni Kutta ne citent la moindre application d'envergure ; on trouve tout au plus dans leurs articles quelques calculs, en guise de tests, portant sur des équations très simples du premier ordre. Les méthodes multipas, au contraire, naissent dans la confrontation avec des systèmes complexes de plusieurs équations du premier ou du second ordre. Les méthodes de Runge-Heun-Kutta, imaginées par des théoriciens, ne sont pas adaptées au calcul tabulaire : elles introduisent des nouvelles valeurs des variables en dehors des pas de subdivision et nécessitent donc d'interpoler de nouvelles valeurs des fonctions à partir de celles de la table initiale. Au contraire, les méthodes multipas, pensées par des mathématiciens appliqués qui étaient avant tout des calculateurs, sont sans doute ce qu'il est possible de faire de mieux lorsqu'on travaille avec des tables.

Si les méthodes multipas sont nées en vue des applications, entre les mains d'habiles calculateurs, une question ne peut manquer d'être posée : quel est leur véritable statut au sein des mathématiques ? L'état d'esprit des mathématiciens « purs » à leur égard a été décrit récemment par O. Buneman de la façon suivante : « *Computations were practical (and respectable) only for the evaluation of series. Finite difference calculus made its way very slowly during the first few decades of this century. Størmer struggled hard calculating orbits of charged particles in the earth's magnetic field [...] for which he earned pity, if not ridicule* » [1990, p. 57]. Effectivement, les mathématiciens appliqués qui se lancent dans de fastidieux calculs de différences finies semblent souffrir parfois d'un complexe et éprouvent le besoin de se justifier auprès de leurs collègues

mathématiciens purs. C'est ainsi qu'en 1912, alors qu'il présidait le cinquième Congrès international des mathématiciens, à Cambridge, Darwin a cru bon de revenir sur la différence entre ses recherches personnelles et celles de Poincaré :

«My own work [...] cannot be said to involve any such skill at all, unless you describe as skill the procedure of a housebreaker who blows in a safe door with dynamite instead of picking the lock. It is thus by brutal force that this tantalising problem has been compelled to give up a few of its secrets; and, great as has been the labour involved, I think it has been worth while. [...] To put at their lowest the claims of this clumsy method, which may almost excite the derision of the pure mathematician, it has served to throw light on the celebrated generalisations of Hill and Poincaré.

I appeal, then, for mercy to the applied mathematician, and would ask you to consider in a kindly spirit the difficulties under which he labours. If our methods are often wanting in elegance and do but little to satisfy that aesthetic sense of which I spoke before, yet they constitute honest attempts to unravel the secrets of the universe in which we live» (cité dans [Kopal 1971, p. 584]).

5.3. L'apogée du calcul à la main

Aux XVIII^e et XIX^e siècles, de grands efforts sont entrepris, avec l'aide des gouvernements, pour l'élaboration de tables en tous genres, indispensables aux astronomes, physiciens, artilleurs, navigateurs, etc. Dans cet ordre d'idées, nous avons vu comment Bashforth, Darwin ou Størmer obtiennent des subventions, publiques ou privées, pour réaliser leurs gigantesques calculs. De façon générale, le calcul se fait à la main, sur des feuilles de papier, avec l'aide des tables de logarithmes. Des machines à calculer, dans la lignée de celles de Pascal ou de Leibniz, existent pour faciliter les opérations arithmétiques élémentaires, mais semblent peu répandues. En étroite liaison avec le problème du calcul des tables, Charles Babbage conçoit, à partir de 1821, mais sans pouvoir la réaliser, une machine à différences capable d'automatiser le calcul des valeurs successives de fonctions algébriques simples en utilisant la méthode des différences finies. On peut se demander pourquoi ce type de machine n'a pas été adapté très tôt à l'intégration des équations différentielles.

En fait, les calculateurs étaient rompus à l'usage des tables, des

logarithmes, des règles à calcul et c'est sans doute par inertie qu'ils rejetèrent pendant longtemps des machines qui auraient pu être rapidement opérationnelles. Les idées de Babbage mirent du temps à faire leur chemin. En 1853, les suédois G. et E. Scheutz construisirent une première machine, capable de calculer des logarithmes, des tables mathématiques et astronomiques, et même d'imprimer les résultats. En 1910, Henri Babbage présenta devant la Royal Astronomical Society une machine enfin conforme aux vœux de son père, c'est-à-dire susceptible d'être programmée. Il était trop tard pour nos astronomes et physiciens, qui avaient dû effectuer les calculs nécessités par les premières méthodes multipas de la manière la plus traditionnelle, à la main et avec les tables de logarithmes.

Les calculs de grandes tables ne peuvent être le fruit d'un individu isolé. Un des premiers exemples de division du travail selon la théorie économique d'Adam Smith est peut-être le calcul des tables logarithmiques et trigonométriques à douze chiffres, en fonction de la division décimale, décidé en 1792 à la suite de l'adoption du système métrique. G. Riche de Prony, à qui fut confiée la responsabilité du projet, répartit l'exécution des calculs entre plusieurs centaines de personnes ayant une faible formation mathématique [Grattan-Guinness 1990]. Auparavant, Legendre avait mis au point des formules adaptées, fondées sur le calcul par différences, et ne faisant intervenir que des opérations arithmétiques élémentaires. Ainsi que le rapporte J. Mosconi, Babbage s'est inspiré de ces travaux français pour réfléchir à l'automatisation des calculs : *« Dans une lettre au chimiste H. Davy, président de la Royal Society, Babbage analyse la division du travail dans la construction de tables, ainsi qu'il l'avait perçue dans les travaux de la commission française ; ce travail devait être partagé en trois sections ; la première, confiée à quelques mathématiciens de premier plan, se consacrait au choix, parmi les expressions d'une fonction, de celle qui était traduisible le plus facilement en calculs numériques ; la seconde traduisait l'expression choisie en une suite d'opérations élémentaires ; la troisième, la plus nombreuse, effectuait les opérations arithmétiques élémentaires et donnait ces résultats à la deuxième section »* [1983, p. 71].

Les calculs organisés par Adams, Darwin ou Størmer sont conformes à cette description, tout comme d'ailleurs le calcul plus ancien de Clairaut. Chacun des quatre a soigneusement préparé les formules de calcul et

la décomposition en opérations élémentaires, afin que l'exécution puisse être confiée à une équipe de calculateurs. Toutefois, contrairement à la position de Prony ou Babbage en faveur de calculateurs peu qualifiés, ils ont souvent préféré travailler avec des collègues ou étudiants ayant une solide formation mathématique (c'était la même chose pour Gauss, qui faisait calculer son étudiant Encke). Avec ces calculs gigantesques, mobilisant plusieurs personnes à temps plein pendant plusieurs années, nous atteignons les limites du calcul à la main. Grâce à l'ingéniosité des astronomes, on a trouvé, pour l'intégration numérique des équations différentielles, les formules fondées sur le calcul des différences, à la fois les plus précises et les plus pratiques. Tout est ramené, dans la mesure du possible, à des additions et des soustractions dans des tables de différences, les calculs auxiliaires étant eux-mêmes ramenés à des additions et des soustractions grâce à l'emploi des tables de logarithmes. Les seules multiplications ou divisions qui restent à exécuter sont celles dues aux coefficients rationnels des séries d'interpolation. Pour ces multiplications résiduelles, on peut même préparer des tables à l'avance (c'est ce que font, par exemple, Bashforth et Adams). Il n'est plus guère possible de progresser dans cette voie. On est évidemment dans une impasse car des temps de calcul de plusieurs années sont prohibitifs. Il est par ailleurs difficile de s'assurer de la fiabilité et de la précision des résultats de calculs manuels et collectifs d'une telle ampleur. Désormais, seule la mécanisation pourra permettre de franchir un nouveau seuil d'efficacité.

5.4. La diffusion des méthodes multipas

Afin de comprendre pourquoi l'histoire des méthodes multipas est aujourd'hui mal connue, il faut examiner comment ces méthodes ont été diffusées, en Europe et aux États-Unis, au début du XX^e siècle.

Lors de leur émergence, entre 1855 et 1909, les méthodes multipas passent, comme nous l'avons vu, à peu près inaperçues auprès des mathématiciens et des utilisateurs des mathématiques. Lorsque Poincaré exploite les travaux de Darwin, il s'intéresse seulement aux résultats, en aucune manière à la méthode d'intégration numérique employée. Seul Størmer semble avoir pris connaissance de la substance de la méthode. De façon générale, chacun des travaux de la période de découverte reste isolé. Chaque fois, une méthode spécifique est mise au point, exposée avec force détails comme si elle était entièrement nouvelle, puis oubliée.

C'est grâce au mathématicien russe A.N. Krylov que les méthodes multipas acquièrent réellement droit de cité. Lorsqu'il dispense et publie un cours de calcul numérique, en 1911, à Saint-Pétersbourg, il est l'un des premiers en Europe à enseigner l'intégration approchée des équations différentielles. À ce moment, ignorant encore le traité de Bashforth et Adams, il présente seulement la méthode de Størmer à ses étudiants. En 1918, il se montre enfin complètement informé et publie plusieurs articles de synthèse qui ont une grande influence en Russie et dans le reste de l'Europe¹². Krylov explique notamment pourquoi il s'est chargé de cette mission d'information :

«Je suis entré dans tous ces minutieux détails, parce que mon expérience d'ingénieur et plus de trente années de professorat m'ont montré que l'intégration numérique approchée des équations différentielles est rarement connue des ingénieurs et constructeurs et que les manuels ordinaires d'analyse ne mentionnent pas même de méthodes plus efficaces que celles d'Euler et de Runge. Je doute qu'un praticien aille chercher les méthodes dont il a besoin dans un traité rare sur la Capillary Action ou dans un mémoire intitulé Résultats des calculs numériques des trajectoires des corpuscules électriques dans le champ d'un aimant élémentaire, par C. Størmer, qui a paru dans les Videnskapselskapets Skrifter de l'Académie norvégienne des sciences pour 1913» [Krylov 1927, p. 423].

Krylov lui-même applique les nouvelles méthodes au calcul des trajectoires des projectiles, tandis que Numerov [1923, 1924] s'en sert pour mettre au point de nouvelles techniques de calcul des éphémérides ; il y aurait eu également une application au problème de la stabilité des navires. Dans le domaine théorique, Tamarkin [1923] établit la convergence de la méthode et évalue l'erreur commise.

En Scandinavie, sans doute sous l'influence directe de Darwin et Størmer, une série de travaux analogues voit le jour. De 1910 à 1934, l'astronome Elis Strömngren et ses élèves reprennent la recherche numérique des orbites périodiques et élucident certains cas intéressants du problème restreint et du problème général des trois corps. Dans le domaine théorique, des articles de synthèse de Steffensen [1922], Nyström [1925]

¹² Pour les références du traité de calcul numérique de 1911 et des articles en russe de Krylov, voir Kiro et Chal'tseva [1981]. Dans notre bibliographie, nous n'avons donné que le mémoire en français de Krylov [1927] car, comme Krylov le dit lui-même, ce mémoire est une traduction et une synthèse de ses articles russes.

et Lindelöf [1938] présentent les premiers exposés unifiés des méthodes multipas et commencent à aborder le problème du calcul de l'erreur.

Par contre, en Europe occidentale (France, Allemagne, Angleterre), on ne trouve rien d'analogue durant la même période. L'Allemagne se concentre sur les méthodes de Runge-Heun-Kutta, tandis que la France ignore superbement les méthodes numériques. Quant à l'Angleterre, elle semble avoir oublié qu'elle fut le berceau des méthodes nouvelles. La situation va évoluer grâce à la diffusion des articles de Krylov. Størmer, voyant que le mathématicien russe est en train de lui voler la vedette, se décide à exposer lui-même sa méthode au Congrès international de Strasbourg, en 1920 [Størmer 1921]. En Angleterre, paradoxe suprême, lorsque Whittaker et Robinson [1924] publient un des premiers traités modernes d'analyse numérique, qui fera longtemps autorité, ils citent comme source première les articles russes de Krylov, avant même les travaux des pionniers britanniques ! En France, la traduction française des articles de Krylov enthousiasme Hadamard, qui inclut aussitôt la méthode d'Adams dans son *Cours d'analyse* [Hadamard 1930].

Aux États-Unis, la diffusion semble s'être faite plus directement, dans le droit fil des recherches britanniques. Ainsi qu'il le raconte dans son traité *Differential equations*, Moulton [1930] connaissait les travaux de Darwin dès 1914, et s'en est servi à l'occasion des intenses recherches balistiques motivées par la première guerre mondiale. Si l'on met en parallèle ce qui s'est passé pour Størmer et Krylov, on se rend compte que c'est bien Darwin qui est, directement ou indirectement, à la source de toutes les recherches de la période 1900–1920 alors que le traité de Bashforth et Adams n'a été retrouvé qu'après. La carte ci-dessous résume les étapes de découverte et de diffusion des méthodes multipas : les caractères romains sont réservés aux travaux de mathématiques appliquées, les caractères italiques aux travaux théoriques ou didactiques ; les dates sont celles des travaux et peuvent différer légèrement des dates de publication.

Vers 1925–1930, les méthodes multipas sont florissantes. Elles sont enseignées, approfondies, et trouvent de nombreuses applications. Leur histoire, ainsi que le montre l'article de Nyström, en 1925, a pu être reconstituée, avec notamment la réhabilitation d'Adams, qui est désormais cité à la place de Darwin en tant que source première.

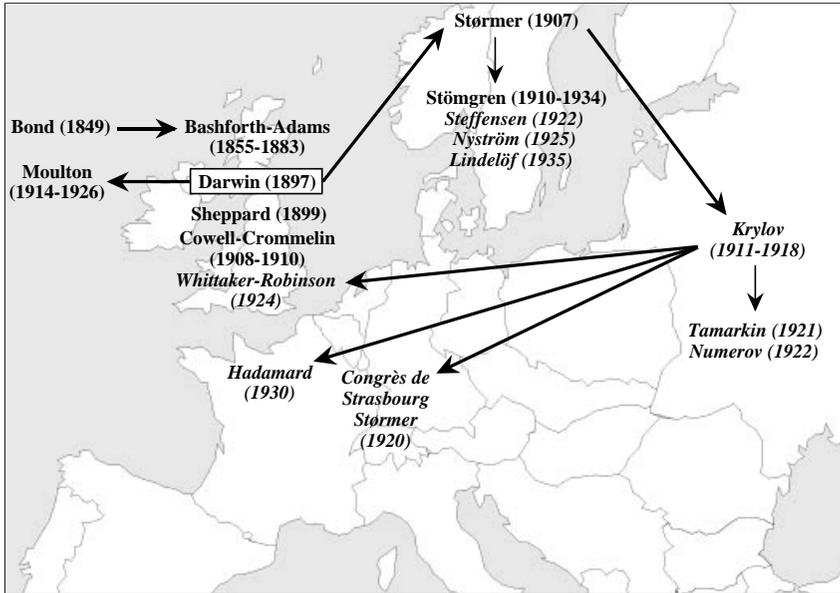


Figure 7. La diffusion des méthodes multipas

CONCLUSION

Dans un article récent, Goldstine [1990] se remémore, avec nostalgie, ses années de jeune chercheur en analyse numérique et nous raconte ce qui s'est passé ensuite, juste avant et pendant la seconde guerre mondiale. Les deux principales caractéristiques des méthodes multipas étaient alors le faible nombre d'opérations non linéaires (multiplications et divisions), et la nécessité de conserver la trace de nombreux résultats intermédiaires (tables des fonctions et de toutes leurs différences). Tout ramener à des additions et des soustractions facilitait le calcul à la main, tandis qu'il n'était pas gênant d'utiliser de nombreuses feuilles de papier pour le stockage des informations. Avec l'apparition des premiers calculateurs électroniques, la situation a radicalement changé : les multiplications devenaient rapides et économiques, mais la mémoire disponible était, du moins sur les premiers modèles, très réduite. Tout ce qui avait fait, durant près de quatre-vingts ans, le succès des méthodes multipas se

révélaient soudain inadapté à l'automatisation du calcul. Après de nombreux essais, la première machine, l'ENIAC, fut programmée avec une méthode de Heun. Les méthodes de Runge-Kutta prirent vite le devant de la scène, rejetant dans un oubli relatif les méthodes multipas. Dans la période récente, ces dernières ont pu être réutilisées, grâce à de nouvelles générations d'ordinateurs à la mémoire étendue, et ont emporté à nouveau l'adhésion des numériciens.

Cette éclipse, due à l'apparition des calculateurs électroniques, ainsi que le relatif désintérêt des historiens pour le calcul numérique, partie moins « noble » des mathématiques, expliquent sans doute que l'histoire des méthodes multipas soit aujourd'hui si peu et si mal connue. Le développement de ces méthodes est pourtant exemplaire des rapports dialectiques complexes qui se créent entre les mathématiques pures, les applications des mathématiques et le calcul numérique.

BIBLIOGRAPHIE

BASHFORTH (F.)

- [1883] *An attempt to test the theories of capillary action by comparing the theoretical and measured forms of drops of fluid, with an explanation of the method of integration employed in constructing the tables which give the theoretical forms of such drops*, by J.C. Adams, Cambridge, 1883.

BOND (G.P.)

- [1849] On some applications of the method of mechanical quadratures, *Memoirs of the American Academy of Arts and Sciences*, 4 (1849), p. 189–204.

BUNEMAN (O.)

- [1990] Particles in their self-consistent fields : from Hartree's differential analyser to Cray machines, dans [Nash 1990, p. 57–62].

CHABERT (J.-L.) *et al.*

- [1994] *Histoire d'algorithmes. Du caillou à la puce*, Paris : Belin, 1994. Trad. angl. par C. Weeks, *A history of algorithms. From the pebble to the microchip*, New York : Springer, à paraître.

CLAIRAUT (A.-C.)

- [1759] Mémoire sur la comète de 1682, adressé à MM. les Auteurs du Journal des Sçavans, par M. Clairaut, *Journal des Sçavans*, janvier 1759, p. 38–45.
- [1760] *Théorie du mouvement des comètes, dans laquelle on a égard aux altérations que leurs orbites éprouvent par l'action des planètes, avec l'application de cette théorie à la comète qui a été observée dans les années 1531, 1607, 1682 et 1759*, Paris, 1760.

COWELL (P.H.) et CROMMELIN (A.C.D.)

- [1908] The orbit of Jupiter's eighth satellite, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 68 (1908), p. 576–581.
- [1910] *Investigation of the motion of Halley's comet from 1759 to 1910*, Appendix to the volume of Greenwich Observations for the year 1909, Edinburgh : Neill, 1910.

DAHAN DALMEDICO (A.)

- [1992] *Mathématisations. Augustin-Louis Cauchy et l'École française*, Argenteuil : Éditions du Choix et Paris : Librairie Blanchard, 1992.

DARWIN (G.H.)

- [1897] Periodic orbits, *Acta mathematica*, 21 (1897), p. 99–242.

ENCKE (J.F.)

- [*Ges. Abh.*] *Gesammelte mathematische und astronomische Abhandlungen von J.F. Encke*, Berlin, 3 vol., 1888–1889.
- [1830] Über Interpolation, *Berliner Astronomisches Jahrbuch*, 1830; *Ges. Abh.* 1, p. 1–20.
- [1837] Über mechanische Quadratur, *Berliner Astronomisches Jahrbuch*, 1837, p. 251–287; *Ges. Abh.* 1, p. 21–60.
- [1852] Ueber eine neue Methode der Berechnung der Planetenstörungen, *Astronomische Nachrichten*, 33 (1852), p. 376–398.

GAUSS (C.F.)

- [*Werke*] *Werke*, 12 vol., Göttingen, 1863–1933; rééd. Hildesheim-New York : Georg Olms, 1981.
- [1812] Exposition d'une nouvelle méthode de calculer les perturbations planétaires avec l'application au calcul numérique des perturbations du mouvement de Pallas, (*Nachlass*); *Werke* 7, p. 439–472.

- [1816] Lettre de Gauss à Bessel du 27 janvier 1816, *Werke* 12, p. 31.
- [1834] Lettre de Gauss à Encke du 13 octobre 1834, *Werke* 7, p. 433.
- GEAR (C.W.) et SKEEL (R.D.)
- [1990] The development of ODE methods : a symbiosis between hardware and numerical analysis, dans [Nash 1990, p. 88–105].
- GOLDSTINE (H.H.)
- [1977] *A history of numerical analysis from the 16th through the 19th century*, New York-Heidelberg-Berlin : Springer, 1977.
- [1990] Remembrance of things past, dans [Nash 1990, p. 5–16].
- GRATTAN-GUINNESS (I.)
- [1990] Work for the hairdressers : The production of de Prony's logarithmic and trigonometric tables, *Annals of the History of Computing*, 12 (1990), p. 177–185.
- GRUEY (L.-J.)
- [1868] Sur le calcul numérique des perturbations des petites planètes au moyen des quadratures, *Annales scientifiques de l'École normale supérieure*, 5 (1868), p. 161–227.
- HADAMARD (J.)
- [1930] *Cours d'analyse professé à l'École polytechnique*, t. 2, Paris : Hermann, 1930.
- HAIRER (E.), NØRSETT (S.P.) et WANNER (G.)
- [1987] *Solving ordinary differential equations, I. Nonstiff problems*, Berlin-Heidelberg-New York : Springer, 1987 ; 2^e éd., 1993.
- HAIRER (E.) et WANNER (G.)
- [1991] *Solving ordinary differential equations, II. Stiff and differential-algebraic problems*, Berlin-Heidelberg-New York : Springer, 1991.
- KIRO (S.M.) et CHAL'TSEVA (I.V.)
- [1981] Origine et développement des méthodes numériques de résolution du problème de Cauchy pour les équations différentielles ordinaires, *Narisi z istorii prirodoznavstva i tehniki*, 27 (1981), p. 3–14 (en ukrainien).
- KOPAL (Z.)
- [1971] Darwin, George Howard, dans Gillespie (Ch. C.), éd., *Dictionary of Scientific Biography*, vol. 3, New York : Scribner, 1971, p. 582–584.
- KRYLOV (A.-N.)
- [1927] Sur l'intégration numérique approchée des équations différentielles avec application au calcul des trajectoires des projectiles, *Mémorial de l'artillerie française*, 6 (1927), p. 353–423.
- LALANDE (J.J. Lefrançois de)
- [1759] *Tables astronomiques de M. Halley pour les planètes et les comètes, réduites au nouveau stile et au méridien de Paris, augmentées de plusieurs Tables nouvelles de différens auteurs, pour les satellites de Jupiter et les étoiles fixes, avec des explications détaillées. Et l'histoire de la Comète de 1759*, Paris, 1759.
- LAPLACE (P.-S.)
- [1805] *Traité de mécanique céleste*, vol. 4, Paris, 1805 ; *Œuvres complètes de Laplace*, vol. 4, Paris : Gauthier-Villars, 1880.
- LEGENDRE (A.-M.)
- [1826] *Traité des fonctions elliptiques et des intégrales eulériennes avec des Tables pour en faciliter le calcul numérique*, t. 2, Paris, 1826.

LINDELÖF (E.)

- [1938] Remarques sur l'intégration numérique des équations différentielles ordinaires, *Acta Societatis scientiarum fennicae*, (n. s. A) 2–13 (1938), p. 3–21.

MOSCONI (J.)

- [1983] Charles Babbage : vers une théorie du calcul mécanique, *Revue d'histoire des sciences*, 36 (1983), p. 69–107.

MOULTON (F.R.)

- [1926] *New methods in exterior ballistics*, Chicago : University of Chicago Press, 1926 ; rééd. *Methods in exterior ballistics*, New York : Dover, 1962.
 [1930] *Differential equations*, New York : MacMillan, 1930 ; rééd. New York : Dover, 1958.

NASH (S.G.) (éd.)

- [1990] *A history of scientific computing*, New York : ACM Press, 1990.

NUMEROV (B.V.)

- [1923] Méthode nouvelle de la détermination des orbites et le calcul des éphémérides en tenant compte des perturbations, *Publications de l'observatoire astrophysique central de Russie*, 2 (1923).
 [1924] A method of extrapolation of perturbations, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 84 (1924), p. 592–601.

NYSTRÖM (E.J.)

- [1925] Über die numerische Integration von Differentialgleichungen, *Acta Societatis scientiarum fennicae*, 50–13 (1925), p. 3–56.

OPPOLZER (T.R. von)

- [1880] *Lehrbuch zur Bahnbestimmung der Kometen und Planeten*, t. 2, Leipzig, 1880.

RICHARDSON (L.F.)

- [1910] The approximate arithmetical solution by finite differences of physical problems involving differential equations, with an application to the stresses in a masonry dam, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 210 (1910), p. 307–357.

RUNGE (C.) et WILLERS (F.A.)

- [1915] Numerische und graphische Quadratur und Integration gewöhnlicher und partieller Differentialgleichungen, dans *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, t. 2, vol. 3, Leipzig : Teubner, 1915, article II C 2, p. 47–176.

SHEPPARD (W.F.)

- [1899] A method for extending the accuracy of certain mathematical tables, *Proceedings of the London Mathematical Society*, 31 (1899), p. 423–448.

STEFFENSEN (J.F.)

- [1922] On numerical integration of differential equations, *Skandinavisk Aktuarietidskrift*, 5 (1922), p. 20–36.

STØRMER (C.)

- [1906a] On the trajectories of electric corpuscles in space under the influence of terrestrial magnetism, applied to the aurora borealis and to magnetic disturbances, *Archiv for Matematik og Naturvidenskab*, 28 (1906).
 [1906b] Notes publiées dans les *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, 142 (1906), p. 1580–1583 ; 143 (1906), p. 140–142, 408–411 et 460–464.

- [1907] Sur les trajectoires des corpuscules électrisés dans l'espace sous l'action du magnétisme terrestre avec application aux aurores boréales, *Archives des sciences physiques et naturelles*, (IV) 24 (1907), p. 5–18, 113–158, 221–247 et 317–364.
- [1913] Résultats des calculs numériques des trajectoires des corpuscules électriques dans le champ d'un aimant élémentaire, *Skripterutgitav Videnskapselskapet i Kristiania. I. Matematisk-naturvidenskabelig klasse*, 1–4 (1913); 2–10 (1913); 2–14 (1913).
- [1921] Méthode d'intégration numérique des équations différentielles ordinaires, dans *Comptes rendus du Congrès international des mathématiciens (Strasbourg, 22-30 septembre 1920)*, publiés par Henri Villat, Toulouse : Privat, 1921, p. 243–257.
- TAMARKIN (J.)
- [1923] Sur la méthode de C. Størmer pour l'intégration approchée des équations différentielles ordinaires, *Mathematische Zeitschrift*, 16 (1923), p. 214–219.
- THOMSON (W.) (Lord Kelvin)
- [1891] Capillary action, dans *Popular lectures and adresses*, vol. 1, London, 1891, p. 31-42. Trad. fr., *Conférences scientifiques et allocutions*, Paris : Gauthier-Villars, 1893.
- TISSERAND (F.-F.)
- [1896] *Traité de mécanique céleste*, t. 4, Paris, 1896; rééd. Paris : Jacques Gabay, 1990.
- WHITTAKER (E.) et ROBINSON (G.)
- [1924] *The calculus of observations. A treatise on numerical mathematics*, London and Glasgow : Blackie, 1924; 4^e éd., 1944.