Revue d'histoire des mathématiques,
1 (1995), p. 159–200.

CONTRIBUTION À L'HISTOIRE DE LA THÉORIE DES GÉODÉSIQUES AU XIX^{e} SIÈCLE [1]

Philippe NABONNAND (*)

RÉSUMÉ. — La théorie des géodésiques d'une surface se situe à l'intersection de plusieurs domaines : la géométrie différentielle, le calcul des variations, la théorie des équations différentielles et la mécanique. Au début du XIX^{e} siècle, la théorie locale des géodésiques est un exemple bien connu d'application des méthodes infinitésimales à la géométrie. Cependant, l'équation des géodésiques est trop difficile pour être résolue et les méthodes directes ne donnent que peu d'informations sur le comportement global des géodésiques d'une surface donnée.

Avec Jacobi, Sturm et Liouville, l'apparition d'un point de vue qualitatif dans l'étude des solutions d'une équation différentielle permet une analyse globale et qualitative du comportement des géodésiques d'une surface, en particulier grâce à l'étude du lieu conjugué et du lieu de coupure ainsi que par la considération de l'influence de conditions topologiques ou géométriques globales comme le signe de la courbure.

ABSTRACT. — A CONTRIBUTION TO THE HISTORY OF GEODESICS DURING THE NINETEENTH CENTURY. The theory of geodesics on a surface is a subject standing at the intersection of various fields : differential geometry, the calculus of variations, the theory of differential equations, and mechanics. At the outset of the 19th century, the local theory of geodesics was well known as an instance of the application of the methods of the infinitesimal calculus to geometry. The equations for geodesics, however, were generally unamenable to easy resolution ; and direct methods of treatment yielded but little of interest, as regards the global behaviour of geodesics on a given surface.

With the work of Jacobi, Sturm, and Liouville, the emergence of a qualitative approach in the study of the resolution of differential equations allowed for a global, and qualitative, treatment of geodesics on a surface — most conspicuously through the study of the conjugate locus, and of the cut locus, and by the examination of the incidence of such global topological or geometrical conditions as the sign, positive or negative, of the curvature.

[1] Une partie de ce travail a été exposée au congrès « Henri Poincaré » organisé par les professeurs G. Heinzmann et J.L. Greffe (Nancy, 14–18 mai 1994).

(*) Texte reçu le 14 décembre 1994, révisé le 1er juin 1995.
Philippe NABONNAND, ACERHP, UMR C9949 du CNRS, Université de Nancy 2, UFR de Mathématiques et d'Informatique, c.o. 75, 54037 Nancy CEDEX (France).
Courrier électronique : nabonnan@plg.u-nancy.fr.

INTRODUCTION

Dès son origine, le problème des géodésiques[2] est intimement lié à l'apparition du calcul différentiel et aux applications des méthodes infinitésimales à la géométrie. En 1697, Jean Bernoulli pose le problème de déterminer le chemin le plus court parmi ceux joignant deux points d'une surface. Dans une lettre à L'Hospital, il annonce avoir déterminé l'équation différentielle de ces chemins. En 1698, son frère Jacques montre que les géodésiques d'un cylindre ou d'un cône s'appliquent sur les lignes droites lorsque l'on développe la surface sur un plan. Euler revient à plusieurs reprises sur cette question et redécouvre l'équation différentielle des géodésiques [Euler 1732]. En particulier, dans son traité de mécanique, *Mechanica sive motus scientia analytice* [Euler 1736], il montre qu'en l'absence de forces, le chemin d'un point matériel sur une surface est une géodésique[3].

La théorie des géodésiques est donc à l'intersection de nombreux domaines qui ont tous été profondément transformés sinon initiés par la révolution analytique du XVII^e^ siècle : la théorie des surfaces, la théorie des équations différentielles, le calcul des variations et la mécanique.

Durant le XIX^e^ siècle, la question des géodésiques est intrinsèquement liée à la mécanique[4] :

---

[2] Le terme de géodésique apparaît pour la première fois dans le *Traité de mécanique céleste* de Laplace : « *Ainsi les lignes tracées par les mesures géodésiques ont la propriété d'être les plus courtes que l'on puisse mener sur la surface du sphéroïde, entre deux de leurs points quelconques ;* [...] *elles seraient décrites par un mobile mû uniformément dans cette surface.* [...] *nous désignerons cette ligne sous le nom de* ligne géodésique » [Laplace 1799, p. 129, 131]. K. Reich [1973, p. 308-309] indique, que dans un mémoire de géodésie [1838, p. 333], l'astronome Bessel, par ailleurs proche ami de Gauss, utilise pour désigner les lignes les plus courtes d'un ellipsoïde de révolution le terme de ligne géodésique (*geodätische Linie*). Jacobi [1839, p. 267] qui à cette époque était, comme Bessel, professeur à l'université de Königsberg, puis Liouville [1844, p. 401] reprennent cette dénomination.

[3] « *quam corpus super superficie quacunque ABC motum describit, est linea brevissima, quae inter terminos D et M duci potest, si scilicet corpus in vacuo moveatur et a nullis potentiis sollicitetur* » (le mouvement que décrit un corps sur une surface ABC est la ligne la plus courte que l'on peut mener du point D au point M, si le corps, bien entendu, se meut dans le vide et n'est soumis à aucune force) [Euler 1736, p. 23].

[4] Sur la question plus générale des liens entre la mécanique et la géométrie différentielle au XIX^e^ siècle, Lützen [1993] insiste sur l'importance de la géométrisation du principe de moindre action et en indique les conséquences sur la conception de la géométrie, en particulier l'acceptation graduelle des espaces de dimension supérieure à trois.

«*La ligne géodésique pour une surface est celle que décrirait, à la suite d'une impulsion quelconque, un mobile assujetti à demeurer sur la surface et dont le mouvement ne serait altéré par aucune force accélératrice*» [Liouville 1844, p. 401].

Même s'ils ne sont pas directement concernés par les questions de dynamique, la plupart des auteurs déduisent l'équation des géodésiques à partir des équations de Lagrange, des équations de Hamilton ou du principe de moindre action. Les chapitres consacrés à la théorie des géodésiques du traité de géométrie de Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, sont exemplaires de ce point de vue. Darboux expose ainsi «*une méthode élégante de recherche des lignes géodésiques*» qui consiste à déterminer les familles de courbes parallèles, c'est-à-dire les familles de courbes dont les trajectoires sont perpendiculaires aux lignes géodésiques. Cette méthode conduit à une équation aux dérivées partielles que l'on peut aussi établir en utilisant les techniques du calcul des variations. Cette équation obtenue, «*on pourra traiter le problème des lignes géodésiques comme tout autre problème de Mécanique et lui appliquer, sans aucune modification, les méthodes d'Hamilton et Jacobi*» [Darboux, *Leçons* 2, p. 450][5].

D'autre part, la question des géodésiques apparaît dans des travaux de mécanique comme cas particulier ou illustration ([Jacobi 1843], [Liouville 1846b], [Thomson et Tait 1867], [Hadamard 1897a]).

Ainsi, Poincaré justifie l'intérêt de son travail sur les géodésiques des surfaces convexes, dans l'introduction de son article, par l'extrême complexité du problème des trois corps et la nécessité de se confronter à un problème qui, bien que plus simple, garderait la quintessence du problème initial :

«*A côté de la difficulté principale, de celle qui tient au fond même des choses, il y a une foule de difficultés secondaires qui viennent compliquer encore la tâche du chercheur. Il y aurait donc intérêt à étudier d'abord un problème où l'on rencontrerait cette difficulté principale, mais où l'on serait affranchi de toutes les difficultés secondaires. Ce problème*

[5] Darboux consacre trois chapitres aux liens entre dynamique et théorie des géodésiques. Dans celui intitulé « Analogie entre la dynamique des mouvements dans le plan et la théorie des lignes géodésiques», il montre que le premier point de vue des familles de courbes parallèles correspond au principe de moindre action et que le point de vue variationnel est lié au principe de Hamilton [Darboux, *Leçons* 2, p. 452–477].

est tout trouvé, c'est celui des lignes géodésiques d'une surface ; c'est encore un problème de dynamique, de sorte que la difficulté principale subsiste ; mais c'est le plus simple de tous les problèmes de dynamique » [Poincaré 1905, p. 38].

Poincaré considère donc la question des géodésiques comme une épure du plus vaste et plus complexe problème général de la dynamique et justifie cette démarche par la nécessité de dégager les aspects géométriques de ce problème.

D'un autre côté, la question des géodésiques est intimement liée à l'analyse de l'équation des géodésiques et les résultats obtenus pendant la première moitié du XIX^e siècle sont donc essentiellement locaux[6]. L'apparition des méthodes qualitatives dans la théorie des équations différentielles, les débuts de la topologie et les interrogations plus fines sur la question des minima des fonctionnelles permettront l'émergence d'un questionnement plus global du comportement des géodésiques des surfaces. En effet, les techniques d'analyse qualitative des équations différentielles appliquées à l'équation des géodésiques permettent de décrire globalement les géodésiques d'une surface, en fonction d'hypothèses topologiques ou géométriques.

L'étude des géodésiques des surfaces du deuxième degré sert de révélateur de l'évolution des points de vue sur la question plus générale des géodésiques. La résolution de l'équation des géodésiques sur de telles surfaces en fonction d'intégrales abéliennes ne se traduit pourtant que par relativement peu de résultats géométriques et illustre *a contrario* les limites de l'approche directe. Après 1855, l'étude des géodésiques des surfaces du second degré disparaît quasiment[7] pour renaître vers 1880 avec des travaux traversés par les intérêts nouveaux pour une problématique globale et la prise en compte des propriétés topologiques et géométriques.

[6] Les géodésiques apparaissent dans une perspective plus globale dans le problème de la représentation géodésique de deux surfaces l'une sur sur l'autre, c'est-à-dire l'étude des correspondances point par point entre deux surfaces de telle manière que chaque ligne géodésique de l'une s'applique sur une ligne géodésique de l'autre. Ce problème est en fait un cas particulier de la question de la construction des cartes géographiques. Cet aspect de la question sera traité dans un article en préparation sur l'histoire des coordonnées curvilignes et des représentations des surfaces.

[7] Une des rares références sur la question des géodésiques des surfaces entre 1855 et 1879 est un article de Weierstrass qui ne comporte d'ailleurs que très peu de résultats nouveaux [Weierstrass 1861].

LES *DISQUITIONES GENERALES CIRCA SUPERFICIES CURVAS* DE GAUSS

Gauss étudie la théorie des lignes les plus courtes sur les surfaces dans son célèbre mémoire *Disquitiones generales circa superficies curvas* [Gauss 1828]. Il s'intéresse essentiellement aux propriétés locales et globales de la courbure d'une surface munie d'une métrique générale

$$\mathrm{d}s^2 = E\,\mathrm{d}u^2 + 2F\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + G\,\mathrm{d}v^2. \tag{1}$$

Gauss donne une interprétation géométrique des coefficients E, F et G. Pour cela, il considère les deux systèmes de courbes définis par $u = \mathrm{C}^{\mathrm{te}}$ et $v = \mathrm{C}^{\mathrm{te}}$. Chaque point de la surface est repéré comme intersection de deux lignes particulières de ces systèmes. La distance entre les points de coordonnées (u, v) et $(u + \mathrm{d}u, v)$ est donc égale à $\mathrm{d}u$ et la distance entre les points de coordonnées (u, v) et $(u, v + \mathrm{d}v)$ est égale à $\mathrm{d}v$. De plus, si ω désigne l'angle entre les lignes des deux systèmes, on a $\cos\omega = F/\sqrt{EG}$.

Dans ce cadre, Gauss étudie certaines propriétés des géodésiques. Il commence par poser le problème du plus court chemin en termes variationnels et établit que si x, y et z sont les coordonnées d'un point d'une géodésique, si $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$ et $\mathrm{d}z$ désignent la différence infinitésimale des coordonnées dans le sens de la courbe et si δx, δy et δz désignent la différence des coordonnées dans le sens de la variation, on a[8]

$$P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z = 0, \quad P\delta x + Q\delta y + R\delta z = 0,$$

où P, Q et R sont respectivement proportionnels à

$$\mathrm{d}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2}}, \quad \mathrm{d}\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2}}, \quad \mathrm{d}\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2}}\cdot$$

Gauss interprète géométriquement ces formules en considérant sur une sphère les points λ et L, respectivement définis par la direction tangente à la courbe et par la direction de la normale principale de la courbe. Alors, si ξ, η et ζ désignent les coordonnées de λ et X, Y et Z celles de L,

[8] Ces équations reviennent à exprimer que l'accélération de la géodésique définie par les grandeurs P, Q, R est normale au plan tangent de la surface, déterminé par les directions de la courbe et de la variation.

on obtient une caractérisation des géodésiques en fonction du rayon de courbure ρ de la courbe

$$\rho\,\mathrm{d}\xi = X\,\mathrm{d}r, \;\; \rho\,\mathrm{d}\eta = Y\,\mathrm{d}r, \;\; \rho\,\mathrm{d}\zeta = Z\,\mathrm{d}r$$

où $\mathrm{d}r$ désigne l'élément de longueur de la courbe.

Il déduit de ces formules deux propriétés fondamentales qui servent en particulier à définir des coordonnées géodésiques : la courbe formée par les extrémités des géodésiques de même longueur issues d'un même point est normale aux géodésiques. De même, la courbe formée par les extrémités des géodésiques de même longueur et normales à une courbe donnée est normale à ces géodésiques [Gauss 1828, p. 34].

Puis, considérant la surface munie de la métrique générale (1), Gauss établit l'équation des géodésiques qui dans ce cadre général est très compliquée et ne peut avoir que peu d'applications [Gauss 1828, p. 36–37]. Si les deux systèmes de courbes $u = \mathrm{C}^{\mathrm{te}}$ et $v = \mathrm{C}^{\mathrm{te}}$ sont orthogonaux, c'est-à-dire si $F = 0$, les formules se simplifient considérablement. C'est le cas lorsque l'on considère sur la surface un système de coordonnées analogues aux coordonnées polaires : un point est repéré par sa distance r à un point fixe et par l'angle φ que fait une géodésique donnée avec la géodésique minimisante entre ce point et le point fixe. Dans ce cas, on a $E = 1$, $F = 0$ et l'équation des géodésiques s'écrit

$$k = -\frac{1}{m}\,\frac{\mathrm{dd}m}{\mathrm{d}r^2} \tag{2}$$

où k désigne la courbure de la surface et $m = \sqrt{G}$.

A partir de cette formule, Gauss démontre dans la section 20 de son mémoire que l'excès par rapport à 180° de la somme des angles d'un triangle géodésique dans le cas d'une surface à courbure positive et le défaut dans le cas d'une surface à courbure négative sont égaux à la courbure totale du triangle, c'est-à-dire à l'intégrale

$$\iint km\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

calculée sur le triangle géodésique[9]. Gauss termine cette section en généralisant ce résultat aux polygones définis par n segments géodésiques.

[9] La courbure totale d'un morceau de surface est définie par Gauss comme égale à la surface de l'image normale de ce morceau de surface, l'image normale étant la surface sur une sphère de rayon unité définie par la normale à la surface.

Ce théorème est donc une expression en moyenne de l'équation (2) et jouera un rôle important dans le passage à une vision globale du comportement des géodésiques.

L'ÉQUATION DES GÉODÉSIQUES ET SON APPLICATION AU CAS DES SURFACES DU SECOND DEGRÉ

Un élève de Gauss, Minding introduit la notion de courbure géodésique[10] et définit les géodésiques comme les courbes le long desquelles la courbure géodésique s'annule [Minding 1830]. Comme on vient de le voir, Gauss donne dans son mémoire *Disquitiones generales circa superficies curvas*, l'équation des géodésiques d'une surface munie de la métrique générale (1). «*Mais ces équations sont très compliquées*», constate Liouville dans les notes qu'il rédige pour la 5e édition du cours de géométrie de Monge [Liouville 1850, p. 569–582]. Dans ces notes, il résume et synthétise les résultats qu'il a précédemment obtenus sur la question des géodésiques et en particulier sur les géodésiques de la surface de l'ellipsoïde[11].

Dans la note II, il étudie l'équation des géodésiques dans le cas $F = 0$, c'est-à-dire dans le cas où les systèmes de lignes (u) et (v), définies par les équations $u = \mathrm{C}^{\mathrm{te}}$ et $v = \mathrm{C}^{\mathrm{te}}$, sont orthogonaux :

«*Alors, i étant l'angle sous lequel cette ligne vient couper successivement les diverses courbes représentées par l'équation* $u = \mathrm{C}^{\mathrm{te}}$*, on trouve*

$$\mathrm{d}i = \frac{1}{2\sqrt{EG}}\left(\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}u}\,\mathrm{d}v - \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}v}\,\mathrm{d}u\right)\text{»}$$

[Liouville 1850, p. 573].

Liouville avait dans la note précédente introduit la notion de courbure géodésique comme un cas particulier de courbure relative :

---

[10] K. Reich [1973, p. 298] signale que Gauss introduit aussi la notion de courbure géodésique dans une note de son *Nachlass* [Gauss, *Werke* 8, p. 386–396] et qu'il l'appelait *Seitenkrümmung* (courbure latérale). Le terme de courbure géodésique apparaît dans des articles de Bonnet [1848, p. 44] et de Liouville [1850, p. 568]. Lützen [1990, p. 748–749] cite à ce sujet une lettre de Bonnet dans laquelle celui-ci reconnaît la priorité de Liouville. La courbure géodésique d'une courbe tracée sur une surface exprime la courbure de la projection de cette courbe sur le plan tangent. Une géodésique se projette donc localement sur une droite.

[11] Pour une étude beaucoup plus détaillée des travaux de Liouville sur les géodésiques et en particulier leur mise en perspective avec le reste de son œuvre, on peut consulter l'ouvrage que lui a consacré Lützen [1990].

«*on pourrait aussi considérer des courbures ou déviations relatives. Deux courbes ayant un élément* ds *commun, les deux éléments qui suivent* ds *sur ces courbes respectives forment un angle infiniment petit* dn, *que nous nommerons l'angle de contingence relatif; et le rapport de* dn *à* ds *mesurera la courbure ou la déviation relative des deux courbes.* [...] *Bornons-nous à signaler parmi les courbures relatives, celle d'une courbe tracée sur une surface, par rapport à la ligne géodésique tangente. J'ai proposé pour la désigner le nom expressif de courbure géodésique*» [Liouville 1850, p. 568].

Ayant obtenu l'équation des géodésiques, Liouville [1850, p. 574–575] en déduit par des techniques infinitésimales, une expression de la courbure géodésique d'une courbe quelconque :

«*Soit* i *l'angle que cette courbe, au point* m *que nous considérons, fait avec la ligne* (u) *qui passe par ce point. Soit* $i+\mathrm{d}i$ *ce que cet angle devient lorsqu'on se transporte à l'élément suivant sur la courbe et* $i+\delta i$ *ce qu'il deviendrait pour la ligne géodésique tangente à la courbe en* m. *Il est clair que* $(\delta i - \mathrm{d}i)$ *est l'angle de contingence géodésique, et par suite, en nommant* ρ *le rayon de courbure géodésique, on a* $\rho^{-1} = (\delta i - \mathrm{d}i)/\mathrm{d}s$» [Liouville 1850, p. 574].

Comme di est donnée par l'équation des géodésiques, Liouville obtient une expression générale de la courbure géodésique en fonction des coefficients E et G de la métrique. Il applique cette formule au cas des systèmes de lignes (u) et (v) et obtient la formule générale

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}s} + \frac{\cos i}{\rho_2} + \frac{\sin i}{\rho_1}$$

où ρ_1 et ρ_2 sont respectivement les courbures géodésiques des lignes (v) et (u).

Dans la suite de la note, il se propose d'inverser le mouvement de l'exposé :

«*Au reste, on pourrait aussi trouver directement la valeur de* ρ, *sans se servir de la théorie des lignes géodésiques, et tirer, au contraire, de cette valeur l'équation fondamentale de ces lignes en observant que pour les lignes géodésiques seules on a* $\rho=\infty$» [Liouville 1850, p. 575].

Il obtient l'expression de la courbure géodésique à partir de constructions infinitésimales sur le plan tangent et identifie ainsi la courbure géodésique d'une courbe avec la courbure absolue de la courbe obtenue en projetant sur un plan «*la surface développable formée par les intersections successives des plans tangents*» à la surface, menés le long de la courbe.

Dans la note III, Liouville reprend une partie des résultats de son article de 1846 «Sur quelques cas particuliers où les équations du mouvement d'un point matériel peuvent s'intégrer» :

«*Voici un cas fort étendu dans lequel l'équation des lignes géodésiques s'intègre. Imaginons que* ds *étant l'élément d'une ligne quelconque tracée sur la surface dont on s'occupe, on ait réussi à mettre l'expression de* ds^2 *sous la forme*

$$\mathrm{d}s^2 = \lambda(\mathrm{d}\alpha^2 + \mathrm{d}\beta^2)$$

Je dis que l'équation des lignes géodésiques s'intégrera toutes les fois qu'en prenant α et β pour des coordonnées rectangles on parviendra à déterminer le mouvement d'un point matériel soumis dans un plan à une action telle que λ soit la fonction des forces et 2λ la force vive» [Liouville 1850, p. 577].

Liouville traite le problème une première fois en utilisant le principe de moindre action, puis l'aborde en utilisant directement les équations de Lagrange[12]. Il arrive à l'équation

$$\left(\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 = 2\lambda.$$

Dans le cas particulier où λ est de la forme $\lambda = f(\alpha) - F(\beta)$, l'équation s'écrit aisément sous la forme (où a est une constante)

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\sqrt{f(\alpha) - a}} = \frac{\mathrm{d}\beta}{\sqrt{a - F(\beta)}}.$$

Comme d'autre part, on a $\mathrm{d}s = \mathrm{d}\alpha\sqrt{f(\alpha) - a} + \mathrm{d}\beta\sqrt{a - F(\beta)}$, on obtient donc l'équation $\delta\,\mathrm{d}s = 0$ «*où la variation* d *se rapporte à la constante* a» [Liouville 1846b, p. 350 ; 1850, p. 578].

[12] Liouville raisonne en mécanicien et reprend l'analyse directe des équations de Lagrange qu'il a déjà développée dans son article [Liouville 1846b]. Il souligne qu'il aurait pu utiliser les résultats de la note précédente «*mais qu'il y a plus d'élégance peut-être à employer* [...] *les principes et les formules de la dynamique*» [Liouville 1850, p. 578]

Liouville termine la note III en appliquant les formules précédentes à l'ellipsoïde[13] et retrouve les résultats obtenus dans son article de 1844 « De la ligne géodésique sur un ellipsoïde quelconque ». Dans cet article[14], Liouville se proposait de reprendre la méthode exposée par Jacobi [1839 ; 1843, p. 212] pour étudier l'équation différentielle des géodésiques sur un ellipsoïde :

«*L'équation différentielle de la ligne géodésique (la ligne la plus courte) sur un ellipsoïde à trois axes inégaux, se présente sous une forme extrêmement compliquée lorsqu'on fait usage des coordonnées ordinaires. Aussi les géomètres avaient-ils été rebutés de la traiter. Mais M. Jacobi a observé qu'elle devient beaucoup plus maniable quand on se sert, pour déterminer la position d'un point sur l'ellipsoïde, des deux lignes de courbure passant par ce point, genre tout particulier de coordonnées dont Legendre s'est autrefois servi avec succès. L'illustre géomètre de Kœnigsberg est parvenu, de cette manière, à ramener la détermination de la ligne géodésique demandée aux simples quadratures.* [...] *M. Jacobi s'est contenté de poser cette formule sans ajouter la démonstration ; mais en indiquant le système de coordonnées qu'il a employé, il a, par cela même, rendu cette démonstration très facile à trouver*» [Liouville 1844, p. 401].

Comme Jacobi [1839][15], Liouville utilise les lignes de courbure de

---

[13] Liouville précise même que c'est l'étude du comportement des géodésiques de l'ellipsoïde qui a motivé et entraîné toutes ces recherches : « *C'est, en effet, par l'équation différentielle des lignes géodésiques de l'ellipsoïde, dont M. Jacobi a le premier trouvé l'intégrale, que toutes ces recherches ont commencé* » [Liouville 1850, p. 580]

[14] Cet article sera suivi de plusieurs contributions de Chasles, Liouville et Roberts, toutes publiées dans le tome 11 du *Journal de mathématiques pures et appliquées* en 1846.

[15] Dans l'article « De la ligne géodésique sur un ellipsoïde », Jacobi étudie l'équation des géodésiques en exprimant les trois coordonnées d'un point en fonction de coordonnées elliptiques. Il obtient alors une détermination des lignes géodésiques en fonction de deux intégrales abéliennes. Jacobi insiste pour montrer que l'introduction des coordonnées elliptiques est géométriquement naturelle et s'intègre en fait à une longue tradition : « *Le procédé que j'ai employé, et qui consiste à exprimer les trois coordonnées d'un point de l'ellipsoïde par deux angles φ et ψ, est le même auquel on est conduit, quand on détermine le point de l'ellipsoïde par l'intersection des deux lignes de courbure sur lesquelles il se trouve, ou, ce qui revient au même, d'après la belle remarque de M. Charles Dupin, quand on considère ce point comme l'intersection de l'ellipsoïde avec les deux hyperboloïdes qui passent par le même point et dont les sections principales ont les mêmes foyers que celles de l'ellipsoïde. Legendre a le premier employé les formules de Monge relatives à cet objet comme instrument analytique pour ramener l'aire de la surface de l'ellipsoïde à la rectification de l'ellipse, ainsi*

l'ellipsoïde pour construire un système de coordonnées :

«*Soit* $x^2/\rho^2 + y^2/(\rho^2 - b^2) + z^2/(\rho^2 - c^2) = 1$ *l'équation d'un ellipsoïde quelconque* [...]. *Si l'on prend* μ^2 *entre les limites* b^2 *et* c^2 *et* ν^2 *entre les limites* 0 *et* b^2, *les équations*

$$\frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\mu^2 - b^2} - \frac{z^2}{c^2 - \mu^2} = 1 \quad \textit{et} \quad \frac{x^2}{\nu^2} - \frac{y^2}{b^2 - \nu^2} - \frac{z^2}{c^2 - \nu^2} = 1$$

représenteront deux hyperboloïdes qui couperont l'ellipsoïde suivant deux courbes que j'appellerai (μ) *et* (ν) *parce qu'elles changent avec les deux paramètres* μ *et* ν *de nos surfaces. On sait, et il est facile de vérifier, que ces courbes sont précisément les lignes de courbure de l'ellipsoïde. Quoi qu'il en soit, on peut prendre* μ *et* ν *pour les variables qui déterminent sur l'ellipsoïde la position d'un point*» [Liouville 1850, p. 581].

La métrique s'exprime alors dans ce système de coordonnées sous la forme

$$\mathrm{d}s^2 = \lambda(\mathrm{d}\alpha^2 + \mathrm{d}\beta^2)$$

où l'on a posé $\lambda = \mu^2 - \nu^2$ et

$$\mathrm{d}\alpha^2 = \frac{\rho^2 - \mu^2}{(\mu^2 - b^2)(c^2 - \mu^2)}\,\mathrm{d}\mu^2, \quad \mathrm{d}\beta^2 = \frac{\rho^2 - \nu^2}{(b^2 - \nu^2)(c^2 - \nu^2)}\,\mathrm{d}\nu^2.$$

En appliquant les formules générales précédentes, Liouville arrive à «*l'équation élégante*» pour les géodésiques d'un ellipsoïde[16]

$$\mu^2 \cos^2 i + \nu^2 \sin^2 i = \mathrm{C}^{\mathrm{te}}.$$

---

qu'autrefois Archimède avait ramené la mesure de la surface sphérique à celle de la circonférence du cercle. Euler s'était servi déjà de formules semblables, mais bornées au cas du plan, dans son travail célèbre sur le mouvement d'un point attiré par deux centres fixes suivant la loi de Newton ; car les deux variables qu'il a choisies reviennent, d'après une remarque de Legendre, à considérer le point attiré comme l'intersection de l'ellipse et de l'hyperbole qui passent par ce point et qui ont pour foyers communs les deux centres d'attraction» [Jacobi 1839, p. 269].

[16] Liouville signale que cette équation est équivalente à un résultat de Joachimsthal [1843] : «*Ne pourrait-on pas arriver aussi par des considérations purement géométriques à cette intégrale première dont la forme est si simple, ou (ce qui au fond est la même chose) au théorème curieux démontré par M. Joachimsthal* [...], *savoir que* $PD = \mathrm{C}^{\mathrm{te}}$, *le long de la ligne géodésique,* D *étant le demi-diamètre de l'ellipsoïde parallèle à l'élément* ds, *et* P *la perpendiculaire abaissée du centre sur le plan tangent à la surface en un point de cet élément ?*» [Liouville 1844, p. 405].

Joachimsthal obtient son résultat simplement en écrivant que le plan osculateur d'une géodésique est perpendiculaire au plan tangent et en interprétant

Liouville, dans son article de 1846 « Démonstration géométrique relative à l'équation des lignes géodésiques sur les surfaces du second degré », propose une démonstration de cette équation qui utilise des techniques infinitésimales plus directement liées à la géométrie des géodésiques et des ellipsoïdes. Il montre le théorème suivant :

«*Si parallèlement à la tangente en un point quelconque M d'une ligne géodésique donnée et à la tangente conjuguée*[17], *on conçoit deux demi-diamètres de l'ellipsoïde, la perpendiculaire H abaissée de l'extrémité du second de ces demi-diamètres sur le premier sera constante*» [Liouville 1846a, p. 22].

Tenant compte que le produit HPD est égal à une constante en tout point de l'ellipsoïde, Liouville retrouve le résultat de Joachimsthal, en déduit alors l'équation des géodésiques de l'ellipsoïde et obtient une expression de la constante

$$\mu^2 \cos^2 i + \nu^2 \sin^2 i = \rho^2 - H^2.$$

Michael Roberts interprétera cette constante comme définissant la famille des géodésiques tangentes à la même ligne de courbure[18] et en déduira quelques propriétés géométriques des géodésiques qui passent par

géométriquement les termes de l'équation obtenue : «*Sint A, A' duo puncta superficiei secundi gradus, P, P' distantiae centri a planis tangentibus in his punctis, D, D' semidiametri superficiei, quarum directiones tangentibus lineae brevissimae per A et A' ductae in A et A' parallelae, habemus $PD = P'D'$*». (Soient A et A' deux points d'une surface du deuxième degré, P et P' les distances entre le centre et les plans tangents en ces points, D et D' les demi-diamètres de la surface dont les directions sont parallèles aux tangentes en A et A', alors on a $PD = P'D'$.) [Joachimsthal 1843, p. 158].

[17] La notion de tangente conjuguée est introduite par Charles Dupin dans son traité de géométrie. Le rapport de l'Institut qui figure en tête de cet ouvrage explique cette notion : «*Il nous reste à parler de la partie de son travail à laquelle M. Dupin attache le plus d'intérêt, et qu'il appelle la théorie des* tangentes conjuguées. *Pour concevoir ce qu'il entend par cette dénomination, supposons qu'une surface soit donnée et qu'on lui circonscrive une surface développable qui la touchera dans toute l'étendue d'une ligne courbe : la tangente à cette ligne, en un point donné, et l'arête de la surface développable qui passe par ce point sont ce que M. Dupin appelle deux* tangentes conjuguées» [Dupin 1813, p. xvii]. En langage moderne, deux tangentes sont conjuguées si elles sont orthogonales pour la deuxième forme fondamentale de la surface.

[18] Comme l'indique Lützen [1990, p. 720], Liouville reprend cette analyse dans un article où il étudie «*quelques cas particuliers où les équations du mouvement d'un point matériel peuvent s'intégrer*» [1846b, p. 374].

des ombilics[19] :

«*Il s'ensuit que pour toutes les lignes géodésiques tangentes à la même ligne de courbure, la quantité* β [la constante de l'équation des géodésiques] *conserve une valeur constante. Si une ligne géodésique passe par un des ombilics (points pour lesquels on a* $\mu^2 = \nu^2 = b^2$*), nous aurons* $\beta = b^2$*, quelle que soit sa direction*» [Roberts 1846, p. 2].

Chasles aborde ces questions d'un point de vue de géomètre et propose de nouvelles démonstrations directes de ces résultats :

«*M. Liouville a entretenu l'Académie d'une certaine équation qui, intégrale première de l'équation différentielle du second ordre des lignes géodésiques tracées sur les surfaces du second degré, exprime, sous forme finie, une belle propriété de ces lignes. L'importance de ce résultat avait fait désirer à l'auteur que l'on pût y parvenir par de simples considérations de géométrie. Cette voie simple et naturelle, en effet, qui oblige de considérer les choses en elles-mêmes, en montre mieux que le calcul seul l'origine et les rapports avec nos vérités primordiales, et fait connaître, en général, un enchaînement de propositions dont une partie a pu échapper à l'analyste dans sa démarche rapide.*

Il semble donc, qu'on me permette ici cette réflexion fort naturelle, il semble que plus l'analyse fait de progrès et étend son domaine, plus la synthèse aurait besoin d'être cultivée et de se perfectionner aussi, pour lui prêter son utile secours. Et cependant, le contraire a lieu depuis un siècle et demi : il semble que l'analyse, confiante dans ses propres forces, n'ait voulu aucun partage avec une méthode qui, après avoir été le seul instrument des Archimède, Apollonius, des Ptolémée, a su encore, chez les Modernes, donner naissance aux travaux de Képler, de Galilée, d'Huygens et de Newton. La synthèse a été exclue successivement de tout enseignement. C'est, je crois, une erreur du siècle dernier, et qui pourra étonner ceux qui feront l'histoire des sciences de cette époque» [Chasles 1846a, p. 5–6].

L'affirmation de Chasles sur la disparition du point de vue synthétique en géométrie est à relativiser. S'il est clair que ce point de vue a pratiquement disparu en géométrie des courbes et des surfaces, la tradition synthétique renaît avec l'apparition de la géométrie projective. Néanmoins, Chasles exprime avec vigueur une certaine insatisfaction

[19] Les ombilics sont les points de la surface où toutes les directions sont principales et la courbure normale est constante.

ressentie par la plupart des géomètres. En se limitant à la question de l'équation des géodésiques, deux types de résultats sont obtenus. Les premiers concernent le cas particulier des ellipsoïdes et l'obtention explicite de solutions de l'équation des géodésiques en fonction d'intégrales abéliennes [Liouville 1844]. Ces résultats rejoignent ceux obtenus avec des méthodes synthétiques par les mathématiciens des siècles précédents :

«*Tous ces résultats d'analyse qui établissent entre les coordonnées de certains points et les longueurs de certains arcs une relation dépendant uniquement de la règle et du compas, répondent à des théorèmes de géométrie analogues à ceux qu'on a obtenus pour les arcs d'ellipse*» [Liouville 1844, p. 407].

Cependant, cette adéquation entre des résultats obtenus par des méthodes analytiques et des méthodes purement géométriques ne semblent pas indiquer de direction féconde de généralisation.

Les autres résultats concernent l'équation des géodésiques sur une surface quelconque. L'extrême difficulté de cette équation interdit tout espoir de traiter analytiquement l'équation générale et amène les géomètres à traiter des cas particuliers et à s'intéresser à de nouvelles questions.

LE PASSAGE DU LOCAL AU GLOBAL

Parmi les nombreuses voies d'approche des questions globales de géométrie ou d'analyse, utilisées par les mathématiciens du XIX^{e} siècle, une des principales consiste à déterminer les conséquences géométriques, métriques ou topologiques d'une hypothèse globale sur un objet infinitésimal. Un des premiers exemples d'étude du passage du local au global est un article de Sturm[20] sur l'analyse qualitative des solutions des équations différentielles linéaires du second degré :

«*On ne sait les intégrer* [*les équations différentielles linéaires du second ordre*] *que dans un très petit nombre de cas particuliers hors desquels on ne peut pas même en obtenir une intégrale première; et lors même qu'on possède l'expression de la fonction qui vérifie une telle équation, soit sous forme finie, soit en série, soit en intégrales définies ou indéfinies, il est le*

[20] Lützen [1990] souligne l'importance essentielle des contributions de Liouville à la genèse des travaux de Sturm. Gilain [1994] replace aussi l'irruption des méthodes qualitatives dans le cadre général de l'histoire de la théorie des équations différentielles.

plus souvent difficile de reconnaître dans cette expression la marche et les propriétés caractéristiques de cette fonction» [Sturm 1836, p. 106].

La nécessité d'obtenir des résultats globaux est non seulement due aux difficultés à obtenir des solutions explicites mais aussi aux exigences internes du problème étudié. On ne se contente plus d'obtenir des résultats quantitatifs, il faut aussi pouvoir rendre compte du comportement qualitatif des solutions :

«*la connaissance de ces propriétés renferme celle des circonstances les plus remarquables que peuvent offrir les nombreux phénomènes physiques et dynamiques auxquels se rapportent les équations différentielles dont il s'agit. S'il importe de pouvoir déterminer la valeur de la fonction inconnue pour une valeur isolée quelconque de la variable dont elle dépend, il n'est pas moins nécessaire de discuter la marche de cette fonction, ou en d'autres termes, d'examiner la forme et les sinuosités de la courbe dont cette fonction serait l'ordonnée variable, en prenant pour abscisse la variable indépendante. Or on peut arriver à ce but par la seule considération des équations différentielles en elles-mêmes, sans qu'on ait besoin de leur intégration*» [*Ibid.*, p. 106–107].

Dans cet article, Sturm étudie la dépendance de certains aspects qualitatifs du comportement des solutions par rapport aux coefficients de l'équation et aux conditions à l'origine. Il s'intéresse en particulier au nombre et à la position relative des racines des solutions ou à la comparaison des solutions quand les coefficients varient en fonction d'un paramètre :

«*nous allons encore comparer les valeurs des deux fonctions V' et V'', définies par les équations différentielles*

$$\frac{\mathrm{d}^2V'}{\mathrm{d}x^2} + G'V' = 0, \quad \frac{\mathrm{d}^2V''}{\mathrm{d}x^2} + G''V'' = 0$$

dans l'intervalle compris entre deux limites a et b, en supposant que [...] *G' et G'' sont* [...] *des fonctions données de x telles que G'' est $\geq G'$.*

[...] *Si donc on suppose $V' \geq V''$ pour $x = a$ on aura constamment $V' > V''$ pour toutes les valeurs de x croissantes depuis a jusqu'à b*» [*Ibid.*, p. 176–178].

Ce résultat de Sturm est caractéristique des premiers résultats qualitatifs obtenus sur le comportement global des solutions des équations différentielles. Une hypothèse globale sur les coefficients des équations différentielles entraîne une propriété qualitative. C'est de la confrontation de la définition des solutions qui s'annulent pour $x = a$ (obtenues par les techniques locales) avec l'hypothèse globale que se déduisent les propriétés qualitatives des solutions[21].

LE LIEU CONJUGUÉ ET LE LIEU DE COUPURE D'UN POINT D'UNE SURFACE

Localement, les chemins définis par l'équation des géodésiques sont bien les plus courts chemins entre deux points assez voisins d'une surface. Par contre, une des difficultés majeures concernant l'étude des géodésiques est de déterminer dans quelles conditions elles restent ou cessent d'être globalement minimisantes. Ce problème est exemplaire à plusieurs titres d'une tentative de passage du local au global. La propriété d'être un chemin minimum, établie localement par des méthodes analytiques, est analysée d'un point de vue global. Deux aspects de la propriété globale de minimalité sont à distinguer. Le premier, analytique, consiste à étudier la propriété de minimalité d'une géodésique parmi les chemins qui lui sont infiniment voisins. Le lieu conjugué d'un point est l'ensemble des points où les géodésiques issues de ce point cessent d'être minimisantes de ce point de vue. Son étude relève de techniques variationnelles sur l'espace des géodésiques. Les points conjugués sont les points d'intersection de géodésiques infiniment voisines. Le second aspect, purement géométrique, consiste à analyser la propriété globale de minimalité d'une géodésique parmi l'ensemble de tous les chemins. Le lieu de coupure d'un point est l'ensemble des points où les géodésiques issues de ce point cessent d'êtres globalement minimisantes. Les points de coupure sont les points d'intersection de géodésiques de même longueur.

C.G.J. Jacobi

Jacobi est l'un des premiers à étudier le comportement global des

[21] Jacques Hadamard précise bien, dans l'introduction de son article « Sur certaines propriétés des trajectoires en dynamique », les deux conceptions : « *L'étude des équations différentielles se poursuit actuellement dans deux directions différentes. On peut avoir en vue la nature analytique des fonctions cherchées, et les considérer dans tout le champ des valeurs réelles ou complexes de la variable indépendante. Mais on peut aussi, en restant dans le domaine réel, suivre la voie tracée par les travaux de Sturm et par ceux de MM. Poincaré et Picard, où l'on se propose simplement de discuter le sens dans lequel varient les inconnues, et où les relations d'inégalité jouent un rôle prépondérant* » [Hadamard 1897a, p. 331].

géodésiques d'une surface. A partir de ses recherches en calcul des variations, il met en évidence l'importance de l'existence des points conjugués[22] pour l'étude des propriétés de minimalité globale des géodésiques :

«*En réalité, la ligne que fournit le calcul des variations appliqué à ce problème est un minimum sur la surface, si la condition dérivée de la règle générale établie ci-dessus est remplie, savoir qu'entre les deux points extrêmes, il n'y en ait pas deux autres entre lesquels on puisse mener une nouvelle ligne infiniment rapprochée de la première et plus courte. Mais dans tout autre cas on n'a ni maximum ni minimum. Au reste, quand il s'agit de surfaces ayant en chaque point des courbures opposées, j'ai démontré que le minimum existe réellement*» [Jacobi 1837, p. 53].

Dans son traité de dynamique, Jacobi précise la difficulté qui apparaît dès que l'on veut étudier les problèmes de minimum ou de maximum. Dans la septième leçon consacrée au principe de moindre action, il traite le cas particulier du mouvement d'un point assujetti à rester sur une surface sans être soumis à une force quelconque. Le principe de moindre action entraîne que ce point parcourt une géodésique. Jacobi distingue alors deux cas : deux géodésiques infiniment voisines issues d'un même point peuvent ne jamais se recouper ou au contraire avoir un point d'intersection sur l'enveloppe de la famille des géodésiques issues du même point[23]. Dans le premier cas, la géodésique est toujours un chemin minimisant alors que dans le second, la géodésique ne minimise que jusqu'au point de contact avec l'enveloppe[24]. Jacobi précise sans démonstration que l'on se trouve dans le premier cas lorsque l'on étudie les géodésiques du plan,

---

[22] Le terme de points conjugués relève de la terminologie moderne. Cette notion n'apparaît au XIX^e^ siècle que sous l'appellation de points d'intersection de géodésiques infiniment proches.

[23] L'enveloppe d'une famille de courbes est définie comme le lieu des intersections des membres de la famille avec un autre membre infiniment proche de celle-ci. En langage plus moderne, l'enveloppe des géodésiques issues d'un même point est l'ensemble des points où l'application exponentielle n'est plus de rang maximum, c'est-à-dire l'ensemble des points conjugués du point.

[24] « *Wenn man von einem Punkt einer Oberfläche nach allen Richtungen kürzeste Linien zieht, so können zwei Fälle eintreten : zwei unendlich nahe kürzeste Linien laufen entweder fortwährend nebeneinander, ohne sich zu schneiden, oder sie schneiden sich wiederum, und alsdann bildet die Continuität aller Durchschnittspunkte ihre einhüllende Curve. Im ersten Falle hören die kürzesten Linien nie auf kürzeste zu sein, im zweiten sind sie es nur bis zum Berührungspunkte mit der einhüllenden Curve*». (Quand on trace dans toutes les directions les lignes les plus courtes issues d'un point d'une surface, deux cas peuvent se produire. Ou deux lignes les plus courtes infiniment

des surfaces développables et plus généralement des surfaces qu'il qualifie de concaves-convexes[25] comme les hyperboloïdes. Puis il indique qu'un exemple du deuxième cas est fourni par les ellipsoïdes de révolution. Jacobi analyse, sans démonstration certes, mais avec une grande finesse, le comportement des géodésiques au voisinage de leur enveloppe. Il considère un ellipsoïde peu différent de la sphère de manière que les géodésiques issues d'un même point définissent autour du point diamétralement opposé une petite enveloppe qui est une courbe fermée. Les courbes qui définissent l'enveloppe ne la franchissent pas par définition et apparemment, il n'y aurait pas de chemins les plus courts entre le point initial et les points intérieurs du domaine défini par l'enveloppe, ce qui n'est pas possible. Jacobi explique que ce paradoxe n'est qu'apparent : en effet, la géodésique coupe une première fois l'enveloppe en un point qui n'est pas critique pour la géodésique considérée puis seulement atteint le premier point conjugué en étant tangente à l'enveloppe[26].

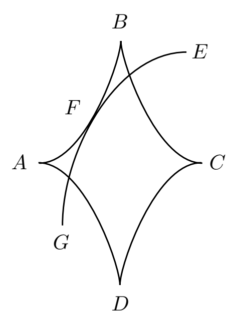

Figure 1. Le comportement des géodésiques issues d'un même point de l'ellipsoïde de révolution au voisinage de leur enveloppe [Jacobi 1843 p. 47]. La géodésique coupe l'enveloppe avant de lui être tangente au premier point conjugué F ; elle perd la propriété d'être minimisante[27] en F.

proches courent constamment l'une à côté de l'autre, sans se couper ou elles se coupent de nouveau et la ligne continue de tous les points d'intersection constitue l'enveloppe. Dans le premier cas, les lignes les plus courtes ne cessent jamais d'être les plus courtes, dans le second elles ne le sont seulement que jusqu'à leur point de contact avec l'enveloppe.) [Jacobi 1843, p. 46].

[25] Ces surfaces ont le long de leurs directions principales des courbures de signes opposées ; elles ont donc une courbure de Gauss négative.

[26] Lützen [1993, p. 25–27] pense que Jacobi a d'abord établi cette propriété des extrema analytiquement, et a découvert postérieurement cette application à la géométrie.

O. Bonnet

A partir des travaux de Jacobi, Ossian Bonnet reprend l'analyse des conditions pour lesquelles une géodésique cesse de minimiser la distance[28] :

«*Un arc de ligne géodésique mesure sur la surface le plus court chemin de l'une de ses extrémités à l'autre ; mais il faut pour cela que l'arc dont il s'agit soit compris entre certaines limites*» [Bonnet 1855a, p. 1312].

Il aborde la question en utilisant les résultats qualitatifs de Sturm précédemment évoqués pour étudier l'équation différentielle du second ordre que vérifie la fonction p exprimant la distance variable MM' des deux lignes géodésiques infiniment voisines AM et AM' :

$$\frac{\mathrm{d}^2 p}{\mathrm{d}s^2} + \frac{p}{RR'} = 0 \tag{3}$$

où R et R' sont les rayons de courbure principaux de la surface. En bornant le coefficient et en appliquant les résultats de Sturm, Bonnet retrouve le résultat annoncé par Jacobi :

«*dans une surface à courbures opposées, une ligne géodésique est minima dans toute sa longueur. Ce beau théorème avait été énoncé par Jacobi, mais il n'avait pas encore été démontré, que je sache*» [Bonnet 1855a, p. 1312].

Dans le cas où p/RR' est positif et inférieur à $1/a^2$, il obtient le résultat suivant :

«*dans le cas considéré, une ligne géodésique ne peut* généralement *être ligne minima dans une étendue supérieure à πa. Par conséquent, la plus courte distance de deux points quelconques d'une surface convexe est moindre que πa, a^2 étant un nombre supérieur au produit RR' des rayons de courbure principaux en tous points de la surface*» [Bonnet 1855a, p. 1313].

Dans sa première note, Bonnet utilise le théorème (non explicitement démontré) de Jacobi sur les points conjugués, pour déterminer les conditions à l'origine de son étude de l'équation (3). S'apercevant de cette lacune, Bonnet, dans une « Deuxième note sur les lignes géodésiques »,

---

[27] « *Von E her tritt sie in die einhüllende Curve ein, und im Berührungpunkt F verliert sie ihre Eigenschaft kürzeste Linie zu sein*». (A partir de E, elle [la géodésique] pénètre dans la courbe enveloppe et perd sa propriété d'être la plus courte ligne au point de rencontre F.) [Jacobi 1843, p. 47].

[28] La propriété de minimalité considérée dans ce théorème ne concerne que les chemins infiniment proches de la ligne géodésique.

démontre le théorème de Jacobi (en utilisant toujours les techniques de Sturm) :

«*Mon travail reposait sur le théorème suivant dû à Jacobi :*

Étant donnée une ligne géodésique AM issue du point A, si A' est le point où cette ligne est rencontrée par une ligne infiniment voisine et issue aussi du point A, la ligne AM sera toujours minima entre le point A et le point A', et cessera d'être minima au delà du point A'.

Jacobi n'a pas démontré son théorème; il s'est borné à dire qu'on le déduirait aisément des règles générales par lesquelles il a appris à distinguer les maxima et les minima dans les questions dépendant du calcul des variations. [...] *Il est certain, en effet, que les conditions générales trouvées par Legendre et complétées par Jacobi, pour distinguer les maxima et les minima dans les problèmes dépendant du calcul des variations, sont suffisantes, mais non point nécessaires. Je suis parvenu à démontrer* [. . .] *le théorème de Jacobi dans son entier*» [Bonnet 1855b, p. 32].

Le rapport entre local et global mis en œuvre dans ces résultats est semblable à celui qui sous-tend les travaux de Sturm et est caractéristique des énoncés qui lient une propriété géométrique et une propriété métrique. En effet, une hypothèse globale sur une notion géométrique comme une hypothèse de signe ou de pincement de la courbure de Gauss, fait apparaître une propriété métrique globale de la surface, ici, un ordre de grandeur du diamètre. Ce dernier résultat est précisé dans la seconde note :

«*si, dans une surface convexe, le produit RR' des rayons de courbure principaux est moindre que la constante a^2, le plus court chemin d'un point à un autre sur la surface sera toujours moindre que πa. De là résulte que toute surface convexe dont les rayons de courbure ne deviennent jamais infinis, est nécessairement fermée*» [Bonnet 1855b, p. 35].

Ce résultat est typique des points de vue modernes en géométrie. Une propriété globale de géométrie, une hypothèse de pincement de la courbure, entraîne une propriété métrique ou topologique.

E.B. Christoffel

Christoffel [1868] consacre un mémoire à la théorie des géodésiques et des triangles géodésiques. Dans la première partie de son mémoire, il écrit l'équation générale des géodésiques en utilisant un nouveau formalisme[29] et introduit la notion de longueur réduite[30] d'une géodésique pour exprimer et interpréter géométriquement l'expression de la métrique en coordonnées polaires géodésiques :

«*le mémoire de M. Christoffel renferme une foule de résultats intéressants se rattachant au même sujet, entre autres une discussion très précise de la continuité des lignes géodésiques, dont l'équation différentielle est présentée sous des formes nouvelles, et des développements très curieux tirés de l'expression (déjà donnée par Gauss) de la mesure de courbure en coordonnées polaires curvilignes, expression qui fournit en même temps l'équation différentielle des longueurs réduites pour les différents arcs d'une même ligne géodésique*» [Beltrami 1870, p. 170].

Christoffel, dans la troisième partie, redémontre les théorèmes de Jacobi de la même manière que Bonnet (sans le citer) et montre que la distance du lieu conjugué à l'origine satisfait à «*une équation différentielle du troisième ordre, qui comprend, comme cas particulier, celle de Jacobi pour les équations modulaires des fonctions elliptiques, et qui possède une intégrale de même forme*» [Beltrami 1870, p. 170][31].

Les minima étudiés dans les résultats précédents ne concernent que les chemins infiniment voisins et on ne peut rien affirmer sur le résultat de la comparaison avec d'autres chemins. Les deux problèmes, comme on l'a vu, sont radicalement différents et conduisent à la question de déterminer les lieux des points où les géodésiques cessent d'être les plus courts chemins parmi les chemins voisins et celui où les géodésiques cessent d'être minimisantes parmi l'ensemble de tous les chemins. Les deux problèmes concernent le comportement global des géodésiques ; cependant,

[29] Christoffel introduit dans ce formalisme les « symboles de Christoffel » qui sont les dérivées des coefficients de la métrique dans la direction des coordonnées.

[30] «*il a appelé* longueur réduite *d'un arc géodésique* [...] *le facteur par lequel on doit multiplier l'angle infiniment petit de deux géodésiques de même origine et d'égale longueur, pour obtenir la distance infiniment petite de leurs extrémités (sur la sphère, la longueur réduite est le sinus de la longueur géodésique)*» [Beltrami 1870, p. 170].

La longueur réduite m est définie comme la dérivée angulaire de la longueur d'un arc du cercle géodésique. La métrique en coordonnées polaires géodésiques s'exprime alors par $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}r^2 + m^2\,\mathrm{d}\phi^2$, où r désigne la longueur de l'arc géodésique et ϕ l'angle caractérisant la géodésique considérée.

[31] Le reste de l'article de Christoffel consacré à la théorie des triangles géodésiques et à une tentative de classification des surfaces en fonction des relations que vérifient les angles et les côtés des triangles géodésiques sera analysé dans un article ultérieur.

l'analyse du lieu des points conjugués, qui est un problème de recherche de minimum local et de détermination de points critiques, est abordée à partir de l'équation différentielle des géodésiques en utilisant les techniques et les résultats de Sturm. Les avancées dans la compréhension et la résolution de ce problème sont essentiellement des conséquences, souvent immédiates, des progrès du calcul des variations et des nouveaux points de vue en théorie des équations différentielles. Le second problème, plus profondément géométrique, est lié à la géométrie globale de la surface et ne peut être abordé avec seulement des techniques d'équations différentielles[32].

J. Bertrand

Rendant compte du traité de mécanique de Jacobi, J. Bertrand fait apparaître la distinction entre les points conjugués (points où les géodésiques issues d'un même point cessent d'être minimisantes parmi les chemins qui leur sont infiniment proches) et les points qui sont les extrémités de deux ou plusieurs chemins minimisants issus d'un même point :

«*En étudiant les lignes* minima *ou* géodésiques *sur une surface, Jacobi énonce cette règle remarquable : si l'on considère toutes les lignes minima issues d'un même point elles enveloppent, en général, une courbe lieu de leurs intersections successives ; chacune d'elles est minima jusqu'au point de contact avec cette courbe et jusqu'à ce point seulement. Lorsque cette courbe enveloppe n'existe pas, on ne peut mener d'un point à un autre qu'une seule ligne géodésique, qui est nécessairement la plus courte possible. C'est ce qui a lieu : Jacobi l'a affirmé depuis longtemps, pour les surfaces à courbures opposées, et M. O. Bonnet, s'appuyant sur un beau mémoire de Sturm, a donné avec élégance la démonstration signalée comme difficile par l'illustre auteur. Mais on peut faire, au sujet de cet élégant théorème, une remarque curieuse : la ligne minima indiquée par la règle de Jacobi n'est pas réellement la plus courte, et l'on prouve aisément que l'une des lignes géodésiques partant d'un point donné M et touchant la courbe enveloppe en I ajoutée à un arc quelconque II' de*

[32] Expliquant un certain nombre de résultats sur le *cut locus*, la réunion du lieu conjugué et du lieu de coupure, M. Berger insiste sur le fait que même actuellement la connaissance en reste qualitative et que l'on a très peu d'exemples où le *cut locus* est explicitement décrit : « *Quantitativement, le* cut locus *est presque un illustre inconnu*» [Berger 1985, p. 31].

cette courbe enveloppe, donne une somme précisément égale à celle de la ligne géodésique qui va de M à I'. Si l'on remplace l'arc II' par la corde géodésique, évidemment plus courte, on obtiendra un chemin allant de M à I', et plus court que celui qu'indique Jacobi comme un minimum. Il n'y a là nulle contradiction, on doit le remarquer, et la distinction faite entre la ligne la plus courte entre toutes *et la ligne plus courte que les voisines, nommée généralement* ligne minima, *dissipe toute difficulté*» [Bertrand 1873, p. 151–152].

H. von Mangoldt

Bien que son article soit principalement consacré aux géodésiques des surfaces à courbure positive, Mangoldt [1881] traite rapidement le cas des surfaces à courbure négative et expose la démonstration de Christoffel du théorème sur les géodésiques infiniment voisines d'une surface à courbure négative. Puis reprenant un développement de Thomson et Tait [1867], il précise que ce résultat n'épuise pas la question. En effet, Christoffel montre seulement que deux géodésiques issues d'un même point et infiniment voisines ne se recoupent jamais ; la question de savoir si deux géodésiques issues d'un même point et formant un angle de mesure finie (non infiniment petit) se recoupent, est laissée ouverte[33].

Pour traiter cette question, Mangoldt applique à la partie de la surface délimitée par deux géodésiques se coupant deux fois le théorème établi par Gauss dans les *Disquitiones generales circa superficies curvas*, affirmant que la courbure totale[34] d'un morceau de surface borné et délimité par n segments géodésiques est égale à l'excès ou au défaut de la somme des angles intérieurs par rapport à $\frac{1}{2}\pi(2n-4)$ [Gauss 1828, p. 40–41]. Si la surface est à courbure négative et simplement connexe, comme le paraboloïde hyperbolique, deux géodésiques issues d'un même point ne peuvent se recouper et en particulier, il n'y a pas de géodésiques fermées

[33] «[*Christoffel*] *zeigt nur, dass zwei unendlich nahe benachbarte von einem Punkt ausgehende geodätische Linien sich nicht wieder schneiden, lässt aber die Frage offen, ob vielleicht zwei geodätische Linien, welche unter einem Winckel von endlicher Grösse von einem ersten Schnittpunkt ausgehen, noch ein zweites Mal zusammentreffen können*». ([Christoffel] montre seulement que les lignes géodésiques infiniment voisines issues d'un même point ne se recoupent pas, mais la question reste ouverte de l'éventualité que deux lignes géodésiques qui se coupent une première fois avec un angle de grandeur finie puissent se recouper une seconde fois.) [Mangoldt 1881, p. 27].

[34] Voir note 9.

sur une surface simplement connexe à courbure négative. Si la surface n'est pas simplement connexe, deux géodésiques issues d'un même point peuvent se recouper en délimitant deux parties non bornées de la surface et donc il n'y a pas de contradiction avec le théorème de Gauss puisque celui-ci ne concerne que les parties bornées des surfaces.

Le premier théorème que rappelle Mangoldt concerne des géodésiques infiniment proches sur une surface à courbure négative et ne fait pas intervenir de condition topologique sur la surface. Mangoldt le démontre de la même manière que Bonnet ou Christoffel en analysant qualitativement les solutions[35] de l'équation différentielle (3). Le second, qui traite de l'ensemble des géodésiques d'une surface à courbure négative, utilise le théorème de Gauss obtenu à partir de la même équation en intégrant km (où k est la courbure de Gauss et m la longueur réduite des géodésiques au sens de Christoffel) sur le triangle géodésique ; il fait intervenir des conditions topologiques sur la surface. Le premier théorème est un résultat de minimum local et utilise des résultats qualitatifs sur les trajectoires de l'équation différentielle (3) alors que le deuxième théorème, résultat de minimalité globale, utilise le théorème de Gauss qui est dans un sens une expression globale de l'équation différentielle (3).

Mangoldt aborde ensuite le problème du lieu conjugué des surfaces à courbure positive sous un autre angle. Il partage les points d'une surface en deux catégories : les géodésiques issues des points de la première catégorie sont minimisantes sur toute leur longueur. Les points de la deuxième catégorie sont ceux qui ne sont pas de première catégorie, c'est à dire ceux pour lesquels deux géodésiques infiniment proches issues de ces points se coupent. Il montre que sur une surface régulière à courbure positive, tous les points ne peuvent être de première catégorie et leur lieu est une partie bornée de la surface. Il décrit le lieu des points de première catégorie sur les surfaces du deuxième degré. Ainsi, sur l'hyperboloïde de révolution, ce lieu est un domaine contenant le sommet et borné par un cercle parallèle. Lorsque l'hyperboloïde de révolution est déformé en un hyperboloïde à trois axes, ce lieu se déforme autour du sommet et peut se partager en deux parties qui contiennent les ombilics[36]. Sur les paraboloïdes, le lieu des points de première catégorie se réduit à un ensemble discret. Sur

[35] Voir ci-dessus l'étude des travaux de Bonnet et Christoffel.

[36] Voir note 19.

les paraboloïdes de révolution, le seul point de première catégorie est le sommet alors que sur les paraboloïdes elliptiques, les seuls points de ce type sont les ombilics.

G. Darboux

Dans le chapitre 5 du livre 6 de ses *Leçons sur la théorie générale des surfaces* consacré aux propriétés du «*plus court chemin entre deux points d'une surface*», Gaston Darboux précise et étudie aussi ces notions :

«*En résumé, il y aura autour du point A deux courbes distinctes : l'une sera le lieu du premier point où chaque ligne géodésique est rencontrée par une autre géodésique de longueur égale ; l'autre sera l'enveloppe des lignes géodésiques. Si le point B se déplace sur une des géodésiques AX, le chemin AB demeurera le minimum absolu tant que le point B n'aura pas atteint le point C de la première courbe pour lequel la géodésique devient égale à une autre géodésique terminée aux mêmes points. Cela est évident, car le chemin AB, qui est le plus court lorsque le point B est très voisin de A, ne peut perdre cette propriété qu'au moment où il devient égal à un autre chemin. La ligne AB cessera d'être minimum absolu dès que le point B dépassera le point C mais demeurera minimum par rapport aux chemins infiniment voisins, tant que B n'aura pas atteint le point où l'enveloppe des géodésiques est touchée pour la première fois par AX* »[37] (voir Fig. 2) [Darboux, *Leçons* 3, p. 89–90].

Gaston Darboux exprime bien la différence fondamentale de nature entre les deux cas. Le premier cas revient à considérer la question de la détermination des plus courts chemins comme une question globale qui implique toute la géométrie de la surface, alors que le second cas consiste à restreindre la question du plus court chemin à un problème local de nature différentielle, n'impliquant que les chemins infiniment voisins.

A. von Braunmühl

Braunmühl étudie le comportement global des géodésiques des surfaces du second degré dans deux articles, l'un consacré essentiellement

[37] Gaston Darboux précise bien que ce résultat «*repose sur des considérations de continuité et sur l'hypothèse de l'existence d'une enveloppe*» et que :

«*Dans certaines surfaces exceptionnelles, les deux courbes précédentes pourront se confondre et la loi que nous signalons disparaîtra. C'est ce qui a lieu, par exemple, dans le cas de la sphère ou pour l'ensemble des méridiens d'une surface de révolution*» [*Leçons* 3, p. 88–89 et 90].

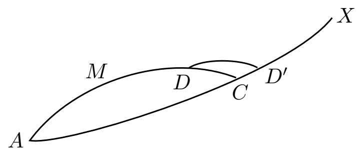

Figure 2. Point de coupure et point conjugué d'une géodésique [Darboux, *Leçons* 3, p. 89]. Jusqu'au point de coupure C, la géodésique issue de A est globalement minimisante. Elle cesse de l'être après C car le chemin ADD' est plus court que ACD'. Cependant, elle reste minimisante parmi les chemins infiniment voisins jusqu'au premier point conjugué qui se trouve au-delà de C.

aux surfaces de révolution [1879] et l'autre à l'ellipsoïde à trois axes inégaux [1882]. Dans le deuxième article, il retrouve les équations de Jacobi et Liouville. Il interprète géométriquement cette équation en soulignant que la constante qui y apparaît est le paramètre de la ligne de courbure à laquelle la géodésique est tangente[38], retrouvant ainsi la propriété déjà signalée par Roberts et Liouville[39]. De plus, il montre que par chaque point, il passe deux géodésiques tangentes à une ligne de courbure donnée. En outre, il traite numériquement l'équation des géodésiques et obtient donc des résultats quantitatifs sur le comportement des géodésiques [1882, p. 567–570]. Enfin, il étudie et discute l'équation de l'enveloppe du bouquet des lignes géodésiques issues d'un même point. Il montre que l'enveloppe se partage en quatre branches et que deux géodésiques issues d'un même point, tangentes à une même ligne de courbure, se coupent avant d'atteindre le point de contact avec l'enveloppe (Fig. 3) [Braunmühl 1882, p. 574–576]. Par contre, il ne fait pas le lien avec les questions de minimum local ou global, sauf pour les géodésiques principales c'est-à-dire les trois géodésiques fermées qui appartiennent aux plans principaux.

[38] « *Bezeichnet man nämlich mit i den Winckel, unter welchem eine geodätische Linie eine Krümmungslinie schneidet, so ist diese Gleichung* $\mu^2 \cos^2 i + \nu^2 \sin^2 i = \mu'^2$. [...] *Somit ist* μ' *der Parameter jener Krümmungslinie, welche von der geodätischen berührt wird.* [...] *Es gehen durch jeden Punkt der Fläche zwei geodätische Linien, die die Krümmungslinie* μ' *berühren* ». (Si on désigne par i l'angle sous lequel une ligne géodésique coupe une ligne de courbure, cette équation est $\mu^2 \cos^2 i + \nu^2 \sin^2 i = \mu'^2$. [...] Aussi μ' est le paramètre de la ligne de courbure à laquelle la ligne géodésique est tangente. [...] Par chaque point, il passe deux lignes géodésiques qui sont tangentes à la ligne de courbure μ'.) [Braunmühl 1882, p. 560].

[39] Voir ci-dessus p. 170.

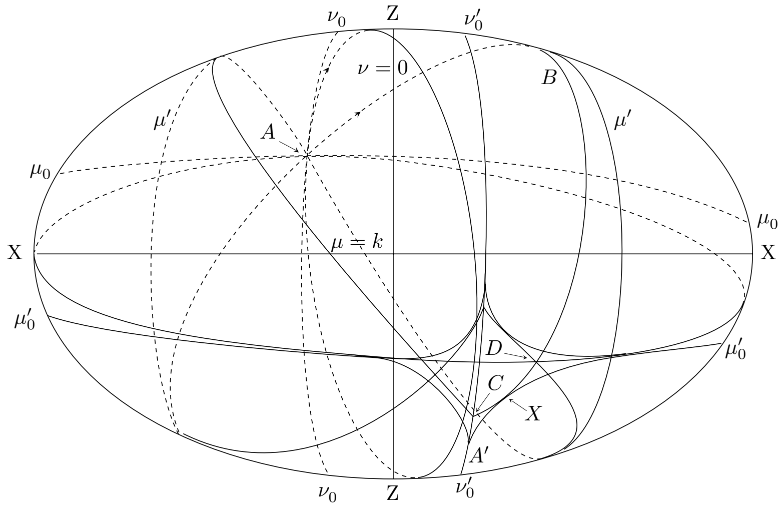

Figure 3. Le lieu conjugué et le lieu de coupure d'un point d'un ellipsoïde [Braunmühl 1882]. La géodésique issue de A tangente en B à la ligne de courbure de paramètre μ' coupe l'autre géodésique tangente à la ligne de courbure de paramètre μ' en D avant d'atteindre le premier point conjugué X. De même, les deux géodésiques tangentes à la ligne de courbure de paramètre ν'_0 se coupent avant d'atteindre leur point conjugué qui est dans ce cas le point de contact avec la ligne de courbure de paramètre ν'_0. Les deux sommets du lieu conjugué qui sont sur la ligne de courbure de paramètre ν'_0 sont des foyers en talon pour reprendre la terminologie de Poincaré (voir cidessous). Par contre, les deux géodésiques issues de A tangentes à la ligne de courbure μ'_0 atteignent leur point conjugué avant de se rencontrer et les deux sommets du lieu conjugué qui sont sur la ligne de courbure de paramètre μ'_0 sont des foyers en pointe.

H. Poincaré

Dans la première partie de son article « Sur les lignes géodésiques des surfaces convexes », Poincaré étudie les foyers et les caustiques (lieu conjugué) d'un point d'une surface à courbure positive et «*le lieu des points qui sont les extrémités de deux ou plusieurs plus courts chemins* [...] *que l'on peut appeler lignes de partage*» [Poincaré 1905, p. 45].

Il définit les foyers d'un point comme le lieu d'intersection de géodésiques issues d'un même point O et infiniment voisines. La première caustique, lieu des premiers points d'intersection, constitue l'enveloppe des géodésiques issues de O. De même, le lieu des n-ièmes foyers (les n-ièmes points d'intersection des géodésiques infiniment voisines) constitue la n-

ième caustique.

Comme Christoffel et Mangoldt, Poincaré rapporte la surface à des coordonnées polaires (u, v) ; la métrique de cette surface s'écrit donc $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}u^2 + \lambda^2\,\mathrm{d}v^2$ où λ est une fonction de u et v. En utilisant aussi les techniques de Sturm [1836] pour étudier les équations différentielles, Poincaré retrouve[40] l'équation $\lambda = 0$ des caustiques.

Poincaré applique les résultats du chapitre 2 du tome I des *Méthodes nouvelles de la mécanique céleste*[41] et en déduit un certain nombre de propriétés de régularité des caustiques. Il montre en particulier qu'en dehors des points singuliers, «*dans l'équation de la caustique, les coordonnées x, y, z sont des fonctions holomorphes*» des coordonnées choisies sur la surface. «*Les points singuliers correspondent aux racines de l'équation* $\mathrm{d}\lambda/\mathrm{d}\nu = 0$», c'est-à-dire aux points critiques de la longueur des géodésiques issues de O jusqu'à leur premier foyer (considérée comme une fonction de ν). En utilisant des développements en série des coordonnées, Poincaré classifie les différentes sortes de foyers en reprenant l'analyse qu'il a développée dans le tome III des *Méthodes nouvelles* [p. 332–333] :

«*Nous sommes ainsi amenés à distinguer quatre sortes de foyers :*

1° Les foyers ordinaires, correspondant aux points non singuliers de la caustique.

2° Les foyers en pointe[42]*, correspondant aux points de rebroussement ordinaires, qui sont des minima de u.*

---

[40] On a vu que Gauss, dans les *Disquisitiones*, exprime la courbure « de Gauss» de la surface en fonction de telles coordonnées [1828, p. 37–38]. Mangoldt utilise aussi ce type de coordonnées et obtient cette équation pour décrire le lieu conjugué [1881] : « *es sei A einer ihrer Punkte, in welchem sie keine Singularitäten besitzt, so dass man ihn zum Anfangspunkt eines Systems geodätischer Polarcoordinaten nehmen kann.* [...] die geodätischen Polarcoordinaten u_1, v_1 des Schnittpunktes zweier unendlich nahe benachbarten geodätischen Linien, welche von A ausgehen, müssen die Gleichung $m = 0$ erfüllen» (soit A un point en lequel il n'y a pas de singularité et que l'on peut donc prendre comme point origine d'un système de coordonnées polaires géodésiques. [...] *les coordonnées polaires géodésiques u_1, v_1 d'un point d'intersection de deux lignes géodésiques infiniment proches, issues de A, devront vérifier l'équation* $m = 0$) [Mangoldt 1881, p. 25-27].

La lettre m désigne chez Mangoldt la fonction λ de Poincaré.

[41] Utilisant et généralisant un des théorèmes de Cauchy sur l'existence des solutions d'équations différentielles, Henri Poincaré obtient des développements en série des solutions.

[42] Poincaré précise que les expressions «*en pointe*» et «*en talon*» sont empruntées «*à l'art des chemins de fer* »!

3° Les foyers en talon, correspondant aux points de rebroussement ordinaires, qui sont des maxima de u. [...]

4° Les foyers singuliers, correspondant aux points singuliers d'ordre plus élevé» [Poincaré 1905, p. 44–45].

(Dans ce texte, u désigne la longueur des géodésiques issues de O jusqu'au premier point conjugué.)

Poincaré utilise ici pleinement les techniques de développement en séries des solutions d'équations différentielles tant pour montrer des propriétés de régularité que pour obtenir des descriptions qualitatives des courbes étudiées. Puis, il s'intéresse aux lignes de partage définies comme le lieu des extrémités des géodésiques issues d'un même point O, c'est-à-dire les points au-delà desquels, les géodésiques ne sont plus minimisantes parmi toutes les géodésiques issues du point O :

«*Nous pouvons alors conclure que par tout point de S passe un plus court chemin et un seul. Il y a exception pour les extrémités des divers plus courts chemins ; si P est une de ces extrémités, du point O partiront au moins deux plus courts chemins qui auront l'un et l'autre leurs extrémités en P. Tous les plus courts chemins qui ont leur extrémité en P ont même longueur*» [Poincaré 1905, p. 45].

Poincaré met alors en lumière la structure arborescente des lignes de partage :

«*L'ensemble des lignes de partage ne divise pas la surface S en deux régions puisque l'on peut aller du point O à un point quelconque M de la surface sans traverser aucune ligne de partage ; il suffit pour cela d'aller de O en M par le plus court chemin.*

L'ensemble des lignes de partage, ou une partie de ces lignes, ne peut donc jamais constituer un polygone fermé ; il formera une sorte de système rameux, *où les bifurcations seront représentées par les points où aboutissent plus de deux plus courts chemins*» [Poincaré 1905, p. 46].

Il termine en s'intéressant aux extrémités des branches et montre que ces extrémités sont en fait des points conjugués sur la première caustique[43] ; ce sont les seuls points des lignes de partage qui sont sur la

[43] Un point d'une ligne de coupure est le point d'intersection de deux géodésiques de même longueur ; lorsque ce point est à l'extrémité d'une ligne de coupure, celles-ci se confondent. Les extrémités des lignes de coupure sont donc des points conjugués. Henri Poincaré précise que ces foyers qui sont aussi les extrémités des lignes de partage ne peuvent être que des foyers en pointe, correspondant à des minima de la distance du

première caustique.

Dans cette première partie de son article, Poincaré souligne implicitement la différence de nature entre le problème du lieu des points d'intersection de géodésiques infiniment voisines et celui du lieu des points d'intersection de géodésiques issues d'un même point. Le premier, qui est purement local, relève essentiellement de l'application du calcul différentiel à la géométrie et Poincaré n'utilise que des méthodes analytiques pour traiter cette question et obtenir des descriptions des caustiques en terme de régularité. Il aborde le second, de nature globale, par des considérations générales sur la notion de chemin le plus court et obtient une description de la structure topologique des lignes de partage. Poincaré ne se contente pas d'étudier séparément ces deux questions mais esquisse une analyse du redoutable problème de leur imbrication en s'intéressant à l'intersection du lieu conjugué et du lieu de coupure[44].

LES GÉODÉSIQUES DES SURFACES À COURBURE POSITIVE

La géométrie des surfaces est radicalement différente selon le signe de la courbure. Les résultats de Jacobi et Bonnet montrent qu'une hypothèse de signe sur la courbure permet d'aborder le problème de l'analyse qualitative de l'équation des géodésiques. L'étude du comportement des géodésiques va donc s'orienter dans deux directions. Dans son article « Sur certaines propriétés des trajectoires en dynamique », Hadamard étudie les géodésiques sur une surface à courbure partout positive comme un cas particulier de sa problématique plus générale en mécanique. Sur ce sujet, il obtient le résultat suivant : «*sur une surface à courbure partout positive, toute géodésique fermée est coupée une infinité de fois par toute autre géodésique*» [1897a, p. 347]. Il en déduit que deux géodésiques fermées sur une surface à courbure positive se coupent nécessairement.

---

point O à la première caustique.

[44] Avec le développement du calcul des variations au début du XX^e siècle, de nombreux résultats sur les points conjugués ont été obtenus (voir, par exemple, Hadamard [1910], Carathéodory [1935] ou Hilbert [1906]). Fraser [1994] montre l'importance des applications géométriques dans le développement des techniques variationnelles. Cependant, les questions et les résultats de Poincaré n'ont pas réellement suscité beaucoup de recherches parmi ses contemporains. La renaissance de l'étude du lieu conjugué et du lieu de coupure des surfaces et des variétés correspond à la parution des articles de Myers [1935 ; 1936] sur les liens entre géométrie et topologie.

Hadamard montre ce résultat en considérant une géodésique fermée L et en prenant «*pour coordonnées l'arc v de L, compté à partir d'une origine fixe jusqu'au pied d'une géodésique normale à la première, et l'arc u de cette dernière géodésique, compté à partir de son pied. L'élément linéaire sera* $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}u^2 + C^2\,\mathrm{d}v^2$ » [1897a, p. 346].

La courbure s'exprime alors sous la forme

$$\frac{1}{RR'} = -\frac{\partial^2 C}{\partial u^2}\cdot$$

Hadamard conclut en montrant que le minimum de u est nécessairement 0 et qu'il est atteint une infinité de fois si le point variable parcourt une géodésique.

Dans son article consacré aux lignes géodésiques des surfaces convexes [1905], Poincaré obtient des résultats globaux sur le comportement des géodésiques fermées ainsi que sur leur stabilité, en utilisant les méthodes qualitatives élaborées dans *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste.* A la base de sa démarche, Poincaré admet un principe heuristique justifiant la recherche de solutions périodiques d'un système d'équations différentielles[45] :

«*voici un fait que je n'ai pu démontrer rigoureusement, mais qui me paraît très vraisemblable. Étant données des équations*[46] [...] *et une solution particulière quelconque de ces équations, on peut toujours trouver une solution périodique (dont la période peut, il est vrai, être très longue), telle que la différence entre les deux solutions soit aussi petite qu'on le veut, pendant un temps aussi long qu'on le veut. D'ailleurs, ce qui nous rend ces solutions périodiques si précieuses, c'est qu'elles sont, pour ainsi dire, la seule brèche par où nous puissions essayer de pénétrer dans une place jusqu'ici réputée inabordable*» [*Méthodes nouvelles* I, p. 82].

Il établit par ailleurs que «*les solutions périodiques disparaissent par couples*», résultat qu'il retrouvera pour les géodésiques fermées des surfaces à courbure positive. En 1905, il traite le problème des géodésiques

[45] Sur cette question, voir l'article de Chabert et Dahan [1992, p. 290–291].

[46] Les équations que Poincaré considère ici, sont des équations de Hamilton avec un Hamiltonien F qui peut se développer suivant les puissances d'un paramètre très petit μ de la manière suivante : $F = F_0 + \mu F_1 + \mu^2 F_2 + \cdots$, en supposant de plus que F_0 ne dépend que des x et est indépendant des y ; et que $F_1, F_2, \ldots$ sont des fonctions périodiques de période 2π par rapport aux y [*Méthodes nouvelles* I, p. 32–33].

sur un sphéroïde comme une perturbation du même problème sur une sphère. L'hamiltonien T (réduit à la demi-force vive ou énergie cinétique puisque le point matériel n'est soumis à aucune force) s'écrit

$$T = T_0 + \mu T_1$$

où T_0 correspond au cas de la sphère, μ est un paramètre petit et T_1 un hamiltonien quadratique quelconque. Il écrit les équations de Hamilton en négligeant systématiquement les termes d'ordre supérieur ou égal à deux en μ et exprime ces équations en fonction des dérivées de la fonction $S_1 = T_1/\omega^2$ où ω est la vitesse angulaire du mouvement. Poincaré détermine la signification géométrique de S_1 : cette fonction exprime la différence de métrique entre la sphère et le sphéroïde.

La fonction S_1 intervient dans les équations du mouvement, description locale du problème. Pour obtenir des résultats globaux, Poincaré se laisse guider par les propriétés géométriques qu'il a dégagées. En effet, pour déterminer les géodésiques fermées, Poincaré utilise les diverses propriétés de périodicité de ses équations et établit que «*les géodésiques fermées répondront donc aux maxima, aux minima et aux minimax de la fonction R*» [1905, p. 52], fonction définie comme la valeur moyenne de S_1. De nouveau, il insiste sur l'importance de «*rechercher la signification géométrique de la fonction R*» et montre que R exprime la différence de longueur entre un grand cercle de la sphère et la courbe C correspondante sur le sphéroïde. La fonction S_1 a une signification géométrique locale, sa moyenne R a une interprétation géométrique globale. Les géodésiques fermées du sphéroïde «*correspondent*[47] *aux minima, maxima et minimax de la longueur totale de la courbe C*» [1905, p. 53]. Suivant un résultat de son « Mémoire sur les courbes définies par des équations différentielles » [Poincaré 1881], le nombre total des points critiques de R est un multiple de 4 plus 2 :

«*Mais à chaque courbe C correspondent deux pôles P et P' diamétralement opposés, donc à chaque géodésique fermée correspondent deux minima, maxima ou minimax. Le nombre total des géodésiques fermées est donc impair*»[48] [1905, p. 54].

[47] Au moins au premier ordre : il ne faut pas oublier que tous les calculs négligent les termes d'ordre supérieur en μ.

[48] Poincaré précise bien que ce résultat ne concerne que des géodésiques fermées qui

Les calculs du paragraphe précédent dont Poincaré reconnaît le caractère approximatif et limité, ont une valeur pédagogique et permettent aux lecteurs habitués «*au langage de la géodésie*» de saisir l'esprit du principe général de continuité analytique qui fait l'objet du paragraphe suivant.

Pour établir son principe, Poincaré reprend, dans le cadre plus restreint de l'étude des géodésiques, les méthodes exposées dans le chapitre 3 du tome I de son traité de mécanique céleste : S et S' étant des surfaces régulières à courbure positive telles que l'on puisse «*passer de l'une à l'autre d'une manière continue*»[49], il se propose d'étudier l'évolution d'une géodésique fermée lorsque l'on passe de S à S'. Sur chaque surface (t étant fixé), chaque géodésique est repérée par sa position et son vecteur vitesse à l'origine et, compte tenu des dépendances des coordonnées, «*les données initiales* (y_0, z_0, y_0', z_0') *suffisent pour distinguer notre géodésique de toutes les autres géodésiques tracées sur la surface*». De plus, en écrivant que la géodésique est fermée, on obtiendra des relations analytiques entre les paramètres de départ :

«*Donc,* y_0, z_0, y_0', z_0' *sont liés à* t *par des relations analytiques ; si nous considérons* y_0, z_0, y_0', z_0', t *comme les coordonnées d'un point dans l'espace à cinq dimensions, ces relations définiront une certaine courbe analytique que j'appelle* C» [1905, p. 55].

Chaque branche de la courbe C représente l'évolution d'une géodésique fermée : «*Nous dirons que les différentes géodésiques qui appartiennent aux différents points d'une même branche font partie d'une même série continue*» [1905, p. 56]. Selon les développements possibles au voisinage d'un point de C, «*le nombre des géodésiques fermées* [...] *qui font partie de une, deux ou plusieurs séries continues déterminées est constamment pair ou constamment impair*» [1905, p. 56].

L'étude qualitative de la courbe C a donc permis d'obtenir des propriétés globales des géodésiques. Poursuivant cette idée, Poincaré obtient des propriétés topologiques des géodésiques fermées en utilisant des propriétés de régularité de la courbe C. Il obtient en particulier, que «*dans une même série continue, le nombre des points doubles d'une géodésique*

subsistent quelque petit que soit μ. Il indique qu'il y en a en général une infinité d'autres.

[49] En fait, Poincaré suppose que la famille de surfaces qui va de S à S' dépend analytiquement d'un paramètre t appartenant à l'intervalle $[0, 1]$.

fermée demeure constant»[50] et conclut que «*sur une surface convexe quelconque, il y a toujours au moins une géodésique fermée sans point double et il y en a toujours un nombre impair*»[51]. Poincaré termine son article en étudiant les propriétés de stabilité des géodésiques périodiques.

LES GÉODÉSIQUES DES SURFACES À COURBURE NÉGATIVE

Les principales contributions à la théorie des surfaces à courbure négative et en particulier à l'étude de leurs géodésiques sont celles de J. Hadamard[52] en 1897 et 1898. Hadamard montre en particulier l'importance fondamentale des hypothèses topologiques (*Analysis situs*) sur le comportement global des géodésiques d'une surface à courbure négative et obtient une classification des comportements des géodésiques ainsi que des résultats topologiques sur l'ensemble des géodésiques :

---

[50] «*Ce nombre, en effet, pourrait varier de deux manières :*

1° *Si un point double à tangentes réelles devenait un point isolé à tangentes imaginaires ; mais alors il faudrait passer par un point de rebroussement.*

2° *Si deux points doubles réels devenaient imaginaires conjugués ; mais alors il faudrait qu'au moment du passage deux branches de courbe vinssent à se toucher*» [1905, p. 57].

On voit bien ici fonctionner la méthode de Poincaré, chaque propriété des géodésiques est interprétée en une propriété de la courbe C.

[51] Marston Morse souligne, dans son ouvrage *The calculus of variations in the large* [Morse 1934], les problèmes que la méthode de Poincaré soulèvent. En effet, des familles infinies de géodésiques fermées de même longueur peuvent apparaître pour certaines valeurs du paramètre t (par exemple si la surface devient une sphère). George Birkhoff [1927] avait déjà souligné cette difficulté en montrant que le principe de continuité analytique d'un équilibre généralisé reste valable tant que cet équilibre est simple.

D'autre part, l'existence éventuelle sur un sphéroïde d'autres géodésiques fermées que celles obtenues à partir d'un grand cercle (par exemple, sur un ellipsoïde d'axes inégaux, il existe d'autres géodésiques fermées que les ellipses principales) constitue une sérieuse objection. Le prolongement analytique de ces géodésiques peut se fondre avec le prolongement analytique des ellipses principales. De plus, Marston Morse explique que la méthode de Poincaré est difficilement transposable pour des dimensions plus grandes.

Néanmoins, les idées de Poincaré (en particulier celle de modéliser l'espace étudié, ici l'espace des géodésiques, par un objet analytique dont on sait étudier les propriétés) sont à l'origine des théories globales : «*It will be sufficient to say that Henri Poincaré was among the first to have a conscious theory of macro-analysis, and of all mathematicians was doubtless the one who most effectively put such a theory into practice*» [Morse 1934, p. iii].

[52] Pour plus de précisions sur les méthodes et les résultats de Hadamard sur ce sujet, en particulier sur les liens avec la question des systèmes dynamiques, voir l'article de J.-L. Chabert [1992].

«*Quand à la méthode que nous avons employée, on peut la considérer comme une application de deux principes posés par M. Poincaré, dans ses études sur les équations différentielles.*

*En premier lieu, nos conclusions mettent en évidence, une fois de plus, le rôle fondamental que joue dans ces questions l'*Analysis situs*. Qu'il soit absurde d'étudier des courbes intégrales tracées dans un domaine déterminé sans faire entrer en ligne de compte la forme même de ce domaine, c'est une vérité sur laquelle il peut sembler inutile d'insister longuement. Cette vérité est cependant restée insoupçonnée jusqu'aux travaux de M. Poincaré.*

En second lieu, l'importance que ce géomètre a reconnue aux solutions périodiques, dans son Traité de Mécanique céleste*, s'est manifestée également dans la question actuelle.* [...]

D'une façon plus précise, elles ont joué pour nous le rôle d'une sorte de système de coordonnées auquel nous avons rapporté toutes les autres géodésiques» [Hadamard 1898, p. 73].

Hadamard montre qu'une surface à courbures opposées a nécessairement des nappes infinies. La représentation sphérique de telles surfaces a, en effet, toujours des bords qui en l'absence de points singuliers, «*ne peuvent correspondre qu'à des nappes infinies de la surface donnée*» [Hadamard 1897c, p. 61]. Il établit ensuite l'existence de surfaces à courbure négative présentant un nombre quelconque de nappes infinies et offrant un nombre plus ou moins grand de trous et en exhibe des exemples [1898, p. 28–44]. Hadamard distingue les nappes infinies évasées et non-évasées :

«*Considérons encore une telle nappe comme engendrée par le déplacement d'une courbe mobile C. En général, quelle que soit la loi de variation de cette courbe sur la surface, sa longueur totale augmentera indéfiniment à mesure qu'elle s'éloignera.* [...] *De telles nappes infinies seront dites* évasées» [1898, p. 34–35].

Il établit alors, en utilisant le théorème de Gauss sur les polygones géodésiques, le théorème suivant qui généralise le résultat de Mangoldt : «*A chaque type*[53] *de lignes joignant deux points a et b, correspond un arc de géodésique appartenant à ce type, et il n'en correspond qu'un seul*» [1898, p. 50].

[53] Deux courbes sont du même type (appartiennent à la même classe d'homotopie) si elles sont homotopes, c'est-à-dire si l'on peut passer continûment de l'une à l'autre .

Hadamard peut décrire les géodésiques fermées des surfaces à courbure négative en montrant qu'à chaque type essentiel de ligne fermée non réductible à un point, correspond une ligne géodésique fermée et une seule (à l'exception des contours simples correspondant aux nappes infinies non évasées). Il classifie alors les géodésiques en quatre catégories :

«*1° Les géodésiques fermées ;*

2° Les géodésiques asymptotes aux géodésiques fermées ;

3° Celles qui s'éloignent à l'infini ;

4° Des géodésiques se rapprochant d'une géodésique fermée déterminée, puis abandonnant celle-ci pour se rapprocher d'une autre à type plus compliqué, puis passant à une troisième, et ainsi de suite indéfiniment» [Hadamard 1897d, p. 116].

Hadamard étudie la structure de l'ensemble des géodésiques et montre que toute géodésique suffisamment voisine d'une géodésique qui va à l'infini va également à l'infini. De plus, comme «*dans le voisinage de toute géodésique qui ne s'en va pas à l'infini, il en existe d'autres qui jouissent de la même propriété*» [1897d, p. 116], Hadamard en conclut que l'ensemble E des géodésiques issues d'un même point et qui ne s'en vont pas à l'infini est un «*ensemble parfait au sens de M. Cantor*»[54] et prouve avec un argument purement topologique l'existence de géodésiques de la quatrième catégorie :

«*L'existence des trois premières catégories est incontestable, mais nous ne pouvions rien dire, jusqu'ici, relativement à la dernière.* [...] *l'ensemble E étant parfait, est de la seconde puissance, et se compose des lignes issues de O et appartenant aux catégories* 1, 2 *et* 4. *Or les lignes partant de O et correspondant aux deux premières catégories forment une infinité dénombrable.* Donc il existe des lignes de la quatrième catégorie» [1897d, p. 117].

La classification a été obtenue à partir d'une compréhension fine de la géométrie des surfaces à courbure négative et en analysant qualitativement l'équation des géodésiques. A partir de cette classification, Hadamard considère l'ensemble des géodésiques comme un objet mathématique à décrire. Les propriétés topologiques de l'ensemble des géodésiques sont déduites de considérations générales, sur le comportement global des géodésiques, qui

[54] Un ensemble parfait est un ensemble partout dense dont le complémentaire est ouvert.

prennent en compte la géométrie et la topologie des surfaces ; l'existence de géodésiques appartenant à la quatrième catégorie est montré par un raisonnement purement topologique.

Hadamard termine en soulignant qu'au voisinage d'une géodésique qui reste à distance finie, «*il existe des géodésiques allant à l'infini*» sur la nappe infinie que l'on veut et plus généralement, il existe, dans ce voisinage, des géodésiques d'une catégorie quelconque :

«*En un mot, tandis que toute géodésique qui s'éloigne à l'infini est entouré d'un continuum de géodésiques jouissant de la même propriété, au contraire, tout changement, si minime qu'il soit, apporté à la direction initiale d'une géodésique qui reste à distance finie suffit pour amener une variation absolument quelconque dans l'allure finale de la courbe, la géodésique troublée pouvant affecter n'importe laquelle des formes énumérées précédemment*» [Hadamard 1898, p. 71].

Poincaré et Hadamard abordent la question des géodésiques en essayant de décrire topologiquement l'ensemble des géodésiques. Néanmoins, c'est essentiellement parce que l'hypothèse de courbure négative permet de traiter l'équation des géodésiques que cette stratégie est plus naturelle à mettre en œuvre sur ces surfaces. *A contrario*, alors que les surfaces à courbure positive ont une topologie plus facile à décrire, les difficultés liées à l'analyse de l'équation des géodésiques rendent ce problème beaucoup plus difficile à aborder :

«[*Hadamard*] *se restreint aux surfaces dont la courbure est partout négative. Cette circonstance l'affranchit de difficultés sans nombre qu'il aurait rencontrées avec une surface quelconque ou avec une surface convexe. Il peut ainsi arriver à des résultats complets*» [Poincaré 1897, p. 590].

CONCLUSION

Cette étude de la question des géodésiques sur les surfaces n'a pas de prétention à l'exhaustivité[55] et se restreint essentiellement aux travaux consacrés au traitement de l'équation différentielle des géodésiques. Ceux-ci illustrent bien les bouleversements dans les conceptions et les méthodes qu'a entraînés la mise en œuvre des nouvelles techniques qualitatives en analyse et permettent de mieux comprendre la constitution des points de vue actuels en géométrie différentielle et en théorie des systèmes différentiels.

Au XIX^e siècle, la plupart des auteurs ont continué de souligner les liens étroits que la question des géodésiques entretient avec la mécanique et ont souvent établi l'équation des géodésiques à partir de considérations mécaniques. Dans une perspective inverse, Hadamard et Poincaré ont étudié l'ensemble des géodésiques d'une surface à courbure de signe constant avec le souci de mettre en évidence des méthodes qui pourraient s'appliquer au problème général de la dynamique ; ils inaugurent par-là le point de vue moderne de l'étude des systèmes dynamiques.

Remerciements

Je remercie les rapporteurs dont les suggestions ont permis d'améliorer la forme et le fond de ce travail ainsi que François Lonchamp pour « l'assistance graphique ».

BIBLIOGRAPHIE

Beltrami (E.)
[1870] Revue bibliographique de "Allgemeine Theorie der geodaetischen Dreiecke" de Christoffel, *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques*, 1 (1870), p. 169–171.

Berger (M.)
[1985] La géométrie métrique des variétés riemanniennes, Colloque "Élie Cartan et les mathématiques d'aujourd'hui", *Astérisque*, n° hors série (1985), p. 9–66.

Bertrand (J.)
[1873] Revue bibliographique de "Vorlesungen über Dynamik" de Jacobi, *Bull. sci. math.*, 5 (1873), p. 145–157.

[55] En particulier, le problème de la représentation géodésique de deux surfaces l'une sur sur l'autre, l'étude de la notion de triangles géodésiques et ses liens avec la courbure totale et la formule de Gauss-Bonnet, l'extension de la question des géodésiques à des géométries de dimension quelconque relèvent de problématiques plus étroitement inscrites dans la tradition géométrique.

BESSEL (F.W.)

[1838] Bestimmung der Axen des elliptischen Rotationssphäroids, welches den vorhandenen Messungen von Meridianbögen der Erde am meisten entspricht, *Astronomische Nachrichten*, 14 (1838) ; *Abhandlungen* 3, Leipzig, 1875, p. 41–47.

BIRKHOFF (G.D.)

[1927] *Dynamical systems*, New York : American Mathematical Society (Colloquium Publications, vol. 9), 1927.

BONNET (O.)

[1848] Mémoire sur la théorie générale des surfaces, *Journal de l'École polytechnique*, tome XIX, 32e cahier (1848), p. 1–146.

[1855a] Sur quelques propriétés des lignes géodésiques, *Comptes rendus hebdomadaire des séances de l'Académie des sciences*, 40 (1855), p. 1311–1313.

[1855b] Deuxième note sur les lignes géodésiques, *Ibid.*, 41 (1855), p. 32–35.

BRAUNMÜHL (A. von)

[1879] Ueber Enveloppen geodätischer Linien, *Mathematische Annalen*, 14 (1879), p. 557–566.

[1882] Geodätische Linien und ihre Enveloppen auf dreiaxigen Flächen zweiten Grades, *Ibid.*, 20 (1882), p. 557–586.

CARATHÉODORY (C.)

[1935] *Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen erster Ordnung*, Berlin-Leipzig : Teubner, 1935.

CHABERT (J.-L.)

[1992] Hadamard et les géodésiques des surfaces à courbure négative, dans *Chaos et déterminisme*, Paris : Seuil, 1992, p. 306–330.

CHABERT (J.-L.) et DAHAN DALMENICO (A.)

[1992] Les idées nouvelles de Poincaré, dans *Chaos et déterminisme*, Paris : Seuil, 1992, p. 274–305.

CHASLES (M.)

[1846a] Sur les lignes géodésiques et les lignes de courbure des surfaces du second degré, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 11 (1846), p. 5–20.

[1846b] Nouvelles démonstrations des deux équations relatives aux tangentes communes à deux surfaces du second degré homofocales – Et propriétés des lignes géodésiques et des lignes de courbure de ces surfaces, *Ibid.*, 11 (1846), p. 105–119.

CHRISTOFFEL (E.B.)

[1868] Allgemeine Theorie der geodätischen Dreiecke, *Abhandlungen der königlichen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, (1868), p. 119–176 ; *Gesammelte mathematische Abhandlungen* 1, Leipzig-Berlin, 1910, p. 297–346.

DARBOUX (G.)

[*Leçons*] *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, 4 tomes, 1re éd., Paris : Gauthier-Villars, 1887-1896 ; 2e éd. des tomes 1 et 2, 1914–1915 ; cité d'après la rééd., New York : Chelsea, 1972.

DUPIN (C.)

[1813] *Développements de géométrie*, Paris, 1813.

EULER (L.)

[*Opera* I] *Opera omnia*, série I : *Opera mathematica*, 29 vol., 1911–1956.

[*Opera* II] *Opera omnia*, série II : *Opera mechanica et astronomica*, 31 vol. prévus, (1912–).

[1732] De linea brevissima in superficie quacunque duo quaelibet puncta iungente, *Commentarii Academiae scientiarum imperialis Petropolitanae*, 3 (1728), 1732, p. 110–124 ; *Opera* (I) 25, p. 1–12.

[1736] *Mechanica sive motus scientia analytice*, t. 2, St-Pétersbourg, 1736 ; *Opera* (II) 2.

Fraser (C.)

[1994] Calculus of variations, dans *Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences*, I. Grattan-Guinness éd., London et New York : Routledge, 1994, vol. 1, p. 342–350.

Gauss (C.F.)

[*Werke*] *Werke*, 12 vol., Leipzig-Berlin, 1863–1933.

[1828] Disquitiones generales circa superficies curvas, *Commentationes Societatis regiae Göttingensis recentiores*, 6 (1828), p. 99–146 ; *Werke* 4, p. 217-258. Cité d'après la trad. fr. "Recherches générales sur les surfaces courbes", par E. Roger, Grenoble, 1855 ; rééd. Blanchard 1967. Autre trad. fr. par T. Abadie, *Nouvelles annales de mathématiques*, 11 (1852), p. 195–252. Trad. angl. 1902, rééd. dans *Astérisque*, 62 (1979), p. 1–81.

Gilain (C.)

[1994] Ordinary differential equations, dans *Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences*, I. Grattan-Guinness éd., London and New York : Routledge, 1994, vol. 1, p. 440–451.

Hadamard (J.)

[*Œuvres*] *Œuvres de Jacques Hadamard*, 4 vol., Paris : Éditions du Centre national de la recherche scientifique, 1968.

[1896] Sur les lignes géodésiques des surfaces spirales et les équations différentielles qui s'y rapportent, *Procès-verbaux des séances de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux* (1896), p. 55–58.

[1897a] Sur certaines propriétés des trajectoires en dynamique, *J. math. pures appl.*, (V) 3 (1897), p. 331–387 ; *Œuvres* 4, p. 1749–1805.

[1897b] Sur les lignes géodésiques des surfaces à courbures opposées, *C. R. Acad. sci. Paris*, 124 (1897), p. 1503–1505.

[1897c] Sur les lignes géodésiques des surfaces à courbures opposées, *P.-V. Soc. sci. phys. nat. Bordeaux* (1897), p. 60–62.

[1897d] Sur les lignes géodésiques, *Ibid.* (1897), p. 115–117.

[1898] Les surfaces à courbures opposées et leurs lignes géodésiques, *J. math. pures appl.* (V) 4 (1898), p. 27–73 ; *Œuvres* 2, p. 729–775.

[1910] *Leçons sur le calcul des variations*, Paris : Hermann, 1910.

Hilbert (D.)

[1906] Zur Variationsrechnung, *Math. Ann.*, 62 (1906), p. 351–370 ; *Gesammelte Abhandlungen*, 3, Berlin : Springer, 1935, p. 38–55.

Jacobi (C.G.J.)

[*Werke*] *Gesammelte Werke*, vol. 1–7 et Suppl. (8), Berlin 1881–1891 ; rééd. New York : Chelsea, 1969.

[1837] Zur Theorie der Variationsrechnung und der Differentialgleichungen, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 17 (1837), p. 68–82 ; *Werke* 4, p. 37–55. Cité d'après la trad. fr. "Sur le Calcul des variations et sur la théorie des équations différentielles", *J. math. pures appl.*, 3 (1838), p. 44–57.

[1839] Note von der geodätischen Linie auf einem Ellipsoid und den verschiedenen Anwendungen einer merkwürdigen analytischen Substitution, *J. reine angew. Math.*, 19 (1839), p. 309–313 ; *Werke* 2, p. 59–63. Cité d'après la trad. fr. "De la ligne géodésique sur un ellipsoïde", *J. math. pures appl.*, 6 (1841), p. 267–272.

[1843] *Vorlesungen über Dynamik*, 1^re^ éd. [posthume], Berlin, 1866 ; *Werke* 8.

JOACHIMSTHAL (F.)

[1843] Observationes de lineis brevissimis et curvis curvaturae in superficiebus secundi gradus, *J. reine angew. Math.*, 26 (1843), p. 155–171.

LAPLACE (P.S.)

[1799] *Traité de mécanique céleste*, t. 2, Paris, 1799 ; *Œuvres complètes*, t. 2, Paris : Gauthier-Villars, 1878.

LIOUVILLE (J.)

[1844] De la ligne géodésique sur un ellipsoïde quelconque, *J. math. pures appl.*, 9 (1844), p. 401–408.

[1846a] Démonstration géométrique relative à l'équation des lignes géodésiques sur les surfaces du second degré, *Ibid.*, 11 (1846), p. 21–24.

[1846b] Sur quelques cas particuliers où les équations du mouvement d'un point matériel peuvent s'intégrer, *Ibid.*, 11 (1846), p. 345–380.

[1850] Notes, dans G. Monge, *Application de l'analyse à la géométrie*, 5^e^ éd. revue, corrigée et annotée par M. Liouville, Paris, 1850, p. 547–638.

[1851] Sur la théorie générale des surfaces, *J. math. pures appl.*, 16 (1851), p. 130–132.

LÜTZEN (J.)

[1990] *Joseph Liouville 1809–1882 : master of pure and applied mathematics*, New York etc. : Springer, 1990.

[1993] Interactions between mechanics and differential geometry in the 19th century, *Preprint Series*, n° 25 (1993), Matematisk Institut, Københavns Universitet.

MANGOLDT (H. von)

[1881] Ueber diejenigen Punkte auf positiv gekrümmten Flächen, welche die Eigenschaft haben, dass die von ihnen ausgehenden geodätischen Linien nie aufhören, kürzeste Linien zu sein, *J. reine angew. Math.*, 91 (1881), p. 23–53.

MINDING (F.)

[1830] Bemerkung über die Abwickelung krummer Linien von Flächen, *J. reine angew. Math.*, 6 (1830), p. 159–161.

MORSE (M.)

[1934] *The calculus of variations in the large*, New York : Amer. Math. Soc. (Colloquium Publications, vol. 18), 1934.

MYERS (S.)

[1935] Connections between differential geometry and topology (I), *Duke Mathematical Journal*, 1 (1935), p. 376–391.

[1936] Connections between differential geometry and topology (II), *Ibid.*, 2 (1936), p. 95–102.

POINCARÉ (H.)

[*Œuvres*] *Œuvres de Henri Poincaré*, 11 vol., Paris : Gauthier-Villars, 1916–1956.

[1881] Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle (1^re^ et 2^e^ parties), *J. math. pures appl.*, (III) 7 (1881), p. 375–422, et 8 (1882), p. 251–296 ; *Œuvres* 1, p. 3-84.

[*Méthodes nouvelles*] *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, 3 vol., Paris : Gauthier-Villars, 1892–1899 ; rééd. Blanchard 1987.

[1897] Rapport sur un mémoire de M. Hadamard intitulé : “Sur les lignes géodésiques des surfaces à courbures opposées”, *C. R. Acad. sci. Paris*, 125 (1897), p. 589–591.

[1905] Sur les lignes géodésiques des surfaces convexes, *Transactions of the American Mathematical Society*, 6 (1905), p. 237–274 ; *Œuvres* 6, p. 38–84.

Reich (K.)

[1973] Die Geschichte der Differentialgeometrie von Gauss bis Riemann (1828–1868), *Archive for History of Exact Sciences*, 11 (1973), p. 273–382.

Roberts (M.)

[1846] Sur quelques propriétés des lignes géodésiques et des lignes de courbure de l'ellipsoïde, *J. math. pures appl.*, 11 (1846), p. 1–4.

Sturm (C.)

[1836] Mémoire sur les équations différentielles linéaires du second ordre, *J. math. pures appl.*, 1 (1836), p. 106–186.

Spivak (M.)

[1970] *Differential geometry*, Brandeis University, 1970 ; 2e éd., Publish or Perish, 1979.

Thomson (W.) et Tait (P.G.)

[1867] *Treatise on natural philosophy*, 1re éd. Oxford, 1867 ; 2e éd. Cambridge, 1879–1883. Trad. all., *Handbuch der theorischen Physik*, par Helmholtz et Wetheim, Braunschweig, 1874.

Weierstrass (K.)

[1861] Über die geodätischen Linien auf dem dreiaxigen Ellipsoid, *Monatsberichte der königlich preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, séance du 31 octobre 1861 (1862), p. 986–997 ; *Mathematische Werke* 1, Berlin, 1894, p. 257–266.