Revue d'histoire des mathématiques,
1 (1995), p. 83–109.

LES QUATERNIONS ET LE MOUVEMENT DU SOLIDE AUTOUR D'UN POINT FIXE CHEZ HAMILTON

Luc Sinègre (*)

Résumé. — L'article analyse, à partir notamment du mémoire *On quaternions and the rotation of a solid body* communiqué en 1848, plusieurs concepts algébriques (endomorphisme, conjugaison, polynôme caractéristique) qui ont joué un rôle important dans la dernière période de la vie de Hamilton. En considérant l'exemple de la dualité, on cherche à montrer comment sa pratique mathématique se rattache à ses lectures et recherches optiques ou physiques des années 1830.

Abstract. — Quaternions and the motion of a solid body about a fixed point according to Hamilton. This paper investigates — in the light of his paper *On quaternions and the rotation of a solid body*, dating from 1848 — several algebraic concepts (endomorphism, conjugation, characteristic polynomial) that played a major role in the ultimate phase of Hamilton's work. Looking into the case of duality, it will be seen that this provides an opportunity of making apparent how his mathematical practices were linked to his readings and optical or physical investigations, harking back to the 1830s.

1. INTRODUCTION

En 1843, après des années de recherches infructueuses sur les triplets, pour tenter de généraliser les nombres complexes, Hamilton grave, sur le «Broome Bridge» qui enjambe le *Royal Canal* à Dublin, les célèbres équations

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

marquant la naissance des quaternions. Cependant, comme l'indique J. Gray[1], Olinde Rodrigues avait obtenu la paramétrisation du groupe

[1] *Around and around : quaternions, rotations and Olinde Rodrigues*, Actes du colloque *Nombres complexes et vecteurs*, D. Flament éd. (à paraître). Voir aussi [Gray 1980].

(*) Texte reçu le 3 mars 1994, révisé le 5 septembre 1994.
Luc Sinègre, 8 passage du Bon Pasteur, 76000 Rouen (France).

orthogonal dès 1840, à partir des travaux d'Euler et grâce à un passage en tangente du demi-angle [Rodrigues 1840, p. 404]. Si Hamilton ne semble pas avoir eu connaissance de ce texte publié dans le *Journal* de Liouville, le jeune Cayley a perçu dès 1846 les relations unissant les nouveaux nombres et cette paramétrisation [Cayley 1846, p. 237][2]. Hamilton, qui avait obtenu dès 1844 une représentation des rotations [Hamilton 1847], revient sur l'étude du mouvement autour d'un point fixe plusieurs années plus tard, dans un mémoire communiqué en 1848 que nous allons particulièrement étudier [Hamilton 1850b]. Les textes de Cayley et de Hamilton diffèrent sensiblement, par le style et le contenu. Alors que Cayley, dans le prolongement d'Euler et de Lagrange, intègre le système différentiel en utilisant le paramétrage de Rodrigues, Hamilton cherche à donner une interprétation vectorielle pour retrouver les descriptions géométriques de Poinsot [1834] et Mac Cullagh [1844a,b][3].

Ce texte sur le mouvement du solide me permettra ainsi de poser et d'illustrer plusieurs questions[4], et de souligner le rôle important que joue la dualité dans l'œuvre algébrique de Hamilton. Après la découverte des quaternions, on peut déceler chez lui deux grandes directions de recherche, auxquelles on peut ajouter une troisième en filigrane. La première est la justification, la présentation et, en termes modernes, la construction de l'algèbre des quaternions elle-même. Je n'ai pas choisi de développer ici cet aspect de son travail auquel de nombreux commentaires ont été

[2] Dans les citations bibliographiques, la pagination utilisée est celles des *Œuvres* d'un auteur lorsqu'elles sont publiées.

[3] Les sources de Cayley sont à la fois plus variées et plus récentes que celles de Hamilton. Il explique être parti des équations différentielles obtenues grâce à l'idée de Rodrigues en espérant les intégrer à l'aide du «multiplicateur» découvert par Jacobi. Ce point est intéressant si l'on rappelle que la théorie de Jacobi est une amélioration des travaux mécaniques de Hamilton [Dugas 1950, chap. 6]. En même temps, Cayley s'avoue intrigué par les connexions possibles entre les formules obtenues et la théorie des quaternions. Il en donne un peu plus tard l'explication en paramétrant, dans un papier très court, facile à lire, le groupe des rotations grâce aux quaternions [Cayley 1848]. Il y utilise les règles opératoires des quaternions comme des règles symboliques, propres à traduire et à simplifier les expressions cartésiennes ordinaires et ne pose donc, à la différence de Hamilton, aucun problème théorique.

[4] Elles sont développées dans ma thèse : *Au-delà du temps pur : aspects géométriques, constructions et pratiques dans l'œuvre algébrique de Sir Rowan William Hamilton*, (C. Houzel dir.), Université Paris VII, 1994.

consacrés. La deuxième, qui se développe rapidement après 1844, consiste à trouver les applications de sa découverte. Les quaternions, d'abord confrontés à la trigonométrie sphérique, ont ensuite été utilisés pour résoudre des problèmes de géométrie. Hamilton produit ainsi, pour le public anglais, une longue suite d'articles explicitant un calcul vectoriel dont la forme est symbolique et le fond entièrement géométrique [Hamilton 1846–1849]. Il y donne, à la manière de Peacock auquel il rend d'ailleurs hommage, une définition nouvelle du quotient de deux vecteurs, et donc des quaternions. C'est la relation fondamentale $(b : a) \times a = b$ qui définit le quotient $b : a$. En tirant les conséquences algébriques de cette définition formelle à laquelle il ajoute plusieurs autres contraintes algébriques (sommes, produits et distributivité sur les quotients de même dénominateur), il peut ainsi présenter à la manière de l'École de Cambridge, c'est-à-dire en séparant clairement les règles algébriques symboliques de leurs interprétations géométriques, une définition cohérente de son système. Il abandonne provisoirement les autres constructions, basées sur la trigonométrie ou surtout sur ses conceptions personnelles à propos du temps, dans le but de diffuser en Angleterre les nombreuses applications géométriques que son calcul a déjà fournies[5]. Le champ d'application du calcul des quaternions va parallèlement s'étendre à la mécanique. En effet, pendant son voyage à Cambridge de 1845, Hamilton, dans les *Newton's rooms*, emploie pour la première fois, sur une idée de Herschel, les quaternions pour traduire un problème physique (l'attraction newtonienne) [Graves II, p. 495]. Notre texte se situe dans le cadre de ce courant. La troisième voie, rêvée depuis le début par Hamilton et que jusqu'à sa mort il a espéré voir aboutir, est la recherche, grâce à ces nouveaux outils, d'une grande loi physique unificatrice (et, en particulier, une loi de l'électricité ou de l'électromagnétisme) ; cela s'est avéré être une impasse[6].

[5] « *Unlike as my little papers on this latter subject* [*la géométrie symbolique*] *in the* Cambridge and Dublin mathematical journal*, may appear to those other papers which I have hitherto printed on quaternions, yet if you have dipped into both, you will no long fail to recognise, perhaps may have recognised already, that the "Geometrical fraction" of the one set is just the "quaternion" of the other in disguise*», lettre de S.R.W Hamilton à Augustus De Morgan du 7 mai 1847 [Graves III, p. 269–270].

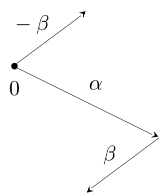
[6] « *There seems to me to be something analogous to polarized intensity in the pure imaginary part ; and to unpolarized energy (indifferent to direction) in the real part of a quaternion : and thus we have some slight glimpse of a future calculus of polarities*» écrit Hamilton dans une lettre à Graves [*MP* 3, p. 110]). Son fils Edwin rappelle

L'échec de la première voie est consacré par le peu d'audience et d'intérêt que suscite, en 1853, le traité qui résume toute la construction «métaphysique» des quaternions : les *Lectures*. Hamilton a tenté de donner dans ce livre, pour la première fois, une construction globale du système qui soit en cohérence avec ses conceptions métaphysiques sur le temps. Il distingue, par exemple, l'analyse du quotient d'un couple de vecteurs et la synthèse. L'analyse traduit les conséquences nécessaires des lois algébriques et lui permet de reprendre d'une façon plus personnelle ce qu'il avait écrit dans le style symboliste pour la revue de Cambridge. La synthèse interprète le quotient comme un véritable opérateur (en fait une rotation) qui agit sur les autres vecteurs ; un couple orthogonal opère donc comme un quart de tour. Comme dans une importante communication donnée dès 1843 [Hamilton 1844], mais publiée *in extenso* seulement quatre ans plus tard [1848], les mêmes objets prennent, en fonction de leur place dans un produit, des interprétations différentes. Hamilton, qui est rigoureux, doit ensuite allonger son propos en vérifiant soigneusement la compatibilité de ces multiples identifications ; la dernière règle algébrique n'est démontrée qu'à la sixième leçon. Les applications, pourtant nombreuses, occupent la dernière leçon, c'est-à-dire moins du quart du livre.

La production mathématique de Hamilton se réduit donc, après 1850, à une recomposition, dans le langage des quaternions, de l'ensemble des mathématiques de l'époque et de leurs applications. Ceci posé, je crois que trop de chercheurs ont négligé d'analyser les pratiques et les manières de faire de cette période. Car, s'il est exact que les textes relatifs à l'application des quaternions, suivant la deuxième voie où est mis en place le calcul vectoriel, vont se multiplier pour l'édition des *Elements*, sa technique et sa manière algébrique ne restent pas constantes pendant toutes ces années. Bien au contraire, Hamilton va, au fur et à mesure de ses besoins, introduire les outils algébriques abstraits (endomorphismes, polynômes d'endomorphismes), qui lui permettent de simplifier les démonstrations et de clarifier la construction. Il va, petit à petit, poser dans un cadre algébrique la dualité dont il avait déjà travaillé les expressions géométrique (en liaison avec l'optique) et mécanique à partir

également que, peu de temps avant sa mort, pendant leurs ultimes conversations, son père lui parla d'applications des quaternions à l'électricité, en particulier à l'idée de polarité, «*bows to be reserved for the hands of another Ulysses*», qu'il n'avait pas été capable de développer pleinement pendant sa vie (Introduction des *Elements* [1866]).

des textes de mathématiciens continentaux comme Poinsot et Chasles. Un carnet de notes, à la date d'avril 1846 [Hamilton *MS*, n° 70], c'est-à-dire au printemps qui suit le voyage à Cambridge, contient de nombreuses références à la *Statique*[7] de Poinsot et donne un exemple intéressant de ce processus d'algébrisation. Hamilton y définit des *couples algébriques* de vecteurs qui correspondent aux *couples mécaniques* de Poinsot. Le couple algébrique de vecteurs (α, β) traduit la situation physique qu'illustre le schéma ci-dessous.



Hamilton énonce que deux couples algébriques (α, β) et (α', β') produisent le même système de forces si et seulement si $\alpha'\beta' - \beta'\alpha' = \alpha\beta - \beta\alpha$. Pour démontrer le sens direct ou réciproque de cette proposition, il va plusieurs fois se transporter du terrain algébrique représenté par les vecteurs, leurs rapports opératoires et la relation algébrique d'équivalence qu'il vient d'écrire, au terrain mécanique dont la base est l'équivalence physique des systèmes de forces. Dans la suite du carnet, il munit l'ensemble des couples d'une addition, pour retrouver d'autres résultats de Poinsot, par la méthode des vecteurs[8]. Il faudra donc se demander si les créations algébriques qui vont se développer pendant la période qui suit la publication des *Lectures* contiennent des intuitions algébriques majeures ou simplement témoignent d'une clarification et d'un infléchissement de style. Le texte sur le mouvement du solide recèle plusieurs versions primitives de ces objets algébriques qui ont pour nom, en termes modernes, endomorphisme, équation caractéristique, dualité, et nous pourrons donc suivre et comparer le mouvement de ces concepts. J'espère ainsi confirmer qu'il n'est pas sans intérêt de relire les textes postérieurs à la découverte des quaternions, et montrer qu'il est artificiel de diviser en deux grandes périodes la carrière algébrique de Hamilton en opposant le créatif d'avant 1843 et

[7] Un peu plus tard, en février 1847, il écrit au Révérend H. Lloyd : « *Thanks for your thinking of the Poinsot, but I have long had a copy of my own of his* Statique, *with which I was acquainted when an undergraduate. It is, you know, his* Dynamical memoir on rotations *(studied through couples) which I wish to procure and should gladly borrow* » [Graves II, p. 564].

[8] « *All these conclusions have been otherwise obtained by Poinsot. But it is remarkable with what simplicity they are here proved by the method of vectors* » [Hamilton *MS*, n° 70].

le «maniaque» d'après. S'il fallait établir une coupure dans son œuvre, la date symbolique de 1853, celle de la publication des *Lectures* et de l'infortune de la construction métaphysique, serait sans doute meilleure. A ce moment, les grandes idées simplificatrices du calcul algébrique sont déjà posées. Hamilton a défini (parfois sous des formes élémentaires) les fonctions vectorielles et les polynômes d'endomorphismes, et déjà utilisé la dualité. La charnière n'est pas mauvaise non plus en ce qui concerne la troisième voie. La date ne précède que d'un an l'une des plus grandes déceptions qu'il va éprouver sur ce sujet. En effet, en mai 1854 il croit découvrir enfin une grande loi électromagnétique. Il a retranscrit la formule d'attraction d'Ampère comme la partie réelle d'une formule quaternionique plus générale, dont la partie vectorielle traduirait la loi recherchée. Mais cette démarche ne produit qu'une vérification d'une toute petite formule du magnétisme [Graves III, p. 480–487].

En relisant les textes algébriques en reprenant les détails et les calculs, on découvre, au contraire, la profonde unité de l'œuvre mathématique de Hamilton : unité de temps puisque les développements algébriques sont profondément liés aux lectures continentales effectuées dans les années 1830 quand il travaillait sur l'optique ; unité de matière puisque l'algèbre apparaît comme une construction directement reliée aux recherches des géomètres et des mécaniciens continentaux depuis Lagrange et Laplace, c'est-à-dire aux textes qui ont nourri sa formation (si l'on omet Euler qu'il ne connaît pas bien). Après l'échec des *Lectures* en 1853, les amis de Hamilton lui conseillèrent de rédiger un ouvrage plus facilement lisible, un manuel utile pour les étudiants et orienté vers les applications. Les trois livres des *Elements*, encore inachevés à la mort de leur auteur en 1865, sont le résultat de cette autre tentative, très éloignée des intentions des premiers jours. Mais le développement et même l'accumulation des chapitres dans les *Elements* apparaissent comme inévitables car Hamilton désirait construire par des méthodes intrinsèques, indépendantes des coordonnées et des autres théories en place, les objets théoriques qu'il voulait substituer aux calculs et aux techniques antérieurs.

2. LES QUATERNIONS AU SERVICE DE LA MÉCANIQUE.

Du calcul vectoriel aux endomorphismes

Dans les premières lignes du mémoire *On quaternions and the rotation* *of a solid body* [1850b] lu le 10 Janvier 1848, Hamilton explique comment le calcul quaternionien s'applique aux problèmes fondamentaux de la mécanique et de la statique. Comme le lecteur n'est peut-être pas familier avec les notations anciennes des quaternions, précisons, pour commencer, le sens de quelques symboles pour rendre plus facile la lecture de la suite. Toutes les lettres grecques désignent (sauf exception mentionnée) des vecteurs qui représentent soit des forces, soit leurs lignes d'application. Comme la multiplication n'est pas interne dans l'ensemble des vecteurs (c'est-à-dire des quaternions purs), quand on multiplie le vecteur $\alpha = xi + yj + zk$ par le vecteur $\alpha' = x'i + y'j + z'k$, on obtient un quaternion dont la partie vectorielle (ou imaginaire)

$$\mathbf{V}.\alpha\alpha' = (yz' - y'z)i + (x'z - xz')j + (xy' - yx')k,$$

correspond au produit vectoriel des deux vecteurs, et la partie réelle

$$\mathbf{S}.\alpha\alpha' = -(xx' + yy' + zz')$$

à l'opposé du produit scalaire. Les deux quaternions $\alpha\alpha'$ et $\alpha'\alpha$ ont donc la même partie scalaire et des parties vectorielles opposées. La formule $\mathbf{V}.\alpha\,\mathbf{V}.\alpha'\alpha'' = \alpha''\,\mathbf{S}.\alpha\alpha' - \alpha'\,\mathbf{S}.\alpha''\alpha$ (double produit vectoriel) s'avère souvent utile pour vérifier les calculs[9].

Hamilton choisit le point fixe comme origine, α est le vecteur de position d'un élément de masse m du système et ι désigne le vecteur-rotation instantané. Il écrit à partir des traductions quaternioniques des équations fondamentales (moment cinétique et conservation de l'énergie cinétique) déduites des lois des aires et des forces vives

$$\sum m\alpha\,\mathbf{V}.\iota\alpha = \gamma, \tag{1}$$

$$\sum m(\mathbf{V}.\iota\alpha)^2 = -h^2, \tag{2}$$

et peut retrouver la description du mouvement non accéléré du solide autour d'un point fixe comme le roulement d'un ellipsoïde sur un plan,

---

[9] Pour comprendre ces symboles, on doit donc recomposer la multiplication des quaternions à partir des produits scalaire et vectoriel, c'est-à-dire faire à l'envers le chemin qui a conduit à ces produits. Crowe [1967, p. 155–156] a montré comment les « direct product » et « skew product » de Gibbs dérivent de la deuxième édition du traité de Tait sur les quaternions.

et, de plus, définir les axes d'inertie. Pour préciser l'évolution de ces nouveaux objets algébriques, il faut ajouter que l'on retrouve ces mêmes équations dans les *Elements* : «*we introduce a linear, vector, and self-conjugate funtion* ϕ, *such that* $\phi\iota = \sum m\alpha\,\mathbf{V}.\alpha\iota = \iota \sum m\alpha^2 - \sum m\alpha\,\mathbf{S}.\alpha\iota$» [Hamilton 1866, p. 289].

Cela permet d'obtenir les équations :

$$\phi\iota + \gamma = 0, \tag{3}$$

$$\mathbf{S}.\iota\phi\iota = h^2. \tag{4}$$

En termes modernes, il écrit donc les deux équations ((1) moment et (2) énergie cinétiques) d'un solide dont un point O a une vitesse nulle par rapport au repère [Brousse 1973, p. 150]. Le moment cinétique s'obtient en faisant agir, sur le vecteur de rotation $\overrightarrow{\Omega}$, l'opérateur d'inertie $\mathcal{I}$ défini par l'égalité

$$\mathcal{I}\vec{u} = \int_S \overrightarrow{OP} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{OP})\,\mathrm{d}m,$$

alors que le double de l'énergie cinétique est la valeur que prend en $\overrightarrow{\Omega}$ la forme quadratique définie par ce même opérateur. L'introduction, dans les *Elements*, de l'opérateur d'inertie autour de l'origine (fixe) lui permet d'abord de simplifier l'écriture et l'usage des équations fondamentales. Elle témoigne aussi de la réduction opérée grâce au recours à l'abstraction. Hamilton en vient ainsi à définir l'objet synthétique dont l'action traduit exactement les formules analytiques du mouvement. La propriété de symétrie de ϕ associée au produit scalaire qui vient de $\mathbf{S}$ donne l'équation (4), la linéarité de ϕ, l'équation (3). Ceci nous montre comment les mathématiques, et même l'algèbre, sont difficilement dissociables dans son œuvre d'un effort permanent pour expliquer et traduire les lois des phénomènes physiques. Cette manière de faire, ce goût pour la synthèse, nécessitent de définir préalablement les propriétés des objets nouveaux, par exemple d'exposer les propriétés générales des endomorphismes et surtout des règles de dérivation, et donc de produire un calcul quaternionique global. Hamilton n'avait pas vraiment le choix quant à la nature de ce qu'il avait à proposer à ses contemporains. Le même souci algébrique qui l'avait amené à simplifier les opérateurs et les calculs grâce à l'abstraction l'obligeait à développer, avant d'en venir aux applications, une théorie de ces mêmes objets abstraits et, par-là même, gonflait le livre. Les chapitres théoriques ont donc peu à peu remplacé, dans les *Elements*, les mécanismes calculatoires anciens. Nous allons suivre en détail ce cheminement sur l'exemple de l'inversion d'un endomorphisme de quaternions, qui se substitue à la résolution d'équations linéaires et dans laquelle la dualité a fini par jouer un rôle capital.

Un exemple d'algébrisation de la géométrie

Ces outils théoriques n'ont pas seulement été introduits par un souci de simplification. Le mémoire montre que, pour Hamilton, l'opérateur d'inertie répondait globalement à d'autres questions. Il veut, en effet, donner rapidement quelques applications géométriques des formules précédentes : «*a few of the geometrical consequences of the formulae in the foregoing section, and thereby to deduce, in a new way, some of the known properties of the rotation to which they relate*» [Hamilton 1850b, section IV] et donc retrouver les théorèmes de Poinsot et Mac Cullagh sur ce mouvement à l'aide du calcul quaternionien.

Mac Cullagh, membre comme Hamilton de la *Royal Irish Academy*, a fait l'historique en 1844 de ses propres travaux sur la description géométrique du mouvement autour d'un point fixe [1844b]. Les premiers succès de ces recherches datent de 1831, comme le prouve une lettre adressée au Docteur Lloyd et lue devant la même Académie [1844a]. Seul, le premier des trois théorèmes de cet article est utile pour notre propos :

«*If a rigid body, not acted on by any extraneous forces, revolve round a fixed point O, and if an ellipsoid be described having its semiaxes in the direction of the principal axes passing through O, and equal to the radii of gyration round them; then a perpendicular to the invariable plane being raised from O to meet the surface of the ellipsoid in I, the line OI (which is fixed in space, as the ellipsoid revolves with the body) will be of a constant length during the motion; and a perpendicular from O upon the plane which touches the surface at I, will always be the axis of rotation, and will vary inversely as the angular velocity*» [Mac Cullagh 1844a, p. 520].

Il précise [1844b, p. 543] qu'il a appris pendant l'été 1834 que Poinsot venait de lire devant l'Académie des sciences de Paris un mémoire traitant le problème de la même manière géométrique, à quelques différences près. A la place du premier ellipsoïde, Poinsot utilisait un ellipsoïde réciproque, ayant le même centre, les mêmes directions axiales, mais les longueurs des demi-axes inversement proportionnelles à celles du premier. Mac Cullagh, qui affirme avoir aussi utilisé dans ses brouillons les deux formes, remarque que son premier théorème s'énonce alors ainsi : «*the ellipsoid rolls upon the fixed plane which it always touches*», et reconnaît qu'il n'avait peut-être pas, à l'époque, compris l'avantage et la simplicité de cette seconde présentation.

Hamilton ne donne donc pas de résultats nouveaux dans son mémoire. Il désire seulement montrer au lecteur comment les conclusions géométriques des deux mécaniciens (qu'il réunit par la dualité) se dégagent simplement de la traduction vectorielle des lois fondamentales grâce aux quaternions. Il lui suffit de donner la traduction géométrique de chacune des équations : «*the equation* (2) *expresses that* the axis ι of instantaneous rotation is a semidiameter of a certain ellipsoid, fixed in the body, but movable with it» [Hamilton 1850b, section IV]. L'égalité $\mathbf{S}.\gamma\,\delta\iota = 0$ signifie que le plan d'équation $\mathbf{S}.\iota\gamma = -h^2$ est toujours tangent à l'ellipsoïde défini par la formule (2), et donc il est facile de retrouver le théorème de Poinsot qui décrit le mouvement du solide. L'ellipsoïde roule sans glisser sur ce plan, l'extrémité du vecteur ι donnant le contact[10]. Hamilton insiste sur le fait qu'il a retrouvé ce théorème sans repasser par les moments d'inertie par rapport aux axes de coordonnées. Ainsi, la démonstration est intrinsèque. Elle est aussi très simple puisque aucune connaissance sur ces axes n'est nécessaire, pas plus que d'autres propriétés (géométriques) des ellipsoïdes. La loi s'énonce : l'ellipsoïde des forces vives roule sur un plan parallèle à celui des aires.

Après avoir retrouvé le mouvement du solide par le roulement de cônes, Hamilton parvient au résultat le plus intéressant à la section V. En différentiant l'équation $\mathbf{S}.\iota\gamma = -h^2$, compte tenu que $\mathbf{S}.\gamma\delta\iota = 0$, on obtient $\mathbf{S}.\iota\delta\gamma = 0$, formule qui lui permet de retrouver un autre résultat

[10] En différentiant l'équation de l'ellipsoïde pour un vecteur $\iota + \delta\iota$, il retrouve, en négligeant les termes d'ordre 2

$$\sum m(\mathbf{V}.(\iota+\delta\iota)\alpha)^2 = \sum m(\mathbf{V}.\iota\alpha)^2 + 2\sum m\,\mathbf{S}.(\mathbf{V}.\iota\alpha)(\mathbf{V}.\delta\iota\alpha) = -h^2.$$

Donc $2\sum m\,\mathbf{S}.(\mathbf{V}.\iota\alpha)(\mathbf{V}.\delta\iota\alpha) = 0$ et

$$\sum m\,\mathbf{S}.(\mathbf{V}.\iota\alpha)(\delta\iota\alpha) = 0 = \mathbf{S}.\sum m\alpha(\mathbf{V}.\iota\alpha)\delta\iota$$

soit, compte tenu de la loi des aires, $\mathbf{S}.\gamma\,\delta\iota = 0$.

des deux mécaniciens :

«*the vector* γ *is (in the body) a variable semidiameter of an ellipsoid* reciprocal *to that ellipsoid* (2) *of which the vector* ι *has been seen to be a semidiameter; and* [...] *these two vectors* γ *and* ι *are* corresponding semidiameters *of these two ellipsoids*» [Hamilton 1850b, p. 386].

La comparaison avec le texte des *Elements* est lumineuse puisque l'équation de l'ellipsoïde réciproque est alors donnée sous la forme $\mathbf{S}.\gamma\phi^{-1}\gamma = h^2$ [1866, p. 291]. La nécessité, dans le mémoire lu en 1848, d'exprimer γ en fonction de ι pour obtenir l'équation de l'ellipsoïde réciproque correspond, dans les *Elements*, à l'inversion de l'endomorphisme ϕ. Ceci éclaire en partie la raison pour laquelle cette inversion, qui est dans les *Elements* l'étape essentielle pour démontrer le théorème qui porte encore le nom de Cayley-Hamilton, repose sur l'introduction de l'adjoint, et donc sur la dualité. Cette dualité reste par conséquent associée à la dualité mécanique des deux mouvements réciproques.

L'inversion de l'endomorphisme

Pour trouver l'équation de l'ellipsoïde réciproque, Hamilton emploie une méthode qu'il dit avoir acquise depuis longtemps («*which he has for a considerable time past possessed*» [1850b, p. 390]) pour résoudre les équations linéaires de quaternions et qui utilise «*a* symbolic equation of the third degree*, which is satisfied by a certain* characteristic of operation σ*, connected with the solution of a certain other symbolic but* linear *equation*». Or, le délai «*considerable*» qu'il indique ne peut excéder les cinq années qui séparent la découverte des quaternions, 1843, de la date de la communication, 1848. On pourrait donc faire remonter la découverte de ce procédé aux tous premiers mois qui ont suivi celle des quaternions, à la fin de 1843 ou au début de 1844. Mais ceci contredirait alors une indication que l'auteur a laissée dans un texte de 1862 sur le même sujet :

«*As early as the year* 1846*, I was led to perceive the existence of a certain* symbolic *and* cubic equation*, of the form* $0 = m - m'\phi + m''\phi^2 - \phi^3$*, in which* ϕ *is used as a symbol of a* linear *and* vector operation *on a* vector*, so that* $\phi\rho$ *denotes a vector depending on* ρ*, such that* $\phi(\rho+\rho') = \phi\rho + \phi\rho'$» [Hamilton 1862, p. 351].

La comparaison de ces deux passages fournit les renseignements suivants : l'utilisation d'écritures polynomiales et l'inversion des équations linéaires datent de 1843 (environ) ; l'introduction d'un endomorphisme simplificateur apparaît, elle, en 1846.

Il ne faut donc pas s'étonner de voir Hamilton mettre en place en 1848, pour mener cette inversion, une opération caractéristique σ, définie par l'équation symbolique

$$\sigma = \sum m\alpha\, \mathbf{S}.\alpha \quad \text{c'est-à-dire} \quad \sigma\iota = \sum m\alpha\, \mathbf{S}.\alpha\iota.$$

En comparant σ avec l'opérateur d'inertie ϕ qui figure, en 1866, dans les *Elements*, on s'aperçoit que $\phi + \sigma$ est l'homothétie de rapport $\sum m\alpha^2$, un réel qui représente l'opposé du moment d'inertie du solide par rapport au point fixe. Pour inverser $\sigma + n^2$, Hamilton introduit, sans aucune explication, les trois réels

$$\begin{aligned} n^2 &= -\sum m\alpha^2, \\ n'^2 &= -\sum mm'(\mathbf{V}.\alpha\alpha')^2, \\ n''^2 &= +\sum mm'm''(\mathbf{S}.\alpha\alpha'\alpha'')^2. \end{aligned}$$

Il ajoute qu'il n'est pas trop difficile de démontrer que

$$(\sigma^2 + n^2\sigma + n'^2)\iota = -\sum mm'\, \mathbf{V}.\alpha\alpha'\, \mathbf{S}.\alpha\alpha'\iota$$

et donc que

$$\sigma^3 + n^2\sigma^2 + n'^2\sigma + n''^2 = 0. \tag{5}$$

Il s'agit d'exhiber une équation caractéristique, dans un cas particulier ici, en utilisant des coefficients dont le sens s'interprète facilement, mais que Hamilton se garde d'expliquer ! Il ménage la surprise pour le paragraphe suivant.

On peut remarquer aussi que les calculs auxquels il fait allusion sont sans doute moins simples qu'il ne l'affirme. Les résultats n'aboutissent pas en étendant par sommation des identités ; au contraire, c'est l'antisymétrie de l'opération vectorielle $\mathbf{V}$ qui force les termes gênants à s'entre-détruire. Si l'on ajoute qu'il faut écrire le vecteur ι dans la base définie par les vecteurs $\mathbf{V}.\alpha'\alpha''$, $\mathbf{V}.\alpha''\alpha$, $\mathbf{V}.\alpha\alpha'$, on remarque ici que Hamilton, qui désire présenter d'abord l'algèbre et ensuite l'interprétation, essaie d'accentuer, en omettant au besoin les calculs trop longs, l'impression de facilité qu'il veut voir se dégager du papier. Ce trait de caractère a d'ailleurs été remarqué par Hankins, à la suite des éditeurs du volume 1 des *Mathematical papers*. Alors que Hamilton aimait à présenter des articles condensés et apparemment orientés vers les mathématiques pures et théoriques, ses notes fourmillent de calculs préalables, parfois extraordinairement compliqués [Hankins 1980, p. 79].

Résumons la suite en termes modernes pour simplifier. Pour achever l'inversion $(\sigma + n^2)\iota = \gamma$, il effectue la division de $P(X)$, le polynôme caractéristique qu'il vient de trouver (voir l'équation (5)), par $X + s$, où s désigne un réel quelconque

$$P(X) = Q(X)(X + s) + r.$$

En posant $\sigma' = Q(\sigma)$ et $\kappa = (\sigma + s)\iota$, on a

$$\sigma'(\kappa) = Q(\sigma)(\sigma + s)\iota = \big(P(\sigma) - r\big)\iota = -r\iota.$$

Si l'on prend $s = n^2$, $\sigma' = \sigma^2 + n'^2$, le reste est $-n'^2 n^2 + n''^2$; donc

$$(\sigma^2 + n'^2)\gamma = (n'^2 n^2 - n''^2)\iota,$$

ce qui lui permet de retrouver l'équation de l'ellipsoïde réciproque[11]. Mais le cas particulier du mouvement uniforme autour d'un axe fixe, traité à la section VI, est encore plus intéressant. Dans cette situation, le vecteur ι est fixe en longueur comme en direction et ainsi $\mathrm{d}\iota/\mathrm{d}t$ est nul. Hamilton déduit d'une formule précédente que $\mathbf{V}.\iota\gamma = 0$; les vecteurs $\sigma\iota$ et ι sont donc colinéaires[12], ce qui fournit une solution non triviale à l'équation $(\sigma + s)\iota = 0$. Il reprend la méthode précédente pour montrer que dans ce cas, par division par $X + s$, on trouve trois réels qui annulent le reste égal à $P(-s)$. Il obtient ainsi les trois axes d'inertie de l'ellipsoïde principal ; dans le repère orthogonal défini par ces directions, les trois valeurs propres s'écrivent

$$s_1 = \sum mx^2, \quad s_2 = \sum my^2, \quad s_3 = \sum mz^2.$$

[11] En appliquant la relation précédente à $\mathbf{S}.\iota\gamma = -h^2$, on trouve l'équation de l'ellipsoïde réciproque

$$(n'^2 n^2 - n''^2)h^2 = n^2 \sum m(\mathbf{S}.\alpha\gamma)^2 + \sum mm'(\mathbf{S}.\alpha\alpha'\gamma)^2$$

prouvant au passage que $n'^2 n^2 - n''^2 \geq 0$.

[12] $\mathbf{V}.\iota\gamma = \mathbf{V}.\iota(\sigma + n^2)\iota = \mathbf{V}.\iota\sigma\iota$.

Dans ce même repère, les coefficients n, n', n'' se réduisent à

$$n^2 = \sum m(x^2 + y^2 + z^2),$$
$$n'^2 = \sum mm'\{(yz' - zy')^2 + (zx' - xz')^2 + (xy' - yx')^2\},$$
$$n''^2 = \sum mm'm''\{(yz' - zy')x'' + (zx' - xz')y'' + (xy' - yx')z''\}^2,$$

(«*will take the following forms, which easily admit of being interpreted, or of being translated into geometrical enunciations*»). Comme il est facile de démontrer que les sommes et les produits des quantités s_1, s_2, s_3 redonnent les constantes n^2, n'^2, n''^2, Hamilton remarque que s_1, s_2, s_3 sont naturellement les racines d'une équation du troisième degré. Il lui a été possible de démontrer ce résultat intrinsèquement par sa méthode au moyen de l'équation caractéristique. Ceci représente pour lui une preuve de la supériorité de ses méthodes par rapport à celles de la géométrie cartésienne. Son point de vue est à l'opposé de celui de Cayley qui, lui, comparait le quaternion à une carte non dépliée («*I compare a quaternion formula to a pocket-map — a capital thing to put in one's pocket, but which for use must be unfolded : the formula, to be understood, must be translated into coordinates*» [Cayley 1895, p. 542]). La volonté de Hamilton de préserver le caractère général et indépendant de ses constructions est la cause de beaucoup de complications, mais elle lui permet souvent de poser les problèmes algébriques importants. Par exemple, dans le texte des *Elements* sur l'inversion d'un endomorphisme en dimension trois, Hamilton décrit les règles algébriques de la transposition en liaison avec celles du passage à l'inverse ou de l'exponentiation, rappelant, une fois de plus, leur indépendance par rapport au référentiel [Hamilton 1866, p. 484–489]. Ces règles ne sont pourtant pas indispensables à la démonstration.

Dans les *Elements*, la définition et l'utilisation algébrique de la transposition sont simplifiées par l'introduction de l'adjoint. L'endomorphisme ϕ' transposé de ϕ y est défini, pour tout couple de vecteurs ρ et λ, par la formule

$$\mathbf{S}.\lambda\phi\rho = \mathbf{S}.\rho\phi'\lambda.$$

Mais pour mieux se convaincre que Hamilton a senti la symétrie de l'opérateur $\phi = \sigma + n^2$ dès le texte de mécanique, il suffit de regarder comment, en 1848, il sait se servir de la symétrie de σ pour passer tout près du théorème spectral qui affirme l'existence des trois valeurs propres et de la base orthonormale dans le cas symétrique. Il prend en effet la peine de démontrer que les vecteurs propres, qu'il a d'ailleurs trouvés dans le noyau de $\sigma + n^2$ en calculant $\sigma'\kappa$, sont orthogonaux. La démonstration repose sur la symétrie de l'opérateur $\sigma + s$ puisque, pour tout couple de vecteurs quelconques ι et κ, on a

$$\mathbf{S}.\kappa(\sigma + s)\iota = \mathbf{S}.\iota(\sigma + s)\kappa$$

soit, en notant $\iota = \iota_2$, $\kappa = \iota_1$ les deux premiers vecteurs propres et $s = s_1$ la première valeur propre

$$\mathbf{S}.\iota_2(\sigma + s_1)\iota_1 = \mathbf{S}.\iota_1(\sigma + s_1)\iota_2 = 0$$

donc

$$\mathbf{S}.\iota_1\sigma\iota_2 + \mathbf{S}.\iota_1 s_1\iota_2 = 0, \quad (s_2 - s_1)\,\mathbf{S}.\iota_1\iota_2 = 0.$$

Le théorème de Cayley-Hamilton, qui n'est démontré dans ce texte que dans un cas bien particulier, contient déjà plusieurs éléments importants que l'on retrouve ensuite dans les développements ultérieurs et, d'une certaine manière, toute la sève créatrice qui sera exploitée pendant les vingt dernières années de la vie de Hamilton est déjà présente ici. L'introduction d'un opérateur linéaire, bien qu'elle soit encore utilisée de façon incomplète, lui permet de bénéficier de l'apport simplificateur du calcul sur les polynômes d'endomorphismes (le calcul symbolique). Mais émerge surtout l'idée, dont il renvoie d'ailleurs l'origine à une date bien antérieure, d'utiliser une équation du troisième degré pour réussir l'inversion de l'endomorphisme. On peut facilement trouver des traces de cette intuition bien avant la découverte de 1843 quand, dans les années 1830, il essayait vainement de découvrir les secrets de la multiplication des triplets. Il recherchait alors trois opérateurs x_1, x_2, x_3, définis par leur action sur les trois polyplets d'instants, unités, I_1, I_2, I_3. Le symbole x_2, défini en 1835 par le système de relations $x_2 I_1 = I_2$, $x_2 I_2 = I_1 + tI_2$, $x_2 I_3 = bI_3$, vérifiait l'équation

$$x_2^2 = (b - b^{-1})x_2 + 1,$$

que Hamilton se gardait bien de considérer comme une relation ordinaire :

«*But although the symbol* x_2 *appeared thus to be given by a* quadratic *equation, with the* two real roots b *and* $-b^{-1}$*, I saw that it would be improper to* confound *the* operation *of this* peculiar *symbol* x_2 *with that of* either *of these two* numerical roots*, of that quadratic but* symbolical equation*, regarded as an* ordinary *multiplier. It was not* either*,* separately*, of the two operations* $x_2 - b$ *and* $x_2 + b^{-1}$*, which, when performed on a* general step-triad*, reduced that triad to another with every step a* null *one : but the* combination *of these two operations, successively (and in either order) performed*» [Hamilton 1853c, Preface, § 24].

Hamilton avait donc fait, dès les années trente, la liaison entre le polynôme minimal (ou une relation polynomiale) d'un endomorphisme et la recherche de directions propres.

D'autre part, toutes les démonstrations ultérieures vont reposer sur l'utilisation d'une translation $\phi + g$ opérée sur ϕ. Dans le cas du mouvement uniforme autour d'un axe fixe, l'existence d'un vecteur propre découle naturellement grâce à la nullité de $\mathrm{d}\iota/\mathrm{d}t$. On pourrait aussi ajouter que ϕ étant compris comme un vecteur et non plus comme un opérateur, la translation s'impose en considérant la partie scalaire d'un quaternion.

Enfin, le texte présente un aspect de théorie spectrale, qui sera lui aussi riche de prolongements. Certes, en 1848 les diverses réductions algébriques ne sont pas toutes effectuées. Par exemple, l'adjoint ϕ' de l'endomorphisme ϕ défini algébriquement dans les *Elements* n'est présenté dans les *Lectures* [Hamilton 1853c, p. 559] que par une définition analytique. Ainsi, le mécanisme d'algébrisation se poursuit encore dans la dernière période, même si la majeure partie du matériel algébrique est déjà en place. Il nous reste à étudier le rôle très particulier joué par la dualité.

3. LA DUALITÉ

L'équation du premier ellipsoïde s'écrit, en prenant les notations de l'opérateur d'inertie ϕ symétrique qu'on trouve dans les *Elements* : $\mathbf{S}.\iota\phi\iota = h^2$, tandis que celle de l'ellipsoïde réciproque est $\mathbf{S}.\gamma\phi^{-1}\gamma = h^2$ [Hamilton 1866, p. 291]. La conjugaison des diamètres des deux quadriques se traduit donc par l'orthogonalité au sens de la forme quadratique définie par $\mathbf{S}.\iota\gamma - h^2 t$ dans l'espace projectif correspondant. Hamilton utilise très fréquemment cette idée entre 1850 et 1865 : on peut exprimer tout problème géométrique ancien de «conjugaison» à l'aide d'une forme bilinéaire s'écrivant $\mathbf{S}.\iota\phi\gamma$ à condition que l'endomorphisme ϕ soit symétrique. Mais on trouve à une date antérieure une autre communication, lue en 1847, où Hamilton développe sensiblement la même idée [Hamilton 1850a]. Il y rappelle les différentes expressions analytiques d'un ellipsoïde déjà données lors d'une précédente séance[13] et, à partir de l'équation[14]

$$T(\iota\rho + \rho\kappa) = \kappa^2 - \iota^2,$$

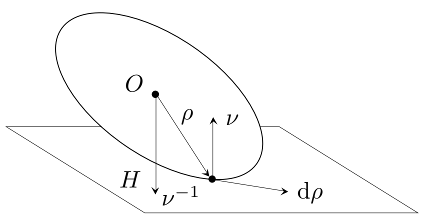
il définit explicitement le vecteur ν

$$(\kappa^2 - \iota^2)^2\nu = (\kappa^2 + \iota^2)\rho + \iota\rho\kappa + \kappa\rho\iota.$$

Ce vecteur vérifie les deux équations :

$$\mathbf{S}.\nu\rho = 1 \quad \text{et} \quad \mathbf{S}.\nu\,\mathrm{d}\rho = 0 \tag{6}$$

que le lecteur moderne peut interpréter par deux produits scalaires. Hamilton va ensuite appeler ν le «vecteur de proximité» (*vector of proximity*) dont l'inverse ν^{-1} est le vecteur $\overrightarrow{OH}$ qui relie O à sa projection orthogonale H sur le plan tangent en ρ à la surface (voir la figure).



La démonstration n'est pas donnée dans cette communication, mais il est facile de retrouver sa trace. Dans la septième leçon des *Lectures*, toujours à propos de la même surface, on rencontre le vecteur ν qui «*was a vector perpendicular to the plane which touched, at the extremity E of ρ, a sphere which there touched the ellipsoid*» ; plan dont l'équation est $\mathbf{S}.\nu(\omega - \rho) = 0$ et auquel appartient donc l'extrémité de ν^{-1} puisque

[13] Il renvoie au volume précédent des *Proceedings* [*MP* 3, p. 367].

[14] T désigne le tenseur (réel positif) du quaternion, c'est-à-dire son module $T(q) = \sqrt{(\mathbf{S}.q)^2 - (\mathbf{V}.q)^2}$.

$\mathbf{S}.\nu(\nu^{-1} - \rho) = 1 - \mathbf{S}.\nu\rho = 0$ [Hamilton 1853, p. 485]. Le texte des *Lectures* ne contient pas d'autre différence importante avec le mémoire qui l'a précédé. Toutefois, l'on peut faire les deux remarques suivantes :

- la dénomination de vecteur de proximité est attribuée à Herschel ;
- le vecteur ν est exprimé par la formule $\nu = \phi(\rho)$. Cette forme algébrique qui n'est pourtant pas utilisée directement dans l'article montre comment peu à peu Hamilton en vient à introduire des endomorphismes.

On retrouve enfin le même sujet développé dans les *Elements* [Hamilton 1866, p. 20] : l'équation du plan tangent et le théorème énoncé exactement avec les mêmes mots. Le renvoi à Herschel a cependant disparu[15]. La seule différence significative qui ressort, et qui n'étonne pas quand on a étudié l'évolution des différentes formes du polynôme caractéristique, réside dans la forme générale de la surface. Il ne s'agit plus ici de traiter le cas particulier d'un ellipsoïde, mais d'une surface *centrale* générale d'équation $f(\rho) = \mathbf{S}.\rho\,\phi\rho = C$, dont l'équation du plan tangent, $\mathbf{S}.\nu(\omega - \rho) = 0$, demeure inchangée à condition de définir maintenant ν par la différentielle de l'application f : $\mathrm{d}f\rho = 2\,\mathbf{S}.\nu\,\mathrm{d}\rho$, ce qui revient en termes modernes à prendre $2\,\nu = \mathrm{grad}(f)\rho$.

Mais on ne peut comprendre l'évolution et l'algébrisation du concept de réciprocité sans le relier aux textes français ou britanniques d'optique de la première moitié du siècle. Ainsi, Hamilton précise, dans la communication de 1847, que les deux équations (6) sont l'expression algébrique d'une construction géométrique bien connue, qu'il attribue à Mac Cullagh :

«*It may now be seen that the symbolical connexion between the two equations* [$\mathbf{S}.\nu\rho = 1$ *et* $\mathbf{S}.\nu\,\mathrm{d}\rho = 0$] *and the two others equations* [$\mathbf{S}.\rho\nu = 1$ *et* $\mathbf{S}.\rho\,\mathrm{d}\nu = 0$], *corresponds to, and expresses, in this Calculus, under what may be regarded as a strikingly simple form, the known connexion of* reciprocity *between any two surfaces, of which one is the locus of the extremities of straight lines drawn from any fixed point, so as to be in their directions perpendicular to the tangent planes of the other surface, and in their lengths inversely proportional to those perpendiculars : from the perception of which* general *relation of reciprocity between surfaces, exemplified previously for the case of two reciprocal ellipsoids by great geometrical genius (Professor Mac Cullagh), whose recent and untimely loss we all so deeply*

[15] On retrouve un renvoi à Herschel à la fin du volume, quand l'auteur en vient aux applications physiques.

deplore, the author of the present communication was led to announce to the Academy, in October 1832, the existence of certain circles of contact *on Fresnel's wave, which he saw to be a necessary consequence of the existence of certain* conical cusps *on another and reciprocal surface*[16]*. A very elegant* geometrical *proof of the same general theorem of reciprocity was given afterwards, in the* Transactions *of this Academy, by Professor Mac Cullagh himself*» [Hamilton 1850a, p. 379].

Au delà du dithyrambe consacré à Mac Cullagh[17], cette citation importante nous éclaire sur les origines du concept de réciprocité et livre une des premières étapes qui a conduit Hamilton à en donner une traduction algébrique. En effet, dans son mémoire *Theory of system of rays* [*MP* 1], — qui devait d'ailleurs initialement s'appeler *Application of analysis to optic*, montrant l'influence qu'avait exercée dans sa formation le livre de Monge *Application de l'analyse à la géométrie* —, il introduit une surface appelée la surface de «*constant action*». Cette surface est formée par les points qui sont atteints par les composants d'un rayon lumineux en un temps constant, après un nombre quelconque de réflexions. Hamilton a démontré qu'elle était en chaque point orthogonale au rayon incident.

Le texte sur la réfraction conique traite de la réfraction dans les cristaux biaxiaux. Hamilton traduit le système optique général correspondant par une équation différentielle

$$\Omega(\sigma, \tau, \nu) = 0.$$

Les variables qu'il nomme «*components of normal slowness*» [*MP* 1, p. 278] sont obtenues en dérivant l'indice de réfraction, fonction des coordonnées (x, y, z) du point d'incidence et des cosinus directeurs du rayon (α, β, γ) par rapport à ces derniers, ou encore la fonction caractéristique V par rapport à x, y, z

$$\sigma = \frac{\delta V}{\delta x} = \frac{\delta V}{\delta \alpha}, \quad \tau = \frac{\delta V}{\delta y} = \frac{\delta V}{\delta \beta}, \quad \nu = \frac{\delta V}{\delta z} = \frac{\delta V}{\delta \gamma}\cdot$$

Les solutions de cette équation différentielle correspondent à une nouvelle surface, appelée «*surface of components*», qui est réciproque de la

[16] A cette occasion, Hamilton prédit le phénomène de réfraction conique.

[17] Hamilton précise toutefois qu'il ne doit rien, pour cette découverte d'optique, à son collègue.

première. Hankins, qui écrit d'ailleurs : «*Cauchy had already used Hamilton's surface of components, but he had not seen the particular relationship between the two surfaces that Hamilton found*» [Hankins 1980, p. 91], semble reprendre un commentaire que Hamilton livre lui-même dans les *Elements*[18]. Hamilton ne connaissait donc pas, en 1865, l'ensemble des travaux optiques de Cauchy, en particulier un mémoire de 1841 consacré à la réciproque de la surface d'onde qu'il appelle *surface caractéristique* [Cauchy 1841], où se trouvent explicitement énoncés les théorèmes qui permettent l'échange et la construction de ces surfaces (*cf*. [Dahan 1993, p. 198–204]).

Les différentes formulations de la surface d'onde sont le thème de la septième application des quaternions à la physique dans les *Elements* [1866, p. 323 *sq.*] ; elles donnent la trace finale de ce processus d'algébrisation. Pour commencer son raisonnement, Hamilton considère, comme Fresnel, qu'un petit déplacement $\delta\rho$, tangentiel à la surface d'onde, d'une particule de l'éther dans le cristal provoque une réaction $\delta\varepsilon$. Il introduit ensuite un endomorphisme ϕ qui traduit l'hypothèse de base de Fresnel : la réaction au déplacement est une fonction linéaire des coordonnées de ce déplacement, c'est-à-dire[19] $\delta\rho = \phi\delta\varepsilon$. La fonction ϕ est «*linear, vector, and self-conjugate*»[20] et va permettre d'écrire, en négligeant la composante normale de la force $\delta\varepsilon$, l'équation de la surface d'onde $\mathbf{S}.\rho(\rho^2 - \phi^{-1})^{-1}\rho = 1$ et celle de la surface réciproque (*index surface*)[21] $\mathbf{S}.\mu(\mu^2 - \phi)^{-1}\mu = 1$. Les règles algébriques d'échange sont

[18] «*He afterwards found that the same surface had been otherwise employed by M. Cauchy* [1830]*, who did not seen however to have perceived its reciprocal relation to the wave*» [Hamilton 1866, p. 324].

[19] Il écrit d'abord $\delta\varepsilon = \phi^{-1}\delta\rho$.

[20] Ces propriétés sont énoncées sans démonstration, par renvoi aux principes de Fresnel lequel avait montré une proposition qui équivaut, en langage moderne, à la symétrie (*cf.* [Buchwald 1980]).

[21] Hamilton indique, un peu plus loin, les équations cartésiennes équivalentes à ces formules. Si a, b, c désignent les demi-axes de l'ellipsoïde associé à ϕ, et si x, y, z sont les composantes du vecteur ρ, de longueur r, l'équation de la surface d'onde devient

$$\frac{a^2x^2}{r^2-a^2} + \frac{b^2y^2}{r^2-b^2} + \frac{c^2z^2}{r^2-c^2} = 0$$

et sa réciproque

$$\frac{x^2}{r^2-a^2} + \frac{y^2}{r^2-b^2} + \frac{z^2}{r^2-c^2} = 0.$$

explicitement données : «*we can return from each equation of the wave, to the corresponding equation of the index surface, by merely changing* ρ *to* μ*, and* ϕ *to* ϕ^{-1} » [1866, p. 326], et sont un cas particulier d'une dualité plus générale appelée *rule of the interchanges*.

Hamilton fait, dans cet article 422 des *Elements*, une complète symétrie entre les deux surfaces. Elles sont définies conjointement et, à chaque étape intermédiaire du raisonnement, l'auteur conserve la symétrie. Cette volonté de présenter symétriquement, par des équations algébriques les plus synthétiques possibles, renvoie à un autre texte de 1862 sur la réciprocité des courbes de l'espace [Hamilton 1862a]. Alors que Salmon avait traité la même question d'un point de vue entièrement géométrique[22], Hamilton, qui part de l'équation[23] $\rho = \psi + y\psi'$ de la surface développable associée à la courbe $\rho = \psi$, exhibe les formules algébriques symétriques qui relient ψ à sa réciproque ϕ. L'intérêt du mathématicien pour les courbes et les surfaces, et en particulier pour la géométrie de son collègue au Trinity College, Salmon, achève donc une longue histoire commencée dans les années 1830 par des applications de la géométrie à l'optique, et leurs mathématisations à partir de 1846.

Hamilton a décrit à plusieurs reprises sa doctrine philosophique qui aboutissait à une méthode de travail très particulière. Dans un premier temps, le chercheur s'élève par induction des faits aux lois, et redescend ensuite par déduction vers les conséquences. Mais ce programme de travail ne se borne pas, pour lui, aux seules recherches physiques. Appliquée aux mathématiques, la méthode vise à chercher une relation (en général une relation d'équivalence) propre à rassembler les différentes situations, de la même manière que la loi physique unifie la diversité des phénomènes. C'est ce programme qui est suivi à la lettre pour la construction des *Lectures*. Après la découverte des quaternions, Hamilton dispose, sans doute en

[22] Salmon considère une courbe de l'espace. L'ensemble des tangentes constitue alors une surface développable. Les plans osculateurs de la courbe qui sont les plans tangents à la surface forment le troisième élément du système points–tangentes–plans, qu'il transforme par polarité réciproque en une nouvelle suite de plans–droites–points pour former la nouvelle courbe [Salmon 1862].

[23] Dans ces formules, ψ représente une fonction vectorielle (non linéaire) dépendant d'un paramètre x. L'équation $\rho = \psi$ est, en termes modernes, l'équation de la courbe paramétrée $\overrightarrow{OM} = \vec{\psi}(x)$ qui est la directrice de la surface développable $\overrightarrow{OM} = \vec{\psi} + y\vec{\psi}'(x)$.

1846–1847, grâce à la partie réelle $\mathbf{S}.\alpha\beta$ d'un produit de vecteurs, de la forme bilinéaire qui permet d'éclairer les lois géométriques de réciprocité dans le cas particulier des ellipsoïdes. S'ouvre alors devant lui une série importante de recherches : traduire, comprendre algébriquement, et peut-être unifier par l'algèbre, les lois de conjugaisons que les géomètres avaient déjà posées.

On note à nouveau le même mouvement lent : Hamilton, jusqu'à la moitié des années 1840, élabore la majeure partie des grands concepts dont il se sert ensuite. Il a décrit dans son hommage à Mac Cullagh comment sa représentation de la dualité géométrique était reliée aux recherches sur l'optique. Suit une courte période intermédiaire, une sorte de bouillonnement pendant les années 1843–1846, période pendant laquelle il cherche à appliquer le nouveau calcul à la plupart des domaines mathématiques ou physiques qu'il domine. C'est le cas dans les deux textes sur les ellipsoïdes que nous venons d'étudier. Ensuite, après 1850, vient le temps de la décantation. Hamilton simplifie les notations, approfondit ou généralise les notions qu'il vient très vite d'exposer devant l'Académie de Dublin. Les auteurs cités dans les *Elements* sont souvent ceux qui ont nourri sa réflexion pendant la période de formation, ou encore pendant la période critique. Comme on l'a déjà relevé ailleurs, peu de renvois sont faits à la mathématique vivante de la seconde moitié du siècle.

A cette dualité d'origine géométrique et optique, s'ajoute une dualité induite par le mouvement. Or, ces différents aspects que Hamilton a pensé pouvoir rassembler par l'algèbre (jusqu'à la fin de sa vie, puisque le dernier texte sur les surfaces date de 1862 [Hamilton 1862a]), entrent dans le programme qu'avait fixé Chasles. En effet, Chasles avait relevé plusieurs types de dualité dans la note XXXIV de son *Aperçu historique* [Chasles 1837, p. 408 *sq.*] : 1) la dualité point/droite ; 2) la dualité du repérage en mécanique ; 3) la dualité translation/rotation ; 4) la dualité couple/force. Il faut remarquer que cette note de Chasles contient l'idée de dualité reliée au mouvement que nous venons de commenter :

«*Il existe, pour chaque objet dont s'occupe le tourneur, une double manière de le construire ; la première en fixant l'ouvrage, et en faisant mouvoir l'outil ; la seconde, et c'est celle employée par le tourneur, en fixant l'outil, et en faisant mouvoir l'ouvrage*» [1837, p. 409].

Cette influence des idées de Chasles est confirmée par une lettre du 22 novembre 1844 qu'adresse John Graves à son ami Hamilton :

«*On the first visit you stated that you had applied your quaternions to the geometry of curved surfaces, and stated your intention of employing them in the reciprocal geometry of Chasles*» [Graves II, p. 469].

On retrouve aussi, à des dates postérieures, des références multiples à la géométrie de Chasles. En 1853, Hamilton utilise des quaternions à coefficients imaginaires, appelés biquaternions, pour montrer que les résultats obtenus à partir des racines réelles de l'équation $q^2 = aq + b$ associée à la fraction continue de quaternions

$$a + \cfrac{b}{a + \cfrac{b}{a + \cfrac{b}{a + \cfrac{b}{\cdots}}}}$$

peuvent aussi être démontrés grâce aux racines imaginaires de l'équation. A la fin de l'article, il en tire des conséquences géométriques [1853a] et va consacrer une nouvelle communication à les redémontrer de manière géométrique. Les techniques utilisées sont celles de la géométrie euclidienne (distance, similitude) mais aussi celles des pôles, des polaires et de l'involution (en géométrie réelle ou imaginaire). A la fin, Hamilton nous livre ses sources en demandant au lecteur de reconnaître la théorie de la double division homographique de l'axe radical expliquée dans le *Traité de géométrie de position* de Chasles [1853b, p. 430]. Mais si le premier article tente de prouver que le système quaternionien est en mesure de produire des théorèmes géométriques nouveaux (ce qu'on pourrait rapprocher de la troisième voie), le second, géométrique, ne sert qu'à susciter la comparaison avec les preuves algébriques précédentes. Le dessein de Hamilton est toujours identique, unifier d'abord, par son calcul, l'ensemble des techniques géométriques. Il doit ainsi recourir aux quaternions «*imaginaires*» pour expliquer la géométrie des imaginaires[24].

4. CONCLUSION

J'espère avoir donné assez d'exemples montrant l'intérêt de considérer

[24] Au prix, d'ailleurs, de difficultés théoriques importantes pour définir ces biquaternions.

les textes de Hamilton après 1853. Certes, il semble que la plupart des intuitions majeures aient été posées avant cette date qui achève la période de «bouillonnement», mais on découvre comment, ensuite, le mathématicien épure son style en définissant de nouveaux objets algébriques. Ces constructions sont introduites pour résoudre un certain nombre de problèmes algébriques qu'il a lui-même énoncés et sont, parfois, les conséquences de la méthode choisie. En effet, Hamilton par son goût pour la synthèse, place au-dessus de la géométrie analytique, la géométrie vectorielle quaternionique qui est intrinsèque. Il est donc contraint de développer sa théorie de façon *autonome*, sans contact avec les développements de l'algèbre analytique anglaise (Cayley-Sylvester) ou allemande (sa lecture de Grassmann se réduit à vérifier que le mathématicien de Stettin n'a pas anticipé les quaternions).

L'idée centrale du théorème de Cayley-Hamilton repose sur l'inversion de l'endomorphisme, et donc sur la construction de l'adjoint. Pour ce faire, Hamilton utilise la forme quadratique que lui procure, dans l'espace à trois dimensions, la partie réelle du quaternion. Mais la méthode ne fonctionne plus quand on passe à la dimension quatre. Les différentes formes de démonstration qu'il donne pour éviter cet obstacle mériteraient, à elles seules, un article ; disons seulement ici qu'il réussit à passer de façon élégante à la quatrième dimension en définissant pas à pas un produit vectoriel dans $\mathbb{R}^4$ [Hamilton 1862b]. Il fait cette construction «à la main» car il ne dispose pas de l'isomorphisme fondamental entre l'espace et son dual, et a refusé de s'intéresser aux déterminants[25] et aux expressions analytiques. Il omet d'ailleurs d'utiliser la conjugaison ; la forme qu'il applique sur deux quaternions q et q', $\mathbf{S}.qq'$, n'est pas définie positive [Hamilton 1866/1969 I, p. 555].

Le vieux mathématicien de Dublin, qui utilise la géométrie de Salmon après avoir vectorisé celle des mathématiciens français (Monge, Chasles) et allemands (Gauss, Möbius), n'est donc pas très éloigné du mathématicien ou du physicien des années 1830. Il est probable que l'intérêt suscité par ses textes sur le temps, tout comme sa réelle supériorité inventive sur les mathématiciens de sa génération (Peacock en particulier), ont amené trop de chercheurs à surévaluer, rétrospectivement, ses conceptions globales sur

[25] Graves remarque un mémoire dans lequel Hamilton utilise les déterminants en 1864, un an avant sa mort [Graves III, p. 643].

l'algèbre et sa compréhension de l'espace à n dimensions. Au contraire, si l'on met en avant l'évolution de ses pratiques, on remarque, à côté d'un style algébrique qui est toujours très brillant et un goût très moderne pour la construction, que ses préoccupations et sa manière sont celles d'un mathématicien de la première moitié du dix-neuvième siècle. On constate alors l'unité profonde de son œuvre, unité dont fait aussi partie l'illusion d'avoir cru trouver, grâce aux quaternions, une clef pour comprendre l'univers sensible.

BIBLIOGRAPHIE

BROUSSE (Pierre).
[1973] *Cours de mécanique*, Paris : Armand Colin, 1973.
BUCHWALD (Jed)
[1980] Optics and the theory of the punctiform ether, *Archive for history of exact sciences*, 21 (1980), p. 245–278.
CAUCHY (Augustin-Louis)
[*OC*] *Œuvres complètes*, 27 vol. en deux séries. Paris : Gauthier-Villars, 1882–1974.
[1830] Application des formules qui représentent le mouvement d'un système de molécules sollicitées par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle à la théorie de la lumière, *Exercices de mathématiques* (1830) ; *OC* (II) 9, p. 390–450.
[1841] Mémoire sur la surface caractéristique correspondante à un système d'équations linéaires aux dérivées partielles et sur la surface des ondes, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, 13 (26 juillet 1841) ; *OC* (I) 6, p. 263–267.
CAYLEY (Arthur).
[*CMP*] *The collected mathematical papers*, 14 vol., Cambridge, 1889–1898 ; rééd. New York : Johnson Reprint, 1963.
[1845] On the rotation of a solid body round a fixed point, *Cambridge and Dublin mathematical journal*, t. I (1846), p. 167–173 et p. 264-274 ; *CMP* 1, p. 237–252.
[1848] On the application of quaternions to the theory of rotation, *The London, Edinburgh and Dublin philosophical magazine*, t. XXXIII (1848), p. 196–200 ; *CMP* 1, p. 405–410.
[1895] Coordinates versus quaternions, *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, t. XX (1895), p. 271–275 ; *CMP* 13, p. 541–544.
CHASLES (Michel).
[1837] *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*, Bruxelles, 1837 ; rééd. Paris : Gauthier-Villars, 1889 et Gabay, 1989.
CROWE (Michael).
[1967] *A history of vector analysis*, London : University of Notre Dame Press, 1967.
DAHAN DALMEDICO (Amy).
[1993] *Mathématisations. Augustin-Louis Cauchy et l'École française*, Paris : Blanchard et éd. du Choix, 1993.

DUGAS (René).
[1950] *Histoire de la mécanique*, Paris : Dunod, 1950.

GRAVES (Robert Perceval).
[1882–1889] *Life of Sir William Rowan Hamilton*, 3 vol., Dublin, 1882–1889 ; rééd. New York : Arno Press, 1975. [On notera simplement Graves I, II, III pour désigner ces volumes.]

GRAY (Jeremy).
[1980] Olinde Rodrigues' paper of 1840 on transformation groups, *Arch. hist. exact sci.*, 21 (1980), p. 375–385.

HAMILTON (William Rowan).
[*MP*] *Mathematical papers*, 3 vol., Cambridge : The University Press, 1931–1967.
[1844] On a new species of imaginary quantities connected with the theory of quaternions, *Proceedings of the Royal Irish Academy*, t. II (1844), p. 424-434.
[1846–1849] On symbolical geometry, *Camb. and Dubl. math. J.*, I (1846), p. 45–57, p. 137–154, p. 256–263 ; II (1847), p. 47–52, p. 130–133, p. 204–209 ; III (1848), p. 68–84, p. 220–225 ; IV (1849), p. 84–89, p. 105–118.
[1847] On quaternions, or on a new system of imaginaries in algebra ; with some geometrical illustrations, *Proc. Royal Irish Acad.*, t. III (1847), p. 1–16 ; *MP* 3, p. 355–362.
[1848] Researches respecting quaternions. First series, *Transactions of the Royal Irish Academy*, t. XXI (1848), p. 199–296 ; *MP* 3, p. 159–226.
[1850a] On additional applications of quaternions to surfaces of the second order, *Proc. Royal Irish Acad.*, t. IV (1850) p. 14–19 ; *MP* 3, p. 378–380.
[1850b] On quaternions and the rotation of a solid body, *Proc. Royal Irish Acad.*, t. IV (1850), p. 38–56. ; *MP* 3, p. 381–391.
[1853a] On the geometrical interpretation of some results obtained by calculation with quaternions, *Proc. Royal Irish Acad.*, t. V, (1853), p. 388–390 ; *MP* 3, p. 424–425.
[1853b] On the geometrical demonstration of some theorems obtained by means of the quaternion analysis, *Proc. Royal Irish Acad.*, t. V, (1853), p. 407–415 ; *MP* 3, p. 426–430.
[1853c] *Lectures on quaternions*, Dublin, 1853.
[1862a] Quaternion proof of a theorem of reciprocity of curves in space, *British Association report*, II (1862), p. 4 ; *MP* 3, p. 434.
[1862b] On the existence of a symbolic and biquadratic equation, which is satisfied by the symbol of a linear operation in quaternions, *Phil. mag.*, t. XXIV (1862), p. 127–128 ; *MP* 3, p. 350–352.
[1866] *Elements of quaternions*, London, 1866 ; 3ᵉ éd., 2 vol., New York : Chelsea, 1969. [Sauf indication contraire, les références de cet article renvoient au tome II de la 3ᵉ éd.]
[*MS*] MS 1492, manuscrits des « notebooks » de S.W.R. Hamilton, Trinity College Library, Dublin.

HANKINS (Thomas).
[1980] *Sir William Rowan Hamilton*, Baltimore : The Johns Hopkins University Press, 1980.

MAC CULLAGH (James).
[1844a] On the rotation of a solid body, *Proc. Royal Irish Acad.*, t. II (1844), p. 520–526.

[1844b] Further remarks on the rotation of a solid body, *Proc. Royal Irish Acad.*, t. II (1844), p. 542–545.

[1847] On the rotation of a solid body, *Proc. Royal Irish Acad.*, t. III (1847), p. 370–371.

Poinsot (Louis).

[1834] *Théorie nouvelle de la rotation des corps*, Paris, 1834.

Rodrigues (Olinde).

[1840] Des lois géométriques qui régissent les déplacements d'un système solide dans l'espace [. . .], *Journal de mathématiques pures et appliquées*, (I) 5 (1840), p. 308–440.

Salmon (George)

[1862] *Treatise on the analytic geometry of the three dimensions*, 1re éd. Dublin, 1862 ; trad. française O. Chemin, 3 vol., Paris : Gauthier-Villars, 1882–1892.

Tait (Peter Guthrie)

[1867] *Elementary treatise on quaternions*, 1re éd. Oxford, 1867 ; trad. française d'après la 2e éd. anglaise de 1873 par Gustave Plarr, Paris : Gauthier-Villars, 1882.