P. A. Meyer

**Bigèbres et probabilités, d'après M. Schurmann**

*Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg - RCP25*, 1993, tome 44
« Conférences de C. Dewitt-Morette, D. Foata, C. Itzykson, B.-L. Julia, J.-L. Loday, P.-A. Meyer, V. Pasquier », , exp. n° 6, p. 153-162

<http://www.numdam.org/item?id=RCP25_1993__44__153_0>

Bigèbres et Probabilités, d'après M. Schurmann

exposé de P.A. Meyer

Développant des idées de W. von Waldenfels, M. Schürmann a cherché une généralisation non commutative des processus à accroissements indépendants (PAI) à valeurs dans un (semi) groupe, au moyen de la théorie des bigèbres. Il a publié sur ce sujet toute une série d'articles. La solution complète du problème, au moyen du calcul stochastique sur l'espace de Fock, est un théorème récent, succédant à toute une série de résultats partiels.

**1. Notions générales.** Toutes les algèbres ci–dessous sont des $^*$–algèbres complexes à unité $1$, et les homomorphismes respectent involution et unité.

Un espace d'états non commutatif $E$ est représenté par une algèbre $\mathcal{A}$, dont les éléments $F$ sont les "fonctions $F(x)$" . Si $\lambda$ est une forme sur $\mathcal{A}$, on définit $\lambda^*$ par $\lambda^*(F) = \overline{\lambda}(F^*)$. Rappelons que $\lambda$ est dite *positive* si $\lambda(F^*) = \overline{\lambda}(F)$ et $\lambda(F^*F) \geq 0$. Les formes positives seront aussi appelées *mesures positives*, mais l'algèbre $\mathcal{A}$ est à voir comme une algèbre de "fonctions test", de sorte que les formes linéaires sur $\mathcal{A}$ sont plutôt des sortes de distributions.

Un espace probabilisé non commutatif $\Omega$ est représenté par une algèbre de von Neumann $\mathcal{B}$ d'opérateurs sur un espace de Hilbert, munie d'un état $\mathbb{P}$ (en fait la lettre $\mathbb{P}$ n'apparaît jamais, ce qui intervient c'est l'espérance notée $\mathbb{E}$). Une variable aléatoire de $\Omega$ dans $E$ est un homomorphisme $X$ de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{B}$. Pour renforcer l'analogie avec les probabilités classiques, on écrira $F \circ X$ ou même $F(X)$ au lieu de $X(F)$. Un processus stochastique est une famille de v.a. indexées par le temps; ici il s'agira de processus d'accroissements et nous aurons plutôt des v.a. $X_{st}$ avec $s < t$.

L'analogue des fonctions de deux variables sur l'espace d'états non commutatif est constitué par l'algèbre $\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}$, $F\otimes G$ traduisant la "fonction $F(x)\,G(y)$" — les "fonctions de deux variables" que l'on considère étant d'un type très restreint puisqu'elles ont une décomposition finie $\sum_i F_i' \otimes F_i''$.. On munit $\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}$ de l'involution $(F\otimes G)^* = G^* \otimes F^*$. On veut alors se donner une structure supplémentaire, analogue à l'opération qui sur un semi–groupe fait passer de la fonction d'une variable $F(x)$ à la fonction de deux variables $F(x+y)$ ou $F(xy)$, et aussi à la fonction de 0 variable $F(e)$ : ce sont respectivement $\Delta : \mathcal{A} \to \mathcal{A}\otimes\mathcal{A}$ (le coproduit) et $\delta : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ (la co–unité). Les axiomes (que je n'écris pas en langage algébrique formel) exprimeront les relations

$$F((xy)z) = F(x(yz)) \quad ; \qquad F(xe) = F(ex) = F(x) \quad ; \qquad \text{(axiomes des cogèbres)}$$
$$(FG)(xy) = F(xy)\,G(xy) \quad ; \qquad (FG)(e) = F(e)\,G(e) \qquad \text{(axiomes des bigèbres).}$$

Les bigèbres qui nous intéressent ont une involution, et il faut encore exprimer que $\Delta$ et $\delta$ commutent avec l'involution.

La convolution $\nu = \lambda \star \mu$ de deux formes linéaires sur $\mathcal{A}$ est définie, si $\Delta F = \sum_i F_i' \otimes F_i''$, par

$$\nu(F) = (\Delta F, \lambda \otimes \mu = \int F(xy)\,\lambda(dx)\,\mu(dy) = \sum\nolimits_i \lambda(F_i')\,\mu(F_i'') \;.$$

La théorie du produit tensoriel est là pour que le résultat soit indépendant de la représentation utilisée. On a tout fait pour que la convolution soit associative et admette $\delta$ comme élément neutre. On montre qu'elle préserve la positivité.

La cogèbre est *co-commutative* si la convolution est commutative, ce qui signifie que l'image de $\Delta$ est formée de tenseurs symétriques.

On peut définir aussi la notion analogue de la convolution d'une fonction et d'une mesure : une forme linéaire $\lambda$ sur la cogèbre $\mathcal{A}$ donne lieu à un opérateur sur $A$

$$F \star \lambda(x) = \int F(xy)\, \lambda(dy)$$

ce qui signifie $(I \otimes \lambda) \circ \Delta$ ; on a aussi une convolution $\lambda \star F$ en redescendant par $\lambda \otimes I$.

La différence entre semi-groupes et groupes tient à l'application $x \longmapsto x^{-1}$, et on désigne par $S$ (l'antipode) l'homomorphisme $S(F)(x) = F(x^{-1})$. Si l'on a $F(xy) = \sum_i F_i'(x)\, F_i''(y)$ on a aussi $F(e) = \sum_i F_i'(x)\, F_i''(x^{-1})$, d'où en traduction abstraite l'axiome de l'antipode

$$M \circ (I \otimes S) \circ \Delta = M \circ (S \otimes I) \circ \Delta = \delta 1$$

où $M$ est la multiplication de $\mathcal{A}$. Une bigèbre avec antipode est appelée *algèbre de Hopf.* L'antipode ne joue aucun rôle dans cet exposé.

On peut aussi travailler sur des bigèbres graduées : l'algèbre $\mathcal{A}$ est graduée, $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ aussi et munie d'un produit gradué tordu, $\Delta$ est de degré 0 et doit être un homomorphisme pour le produit tordu (voir [1]). Je n'en parlerai pas ici.

EXEMPLE. Pour représenter la convolution sur $\mathbb{R}^n$ on a le choix entre deux bigèbres. La plus intéressante est celle des polynômes trigonométriques admettant pour base les $e_u(x) = e^{iu \cdot x}$. On a

$$e_u\, e_v = e_{u+v} \ , \ e_u^* = e(-u) \ ,$$
$$e_u(x+y) = e_u(x)\, e_u(y) \quad \text{soit} \quad \Delta e_u = e_u \otimes e_u \ , \ e_u(0) = 1 \quad \text{soit} \quad \delta(e_u) = 1 \ .$$

La seconde est celle des polynômes à $n$ indéterminées, qui est une algèbre commutative libre, et donc exige seulement que l'on donne l'involution et le coproduit sur les générateurs. L'algèbre duale ne décrit que des mesures ayant des moments de tous ordres, mais elle a des généralisations algébriques intéressantes. Le coproduit $\Delta P$ est ici $P(X+Y)$ et la co-unité est $P(0)$, soit sur les générateurs

$$X_i^* = X_i \ , \ \Delta X_i = 1 \otimes X_i + X_i \otimes 1 \ , \ \delta(X_i) = 0$$

et bien sûr $\delta(1) = 1$.

Nous utiliserons le théorème fondamental sur les cogèbres :

THÉORÈME. *Toute famille finie d'éléments d'une cogèbre (à involution) $\mathcal{A}$ est contenue dans une cogèbre (à involution) de dimension finie.*

**Processus à accroissements indépendants**

1) Deux v.a. $X, Y$ (ou davantage) sont dites *indépendantes* si $F(X)$ et $G(Y)$ commutent pour $F, G \in \mathcal{A}$ arbitraires, et si l'on a

$$\mathbb{E}\,[F(X)\,G(Y)] = \mathbb{E}\,[F(X)]\;\mathbb{E}\,[G(Y)] \;, \tag{2.1}$$

ce qui fait intervenir l'état $\mathbb{P}$ sur $\mathcal{B}$ et la multiplication de $\mathcal{B}$, mais aucune structure spéciale sur $\mathcal{A}$.

2) Supposons que $\mathcal{A}$ soit une cogèbre. Soient $X$ et $Y$ deux applications de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{B}$. On définit le produit $Z = X \bullet Y$ (intuitivement, $X$ et $Y$ sont deux applications de l'espace probabilisé dans un semi-groupe, et $Z$ est leur produit) en utilisant une décomposition $F(xy) = \sum_i F_i'(x)\,F_i''(y)$ (coproduit) et en posant

$$F(Z) = \sum\nolimits_i F_i'(X)\,F_i''(Y) \qquad \text{(produit dans } \mathcal{B}\text{)}. \tag{2.2}$$

Si $\mathcal{A}$ est une bigèbre et $X$ et $Y$ sont des v.a. (homomorphismes), $Z$ n'en est pas nécessairement une. Il en est ainsi si $F(X)$ et $G(Y)$ commutent dans $\mathcal{B}$ pour $F, G$ arbitraires, ou si $\mathcal{A}$ est co-commutative.

Si $X$ et $Y$ sont indépendantes, et si l'on définit la loi $\ell(X)$ (forme sur $\mathcal{A}$) par $\ell(X)(F) = \mathbb{E}\,[F \circ X]$, on a $\ell(XY) = \ell(X) \star \ell(Y)$ (la définition de $XY$ et la convolution faisant intervenir la structure de cogèbre, non celle d'algèbre).

On peut enfin définir la notion de *processus à accroissements indépendants*. Décrivons d'abord la structure "cogébrique" : on a une famille $(X_{rs})$ d'applications de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{B}$ indexées par les couples $0 \le r \le r$, avec $X_{rr} = e$ *i.e.* $F \circ X_{rr} = F(e) = \delta(F)$ et $X_{rs} \bullet X_{st} = X_{rt}$ pour $r < s < t$. De la structure algébrique, il ne reste ici que la condition $F^* \circ X_{st} = (F \circ X_{st})^*$. On pose $X_{0t} = X_t$ et $\varphi_t = \ell(X_t)$.

Ensuite, voici les axiomes probabilistes :

— 1) Les applications $X_{st}$ associées à des intervalles disjoints sont indépendantes au sens de (2.1) — on y inclut en particulier la propriété algébrique de commutation, qui n'intervient que pour des raisonnements d'unicité non reproduits ici.

— 2) On a $\ell(X_{st}) = \varphi_{t-s}$ (stationnarité des lois d'accroissements). Il résulte alors de 1) que $\varphi_s \star \varphi_t = \varphi_{s+t}$.

— 3) $\lim_t \varphi_t = \delta$ sur $\mathcal{A}$ (continuité en loi).

Enfin, nous faisons intervenir la structure algébrique en imposant que les $X_{st}$ soient des homomorphismes. La notion "cogébrique" est le cadre dans lequel se déroule naturellement la construction, bien qu'elle n'ait pas d'intérêt en elle même.

Avec cela, on peut commencer la théorie. Celle-ci se décompose en deux parties. La première est l'étude des semi-groupes de convolution de formes positives sur une bigèbre. La seconde est une construction canonique du processus au moyen du calcul stochastique sur l'espace de Fock.

**3. Structure des semi-groupes de convolution.** Soit $(\varphi_t)$ un semi-groupe de convolution de lois de probabilité sur une bigèbre. Restreignons nous à une cogèbre de dimension finie. Alors les formes linéaires sur celle-ci forment une algèbre de dimension finie, et dans une telle algèbre tout semi-groupe à un paramètre admet un générateur partout défini. Autrement dit, on peut poser sur toute la bigèbre

$$(3.1)\qquad \varphi_t = e^{t\psi} = \delta + t\psi + \frac{t^2}{2!}\psi \star \psi + \dots\ , \qquad \psi(a) = \lim_t(\varphi_t(a) - \delta(a))/t\ .$$

Noter que $\psi(\mathrm{I}) = 0$, $\psi(F^*) = \overline{\psi}(F)$. Nous avons $\mathcal{A} = \mathbb{C}1 + K$, le noyau de $\delta$, avec la projection $F \to F - \delta(F)1$ de $\mathcal{A}$ sur $K$. Sur $K$, nous avons $\psi(F) = \lim_t \varphi_t(F)/t$, et donc

$$(3.2)\qquad \psi(F^*) = \overline{\psi}(F)\ , \qquad \psi(F^*F) \geq 0$$

($\psi$ est *conditionnellement positive*).

La notion de fonction conditionnellement positive ne fait intervenir que la structure d'algèbre avec un homomorphisme $\delta$, non la structure de cogèbre.

Nous allons maintenant reproduire la construction GNS pour les fonctions de type positif sur une algèbre. Nous définissons sur $K$ un produit scalaire préhilbertien en posant

$$(3.3)\qquad <a, b>_\psi\ = \psi(a^*b)$$

Nous désignons par $\mathcal{K}$ l'espace séparé correspondant — nous nous gardons de le compléter. Nous faisons opérer $\mathcal{A}$ sur $K$ à gauche par multiplication, $\rho(F)G = FG$, et à droite par $G\delta(F)$ ; cela passe au quotient et donne à $\mathcal{K}$ une structure de bimodule.

D'un point de vue technique, soulignons que $\rho(F)$ est un opérateur de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{K}$ — donc la composition ne pose aucun problème — admettant un adjoint $\rho(F^*)$ pourvu des mêmes propriétés. Si $F$ est unitaire, $\rho(F)$ est unitaire, donc borné, mais comme $\mathcal{A}$ n'est pas une $C^*$-algèbre on ne peut en déduire que $\rho(F)$ est toujours borné.

Ensuite, nous désignons par $\eta(F)$ la classe de $F - \delta(F)1$ ; ceci est un cocycle pour la structure précédente : une application linéaire telle que

$$(3.4)\qquad \eta(FG) = \rho(F)\eta(G) + \eta(F)\delta(G)\ .$$

Noter que $\eta(1) = 0$, et que $\eta$ est surjective. Nous avons enfin

$$(3.5)\qquad \psi(F^*G) - \delta(F^*)\psi(G) - \psi(F^*)\delta(G) = <\eta(F), \eta(G)>\ .$$

DÉFINITION. *On appellera* triplet de Schurmann *pour la bigèbre $\mathcal{A}$ la donnée d'un espace préhilbertien $\mathcal{K}$, d'une représentation $\rho$ de l'algèbre $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{K}$, d'un cocycle $\eta$ à valeurs dans $\mathcal{K}$ (satisfaisant à (3.4)) et d'une application $\psi$ de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{C}$ satisfaisant à (3.5).*

L'image de $\eta$ est stable par $\rho$ d'après la propriété de cocycle, de sorte qu'on peut toujours supposer $\eta$ surjective (ou d'image dense si l'on complète $\mathcal{K}$) : cela tient lieu de la cyclicité dans le théorème GNS. Il est clair que la fonction $\psi$ est conditionnellement positive. La structure de cogèbre n'est pas apparue dans cette construction, mais seulement l'homomorphisme $\delta$.

On fait intervenir maintenant la structure de cogèbre, et l'on se demande si le semi-groupe de convolution $e^{t\psi}$ est formé de mesures positives. C'est naturellement plus difficile, puisque la structure de cogèbre n'est pas intervenue dans la construction, et le problème n'est vraiment résolu que dans le dernier article de Schurmann. Surtout, Schurmann est parvenu à construire directement un processus à accroissements indépendants admettant comme lois les exponentielles en question.

**4. Exemple : la formule de Khintchine–Lévy sur $\mathbb{R}^n$.** Traduisons la formule de Khintchine-Lévy classique pour un semi-groupe de convolution $(\pi_t)$ sur $\mathbb{R}^n$. On utilise la cogèbre $\mathcal{A}$ des polynômes trigonométriques. On a pour $F \in \mathcal{A}$

$$\psi(F) = m{\cdot}F'(0) + \tfrac{1}{2}LF(0) + \int (F(x) - F(0) - h(x)\,x{\cdot}F'(0)\,)\,\nu(dx)\ . \tag{4.1}$$

où $h(x)$ vaut 1 au voisinage de $0$, $m$ est un vecteur réel et $L$ un laplacien; $\nu$ est la mesure de Lévy. En prenant $F = e_u$ nous obtenons la fonction de Lévy classique (ou plutôt son opposée puisque la transformée de Fourier du semi-groupe est classiquement $e^{-t\psi(u)}$)

$$\psi(u) = im{\cdot}u - \tfrac{1}{2}q(u) + \int (e^{iu\cdot x} - 1 - iu{\cdot}x\,h(x))\,\nu(dx)\ . \tag{4.2}$$

$q$ désigne la forme quadratique positive associée au laplacien. Nous nous plaçons dans l'espace de Hilbert

$$\mathcal{H} = \mathbb{C}^n \oplus L^2(\nu)$$

$F \in \mathcal{A}$ opère sur le premier espace par $F(0)I$, sur le second par multiplication. L'application $\eta(F)$ sera donnée par

$$\eta(F) = \sigma F'(0) \oplus (F - F(0))$$

où $F'(0)$ est considéré comme un vecteur de $\mathbb{C}^n$ et $\sigma$ est une matrice réelle telle que $q(u) = |\sigma(u)|^2$. La propriété de cocycle est évidente, et $\mathcal{K}$ est alors l'image de $\mathcal{A}$ (polynômes trigonométriques nuls en $0$). On a

$$\begin{aligned} <\eta(F^*)\,,\,\eta(G)> &= \sigma F'(0){\cdot}\sigma F'(0) + \int (F(x) - F(0))(G(x) - G(0))\,\nu(dx) \\ &= \psi(F+G) - \psi(F)\,G(0) - F(0)\,\psi(G)\ . \end{aligned} \tag{4.3}$$

On peut en fait pousser cette construction plus loin, en décrivant le processus à accroissements indépendants lui même comme processus d'opérateurs. Les limitations du résultat apparaissent sur cet exemple : pourquoi obtient on *tous* les PAI de cette manière ?

Nous allons maintenant aborder le problème inverse, reconstruire le processus à partir d'un triplet de Schurmann. On comprend mieux le problème en se plaçant d'abord sur une *cogèbre* $\mathcal{A}$, la structure d'algèbre venant tout à la fin. Nous appellerons donc ici *triplet de Schurmann* la donnée d'un espace préhilbertien $\mathcal{K}$, d'une application linéaire $\eta$ de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{K}$, une application linéaire $\psi$ de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{C}$, et d'une application linéaire de $\mathcal{A}$ dans les opérateurs de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{K}$, possédant seulement la propriété que $\rho(F)^* = \rho(F^*)$. La construction utilisant le calcul stochastique non commutatif, nous aurons besoin de "rappels".

**5. Utilisation de l'espace de Fock.** Nous allons travailler sur un espace de Fock $\Phi$ construit sur $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}_+ \otimes \mathcal{K})$. Comme toujours dans un espace de Fock on peut considérer des opérateurs de création $a^+(|p>)$ associés à un "ket" $p \in \mathcal{H}$, des opérateurs d'annihilation $a^-(<r|)$ indexés par un "bra", et aussi des opérateurs de seconde quantification différentielle indexés par un *opérateur* $Q$, et notés ci-dessous $a^\circ(Q)$. Mais ici, à cause de la présence de $\mathbb{R}_+$, nous pouvons prendre ces objets de la forme $I_{[0,t]} \otimes p$ avec $p \in \mathcal{K}$, ou $I_{[0,t]} \otimes Q$ (produit tensoriel d'un opérateur de multiplication par un opérateur sur $\mathcal{K}$), ce qui définit $a_t^+(|p>)$, $a_t^-(<r|)$, $a_t^\circ(Q)$. L'élément differentiel du calcul stochastique quantique est alors l'opérateur

$$dA_t(m,p,Q,r) = m\,dt + da_t^+(|p>) + da_t^\circ(Q) + da_t^-(<r|) \tag{5.1}$$

auquel on associe une matrice

$$\begin{pmatrix} m & <r| \\ |p> & Q \end{pmatrix} \tag{5.2}$$

L'ensemble des relations de commutation canoniques exprime alors la matrice associée au produit $dA_t(m,p,Q,r)\,dA_t(m',p',Q',r')$ sous la forme

$$\begin{pmatrix} m & <r| \\ |p> & Q \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} m' & <r'| \\ |p'> & Q' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} <r,p'> & <rQ'| \\ |Qp'> & QQ' \end{pmatrix} . \tag{5.3}$$

Il y a une autre notation couramment utilisée : soit $e_\alpha$ une base orthonormale de $\mathcal{K}$ ($\alpha$ parcourant un intervalle $1,\dots,N$ ou les entiers), et soit $e^\alpha$ la base duale. On pose

$$da_0^0(t) = dt\ ,\ da_\alpha^0(t) = da_t^+(|e_\alpha>)\ ,\ da_0^\alpha(t) = da_t^-(<e^\alpha|)\ ,\ da_\alpha^\beta(t) = da^\circ(|e^\beta><e_\alpha|)$$

Introduisons des indices $\rho, \sigma \dots$ du haut de l'alphabet grec pouvant prendre la valeur $0$, contrairement à $\alpha, \beta \dots$ . Alors les RCC s'écrivent

$$da_\rho^\sigma\, da_\xi^\eta = \widehat{\delta}_\xi^\sigma\, da_\rho^\eta\ , \tag{5.4}$$

où le symbole d'Evans $\widehat{\delta}$ diffère du symbole de Kronecker usuel par la valeur $\widehat{\delta}_0^0 = 0$. Donnons nous un espace de Hilbert $\mathcal{J}$ dit espace initial, et des opérateurs $L_\rho^\sigma$ de $\mathcal{J}$ dans $\mathcal{J}$, bornés pour simplifier. On sait résoudre des équations différentielles stochastiques non commutatives

$$U_t = U_0 + \int_0^t U_s\,\big(\sum_{\rho\sigma} L_\sigma^\rho\, da_\rho^\sigma(s)\big) \quad ; \tag{5.5}$$

L'inconnue est une famille d'opérateurs $U_t$ sur $\mathcal{J} \otimes \Phi$, opérant seulement sur la partie du Fock antérieure à $t$, et la donnée $U_0$ est un opérateur opérant seulement sur $\mathcal{J}$. Le sens d'une telle équation ne sera pas détaillé : on construit ici des intégrales multiplicatives d'un type qui serait familier aux physiciens, s'il n'y avait que les opérateurs de création et d'annihilation. La théorie de ces équations a été faite par Hudson–Parthasarathy il y a déjà longtemps (1984), mais sous la forme dont nous avons besoin (multiplicité infinie) elle est due à Mohari–Sinha.

L'origine des temps a été placée en $0$, mais on pourrait aussi bien la placer en $t$ et définir des opérateurs $X_{tt'}$ avec $t < t'$ (la donné initiale s'appelant alors $X_{tt}$). Si $X_{tt} = I$, pour $t < t' < t''$ les opérateurs $X_{tt'}$ et $X_{t't''}$ commutent, et on a $X_{tt''} = X_{tt'}X_{t't''}$. On n'est donc pas loin des PAI. Le domaine d'un opérateur $X_{tt'}$ contient tous les vecteurs $j \otimes C(u)$ pour $j \in \mathcal{J}$, où $C(u)$ est le vecteur cohérent associé à $u \in \mathcal{H}$ parcourant un ensemble dense de vecteurs; il contient toujours $j \otimes \mathbf{1}$ ($\mathbb{1}$ est le vecteur vide du Fock).

Une forme plus générale de ces résultats introduit un espace vectoriel $\mathcal{A}$ opérant sur l'espace initial, et des coefficients $L^\sigma_\rho$ qui sont des applications de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{A}$. On se donne aussi une application $X_0$ de $\mathcal{A}$ dans les opérateurs initiaux (opérateurs sur le Fock $\mathcal{J} \otimes \Phi$ n'agissant que sur le premier facteur), et l'inconnue $X_t$ est une application de $\mathcal{A}$ dans les opérateurs n'agissant que jusqu'à l'instant $t$. Pour rappeler l'origine probabiliste du problème ($\mathcal{A}$ est une algèbre de fonctions $F$ sur une variété $E$, les $X_t$ sont des v.a. à valeurs dans $E$) on écrira $F \circ X_t$ au lieu de $X_t(F)$. L'équation que l'on résout est alors

$$(5.6) \qquad F \circ X_t = F \circ X_0 + \int_0^t \sum_{\rho\sigma} L^\rho_\sigma(F) \circ X_r \, da^\sigma_\rho(r) \ ,$$

Le cas précédent correspond à $\mathcal{A} = \mathcal{L}(\mathcal{J})$, $L^\rho_\sigma(F) = FL^\rho_\sigma$, et $F \circ X_t = FU_t$ pour tout $t$. Le cas le plus important est celui où $\mathcal{A}$ est une algèbre d'opérateurs sur $\mathcal{J}$, où $F \circ X_0 = F \otimes I$, et l'on voudrait alors que les $X_t$ soient des homomorphismes d'algèbre. Ce problème a été étudié par Evans–Hudson en multiplicité finie, par Mohari–Sinha en multiplicité infinie. Les *équations de structure d'Evans–Hudson,* que l'on rappellera plus bas, donnent la condition nécessaire et suffisante pour que les $X_t$ soient des homomorphismes.

**6. Application aux cogèbres.** Nous reprenons la cogèbre $\mathcal{A}$, et nous allons présenter et résoudre l'équation différentielle stochastique suivante, où $\rho, \eta, \psi$ est un "triplet de Schurmann"

$$(6.1) \qquad X_{tt'}(F) = \delta(F)\,I + \int_t^{t'} X_{ts}(F) \star dA_s(\psi(F), \eta(F), \rho(F) - \delta(F)\,I, \eta(F^*)) \ .$$

Il n'y a pas d'espace initial ($\mathcal{J} = \mathbb{C}$). Pour tout $t$, $X_{tt'}(F)$ sera un opérateur sur l'espace des vecteurs cohérents $C(u)$ avec $u \in \mathcal{K}$, admettant un adjoint sur le même espace, opérant sur la partie de l'espace de Fock entre $t$ et $t'$, possédant la propriété d'accroissements indépendants, et tel enfin que $<\mathbf{1}\,, X_{tt'}\mathbf{1}> \; = e^{\star(t'-t)\,\psi}$, l'exponentielle de convolution de $\psi$.

Tout d'abord, explicitons le sens du côté droit de (6.1) : si $\Delta F = \sum_i F_i' \otimes F_i''$, ce côté droit est interprété comme

$$(6.2) \qquad \delta(F)\,I + \sum\nolimits_i \int_t^{t'} X_{ts}(F_i')\, dA_s(\psi(F_i''), \eta(F_i''), \rho(F_i'') - \delta(F_i'')\,I, \eta(F_i''^*)) \ .$$

Pour résoudre cette équation, nous plaçons $F$ dans une cogèbre de dimension finie, ayant en tant qu'espace vectoriel une base $(e_i)$, et nous pouvons alors écrire $\Delta e_i = \sum_{jk} c_i^{jk} e_j \otimes e_k$. Posant alors $m_i = \psi(e_i)$, $Q_i = \rho(e_i) - \delta(e_i)\,I$, $p_i = \eta(e_i)$, $r_i = \eta(e_i^*)$, et $X_i(t) = X_t(e_i)$ nous avons (en prenant l'origine en 0 pour simplifier) un système de la forme

$$X_i(t) = \delta_i I + \sum_{jk} \int_0^t c_i^{jk} X_j(s)\, dA_s(m_k, p_k, Q_k, r_k)$$

dont on montre aisément qu'il a une solution unique, à partir des résultats de Mohari–Sinha.

Une fois établie l'unicité, on a avantage à construire la solution de la manière suivante : on pose $e_i^j = \sum_k c_i^{jk} e_k$, et on vérifie que l'on a (en posant $\delta_i = \delta(e_i)$)

$$\Delta e_i^j = \sum_k e_k^j \otimes e_i^k \ , \quad \delta(e_i^j) = \delta_i^j \ , \ e_i = \sum_j e_i^j \delta_j$$

on résout l'équation matricielle de type classique

$$Y_i^j(t) = \delta_i^j + \sum_k \int_0^t Y_k^j(s)\, A_s(m_i^k, p_i^k, Q_i^k, r_i^k)$$

où $m_i^j = \psi(e_i^j)$, etc.. Après quoi si $F = \sum_i f^i e_i$ on aura $X_t(F) = \sum_i f^i \delta_j Y_i^j(t)$. Cette solution explicite ramène la vérification des propriétés de $X$ à celles de $Y$, qui sont classiques.

On ne s'intéresse pas tant aux cogèbres qu'aux bigèbres. Pour celles–ci on a le résultat fondamental :

THÉORÈME. *Si $\mathcal{A}$ est une bigèbre, et si $\rho, \eta, \psi$ forment un triplet de Schurmann, les $X_{st}$ sont des homomorphismes d'algèbres.*

Pour établir cela, il faut disposer du théorème fondamental de Evans–Hudson, que l'on peut énoncer ainsi (sous des hypothèses analytiques convenables) : $F$, $G$ et $H$ étant trois éléments fixés, si l'on a pour tous les $\rho, \sigma$

$$L_\sigma^\rho(H) = F L_\rho^\sigma(G) + (L_\rho^\sigma F)\, G + \sum_\alpha L_\alpha^\sigma(F)\, L_\rho^\alpha(G)$$

alors on a aussi $X_t(H) = X_t(F) X_t(G)$ pour tout $t$. Formellement, les propriétés algébriques des triplets de Schurmann expriment exactement ces conditions. Les difficultés sont analytiques : $F, G$ sont bien dans une cogèbre de dimension finie, mais non dans une bigèbre de dimension finie. Mais une analyse soigneuse de la démonstration de Mohari–Sinha ramène la vérification de la propriété d'homomorphisme à une propriété de croissance d'itérés des $L_\sigma^\rho$ appliqués à $F$ et $G$, jamais à leur produit $FG$ ; donc on n'a pas besoin de sortir d'une cogèbre de dimension finie contenant $F$ et $G$. La démonstration se déroule alors sans accident.

**7. Sur la martingale d'Azéma.** Considérons l'algèbre libre engendrée par $n$ variables $X_1 \ldots X_n$ ; on lui donne une involution en décidant que les $X_i$ sont hermitiens, et une structure de cogèbre par des formules

$$\Delta X_i = \sum_{jk} c_i^{jk} X_j \otimes X_k \ , \quad \delta(X_i) = \delta_i$$

soumises à quelques conditions naturelles exprimant la coassociativité, etc ; le coproduit et la co-unité se prolongent naturellement (et en particulier, on a $\Delta 1 = 1 \otimes 1$).

Donnons nous ensuite un espace $\mathcal{K}$ de dimension finie, des opérateurs hermitiens $\rho_i$ arbitraires, des vecteurs $\eta_i$ arbitraires, des scalaires réels $c_i$ arbitraires. Alors il existe un unique prolongement de tout cela en un triplet de Schurmann sur la bigèbre $\mathcal{A}$.

Prenons deux générateurs, et déduisons la structure de cogèbre de la loi de composition du groupe

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & 0 \\ b' & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' & 0 \\ ba'+b' & 1 \end{pmatrix} \tag{7.1}$$

soit une cogèbre ayant une base $(e_0, e_1, e_2)$ représentant les trois fonctions $1, a, b$ ; ainsi $\Delta e_0 = e_0 \otimes e_0$ , $\delta(e_0) = 1$, puis

$$\Delta e_1 = e_1 \otimes e_1 \ , \ \Delta e_2 = e_2 \otimes e_1 + e_0 \otimes e_2 \ , \ \delta(e_1) = 1 \ , \ \delta(e_2) = 0 \ . \tag{6.2}$$

Nous avons $X_0(t) \equiv I$. Les coefficients non nuls sont $c_1^{11}, c_2^{21}, c_2^{02}$. On se place sur un espace $\mathcal{K}$ de dimension 1 de sorte que tout est scalaire

$$dX_1(t) = X_1(t)(m_1 dt + dQ_t(\eta_1) + da_t^{\circ}(\rho_1 - I))$$
$$dX_2(t) = X_2(t)(m_1 dt + dQ_t(\eta_1) + da_t^{\circ}(\rho_1 - I)) + X_0(t)(m_2 dt + dQ_t(\eta_2) + da_s^{\circ}(\rho_2 - I))$$

Nous prenons $m_1 = m_2 = 0$, $\eta_1 = 0$, $\eta_2 = 1$, enfin $\rho_2 = I$, $\rho_1 = cI$. Le système se découple et prend la forme

$$dX_1(t) = (c-1) X_1(t)\, da_t^{\circ} \ , \qquad dX_2(t) = Q_t + (c-1) X_2(t)\, da_t^{\circ}$$

La première ligne représente un processus (commutatif, p.s. égal à $I$ dans l'état vide) que l'on peut expliciter, la seconde est l'équation différentielle stochastique de la famille des martingales d'Azéma.

## RÉFÉRENCES

PUBLICATIONS DE M. SCHURMANN. Les articles les plus importants sont [1] qui apporte beaucoup d'exemples et de motivations, [5] qui contient le résultat définitif présenté ici, [4] et [10] qui ont des rapports avec certains groupes quantiques.

[1] Positive and conditionally positive linear functionals on coalgebras. *Quantum Probability II*, Springer LN 1136, 1985, p. 475–492.

[2] Noncommutative stochastic processes with independent and stationary increments satisfy quantum stochastic differential equations, *Prob. Th. Rel. Fields,* **84**, 1990, p. 473–490.

[3] A class of representations of involutive bialgebras, *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **107**, 1990, p.149–175.

[4] The Azéma martingales as components of quantum independent increment processes, *Sem. Prob. XXV*, Springer LN 1485, p. 24–30.

[5] White noise on involutive bialgebras, *Quantum Probability VI*, 1992, p. 401–419, World Scientific.

[6] A central limit theorem for coalgebras, *Probability Measures on Groups VIII*, Springer LN 1210, 1986, p. 153–157.

[7] Infinitely divisible states on cocommutative bialgebras, *Probability Measures on Groups IX*, Springer LN 1379, 1987, p. 310–324.

[8] Noncommutative stochastic processes with independent and stationary additive increments, *J. Multiv. Anal.*, **38**, 1990, p. 15–35.

[9] Gaussian states on bialgebras, *Quantum Probability V*, Springer LN 1442, p. 347–367.

[10] Quantum $q$–white noise and a $q$–central limit theorem. *Comm. Math. Phys.*, **140**, 1991, p. 589–615.

AUTRES RÉFÉRENCES IMPORTANTES

EVANS (M.). Existence of quantum diffusions, *Prob. Th. Rel. Fields*, **81**, 1989, p. 473–483.

EVANS (M.) and HUDSON (R.L.). Multidimensional quantum diffusions, *Quantum Probability III*, Springer LN 1303, 1988, p. 69–88.

GLOCKNER (P.). Quantum stochastic differential equations on $*$–bigebras, *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **109**, 1991, p. 571–595.

HUDSON (R.L.) and PARTHASARATHY (K.R.). 1. Quantum Ito's formula and stochastic evolutions, *Comm. Math. Phys.*, **93**, 1984, p. 301–303.

MOHARI (A.). Quantum stochastic calculus with infinite degrees of freedom and its applications. PhD thesis, ISI Delhi 1992.

MOHARI (A.) and SINHA (K.B.). Quantum stochastic flows with infinite degrees of freedom and countable state Markov processes. *Sankhya (A)*, **52**, 1990, p. 43–57.

PARTHASARATHY (K.R.). *An Introduction to Quantum Stochastic Calculus,* Birkhäuser, Basel 1992.

Von WALDENFELS (W.). Ito solution of the linear quantum stochastic differential equation describing light emission and absorption. *Quantum Probability I*, Springer LN 1055, 1984.