Revue d'histoire des mathématiques,
1 (1995), p. 111–138.

PROBABILITÉS ET PHILOSOPHIE DES MATHÉMATIQUES CHEZ COURNOT[1]

Thierry MARTIN (*)

RÉSUMÉ. — L'article se propose de montrer comment, en 1843, Cournot s'efforce de répondre à la crise des fondements qui ébranle le calcul des probabilités, en lui assignant le statut d'une théorie mathématique pure et en distinguant les significations objective et subjective de la probabilité, afin de mesurer la portée de ses applications. On est alors conduit à interroger la représentation proposée par Cournot des mathématiques et de leur rapport au réel, pour mettre à jour la relation qui unit son projet probabiliste et sa philosophie des mathématiques.

ABSTRACT. — PROBABILITY AND PHILOSOPHY OF MATHEMATICS IN THE WORK OF COURNOT. This paper seeks to demonstrate how Cournot, in 1843, sought to respond to the foundational crisis then looming in the calculus of probabilities, by elevating the latter to the status of a theory in the realm of pure mathematics, while making a distinction between the subjective and objective meanings of probability, so as to give a measure of the scope and range of its applications. This leads on to a reappraisal of the representation proffered by Cournot, of mathematics and of their relationships to reality, and thus to elucidation of the connection between his probabilistic programme and his philosophy of mathematics.

1. LE PROJET DE COURNOT DANS L'*EXPOSITION*

Lorsqu'en 1843 Cournot publie l'*Exposition de la théorie des chances et des probabilités*, il ne se propose pas seulement d'ajouter un nouveau traité de calcul des probabilités à ceux de Laplace, Lacroix et Poisson. Il cherche surtout à «*rectifier des erreurs, lever des équivoques, dissiper des obscurités dont il* [*lui*] *a paru que les ouvrages des plus habiles géomètres,*

[1] Cet article reprend des éléments de la thèse soutenue par l'auteur à l'E.H.E.S.S. en février 1994 sous le titre *Probabilités et critique philosophique selon Cournot.*

(*) Texte reçu le 13 juin 1994, révisé le 17 octobre 1994.
Thierry MARTIN, Université de Franche-Comté, 30 rue Mégevand, 25030 Besançon CEDEX (France).

sur ce sujet délicat, n'étaient point exempts» [1843, p. 3][2]. Mais il ne s'agit pas de corriger quelque erreur de détail ; ce sont les principes mêmes du calcul qui s'avèrent déficients et doivent être reconstruits. Ces «*habiles géomètres*» que met en cause Cournot sont, en effet, les bâtisseurs de la théorie, qui ont, certes, édifié le calcul, mais sans prendre soin de donner aux concepts mobilisés un sens à la fois clair et rigoureusement mathématique, laissant par là ouverte la voie à des applications illégitimes ou incertaines. Il s'agit notamment, précise Cournot, de Jacques Bernoulli, dont l'*Ars conjectandi* fonde la théorie des probabilités, mais en même temps, par l'équivocité des concepts qu'il emploie, prépare «*les équivoques qui en ont rendu l'exposition confuse et les applications incertaines*» [1843, p. 62]. Il s'agit également de Condorcet[3] et de Laplace qui, édifiant la «*doctrine des probabilités* a posteriori» sur la règle de Bayes, sans distinguer clairement les valeurs objective et subjective de la probabilité, en ont fait «*la source de nombreuses équivoques qu'il faut d'abord éclaircir, d'erreurs graves qu'il faut rectifier*» [1843, p. 106].

Ces obscurités, qui mettent en cause à la fois la cohérence interne de la théorie et la légitimité de ses applications, proviennent notamment d'une double indétermination concernant d'abord le sens de ses concepts directeurs, principalement celui de probabilité, ensuite, et par voie de conséquence, la nature de son rapport au réel.

D'une part, en effet, la constitution du calcul des probabilités depuis le milieu du XVIII^e siècle s'est effectuée non sous la forme d'une théorie unitaire aux concepts clairement définis, mais à partir d'un ensemble d'instruments théoriques indissociables des applications dans lesquelles ils sont investis, appartenant à des domaines hétérogènes (contrats d'assurances, rentes viagères, mesure de la crédibilité des témoignages, etc.) [Daston 1988, 1989]. Ce n'est que progressivement que la théorie mathématique sera distinguée de ses applications, grâce à quoi le calcul des probabilités pourra quitter la sphère des «*mathématiques mixtes*»,

[2] Si les références donnent l'année de publication des éditions originales des ouvrages de Cournot, la pagination qui la suit est, en revanche, celle des *Œuvres complètes* publiées sous la direction d'André Robinet aux Éditions Vrin.

[3] Si Cournot porte un jugement sévère sur l'œuvre probabiliste de Condorcet (*cf.* également [1843, p. 113]), il faut reconnaître qu'il lui doit plus que ne le laisseraient penser ces critiques, comme l'ont montré B. Bru et P. Crépel ([Bru 1988, p. 89 et 93], [Bru et Crépel 1989, p. 70], [Condorcet *Arith. pol.*]).

sous l'influence notamment des travaux de Condorcet d'abord, de Laplace ensuite.

D'autre part, et conjointement, le concept de probabilité ne reçut pas initialement un sens univoque [Hacking 1975], désignant tantôt une probabilité objective, tantôt une probabilité subjective, mais sans que ces sens soient clairement distingués, et sans que la valeur objective du calcul des probabilités puisse être nettement établie, l'ambiguïté du concept de probabilité se faisant sous le primat d'une interprétation subjectiviste [Daston 1988, 1989]. L'indétermination qui en résulte concernant le sens du concept de probabilité et la portée des applications du calcul engendre alors une série de difficultés qui, à la fois, motive les critiques dont il est l'objet et exige un effort de clarification conceptuelle et de réflexion sur les fondements qui constitue l'apport essentiel de l'œuvre probabiliste de Cournot.

Celui-ci se propose, en effet, grâce à un effort de clarification conceptuelle permettant d'asseoir la théorie des probabilités sur des fondements solides et d'en mesurer la portée des applications, de lever les «*difficultés qui ont rendu jusqu'ici suspecte à de bons esprits toute la théorie de la probabilité mathématique*» [1843, p. 4]. On songe bien sûr ici aux doutes élevés par d'Alembert dès 1754 dans l'*Encyclopédie* et développés dans plusieurs textes (voir notamment [1761] et [1767]). Mais, au moment où Cournot écrit, la théorie des probabilités est encore l'objet d'une série de critiques auxquelles il convient de répondre en assignant à ses résultats leur véritable sens. En témoigne la virulence dont font preuve Auguste Comte, jugeant «*la notion fondamentale de la probabilité évaluée* [...] *directement irrationnelle et même sophistique*» [1830–1842/1975, t. I, p. 435], ou Jean-Baptiste Bordas-Demoulin estimant que «*l'application du calcul des probabilités aux phénomènes de l'univers, aux événements de la vie et des sociétés* [...] *conduit toujours à des résultats faux, ou illusoires, et qu'elle est une des plus grandes extravagances qui soient tombées dans l'esprit humain*» [1843, t. II, p. 418–419].

Mais, les attaques que subit le calcul des probabilités ne proviennent pas seulement des philosophes. Déjà, les travaux de Laplace et de Poisson sur la probabilité des jugements suscitent des critiques particulièrement vives jusque chez les mathématiciens [Bru 1981], mais c'est plus largement l'application du calcul des probabilités au «monde moral» qui fait l'objet de controverses. Poinsot, par exemple, lors de la discussion qui suivit la *Note sur le calcul des probabilités* présentée par Poisson à l'Académie des sciences en 1836, la dénonce comme une «*fausse application de la science mathématique*» [Poisson 1836a, p. 380] et «*une sorte d'aberration de l'esprit*» [Poisson 1836b, p. 399]. Il est donc nécessaire en 1843 de réformer les principes du calcul des probabilités, afin d'en assurer la validité objective, et ceci d'autant plus qu'aux yeux de Cournot, il constitue «*l'application la plus vaste de la science des nombres*» [1843, p. 60], dépassant même, quant à sa portée, le champ de la géométrie et de la mécanique [1843, p. 61].

Cette réflexion sur les fondements du calcul des probabilités et le sens de ses applications, où Cournot voit l'originalité de son travail [1843, p. 4], le conduit à opérer un double déplacement par rapport à la tradition probabiliste du XVIII^e siècle en assignant au calcul des probabilités le statut d'une théorie mathématique pure, et en faisant le partage entre les sens objectif et subjectif de la probabilité, donc aussi de ses applications au réel.

Certes, Cournot ne vient pas rompre brutalement avec la tradition qui le précède. On peut sans doute considérer Laplace comme le premier probabiliste à distinguer explicitement les sens objectif et subjectif de la probabilité [Daston 1988, p. 191], ou voir dans l'œuvre de Condorcet la première distinction de la définition abstraite de la probabilité et de sa double interprétation, décisionnelle d'une part, fréquentielle de l'autre [Rashed 1974, p. 48–52]. D'un autre côté, il est vrai que la *Théorie analytique des probabilités*, fondée sur le calcul des fonctions génératrices [Laplace 1812, p. 1] constitue le calcul des probabilités en théorie purement mathématique, indépendante de ses applications au réel. Cependant, d'une part, cela n'empêche pas Laplace de définir en même temps la probabilité comme produit de notre ignorance, donc en termes extra-mathématiques, et d'autre part force est de constater que les efforts aussi bien de Condorcet et de Laplace que de leurs successeurs n'ont pas permis de répondre définitivement aux objections et critiques dont souffre la théorie des probabilités.

Si l'on ne cherche pas à s'en tenir à une question de priorité, il faut admettre que la réflexion de Cournot prenant pour objet principal d'analyse la mise en ordre des significations du concept de probabilité et la mesure de son pouvoir d'informer le réel, vient achever ce mouvement d'émancipation de la théorie des probabilités pour lui conférer le statut de théorie mathématique pure, et lever l'ambiguïté qui régnait sur le sens du concept de probabilité. Et, si la question du statut objectif ou subjectif de la probabilité ne se clôt pas avec Cournot, on peut au moins lui reconnaître le mérite d'en avoir clairement défini les termes. Ce sont ces préoccupations de Cournot que nous nous proposons d'étudier, en montrant comment elles se relient à sa représentation des mathématiques, et particulièrement à la façon dont il comprend leur adéquation au réel.

2. LA PURETÉ DU CALCUL DES PROBABILITÉS

Les premières pages de l'*Exposition* montrent clairement que Cournot entend assigner au calcul des probabilités le statut d'une théorie purement mathématique, le situant dans la sphère des mathématiques pures. Le premier chapitre expose les règles élémentaires de l'analyse combinatoire, définie comme une «*science abstraite et purement rationnelle*» [1843, p. 7]. C'est sur ce socle que s'appuie le calcul des probabilités, constituant une «branche» de la combinatoire, ce que révèle la construction cournotienne de la définition de la probabilité au chapitre II. Appliquée à un événement aléatoire, l'idée de combinaison permet de distinguer des «hypothèses», ou «chances», favorables ou défavorables à sa réalisation, et de les répartir en deux ensembles symétriques selon qu'elles jouissent de l'une ou l'autre de ces deux propriétés contraires, ce qui suffit pour définir la probabilité comme rapport de chances. Le concept de probabilité ne requiert donc pour son élaboration aucun élément d'empiricité, ni de considération portant sur l'étendue de nos connaissances.

Par là, Cournot rompt avec les définitions de type subjectiviste sur lesquelles les probabilistes précédents édifiaient la théorie, et au premier chef, ceux-là même qui lui fournissent la matière principale de son livre, Laplace, Lacroix et Poisson. Laplace, en effet, reprend dans l'*Essai philosophique sur les probabilités* [1814/1986, p. 34] la définition de la probabilité comme produit de notre ignorance et de nos connaissances déjà formulée dans la *Théorie analytique des probabilités* [1812, p. 177–178], et que préparait le mémoire lu en 1773 [1776, § XXV]. De même, Lacroix, pour qui la probabilité est la «*mesure du degré de confiance*» en l'arrivée d'un événement, la définit par le rapport du nombre des jugements affirmatifs au nombre total des jugements [1816/1822, p. 10]. Enfin, selon Poisson, «*la probabilité d'un événement est la raison que nous avons de croire qu'il aura ou qu'il a eu lieu*» [1837, p. 33].

Ainsi appuyé sur la combinatoire, le calcul des probabilités constitue un «*ordre de spéculations tout aussi abstraites que celles de la géométrie peuvent l'être*» [1847, p. 79], qui, elle-même, précisera-t-il dans *Matérialisme*, «*n'est point une physique émondée, simplifiée pour la rendre accessible à nos raisonnements : c'est la physique qui est une géométrie rendue sensible dans la Nature par un ingrédient de réalité*» [1875, p. 163].

Mathématiques et abstraction

Définir la combinatoire et le calcul des probabilités comme des sciences abstraites ne doit pas laisser croire que les idéalités mathématiques sont, pour Cournot, élaborées grâce à un procès d'épuration à partir du sensible. Certes, en un premier sens, la notion d'abstraction est définie par Cournot comme cette opération grâce à laquelle l'esprit peut démêler un ensemble de propriétés ou de caractères que la sensation confond [1851, p. 188]. Mais, ce n'est là qu'une première forme d'abstraction, qui, plus généralement, est le produit de l'activité analytique de l'esprit, susceptible de s'effectuer à différents niveaux. Sur un premier plan, l'abstraction est le résultat de cette opération par laquelle l'esprit dégage l'idée des représentations sensibles auxquelles elle est tout d'abord attachée [1851, p. 137]. Ainsi se forment les idées des choses sensibles, caractérisées par leur fonction représentative. Mais, ce travail d'analyse peut s'exercer non plus sur les contenus sensibles, mais sur les idées dont elles sont issues, et rejouer encore sur les idées ainsi obtenues, pour donner naissance à des idées abstraites qui ne désigneront plus que des relations ou des opérations dépourvues de tout contenu empirique. Bien plus, ce serait fausser la pensée de Cournot que de croire que les idées formelles sont alors seulement éloignées d'un degré par rapport aux idées sensibles. En effet, à partir du moment où des idées radicalement pures ont été constituées, le travail de l'esprit peut opérer directement sur elles, sans devoir prendre appui sur des représentations sensibles, pour mettre à jour ces vérités dont Cournot précise constamment qu'elles sont le produit de l'activité de la raison pure.

Certes, reconnaît Cournot, «*nous n'arrivons à la conception des choses* *intelligibles, nous autres humains, que par le canal des choses phénoménales et sensibles*» [1861, p. 25]. Mais, c'est que le mouvement d'acquisition des connaissances suit un ordre inverse à celui qui en structure le système. Si les idées formelles «*gouvernent, régissent tout ce qui se passe dans la sphère des choses phénoménales et sensibles*» [1861, p. 25], et donc les précèdent *en soi*, elles ne s'offrent à nous comme secondes qu'à raison de notre difficulté à saisir immédiatement le contenu des abstractions pures. Ainsi, le concept de nombre ne suppose pas, comme condition de sa construction, l'idée de succession temporelle ou la représentation spatiale d'une série de points disposés en série linéaire, mais les formes de l'espace et du temps facilitent l'accès à la conception d'idées qui, par elles-mêmes, échappent à toute détermination spatio-temporelle, en offrant à l'intelligence le secours d'une représentation figurée.

«*Les idées d'ordre, de classement, de combinaison, de nombre, et toutes celles qui s'y rattachent,* écrit Cournot, [...] *n'impliquent nécessairement ni l'idée d'une succession dans le temps, ni celle d'une localisation dans l'espace*» [1861, p. 24].

Le détour par les représentations sensibles ne répond donc qu'à des nécessités pédagogiques. Et Cournot, reprenant l'exemple de Saunderson, note qu'en dépit de sa cécité originaire, il «*avait du système des vérités géométriques exactement la même idée que les autres géomètres*» [1861, p. 25 ; 1875, p. 33]. L'abstraction mathématique est donc une abstraction pure, élaborée de façon *a priori* :

«*Il faut remarquer,* écrit Cournot, *dans toute démonstration où la raison opère seule, sans le secours de l'expérience, ce que Kant a nommé "une synthèse* a priori*", c'est-à-dire une certaine disposition ou construction idéale que l'esprit invente pour le besoin de la démonstration, et dont l'invention pour laquelle on ne saurait donner de règles fixes, est ce qui met en relief la sagacité du démonstrateur*» [1875, p. 161].

L'usage de la notion d'abstraction pour désigner les idéalités mathématiques ne vise donc pas chez Cournot à affirmer que les concepts mathématiques seraient construits par soustraction à partir du réel, mais à signifier au contraire leur apriorité radicale, ou, comme il le dit, leur appartenance à un domaine où «*tout s'y démontre par le raisonnement seul, sans qu'on ait besoin de faire aucun emprunt à l'expérience*» [1861, p. 12].

Les abstractions mathématiques et la syntactique

Mais, c'est peu dire que le calcul des probabilités reçoit son statut de théorie mathématique pure en prenant appui sur l'analyse combinatoire. Celle-ci est, en effet, aux yeux de Cournot, une forme particulière de cette combinatoire généralisée qu'il désigne par le terme de «syntactique», emprunté, précise-t-il, aux allemands [1843, p. 7][4]. Le terme, chez Cournot, ne désigne pas exactement la combinatoire, qu'il définit comme syntactique «*réduite à des déterminations de nombres*» [1843, p. 8]. Elle est plutôt pensée sous la forme d'une théorie formelle, constituant la base de l'algèbre ([1843, p. 7 et § 7], également [1847, § 27], et déjà [1841, p. 74]). En associant étroitement l'algèbre et ce qu'il appelle la «*théorie de l'ordre et des combinaisons*», Cournot rend, certes, hommage à Leibniz, qui «*ne voyait avec raison dans l'algèbre qu'une application particulière de la théorie des combinaisons, et une branche de sa* caractéristique universelle *ou* combinatoire» [1851, p. 466], quoiqu'il dénonce par ailleurs [1851, p. 261–262] les implications logiques du projet leibnizien. Mais, sa thèse exprime surtout son refus de réduire les mathématiques à la considération exclusive de la quantité (par exemple [1847, § 149; 1872, p. 349–350])[5], et s'inscrit par là dans ce mouvement de formalisation qui marque le début du XIXe siècle. Cournot se réfère ici à Poinsot, qui distingue dans l'algèbre deux parties, d'une part ce qu'il appelle l'arithmétique universelle, ou arithmétique généralisée, où l'on étend à des nombres quelconques les règles mises en place pour des nombres particuliers, et de l'autre l'algèbre supérieure, dont il précise qu'elle «*repose tout entière sur la théorie de l'ordre et des combinaisons,* [*et*] *s'occupe de la nature et de la composition des formules considérées en elles-mêmes, comme de purs symboles, et sans aucune idée de valeur ou*

[4] Il est possible de présumer que Cournot fut informé des travaux de l'École combinatoire allemande par l'enseignement de Lacroix, dont il suivit les cours à la Sorbonne. On trouve, en effet, sous la plume de Lacroix des références à la combinatoire allemande au moins à trois reprises ([1800, p. 325; 1835, p. 195] et dans [Delambre 1810, p. 113–114]); il n'utilise cependant pas alors le terme de syntactique, dont l'importation dans la langue française est référée à Cournot par Lalande [1926/1988, p. 1090b] comme par Robert.

[5] Et, dès 1838, Cournot signalait que «*les personnes versées dans l'analyse mathématique savent qu'elle n'a pas seulement pour objet de calculer des nombres; qu'elle est aussi employée à trouver des relations entre des grandeurs que l'on ne peut évaluer numériquement*» [1838, p. 4].

de quantité» [1845, p. 4]. Cournot, reprenant ces «*indications lumineuses*» [1847, p. 62] de Poinsot, pose que l'algèbre a proprement pour objet «*des relations d'ordre, de combinaison et de forme,* [...] *des résultats indépendants des valeurs numériques*» [1847, p. 397; également p. 353].

Plus profondément, la syntactique forme, en tant que théorie de l'ordre en général, l'assise fondamentale sur laquelle s'édifie l'ensemble des sciences mathématiques. Le système des mathématiques peut sans doute être pensé comme le développement des idées fondamentales d'ordre et de grandeur, comme l'indiquait déjà Descartes, mais ces idées ne se situent pas sur le même plan, l'idée d'ordre dépassant celle de grandeur en abstraction et en généralité [1847, § 149]. Ainsi, la «*correspondance entre l'algèbre et la géométrie*», si elle tient à leur commune dépendance à l'égard de la théorie des fonctions [1847, p. 388], trouve sa raison dans ce que «*les nombres et l'étendue figurée manifestent à leur manière les mêmes idées fondamentales dont le type est dans la théorie générale de l'ordre*» [1847, p. 397]. Les connaissances mathématiques constituent ainsi un domaine intégralement placé sous la juridiction de l'idée d'ordre en général, qui trouve son expression la plus nette dans cette méthode généralisée de combinaison de symboles que constitue l'algèbre, méthode qui est «*en connexion avec tout le système immuable des vérités mathématiques*» [1847, p. 67].

La théorie de l'ordre jouit même d'un degré d'abstraction et de généralité lui permettant d'excéder le champ des mathématiques pour former également la base de la logique, et apparaître alors comme la charpente soutenant l'édifice des sciences formelles. Ayant défini ce qu'il appelle les «*idées fondamentales des mathématiques*», celles sur lesquelles repose tout le système des sciences mathématiques, comme celles de nombre, d'angle, de ligne, etc., Cournot précise qu'elles ne correspondent qu'à un premier niveau de généralité, car «*plusieurs de ces idées, malgré leur haut degré de généralité et d'abstraction, ne sont que des formes particulières, et en quelque sorte des espèces concrètes d'idées encore plus abstraites et plus générales*» [1851, p. 193]. Relèvent de ce second niveau de généralité les idées de combinaison, d'ordre, de symétrie, d'égalité, d'inclusion, d'exclusion, etc., autrement dit celles qui composent la théorie de l'ordre en général, qui rend raison des abstractions de niveau inférieur

[1851, § 154 ; également § 143, p. 181–182][6]. Ce que vise alors Cournot en insistant sur l'abstraction et la généralité des abstractions de second degré, c'est finalement leur indépendance à l'égard de tout contenu particulier et de toute détermination empirique, autrement dit leur caractère formel. De plus, les idées d'ordre, de combinaison, d'inclusion, etc. désignent des relations entre éléments ou groupes d'éléments. Les abstractions constitutives de la théorie de l'ordre se définissent donc par leur double caractère à la fois formel et relationnel, formant ainsi un ensemble d'instruments de combinaisons de symboles dépourvus de contenu particulier et empirique.

Est-ce à dire que, ce faisant, Cournot ait, comme le prétend F. Mentré, «*nettement exprimé le principe de la logique moderne*» [1908, p. IV] ? S'il est vrai que Cournot estime que la théorie du syllogisme peut être considérée comme une application de la syntactique [1843, p. 7–8] et insiste sur son «*analogie fort étroite*» avec «*les règles élémentaires de l'algèbre*» [1851, p. 302], montrant que la relation d'inclusion peut s'appliquer indifféremment à des prémisses ou à des grandeurs homogènes, il limite l'analyse des relations entre logique et algèbre à la syllogistique, dont il juge la portée fort restreinte, et s'en tient à des indications de principe sans chercher à en développer les conséquences.

L'orientation de la réflexion de Cournot

Peut-on voir de même en Cournot, ainsi que le pense Jean de La Harpe, «*le précurseur le plus autorisé qui soit des théories modernes des groupes et des ensembles*» [1937, p. 115 ; et déjà 1936, p. 128] ? Cournot aperçoit certes des perspectives, formule des hypothèses qui pourront se révéler fécondes, mais il faut reconnaître qu'il ne les met pas véritablement en chantier. Ainsi, cette syntactique abstraite qu'est la théorie de l'ordre en général ne reçoit pas de contenu mathématique déterminé et précisément assignable. Conjointement, si Cournot insiste sur la pureté du calcul des probabilités, il ne va pas jusqu'à le constituer en système axiomatisé, comme ce sera le cas au début du XX^e^ siècle. Plutôt que de lui attribuer une paternité fictive, il nous semble plus juste d'affirmer que l'orientation de la pensée de Cournot annonce, en

[6] L'idée de nombre, par exemple, suppose celle de succession ordonnée, ou encore la distinction entre courbes rentrantes (comme le cercle) et courbes non rentrantes (comme la ligne) exprime la distinction entre un ordre circulaire et un ordre linéaire [1851, p. 287–288].

quelque sorte, une voie qui sera ultérieurement explorée, mais par d'autres que lui. C'est en ce sens qu'il faut comprendre la formule de Bernard Bru indiquant que la théorie rationnelle des probabilités développée par Cournot «*anticipe les présentations ensemblistes de la probabilité qui, commencées avec Bohlmann et Borel dans les premières années de ce siècle, aboutiront à l'axiomatique de Kolmogorov*» [1981, p. 19].

Si Cournot ne s'engage pas dans cette voie, ce n'est pas seulement que les instruments théoriques nécessaires lui font défaut, c'est aussi que ses préoccupations ne le poussent pas vers un effort d'axiomatisation de la théorie mathématique. Assigner au calcul des probabilités le statut d'une théorie mathématique pure, c'est d'abord pour Cournot se donner les moyens de définir le concept de probabilité indépendamment de toute considération subjective, portant sur notre degré d'ignorance ou de connaissance, grâce à quoi il est susceptible de désigner non pas la mesure de notre incertitude, mais la possibilité de réalisation d'un événement[7]. Autrement dit, définir le concept de probabilité à l'intérieur du champ mathématique, c'est rendre possible ensuite son application au réel, non pas médiatement, par l'intermédiaire de notre représentation et comme un instrument forgé artificiellement dans ce but, mais directement, la probabilité étant prise comme mesure de la chance de l'événement. En effet, ainsi qu'on l'a vu précédemment, la réflexion de Cournot vise principalement à mesurer le sens et la portée du pouvoir d'intelligibilité du réel dont dispose le calcul des probabilités, afin de trancher entre ses applications légitimes et illégitimes d'une part, celles où la probabilité est prise objectivement ou seulement subjectivement de l'autre[8].

S'il s'agissait seulement de savoir si le calcul des probabilités, et plus généralement les mathématiques, trouvent à s'appliquer dans l'ordre des phénomènes, il serait aisé de produire des exemples, aussi nombreux que variés, permettant de l'attester. Mais un tel constat demeurerait insuffisant pour Cournot, car dépourvu de tout pouvoir explicatif et

---

[7] La distinction des termes de probabilité et de chance en ce sens est présentée explicitement avant Cournot par Poisson [1837, p. 31], quoiqu'il ne la respecte pas toujours dans son œuvre.

[8] Par l'attention qu'il porte à la richesse des applications des mathématiques, Cournot s'inscrit dans l'un des courants de son époque, marqué, comme l'a montré Claude Ménard [1978, p. 96–103 et 183–184] par le poids de l'École polytechnique, et préoccupé des applications des mathématiques à la réalité physique et sociale.

indifférent au sens de cette aptitude des mathématiques à ordonner le réel. Or, c'est justement cette double question qu'il convient de poser. Concernant le calcul des probabilités, il convient déjà, pour Cournot, d'établir que les résultats auquel il conduit peuvent s'appliquer au réel lui-même et non pas seulement à la connaissance que nous en avons. Et du même coup, c'est ensuite, plus généralement, la possibilité même pour les mathématiques de se rapporter au réel qui demande à être éclaircie.

3. PROBABILITÉS OBJECTIVES ET PROBABILITÉS SUBJECTIVES

La question de la valeur objective du calcul des probabilités

Ayant fondé le calcul des probabilités sur la combinatoire, Cournot a défini le concept de probabilité sans y incorporer de considérations d'ordre subjectif, liées à l'étendue de nos connaissances. La probabilité, cependant, n'a pas pour autant reçu une valeur objective. Elle est sans doute apte à mesurer la possibilité de réalisation d'un événement futur, mais pourrait ne remplir cette fonction qu'en s'appliquant à notre représentation, non aux événements eux-mêmes. Il est vrai qu'en établissant une analogie entre la présentation combinatoire de la probabilité et la méthode des infiniment petits [1843, § 14, note], Cournot prépare sa correspondance avec le réel, puisque, dans les deux cas, on recourt «*au procédé direct, pris dans la nature des choses*», et non à «*un procédé artificiel, accommodé à notre organisation intellectuelle*» [1843, p. 27]. Et, par sa relation au calcul intégral, le calcul des probabilités peut ensuite excéder les limites de la combinatoire[9], pour s'appliquer encore lorsque les combinaisons sont en nombre infini, s'accordant alors à la nature de la réalité physique où «*la continuité est la règle, le saut ou la discontinuité l'exception*» [1843, p. 27]. L'existence d'une adéquation du calcul des probabilités à l'ordre réel, si, toutefois, elle est possible, doit cependant être théoriquement établie.

Le calcul des probabilités ne peut venir mesurer directement la possibilité des événements, et non pas seulement notre représentation, que si l'on accepte de donner un sens objectif à cette possibilité, de transporter en quelque sorte le probable dans le réel, c'est-à-dire d'admettre

[9] La probabilité se définissant alors comme «*rapport de l'étendue des chances favorables à un événement, à l'étendue totale des chances*» [1843, p. 29], ce qui constitue, selon O.B. Sheynin [1976, p. 153] la première définition explicite de la probabilité géométrique.

que tous les événements ne sont pas les produits nécessaires d'un ensemble de lois, mais peuvent intégrer une part de fortuité. Autrement dit, il convient d'établir la réalité objective du hasard. Il faut donc rompre avec la conception dominante au XVIII^e siècle qui associe une interprétation subjectiviste du probable à une représentation du monde régi par l'emprise de la nécessité, réduisant le hasard à une illusion due à notre ignorance, conception qu'on peut lire par exemple chez Montmort [1708/1713, p. XIII][10], Voltaire [1764, art. « Destin »[11], art. « Atomes »[12]] ou d'Holbach [1770/1990, t. I, p. 98][13], et qu'on retrouve notamment chez Laplace pour qui « *le hasard n'a* [...] *aucune réalité en lui-même : ce n'est qu'un terme propre à désigner notre ignorance sur la manière dont les différentes parties d'un phénomène se coordonnent entre elles et avec le reste de la Nature* » [1776/1986, p. 222]. La définition cournotienne du hasard comme rencontre accidentelle de séries causales indépendantes [1843, p. 55] répond à cet objectif, en plaçant la fortuité dans le réel, donc en lui conférant une structure qui s'accorde par avance avec le calcul des probabilités.

Le chapitre IV de l'*Exposition* ayant, dans un premier temps, établi la possibilité pour la probabilité de recevoir un sens objectif au niveau du réel, grâce à l'affirmation de réalité objective du hasard, il reste à assurer cette possibilité du côté de l'activité de connaissance, c'est-à-dire du concept de probabilité. C'est le rôle que remplit le principe de l'impossibilité physique [1843, p. 57–58], préfiguration[14] de ce que

[10] « *Toutes choses étant réglées selon des lois certaines, dont le plus souvent l'ordre ne nous est pas connu, celles-là dépendent du hasard dont la cause naturelle nous est cachée.* »

[11] « *Un paysan croit qu'il a grêlé par hasard sur son champ ; mais le philosophe sait qu'il n'y a point de hasard et qu'il était impossible, dans la constitution de ce monde, qu'il ne grêlat pas ce jour-là en cet endroit.* »

[12] « *Ce que nous appelons* hasard *n'est et ne peut être que la cause ignorée d'un effet connu.* »

[13] « *nous attribuons au hasard tous les effets dont nous ne voyons point la liaison avec leurs causes. Ainsi, nous nous servons du mot* hasard *pour couvrir notre ignorance de la cause naturelle qui produit les effets que nous voyons par des moyens dont nous n'avons point d'idées, ou qui agit d'une manière dans laquelle nous ne voyons point d'ordre ou de système suivi d'actions semblables aux nôtres.* »

[14] Il faut toutefois noter que le principe des probabilités négligeables connu sous le nom de « *principe de Cournot* », posant la rareté ou l'inexistence des événements de très petites probabilités, ne coïncide pas exactement avec le principe de l'impossibilité

la tradition probabiliste nommera le «principe de Cournot» (*cf.* par exemple Fréchet [1951, p. 6/1955, p. 209] ou Anderson [1963, p. 106]), posant l'impossibilité de réalisation de l'événement de probabilité infiniment petite dans les conditions de l'expérience, soit en un nombre fini d'épreuves. Couplé avec le théorème de Bernoulli énonçant la convergence probable des fréquences vers les probabilités correspondantes, ce principe permet d'affirmer qu'à la limite, pour un nombre infini d'épreuves, «*on a une probabilité infiniment petite, où il devient physiquement impossible que les deux rapports diffèrent l'un de l'autre d'une fraction donnée, si petite qu'elle soit*» [1843, p. 59], et ainsi d'attester que la probabilité mathématique est asymptotiquement la mesure de la possibilité physique de l'événement.

Au terme de ce développement, la probabilité a reçu un double sens objectif, celui, d'abord, d'un rapport de chances, comprises comme combinaisons de causes indépendantes concourant à la production d'un événement, celui, ensuite, d'une limite de fréquences mesurant la possibilité physique de l'événement. Dans le premier cas, la probabilité peut être déterminée de manière *a priori*, dans le second, la détermination des fréquences exigeant l'observation d'une série d'épreuves, la probabilité ne peut être établie qu'*a posteriori*. Il reste à montrer à quelles conditions les applications de la probabilité peuvent effectivement être prises objectivement, ou, au contraire, ne disposent que d'un sens subjectif, pour se donner les moyens de dissiper les équivoques qui entachent la «doctrine des probabilités *a posteriori*»[15].

La double valeur de la probabilité

Au chapitre VIII de l'*Exposition* [1843, p. 108], Cournot reprend de Lacroix [1816/1822, p. 147] la règle formulée par Laplace [1774, p. 29], selon laquelle, pour un nombre donné de causes ou d'hypothèses favorables à la réalisation d'un événement, «*les probabilités des causes (ou des hypothèses) sont proportionnelles aux probabilités que ces causes donnent*

physique tel qu'il est formulé par Cournot.

[15] Ce qui précède permet d'avancer qu'en toute rigueur, on ne peut réduire l'œuvre probabiliste de Cournot à «*l'avènement d'une nouvelle interprétation de la probabilité mathématique exclusivement en termes de fréquences objectives*», ainsi que l'affirme Lorraine Daston [1988, p. 224], et déjà avant elle, et parmi d'autres, J. Le Roux [1906, p. 1–2], J. de La Harpe [1936, p. 103] ou Montessus de Ballore [1907, p. 174].

pour les événements observés», et montre que la probabilité *a posteriori* peut valoir objectivement à la double condition que l'on ait dénombré l'ensemble des causes susceptibles de produire l'événement et que l'on connaisse sa fortuité, condition de l'équiprobabilité des cas. A partir de là, il peut montrer [1843, §§ 91–93] que, si l'on suppose, comme le faisait Bayes [1764, p. 385/1988, p. 44–45], les combinaisons possibles en nombre infini, les résultats du calcul valent objectivement au cas où la chance que l'événement ait telle cause déterminée est effectivement susceptible de prendre *a priori* toutes les valeurs comprises entre 0 et 1, ce qui suppose que l'on connaisse les conditions de réalisation de l'événement. En revanche, et «*dans les applications qu'on en fait d'ordinaire*» [1843, p. 111], le recours à la règle de Bayes ne peut conduire qu'à une probabilité prise subjectivement, ce qui signifie que la probabilité calculée ne peut mesurer la possibilité effective de l'événement, mais seulement l'estimation que nous en faisons, compte tenu de la limitation de nos connaissances.

En définitive, la probabilité n'est que subjective, quand «*dans l'état d'imperfection de nos connaissances, nous n'avons aucune raison de supposer qu'une combinaison arrive plutôt qu'une autre, quoiqu'en réalité ces combinaisons soient autant d'événements qui peuvent avoir des probabilités mathématiques ou des possibilités inégales*» [1843, p. 287–288]. Et, pour Cournot, son usage demeure alors limité, se réduisant à régler les conditions d'un pari ou d'un marché aléatoire. Il devient illusoire, lorsqu'on postule l'équiprobabilité supposée au niveau du réel, en prétendant que la probabilité ainsi calculée permet de nous renseigner sur les conditions effectives de l'événement. On dispose alors de critères permettant de faire le départ entre les applications légitimes et illégitimes du calcul des probabilités, sous la condition que, déjà, l'objet auquel on l'applique soit susceptible d'une estimation numérique. Or, tel n'est pas le cas de notre connaissance ou de nos jugements. Certes, s'agissant de l'organisation judiciaire, il est possible de fixer les conditions mathématiques de composition du jury les plus favorables à l'équité, ce qui fait l'objet des chapitres XV et XVI de l'*Exposition*, mais, pour Cournot, le calcul des probabilités ne nous est d'aucun secours dès qu'il s'agit de nous prononcer sur la validité d'un jugement, qu'il soit ou non judiciaire. Plus généralement, la détermination de la valeur objective de nos connaissances ne peut faire l'objet d'un traitement mathématique ; elle relève de ces «probabilités philosophiques», à la fois subjectives et non-numériques, qui guident la réflexion philosophique de Cournot. On peut ici noter que la distinction rigoureuse des probabilités mathématiques et des probabilités philosophiques, en délimitant précisément la sphère du calcul des probabilités, contribue à lui assurer, de l'extérieur cette fois, son statut de théorie mathématique pure.

Toutefois, les probabilités philosophiques, si elles sont d'une autre nature que les probabilités mathématiques, doivent être mobilisées lorsqu'il s'agit de déterminer leur rapport aux phénomènes, puisqu'elles visent précisément à mesurer le degré de conformité de nos connaissances au réel, et qu'en dernier ressort, tout jugement prenant pour objet la réalité extérieure ne peut être que probable [1843, p. 280–281]. Si la probabilité peut avoir valeur objective, et si le réel offre une structure adéquate à son application en ce sens, il reste à comprendre quelle est la nature de leur relation. La question déborde ici le cadre du calcul des probabilités, pour concerner, plus largement, le statut des objets mathématiques, et appelle un traitement philosophique, puisqu'il appartient à la philosophie des mathématiques, sous la forme des probabilités philosophiques, d'éclairer leur possible adéquation au réel [1847, § 145].

4. LE RAPPORT DES MATHÉMATIQUES AU RÉEL

Toute la difficulté est de comprendre comment des concepts purs, élaborés par une activité de la raison sans référence au domaine de l'expérience peuvent ensuite trouver à s'appliquer au réel, et ceci d'autant plus qu'aux yeux de Cournot, les idées fondamentales des mathématiques ne sont pas des instruments opératoires construits artificiellement, mais, dit-il, subsistent «*indépendamment de la connaissance toujours imparfaite que nous en avons, des moyens qui nous ont servi pour en acquérir la connaissance, et des applications que nous en savons faire*» [1847, p. 67]. Tel est justement le cas de l'idée de combinaison, constituant l'une de ces «*idées abstraites que l'esprit humain ne crée pas arbitrairement, mais que la nature même des choses lui suggère*» [1847, p. 7]. Pour comprendre comment les idées mathématiques peuvent se rapporter au réel, il est nécessaire d'expliquer en quel sens Cournot peut affirmer que «*l'objet des mathématiques existe hors de l'esprit humain, et indépendamment des lois qui gouvernent notre intelligence*» [1847, p. 369 ; 1851, p. 195].

A vrai dire, cette indépendance n'est pas complète, les objets mathématiques ne constituant pas, à cet égard, un ensemble homogène. Il convient, en effet, selon Cournot, de distinguer parmi les idées mathématiques deux formes d'abstraction, les abstractions rationnelles et les abstractions logiques. Cette distinction est elle-même l'application aux idées abstraites de la distinction entre l'ordre logique et l'ordre rationnel.

Ordre logique et ordre rationnel

L'ordre rationnel est dit tel au double sens où, à la fois, il est l'œuvre de la raison productrice d'ordre dans le système de nos connaissances, et celui grâce auquel les choses rendent raison les unes des autres. Il se distingue par là d'un ordre qui n'est que logique, constituant une construction artificielle, appropriée à la nature de notre esprit, c'est-à-dire à la nécessité de recourir au langage pour construire et manifester la pensée, et non à la nature des choses [1861, § 42].

Lorsque Cournot affirme que l'ordre logique est assujetti aux conditions du langage, il ne prétend pas dénoncer le langage comme voué à trahir la pensée, ni l'ordre logique comme un prisme déformant. Mais il entend définir l'ordre logique comme celui qui s'accommode à la double propriété de linéarité et de discontinuité du discours. En tant qu'il reproduit la linéarité du discours, l'ordre logique, par souci de clarté et de rigueur démonstrative, s'efforce de construire la théorie sous forme d'une chaîne déductive irréprochable logiquement, mais masquant la multiplicité des relations qu'entretiennent les éléments ainsi enchaînés. En tant qu'il se conforme à la discontinuité du langage, il cherche à marquer nettement les distinctions, à proposer des classifications tranchées, mais gomme alors les transitions insensibles qui font passer continûment d'un élément à l'autre. Positivement, l'ordre logique se définit par la simplicité principielle qu'il introduit dans le système de nos connaissances, c'est-à-dire par la réduction du nombre des axiomes et des chaînons démonstratifs [1851, p. 298].

En revanche, l'ordre rationnel ne peut faire l'objet d'une détermination quantitative, et se définit par sa fonction explicative, c'est-à-dire par son aptitude à distinguer l'essentiel de l'accidentel, le déterminant du déterminé et du subordonné, pour mieux mettre à jour les relations, non pas seulement de causalité, mais plutôt de subordination rationnelle.

C'est, cependant, au prix d'une plus grande complexité, qui n'est profitable que si, préalablement, la disposition des connaissances, selon l'ordre logique, en a permis l'assimilation. Par exemple, ayant rappelé que l'équation de la droite passant par l'origine O d'un repère orthonormé est

$$y = ax, \tag{1}$$

et que l'équation du cercle de rayon r et de centre O est

$$x^2 + y^2 = r^2, \tag{2}$$

Cournot montre [1847, §§ 73–77], à l'aide des relations trigonométriques, qu'à partir de l'équation de la droite (1), il est possible d'obtenir celle du cercle (2), puisque l'équation de la droite peut se mettre sous la forme $y = x \operatorname{tg} \alpha$, où α désigne l'angle que forme la droite avec l'axe des abscisses. Or, puisque l'équation (1) est l'expression algébrique du théorème de Thalès, et l'équation (2) celle du théorème de Pythagore, on peut dire que le théorème de Thalès contient la raison du théorème de Pythagore [1847, p. 185–186]. Certes, reconnaît Cournot, du point de vue de la clarté didactique, les démonstrations des théorèmes de Pythagore et de Thalès à partir de la comparaison des aires, telles que les proposent Euclide et Legendre, sont préférables. Mais, dès que l'on cherche à mettre à jour les relations de subordination par lesquelles les faits rendent raison les uns des autres, il faut inverser l'ordre, la preuve des relations arithmétiques entre les longueurs ne dépendant pas de la théorie de la mesure des aires.

A l'ordre logique, ordre d'exposition, s'oppose donc l'ordre rationnel reproduisant, quant à lui, l'ordre d'engendrement de la vérité, en tant qu'il fait voir la raison des choses. De même, lorsque l'opération de connaissance sépare artificiellement dans l'objet des propriétés afin de mieux les étudier à part, elle produit une abstraction logique ou artificielle [1851, p. 188]. En revanche, si l'on cherche à restituer les articulations effectives de l'objet, l'abstraction isolant des éléments effectivement distincts s'accorde à la nature de l'objet, et permet alors de décrire l'ordre rationnel. Elle constitue à ce titre une abstraction rationnelle.

Plus précisément, si l'abstraction rationnelle n'est pas une création artificielle, c'est parce qu'elle met à jour des rapports généraux dont les propriétés des phénomènes sont autant d'expressions sensibles, et dont ils permettent de rendre raison. Les abstractions rationnelles correspondent, écrit Cournot, à «*des faits généraux, à des lois supérieures auxquelles sont subordonnées toutes les propriétés particulières par lesquelles les objets extérieurs nous deviennent sensibles*» [1851, p. 188]. De ce point de vue, elles constituent des abstractions davantage par leur généralité et leur pureté que par leur caractère analytique.

Cette distinction, cependant, ne doit pas alors être pensée sous la forme d'une opposition rigide et exclusive. Dans la réalisation effective de l'activité de connaissance, on assiste plutôt à un concours des deux modes de connaissance, où le respect de l'ordre logique permet à l'intelligence d'accéder plus aisément à la maîtrise des objets qu'elle interroge, dont la relation à la réalité phénoménale ne peut être mesurée que par la recherche de l'ordre rationnel.

«*Presque toujours,* écrit Cournot*, par suite des efforts continuels de l'esprit pour arriver à l'intelligence des phénomènes, il y a mélange des deux sortes d'abstraction et transition continue de l'une à l'autre : car les liens de solidarité, de parenté, d'harmonie, d'unité que nous tâchons de saisir par l'abstraction rationnelle, peuvent être plus ou moins tendus ou relâchés, tandis que notre esprit éprouve pour tous les objets de la nature le même besoin de classification, de régularité et de méthode*» [1851, p. 241].

La correspondance des mathématiques à l'ordre réel

C'est précisément au groupe des abstractions rationnelles qu'appartiennent les «*idées fondamentales des mathématiques*» sur lesquelles repose tout le système des mathématiques, qui sont donc des idées «*déterminées par la nature des choses, par la manière d'être des choses de la connaissance, et nullement par la constitution de l'esprit ou à cause du point de vue d'où l'esprit les envisage*» [1851, p. 190]. Cela ne signifie pas, précise Cournot, que l'ensemble des mathématiques soit intégralement composé d'abstractions rationnelles. Ainsi, tandis que l'idée de nombre constitue une abstraction rationnelle, son application à la mesure ou à l'expression des grandeurs continues, n'est pas fondée sur la nature de ces grandeurs, mais constitue au contraire un artifice par lequel nous cherchons à maîtriser mathématiquement la continuité. Ou encore, tandis que la méthode leibnizienne des infiniment petits relève, selon Cournot, de l'ordre rationnel, la méthode des limites se conforme, elle, à l'ordre logique, ce qui n'interdit pas, dans la pratique, un concours des deux méthodes

[1841, § 49]. C'est pourquoi Cournot prend soin de préciser que sa conception ne doit pas être confondue avec un pythagorisme :

«*Lorsque nous étudions les propriétés des nombres, nous croyons, et avec fondement, étudier certains rapports généraux entre les choses, certaines lois ou conditions générales des phénomènes : ce qui n'implique pas nécessairement que toutes les propriétés des nombres jouent un rôle dans l'explication des phénomènes, ni à plus forte raison que toutes les circonstances des phénomènes ont leur raison suprême dans les propriétés des nombres, conformément à cette doctrine mystérieuse qui s'est transmise de Pythagore à Kepler*» [1851, p. 192].

Ce n'est donc pas essentiellement à leur pouvoir de quantification que les mathématiques doivent leur pouvoir de rendre compte de l'ordre réel.

Cette précision nous met alors sur la voie de la solution à la question, puisque, nous l'avons vu, les idées fondamentales des mathématiques se définissent par leur caractère à la fois formel et relationnel. En conséquence, si celles-ci constituent des abstractions rationnelles, c'est en ce qu'elles désignent des rapports généraux qui correspondent formellement aux relations que les phénomènes permettent d'observer, et dont ils rendent alors possible l'intelligibilité, *id est* dont ils permettent de rendre raison. C'est donc, nous semble-t-il, au double titre de leur caractère à la fois formel et relationnel que les idées mathématiques fondamentales constituent des abstractions rationnelles. En d'autres termes, elles définissent un ensemble de rapports abstraits qui, à la fois, permettent d'effectuer, au niveau purement intelligible, une série d'opérations sur les symboles qu'ils relient, et trouvent, au niveau du réel, leur réalisation dans les relations qu'entretiennent les phénomènes entre eux.

Par conséquent, lorsque Cournot affirme que l'objet des mathématiques existe hors de l'esprit humain et indépendamment de sa constitution, il n'est pas question pour lui de dire, ni que le mathématicien lit directement dans le réel les rapports mathématiques qu'il établit, puisqu'au contraire il les construit par le seul recours à la raison, grâce à une «*synthèse* a priori» [1851, p. 315; 1875, p. 161], ni que, mystérieusement, le réel est intégralement réductible aux idées mathématiques. Mais cela signifie que les idées mathématiques fondamentales, dans la mesure où elles désignent formellement des rapports généraux d'ordre, *correspondent* aux relations générales liant les phénomènes du réel, c'est-à-dire correspondent aux lois qui en fournissent l'intelligibilité. Si Cournot affirme que «*les idées qui sont la base de l'édifice des mathématiques pures ont leurs types dans la nature des choses et ne sont pas des fictions de notre esprit*», c'est, en effet, à raison des «*corrélations qui s'observent entre les vérités abstraites des mathématiques et les lois des phénomènes naturels : les unes contenant l'explication ou la raison des autres*» [1851, p. 194].

Plus précisément, il s'agit d'une correspondance fonctionnelle et symbolique, par laquelle les concepts mathématiques expriment symboliquement les relations phénoménales dont le réel est tissé, et telle que les opérations qu'ils permettent d'effectuer reproduisent en quelque sorte la façon dont les phénomènes s'engendrent et s'enchaînent les uns les autres. C'est ce qu'on peut lire dans la manière dont Cournot montre que la méthode des infiniment petits est conforme à l'ordre réel. Reprenant ce qu'il avait déjà exprimé dans le *Traité élémentaire de la théorie des fonctions*, Cournot précise dans l'*Essai* que «*la notion abstraite et purement intelligible de l'élément infinitésimal, loin d'être une abstraction d'origine artificielle, accommodée à l'organisation de l'esprit humain, à notre manière de concevoir et d'imaginer les choses y est plutôt opposée, tandis qu'elle* s'adapte *directement au mode de génération des phénomènes naturels et à* l'expression *de la loi de continuité qui les régit*»[16] [1851, p. 248]. De même, dans le *Traité*, venant de préciser que la vitesse instantanée du refroidissement d'un corps est exprimée par la limite vers laquelle tend le rapport entre la perte de température et l'intervalle de temps pendant lequel s'opère ce refroidissement à mesure que cet intervalle est diminué, Cournot précise que ceci revient à mesurer la vitesse de refroidissement du corps par le rapport entre la perte de température et l'intervalle de temps «*quand ces deux grandeurs deviennent* infiniment petites». Or, ajoute-t-il, «*on aurait tort de ne voir dans cette seconde manière de s'exprimer qu'une abréviation convenue, une forme de langage, apparemment plus commode puisqu'elle est plus usitée. Elle n'est effectivement plus commode que parce qu'elle est l'*expression[17] *naturelle du mode de génération ou d'extinction des grandeurs qui croissent ou décroissent par éléments plus petits que toute grandeur finie*» [1861, p. 58–59]. Ce qui revient à dire que le rapport entre les variations infinitésimales

[16] Souligné par nous.

[17] *Idem.*

de chaleur et de temps est «la vraie raison» du rapport liant ces grandeurs lorsqu'elles ont acquis des valeurs finies.

Mais, si l'on comprend ainsi qu'il puisse y avoir correspondance entre les mathématiques et l'ordre réel, on comprend moins la thèse de Cournot selon laquelle l'objet des mathématiques existe hors de l'esprit humain.

L'indépendance de l'objet des mathématiques à l'égard de l'esprit humain

On l'a vu, il ne s'agit pas pour Cournot d'affirmer que cet objet aurait une origine sensible. Il ne s'agit pas plus pour lui de s'engager dans une métaphysique d'inspiration platonicienne. L'indépendance dont il est ici question concerne le caractère conventionnel ou arbitraire de nos constructions intellectuelles. Autrement dit, Cournot entend insister sur le fait qu'il ne dépend pas de la volonté du mathématicien de donner telle ou telle forme à ses objets. Ceux-ci, au contraire, s'imposent à lui à mesure qu'il les produit, à raison de leur contenu propre, c'est-à-dire des propriétés qui le constituent.

En d'autres termes, le réalisme mathématique de Cournot n'a rien d'un empirisme ; il signifie que la raison, dans et par son travail de synthèse *a priori*, met à jour des rapports qui se révèlent *après coup* conformes à l'ordre réel[18]. C'est ce que dit clairement Cournot lorsqu'il reproche à Stuart Mill de vouloir fonder les mathématiques sur l'expérience, tandis qu'elles sont au contraire des «sciences de construction rationnelle» :

«*L'esprit découvre les vérités mathématiques par ses propres forces, les conçoit comme des vérités nécessaires : après quoi, et en fait bien plus tard, l'observateur prouve que les vérités ainsi découvertes expliquent et gouvernent effectivement les faits naturels*» [1872, p. 415–416].

C'est en ce sens, nous semble-t-il, qu'il faut comprendre la formule de Cournot selon laquelle les mathématiques ne se réduisent pas à une construction artificielle, mais ont pour objet des faits généraux que l'esprit «*découvre, démêle avec plus ou moins d'adresse et de bonheur, mais qu'il crée si peu*» [1851, p. 195].

On comprend ainsi qu'il puisse affirmer l'indépendance des idées

[18] C'est d'ailleurs, aux yeux de Cournot, ce que révèle l'histoire, puisqu'il faut attendre le XVII^{e} siècle pour que «*les sciences abstraites, longtemps cultivées pour elles-mêmes et pour le charme que quelques esprits y trouvent* [...] *donnent tout à coup la clef de ce qu'il y a de plus fondamental, de plus simple* [...] *dans l'ordre de l'univers*» [1872, p. 173].

mathématiques fondamentales à l'égard de la constitution de notre intelligence, tout en reconnaissant que les idées mathématiques sont de pures constructions rationnelles. Cette extériorité, en effet, signifie seulement que le contenu de ces idées ne tient pas à ce qui fait la singularité de notre instrument de connaissance, mais, dirait Cournot, à la «*nature des choses*», c'est-à-dire exclusivement aux conséquences qu'implique ce contenu.

On peut trouver confirmation de cette analyse dans la façon dont il interprète la complexité du système des mathématiques. Celui-ci oppose à l'effort de classification et de division simple et régulière de ses diverses branches une résistance que l'esprit humain ne rencontre pas dans son travail de mise en ordre, lorsqu'il n'est pas contraint de se plier aux exigences d'un objet qui lui est extérieur.

«*Les mathématiques,* écrit Cournot*, sciences exactes par excellence, sont du nombre de celles où il y a le plus de vague et d'indécision dans la classification des parties, où la plupart des termes qui expriment les principales divisions se prennent, tantôt dans un sens plus large, tantôt dans un sens plus rétréci, selon le contexte du discours et les vues propres à chaque auteur, sans qu'on soit parvenu à en fixer nettement et rigoureusement l'acception dans une langue commune*» [1851, p. 194–195 ; et déjà 1847, p. 368–369].

Témoigne de cet «*enchevêtrement de rapports, rebelle à nos procédés logiques de définition, de division et de classification*» [1851, p. 195], la difficulté à enserrer l'algèbre dans une définition simple et concise [1847, p. 59 ; 1851, p. 282], ou à organiser les relations qu'entretient la théorie de l'ordre avec les autres branches du système mathématique[19]. Cette complication, qui rend nécessairement imparfaite toute représentation de la structure des mathématiques sous forme de tableau synoptique[20], manifeste l'indépendance des objets mathématiques à l'égard de la constitution

19 «*La théorie des nombres relève de celle de l'ordre et des combinaisons ; et, sous un autre aspect, le calcul des combinaisons est une application de l'arithmétique. Des faits d'arithmétique ont leur raison dans certaines lois de l'algèbre, et des faits d'algèbre ont leur raison dans certaines propriétés des nombres*» [1847, p. 370–371].

20 «*L'espace, avec ses trois dimensions, ne suffirait pas pour nous donner une image sensible des rapports très-multipliés, ou même infiniment multipliés, qu'ont entre elles les diverses parties d'un système, objet de l'intuition intellectuelle ; et ceci s'observe notamment pour le système des mathématiques*» [1847, p. 370].

particulière de notre instrument de connaissance, c'est-à-dire vis-à-vis de son assujettissement aux exigences du discours. Il est en effet «*contre la nature des choses que nous puissions définir, c'est-à-dire caractériser par des signes discontinus, tels que les termes du langage, des objets de la pensée qui se modifient et se transforment sans discontinuité, ou par gradations insensibles*» [1847, p. 67]. Or, c'est justement cette continuité que Cournot aperçoit dans le développement du système des mathématiques [1847, p. 369], et particulièrement dans celui de l'algèbre, l'amenant à passer par transitions insensibles du statut de langue à celui de science, c'est-à-dire à effectuer ce mouvement par lequel ce qui est d'abord un système de notation conventionnel se déploie en théorie de l'ordre, mettant à jour des lois générales de combinaison de symboles[21].

En insistant sur la continuité qui caractérise les modifications que subit le système des mathématiques, Cournot entend indiquer, nous semble-t-il, que le développement des sciences mathématiques, pour autant qu'il corresponde à l'ordre rationnel, ne s'effectue pas par adjonction ou juxtaposition d'éléments qui viendraient s'assembler de l'extérieur pour former système, mais plutôt par le développement interne du contenu d'une idée qui se prolonge en révélant la richesse qui est la sienne. Ainsi comprise, l'analyse de Cournot vise à penser l'auto-développement des idées mathématiques fondamentales, c'est-à-dire la nécessité avec laquelle leur contenu, dans sa richesse et sa complexité, s'impose à la raison et résiste par là aux efforts de simplification du penseur. Et c'est alors à la fois cette luxuriance du contenu des concepts mathématiques et sa nécessité interne que Cournot cherche à signifier en affirmant l'indépendance des idées mathématiques fondamentales à l'égard de la constitution particulière de l'esprit humain.

[21] Si l'algèbre est bien une langue, elle ne se réduit pas à un instrument de notations extérieur à ce qu'il permet de penser, car, précise Cournot , «*il n'en est pas de l'algèbre comme de ces notations chimiques qui ne rendent que ce qu'on y a mis avec préméditation. Tout au contraire il n'y a rien de plus épineux pour l'algébriste que d'accepter, puis de comprendre, puis d'expliquer aux autres les conséquences auxquelles la langue de l'algèbre le conduit malgré lui et comme de surprise en surprise : cette langue qu'il ne façonne pas à son gré, qui s'organise et se développe par sa vertu propre, étant encore plus un champ de découvertes qu'un instrument de découvertes*» [1872, p. 97]. Et, conclut-il, «*le signe nous est indispensable pour fixer et contempler la vérité intelligible, qui pourtant subsiste indépendamment du signe, comme l'étoile télescopique existe indépendamment du télescope qui nous la rend visible*», *ibid.*

CONCLUSION

Au terme de cette analyse, il nous semble possible d'avancer que si, d'un point de vue strictement mathématique, l'œuvre de Cournot n'engendre pas une transformation profonde du calcul des probabilités, la réflexion qu'il mène sur ses fondements met au clair un ensemble de difficultés qu'il hérite de la tradition et qu'il s'emploie à surmonter. L'*Exposition* se propose moins d'innover par l'enrichissement de la technique probabiliste que de réformer l'interprétation des résultats que le calcul rend possible. L'ouvrage occupe, en ce sens, une place marquante dans l'histoire du calcul des probabilités, qu'on ne peut isoler de l'histoire de la philosophie des probabilités. Il est vrai que cette place n'a pas toujours été reconnue[22]. De fait, l'ouvrage quoique fréquemment cité, fut peu lu[23]. Cela tient, pour une bonne part, à sa dualité de nature, à la fois analyse mathématique et réflexion philosophique, dualité propice au découragement aussi bien des mathématiciens que des philosophes. Mais, ce qui peut sembler une faiblesse est aussi ce qui fait l'intérêt de l'ouvrage et lui confère une richesse masquée d'abord, mais significative pour peu qu'on s'efforce d'en restituer les enjeux et d'en mesurer la fécondité ; auquel cas les indications, parfois sibyllines, de Cournot délivrent tout leur contenu, et révèlent que, dès 1843, sa réflexion probabiliste contient déjà, présents mais non déployés, les éléments d'une philosophie des mathématiques qui révélera son originalité et sa portée dans ses ouvrages ultérieurs.

BIBLIOGRAPHIE

ALEMBERT (Jean Le Rond d')

[1754] Article « Croix ou pile », dans *Encyclopédie ou Dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers*, d'Alembert et Diderot éd., Paris, t. IV, 1754, p. 512–513.

[1761] Réflexions sur le calcul des probabilités, dans *Opuscules mathématiques*, t. 2, 10e mémoire, Paris, 1761.

[1767] Doutes et questions sur le calcul des probabilités, dans *Mélanges de littérature, d'histoire et de philosophie*, t. V, Amsterdam, 1767 ; *Œuvres*, Paris, 1821, vol. I, p. 451–462.

---

[22] Car il faut reconnaître que si l'*Exposition* a bénéficié de louanges justifiées (*cf.* par exemple Carvallo [1912, p. V]), elle n'a pas reçu, du vivant de Cournot, — pas plus d'ailleurs que ses autres ouvrages — le succès que son auteur était en droit d'espérer.

[23] C'est ce que souligne B. Bru dans l'Introduction à son édition de l'*Exposition* en 1984 [Cournot 1843, p. IX].

Anderson (O.)
[1963] *Probleme der Statistischen Methodenlehre in den Sozialwissenschaften*, Würzburg : Physica, 1954.

Bayes (T.)
[1764] An essay towards solving a problem in the doctrine of chances, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 53 (1763), p. 370–418; éd. bilingue fr.-angl., par J.-P. Cléro, Essai en vue de résoudre un problème de la doctrine des chances, *Cahiers d'histoire et de philosophie des sciences*, n° 18, Paris : Belin, 1988.

Bordas-Demoulin, (J.-B.)
[1843] *Le Cartésianisme ou la véritable rénovation des sciences*, Paris, 1843, 2 vol.

Bru (B.)
[1981] A propos de l'histoire des statistiques au début du XIX^e^ siècle : probabilités et statistiques des jugements, *Séminaire d'histoire des mathématiques*, Rennes : Université de Rennes I, 1981, 24 p.
[1988] Statistique et bonheur des hommes, *Revue de synthèse*, Paris, t. CIX (1988), p. 69–95.

Bru (B.) et Crépel (P.)
[1989] Présentation (2^e^ partie), *Condorcet mathématicien, économiste, philosophe, homme politique*, (P. Crépel et C. Gilain dir.), Paris : Minerve, 1989, p. 65–75.

Carvallo (E.)
[1912] *Le Calcul des probabilités et ses applications*, Paris : Gauthier-Villars, 1912.

Comte (A.)
[1830–1842] *Cours de philosophie positive*, 6 vol., Paris, 1830–1842; rééd. Paris : Hermann, 1975, 2 vol.

Condorcet
[*Arith. pol.*] *Arithmétique politique. Textes rares ou inédits* (1767–1789), édition critique commentée par B. Bru et P. Crépel, Paris : I.N.E.D., 1994.

Cournot (A.-A.)
[*Œuvres*] *Œuvres complètes*, 11 vol., Paris : Vrin, 1973–1989.
[1838] *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses*, Paris, 1838; *Œuvres* VIII, 1980 (G. Jorland éd.).
[1841] *Traité élémentaire de la théorie des fonctions et du calcul infinitésimal*, Paris, 1841, 2 vol.; *Œuvres* VI-1, 1984 (P. Dugac éd.) .
[1843] *Exposition de la théorie des chances et des probabilités*, Paris, 1843; *Œuvres* I, 1984 (B. Bru éd.).
[1847] *De l'origine et des limites de la correspondance entre l'algèbre et la géométrie*, Paris, 1847; *Œuvres* VI–2, 1989 (N. Bruyère éd.).
[1851] *Essai sur les fondements de nos connaissances et sur les caractères de la critique philosophique*, Paris, 1851, 2 vol.; *Œuvres* II, 1975 (J.-Cl. Pariente éd.).
[1861] *Traité de l'enchaînement des idées fondamentales dans les sciences et dans l'histoire*, Paris, 1861, 2 vol.; *Œuvres* III, 1981 (N. Bruyère éd.).
[1872] *Considérations sur la marche des idées et des événements dans les temps modernes*, Paris, 1872, 2 vol.; *Œuvres* IV, 1973 (A. Robinet éd.).
[1875] *Matérialisme, vitalisme, rationalisme. Études sur l'emploi des données de la science en philosophie*, Paris, 1875; *Œuvres* V, 1979 (C. Salomon-Bayet éd.).

Daston (L.)
[1988] *Classical probability in the Enlightenment*, Princeton University Press, 1988.
[1989] L'interprétation classique du calcul des probabilités, *Annales. Économie, Sociétés, Civilisation*, t. 44 (1989), p. 715–731.

Delambre (J.-B.)
[1810] *Rapport historique sur les progrès des sciences mathématiques depuis 1789 et sur leur état actuel*, Paris, 1810.

Fréchet (M.)
[1951] Rapport général sur les travaux de la section de calcul des probabilités, *Actes du congrès international de philosophie des sciences, Paris, 1949*, Actualités scientifiques et industrielles, n° 1146, Paris : Hermann, 1951, p. 3–21 ; repris dans *Les Mathématiques et le concret*, Paris : P.U.F., 1955, p. 205–230.

Hacking (I.)
[1975] *The emergence of probability*, Cambridge University Press, 1975.

Holbach (P.-H. d')
[1770] *Système de la nature, ou des lois du monde physique et du monde moral*, Londres, 1770 ; rééd. par J. Boulad-Ayoub dans la collection Corpus des œuvres de philosophie en langue française, Paris : Fayard, 1990, 2 vol.

Lacroix (S.-F.)
[1800] *Traité des différences et des séries*, Paris, 1800, (suite du *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral*).
[1816] *Traité élémentaire du calcul des probabilités*, Paris, 1816 ; 2e éd., 1822.
[1835] *Complément des éléments d'algèbre*, 6e éd., Paris, 1835.

La Harpe (J. de)
[1936] *De l'ordre et du hasard. Le réalisme critique d'Antoine Augustin Cournot*, Mémoires de l'Université de Neuchâtel, tome IX, Neuchâtel, 1936.
[1937] De l'évidence cartésienne au probabilisme de Cournot, *Travaux du IXe congrès international de philosophie*, vol. VII, n° 36, Paris : Hermann, 1937, p. 115–121.

Lalande (A.)
[1926] *Vocabulaire technique et critique de la philosophie*, Paris : P.U.F., 1926 ; rééd. 1988.

Laplace (P.-S.)
[*Œuvres*] *Œuvres complètes de Laplace*, 14 vol., Paris : Gauthier-Villars, 1878–1912.
[1774] Mémoire sur la probabilité des causes par les événements, *Mémoires de mathématique et de physique présentés à l'Académie royale des sciences par divers savants*, t. VI, p. 621–656 ; *Œuvres* VIII, p. 27–65.
[1776] Recherches sur l'intégration des équations différentielles aux différences finies, et sur leur usage dans la théorie des hasards, *Mémoires de mathématique et de physique présentés à l'Académie royale des sciences par divers savants*, t. VII, p. 37–232 ; *Œuvres* VIII, p. 69–197.
[1812] *Théorie analytique des probabilités*, Paris, 1812 ; *Œuvres* VII.
[1814] *Essai philosophique sur les probabilités*, Paris, 1814 ; *Œuvres* VII ; rééd. d'après la 5e édition de 1825, avec notes de B. Bru, Paris : Bourgois, 1986.

Le Roux (J.)
[1906] Calcul des probabilités, (exposé d'après l'article allemand de E. Czuber), dans *Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées*, Jules Molk (dir.), Paris : Gauthier-Villars, 1906, t. I, vol. 4, p. 1–46 ; rééd. Paris : Gabay, 1993.

MARTIN (T.)

[1994] *Probabilités et critique philosophique selon Cournot*, thèse, Paris, E.H.E.S.S., 1994, 502 p.

MÉNARD (C.)

[1978] *La formation d'une rationalité économique : A.-A. Cournot*, thèse de doctorat d'État, Paris I, 1975; Paris : Flammarion, 1978.

MENTRÉ (F.)

[1908] *Cournot et la renaissance du probabilisme au* XIX^e *siècle*, Paris : Marcel Rivière, 1908.

MONTESSUS DE BALLORE (R. de)

[1907] Cournot, dans *Histoire des mathématiques* de Walter W. Rouse Ball, éd. fr., t. II, Paris : Hermann, 1907, p. 174–175.

MONTMORT (P.R. de)

[1708] *Essai d'analyse sur les jeux de hasard*, Paris, 1708; 2^e éd., Paris, 1713.

POINSOT (L.)

[1845] *Réflexions sur les principes fondamentaux de la théorie des nombres*, Paris, 1845; publiées avec la même pagination dans *Journal de mathématiques pures et appliquées* (I) 10 (1845), p. 1–101.

POISSON (S.-D.)

[1836a] Note sur le calcul des probabilités, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, 2, 1836, p. 377–382.

[1836b] Note sur le calcul des probabilités, *ibid*, p. 395–400.

[1837] *Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile, précédées des règles générales du calcul des probabilités*, Paris, 1837.

RASHED (R.)

[1974] *Condorcet. Mathématique et société*, Paris : Hermann, 1974.

SHEYNIN (O.B.)

[1976] P.-S. Laplace's work in probability, *Archive for history of exact sciences*, vol. 16 (1976), p. 137–187.

VOLTAIRE

[1764] *Dictionnaire philosophique*, Genève, 1764; dans *Œuvres complètes*, Paris : Aux bureaux du siècle, 1867–1873, t. I.