JEAN-LOUIS LODAY

Une version non commutative des algèbres de Lie : les algèbres de Leibniz

Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg - RCP25, 1993, tome 44
« Conférences de C. Dewitt-Morette, D. Foata, C. Itzykson, B.-L. Julia, J.-L. Loday, P.-A. Meyer, V. Pasquier », , exp. nº 5, p. 127-151
<http://www.numdam.org/item?id=RCP25_1993__44__127_0>

En hommage à Pierre Cartier

UNE VERSION NON COMMUTATIVE DES ALGÈBRES DE LIE : LES ALGÈBRES DE LEIBNIZ

Jean-Louis LODAY

Une *algèbre de Leibniz* $\mathfrak{g}$ sur un anneau commutatif k est la donnée d'un k-module $\mathfrak{g}$ muni d'une application bilinéaire

$$[-,-] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$$

vérifiant la relation (dite de Leibniz)

$$(L) \qquad [x,[y,z]] - [[x,y],z] + [[x,z],y] = 0 \qquad \text{pour tout} \qquad x,y,z \in \mathfrak{g}\,.$$

Notons que si, de plus, le crochet satisfait à la relation

$$(S) \qquad [x,x] = 0 \qquad \text{pour tout} \qquad x \in \mathfrak{g},$$

alors la relation (L) est équivalente à la relation de Jacobi classique

$$(J) \qquad [x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0,$$

et $\mathfrak{g}$ n'est rien d'autre qu'une algèbre de Lie. Ainsi les algèbres de Leibniz sont une version *non commutative* (plus exactement non anti-symétrique) des algèbres de Lie.

La principale motivation pour étudier cette notion est l'existence d'une théorie d'homologie HL_* (ainsi que d'une théorie de cohomologie HL^*), pour les algèbres de Leibniz. Restreinte aux algèbres de Lie cette théorie donne de nouveaux invariants qui sont intimement reliés à des notions plus classiques telles que l'homologie (de Chevalley-Eilenberg) des algèbres de Lie, l'homologie de Hochschild, l'homologie des espaces de lacets (modèle de James).

On se propose dans cet article de présenter, sans démonstrations, quelques constructions et résultats concernant les algèbres de Leibniz et leur théorie de (co)homologie, notamment leurs relations avec l'algèbre homologique et la topologie algébrique classiques.

A paraître dans "Enseignement Mathématique".

Après avoir donné différentes définitions on présente plusieurs exemples d'algèbres de Leibniz et on expose les points suivants :

– *Dérivations.* On définit une notion de dérivation pour les algèbres de Leibniz (appelée en fait bidérivation pour éviter les confusions). L'ensemble de ces bidérivations forme une algèbre de Leibniz et la notion de bidérivation intérieure donne un morphisme de l'algèbre de Leibniz dans ses bidérivations.

– *Représentations.* De même que la notion de module sur les algèbres associatives et commutatives se scinde en module à droite et module à gauche, la notion de représentation d'une algèbre de Lie se scinde en représentation et coreprésentation.

– *Algèbre enveloppante.* Cette notion existe aussi dans le cadre des algèbres de Leibniz et permet d'interpréter les catégories de représentations et coreprésentations comme des catégories de modules.

– *Cohomologie et homologie.* C'est peut-être le point le plus important car même appliquées aux algèbres de Lie ces théories de cohomologie et d'homologie sont nouvelles et reliées aux objets classiques de l'algèbre homologique. De plus elles sont interprétables en termes de foncteurs dérivés grâce à la notion d'algèbre enveloppante. La propriété la plus caractéristique de l'homologie de Leibniz est la formule de type Künneth

$$HL_*(\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g}') \cong HL_*(\mathfrak{g}) * HL_*(\mathfrak{g}'),$$

où $*$ est une sorte de produit tensoriel non commutatif de modules gradués.

– *Liens avec la topologie algébrique.* Jerry Lodder a mis à jour un lien très étroit entre le complexe de Leibniz des matrices sur une algèbre de groupe et le complexe cellulaire asssocié au modèle de James du classifiant de ce groupe. Ce rapport peut se décrire grâce à une catégorie ΔS mélant la catégorie simpliciale Δ et les groupes symétriques (généralisation de la catégorie cyclique de Connes). Ce point de vue peut être étendu pour définir l'homologie de Leibniz des algèbres associatives tressées (liées aux groupes quantiques).

Les algèbres de Leibniz différentielles graduées permettent de définir un modèle pour l'homotopie rationnelle non commutative. Il serait intéressant de dégager un modèle "entier" (i.e. sur $\mathbb{Z}$).

– *HL dans d'autres contextes.* Il est naturel de penser qu'une théorie de type HL existe aussi pour d'autres catégories d'objets tels que les algèbres associatives, les groupes, les espaces topologiques. On donne quelques indications sur le cas des algèbres associatives (en liaison avec les travaux de Cuntz et Quillen) ainsi que sur le cas des groupes (retombées attendues en K-théorie algébrique).

De même que la théorie HL pour les algèbres de Lie est définie sur une classe plus vaste d'objets, à savoir les algèbres de Leibniz, il est naturel de penser que si la théorie HL existe pour les groupes, alors il existe une classe plus vaste d'objets (coquecigrues) sur laquelle elle est définie. Tout reste à faire dans cette direction.

Dans toute la suite k est un anneau commutatif. On sera amené parfois à supposer que c'est un corps.

1. Algèbres de Leibniz. — Par définition une *algèbre de Leibniz droite* sur k est la donnée d'un k-module $\mathfrak{g}$ muni d'une application bilinéaire (crochet)

$$[-,-]:\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$$

satisfaisant à la relation de Leibniz droite

$$(L)\qquad [x,[y,z]]=[[x,y],z]-[[x,z],y],\ \text{pour tout } x,y,z\in\mathfrak{g}\,.$$

(Si l'on pense à l'opération $[-,z]$ comme à une dérivation $(-)'$, on obtient précisément $(xy)'=x'y+xy'$).

Pour une algèbre de Leibniz gauche la relation de Leibniz gauche est

$$(L')\qquad [[x,y],z]=[x,[y,z]]-[y,[x,z]].$$

On remarquera que, lorsque le crochet est anticommutatif, i.e. $[x,y]=-[y,x]$, chacune de ces relations est équivalente à la relation de Jacobi (J), puisque (L) (resp. (L')) consiste à réécrire (J) en mettant x à la première place (resp. z à la dernière place) dans chaque terme.

On remarquera que si le crochet $[-,-]$ vérifie (L) alors le crochet $[-,-]'$, défini par $[x,y]'=[y,x]$, vérifie (L'). Il y a donc équivalence entre algèbres de Leibniz gauches et algèbres de Leibniz droites.

Un morphisme d'algèbres de Leibniz est la donnée d'un homomorphisme de k-modules $f:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}'$ tel que

$$f([x,y])=[f(x),f(y)],\ \text{pour tout } x,y\in\mathfrak{g}\,.$$

Dans toute la suite on dira simplement algèbre de Leibniz, pour algèbre de Leibniz droite.

Notons tout de suite une conséquence immédiate de la relation (L). Bien que dans une algèbre de Leibniz on n'ait pas, en général, l'égalité $[y,z]=-[z,y]$, on a par contre

$$(1.1) \qquad [x,[y,z]] = [x,-[z,y]], \text{ pour tout } x,y,z \in \mathfrak{g}\,.$$

Il suffit de comparer (L) pour x,y,z et pour x,z,y, pour s'en convaincre.

2. Exemples d'algèbres de Leibniz

2.0. *Algèbres de Lie.* — Il est clair d'après ce qu'on a dit précédemment qu'une algèbre de Lie est un cas particulier d'algèbre de Leibniz. Si l'on quotiente l'algèbre de Leibniz $\mathfrak{g}$ par l'idéal bilatère engendré par les crochets $[x,x]$, $x\in\mathfrak{g}$, on obtient une algèbre de Lie que l'on note $\mathfrak{g}_{\mathrm{Lie}}$. Le morphisme $\mathfrak{g}\twoheadrightarrow\mathfrak{g}_{\mathrm{Lie}}$ est universel pour tout morphisme de $\mathfrak{g}$ dans une algèbre de Lie. Son noyau est noté $\mathfrak{g}^{ann}$.

2.1. *Action pré-croisée.* — Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie et M un $\mathfrak{g}$-module. On note m^g l'action de $g\in\mathfrak{g}$ sur $m\in M$. Soit $\mu : M\to\mathfrak{g}$ une application linéaire $\mathfrak{g}$-équivariante c'est à dire

$$\mu(m^g) = [\mu(m), g], \qquad \forall m\in M, \forall g\in\mathfrak{g}\,.$$

Le crochet $[-,-]'$ défini sur M par

$$[m,n]' := m^{\mu(n)}, \qquad \forall m,n\in M,$$

munit M d'une structure d'algèbre de Leibniz. Constatons que μ devient un morphisme d'algèbres de Leibniz.

Remarquons que toute algèbre de Leibniz $\mathfrak{h}$ peut être considérée comme un $\mathfrak{h}_{Lie}$-module muni d'un $\mathfrak{h}_{Lie}$-homomorphisme $\mathfrak{h}\to\mathfrak{h}_{Lie}$. Appliquée à cette situation la procédure précédente redonne bien évidemment la structure d'algèbre de Leibniz de départ de $\mathfrak{h}$.

2.2. *Algèbre associative avec opérateur.* — Soit A une k-algèbre associative munie d'une application k-linéaire $D : A\to A$ vérifiant

$$(*) \qquad D(a\,(Db)) = Da\,Db = D((Da)\,b), \text{ pour tout } a,b\in A.$$

On définit alors un crochet sur A en posant

$$[a,b] := a\,Db - Db\,a.$$

On vérifie que le k-module A, muni de ce crochet est une algèbre de Leibniz que l'on note A_D. Il y a de nombreux exemples de telles situations.

De manière évidente $D = \mathrm{Id}$ vérifie $(*)$ et A_{Id} est l'algèbre de Lie classique associée à une algèbre associative.

– Soit $D : A \to A$ un endomorphisme d'algèbre tel que $D^2 = D$ (idempotent), alors $(*)$ est vérifiée.

– Soit $D : A \to A$ une dérivation de A de carré nul ($D^2 = 0$). La relation $(*)$ est aussi vérifiée.

2.3. *Module tensoriel et algèbre de Leibniz libre [L-P].*

Soit V un k-module et $\overline{T}(V) = V \oplus V^{\otimes 2} \oplus \ldots \oplus V^{\otimes n} \oplus \ldots$ le module tensoriel sur V quotienté par la partie de degré 0 ($= k$). On peut montrer qu'il existe une et une seule structure d'algèbre de Leibniz sur $\overline{T}(V)$ vérifiant

$$[x, v] = x \otimes v, \text{ pour tout } x \in \overline{T}(V), v \in V.$$

L'algèbre de Leibniz $\mathcal{L}(V)$ ainsi définie est en fait l'algèbre de Leibniz libre sur V, i.e. le foncteur $\mathcal{L}$ est adjoint à gauche du foncteur oubli des algèbres de Leibniz dans les k-modules.

Notons que $\mathcal{L}(V)_{\mathrm{Lie}}$ est l'algèbre de Lie libre sur V. L'application canonique $\overline{T}(V) = \mathcal{L}(V) \to \mathcal{L}(V)_{\mathrm{Lie}}$ est induite par

$$x_1 \otimes \ldots \otimes x_n \mapsto [[\ldots[x_1, \ldots], x_{n-1}], x_n].$$

2.4. *Complexe de Hochschild.* — Soit A une algèbre associative sur k et considérons le bord de Hochschild

$$b = A \otimes_k A \otimes_k A \to A \otimes_k A,$$
$$b(x \otimes y \otimes z) = xy \otimes z - x \otimes yz + zx \otimes y.$$

Munissons le quotient $A \otimes A/\operatorname{Im} b$ du crochet

$$[a \otimes b, c \otimes d] = (ab - ba) \otimes (cd - dc).$$

On vérifie que ce crochet est bien défini et satisfait à la relation (L). Donc $A \otimes A/\operatorname{Im} b$ est une algèbre de Leibniz (qui n'est pas une algèbre de Lie en général). Si on munit A de sa structure d'algèbre de Lie usuelle, l'opérateur

$$b : A \otimes A/\operatorname{Im} b \to A, \qquad b(x \otimes y) = xy - yx,$$

devient un homomorphisme d'algèbres de Leibniz. Son noyau (resp. conoyau) est le groupe d'homologie de Hochschild $HH_1(A)$ (resp. $HH_0(A)$).

2.5. *Basses dimensions.* — Si $\mathfrak{g}$ est de dimension 1 sur k on a $[x,x]=\alpha x$ pour un certain $\alpha\in k$. C'est un crochet de Leibniz si et seulement si $\alpha^2=0$. Donc si k est sans diviseurs de zéro, la seule structure d'algèbre de Leibniz sur k est la structure abélienne. Si $\mathfrak{g}$ est de dimension 2 engendrée par x et y et si k est un corps, il y a 3 types d'algèbre de Leibniz suivant la structure de $\mathfrak{g}^{ann}$.

- si $dim\,\mathfrak{g}^{ann}=0$, alors $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie,

- si $dim\,\mathfrak{g}^{ann}=1$ et si $\mathfrak{g}^{ann}$ est un module trivial sur $\mathfrak{g}_{Lie}$, alors $\mathfrak{g}$ est isomorphe à l'algèbre définie par

$[x,x]=[y,x]=[x,y]=0$ et $[y,y]=x$;

- si $dim\,\mathfrak{g}^{ann}=1$ et si $\mathfrak{g}^{ann}$ est un module non trivial sur $\mathfrak{g}_{Lie}$, alors $\mathfrak{g}$ est isomorphe à l' algèbre définie par

$[x,x]=[y,x]=0,[x,y]=x$ et $[y,y]=x$.

2.6. *Algèbre de Lie partielle.* — Considérons deux algèbres de Lie $\mathfrak{g}_1$, et $\mathfrak{g}_0$ munies d'homomorphismes $d_0,d_1:\mathfrak{g}_1\to\mathfrak{g}_0$ et $s_0:\mathfrak{g}_0\to\mathfrak{g}_1$ vérifiant $d_0s_0=\mathrm{id}=d_1s_0$ (par exemple le début d'une algèbre de Lie simpliciale). Posons $\mathfrak{g}=\mathrm{Ker}\,d_1$ et définissons un nouveau crochet $[-,-]'$ sur $\mathfrak{g}$ par :

$$[x,y]'=[x,s_0d_0(y)].$$

On vérifie que ce crochet munit $\mathfrak{g}$ d'une structure d'algèbre de Leibniz. Cette construction apparaît naturellement dans le travail de Baues et Conduché [B-C] sur les modèles homotopiques minimaux. Elle est appelée “algèbre de Lie partielle” et est obtenue comme série centrale descendante d'un module pré-croisé de groupes. C'est un sous-exemple de 2.1.

2.7. *Mécanismes hamiltoniens.* (J.-L. Koszul [K2]). — Soit $\mathfrak{g}$ une super-algèbre de Lie $\mathbb{Z}$-graduée. On note g^i_j, la composante de bidegré (i,j), $i\in\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $j\in\mathbb{Z}$. Soit $w\in\mathfrak{g}^1_1$ tel que $[w,w]=0$. On définit un crochet $[-,-]_w$ sur $\mathfrak{g}_{-1}$ par

$$[a,b]_w:=[a,[w,b]].$$

Ce crochet définit sur $\mathfrak{g}_{-1}$ une structure de super-algèbre de Leibniz (à condition d'échanger les parités de $\mathfrak{g}_{-1}$).

2.8. *Formes différentielles* (J.-L. Brylinski [B]). — Soit X une variété différentiable de dimension n et $\eta\in\Omega^n(X)$ une forme volume. On note $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie des champs de vecteurs ξ sur X tels que $\mathcal{L}(\xi).\eta=0$. L'application $\psi:\mathfrak{g}\to\Omega^{n-1}(X)_{c\ell}$, $\xi\mapsto i(\xi).\eta$ dans les formes fermées est un isomorphisme qui permet de munir $\Omega^{n-1}(X)_{c\ell}$ d'une structure d'algèbre de Lie, dont $d\Omega^{n-2}(X)$ est une sous-algèbre de Lie. On définit alors un crochet sur $\Omega^{n-2}(X)$ par

$$[\alpha,\beta] := \mathcal{L}(\psi^{-1}d(\alpha)).\beta$$

qui munit $\Omega^{n-2}(X)$ d'une structure d'algèbre de Leibniz gauche. Notons que la suite

$$0 \to \Omega^{n-2}(X)_{c\ell} \to \Omega^{n-2}(X) \to d\Omega^{n-2}(X) \to 0$$

est une extension centrale antisymétrique d'algèbres de Leibniz (*cf.* 4.3).

3. Dérivations et bidérivations

3.1. *Définitions.* — Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Leibniz. Une *dérivation* $d : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ est une application k-linéaire qui vérifie

$$d([x,y]) = [dx,y] + [x,dy], \text{ pour tout } x,y \in \mathfrak{g}\,.$$

Une *anti-dérivation* $D : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ est une application k-linéaire qui vérifie

$$D([x,y]) = [Dx,y] - [Dy,x] \text{ pour tout } x,y \in \mathfrak{g}\,.$$

Notons que si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie il n'y a pas de différence entre dérivation et antidérivation.

Par définition, une *bidérivation* de $\mathfrak{g}$ est la donnée d'une dérivation d et d'une anti-dérivation D qui vérifient en outre

$$[x,dy] = [x,Dy], \text{ pour tout } x,y \in \mathfrak{g}\,. \tag{3.1.1}$$

3.2. *Bidérivation intérieure*

Pour tout $x \in \mathfrak{g}$ l'application $\mathrm{ad}(x)$ définie par $\mathrm{ad}(x)(y) = -[y,x]$ est une dérivation et l'application $\mathrm{Ad}(x)$ définie par $\mathrm{Ad}(x)(y) = [x,y]$ est une anti-dérivation. De plus $(\mathrm{ad}(x), \mathrm{Ad}(x))$ est une bidérivation (*cf.* 1.1) appelée la *bidérivation intérieure* associée à x.

3.3. *L'algèbre de Leibniz Bider* ($\mathfrak{g}$)

L'ensemble des bidérivations de $\mathfrak{g}$ forme un k-module que l'on munit d'un crochet en posant

$$[(d,D),(d',D')] = (dd' - d'd, Dd' - d'D).$$

On peut montrer que, non seulement le membre de droite est bien une bidérivation, mais de plus ce crochet vérifie la relation (L). On a ainsi construit l'algèbre de Leibniz des bidérivations de $\mathfrak{g}$, que l'on note $\mathrm{Bider}(\mathfrak{g})$. On vérifie aisément que

$$\mathfrak{g} \to \mathrm{Bider}(\mathfrak{g}),\ x \mapsto (\mathrm{ad}\,x, \mathrm{Ad}\,x)$$

est un morphisme d'algèbres de Leibniz.

4. Extensions abéliennes d'algèbres de Leibniz et représentations

Une *algèbre de Leibniz abélienne* est tout simplement une algèbre de Lie abélienne (i.e. $[x,y]=0$). Par définition une *extension abélienne* d'algèbres de Leibniz est une suite d'algèbres de Leibniz

$$0 \to M \to \mathfrak{h} \to \mathfrak{g} \to 0$$

qui est exacte et scindée en tant que suite de k-modules et dans laquelle M est une algèbre de Leibniz abélienne.

Cette suite exacte permet de définir deux actions de $\mathfrak{g}$ sur M :

$$\begin{aligned}
&[-,-] : \mathfrak{g} \times M \to M, \ [g,m] := [\tilde{g}, m], \\
&[-,-] : M \times \mathfrak{g} \to M, \ [m,g] := [m, \tilde{g}].
\end{aligned}$$

Dans ces deux formules $\tilde{g}$ est un relèvement de $g \in \mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{h}$ et le crochet de droite est celui de $\mathfrak{h}$. La notation ne prête pas à confusion lorsqu'on sait dans quelle algèbre se trouvent les variables.

La relation (L) du crochet de $\mathfrak{h}$ implique que ces deux actions et le crochet de $\mathfrak{g}$ sont reliés par les relations

$$(MLL) \qquad [m,[x,y]] = [[m,x],y] - [[m,y],x]$$

$$(LML) \qquad [x,[m,y]] = [[x,m],y] - [[x,y],m]$$

$$(LLM) \qquad [x,[y,m]] = [[x,y],m] - [[x,m],y]$$

pour tout $m \in M$ et tout $x, y \in \mathfrak{g}$.

4.1. *Définition.* — Pour toute algèbre de Leibniz $\mathfrak{g}$, une *représentation* de $\mathfrak{g}$ est la donnée d'un k-module M et de deux applications bilinéaires $[-,-] : \mathfrak{g} \times M \to M$ et $[-,-] : M \times \mathfrak{g} \to M$ vérifiant les axiomes (MLL), (LML) et (LLM).

Remarquons que le premier axiome ne fait intervenir que l'action à droite de $\mathfrak{g}$ sur M. Notons aussi que les deux derniers impliquent la relation

$$(ZD) \qquad [x,[y,m]] + [x,[m,y]] = 0.$$

4.2. *Représentation adjointe.* — Il est clair que si l'on prend $M = \mathfrak{g}$ et que l'on prend pour chacune des actions de $\mathfrak{g}$ le crochet de $\mathfrak{g}$, on obtient une représentation appelée la *représentation adjointe.*

4.3. *Symétries.* — Une représentation M de $\mathfrak{g}$ est dite *symétrique* si

$$[m, x] + [x, m] = 0 \text{ pour tout } m \in M, x \in \mathfrak{g}\,.$$

Par exemple si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie et M une représentation au sens des algèbres de Lie, alors c'est une représentation symétrique au sens des algèbres de Leibniz.

Une représentation M de $\mathfrak{g}$ est dite *antisymétrique* si

$$[x, m] = 0 \text{ pour tout } m \in M, x \in \mathfrak{g}\,.$$

Il est clair que pour toute algèbre de Leibniz $\mathfrak{g}$ le noyau $\mathfrak{g}^{\text{ann}}$ (*cf.* 2.1) est une représentation de l'algèbre de Leibniz $\mathfrak{g}_{\text{Lie}}$. C'est une représentation antisymétrique.

Une représentation M de $\mathfrak{g}$ est dite *triviale* si elle est à la fois symétrique et antisymétrique, c'est-à-dire

$$[x, m] = 0 = [m, x] \text{ pour tout } m \in M, x \in \mathfrak{g}\,.$$

4.4. *Coreprésentations.* — Dans l'analogie avec les algèbres associatives, les représentations sont l'analogue des modules à droite (voir ci-dessous thm 5.2). La notion duale, c'est-à-dire l'analogue des modules à gauche, est celle de coreprésentation.

Par définition une *coreprésentation* N de l'algèbre de Leibniz $\mathfrak{g}$ est la donnée d'un k-module et de deux actions $[-,-] : \mathfrak{g} \times N \to N$ et $[-,-] : N \times \mathfrak{g} \to N$ vérifiant les axiomes suivants

$$
\begin{array}{ll}
(MLL)' & [[x, y], m] = [x, [y, m]] - [y, [x, m]] \\
(LML)' & [y, [m, x]] = [[y, m], x] - [m, [x, y]] \\
(LLM)' & [[m, x], y] = [m, [x, y]] - [[y, m], x],
\end{array}
$$

pour tout $m \in N$ et tout $x, y \in \mathfrak{g}$.

Notons que les deux dernières relations impliquent la relation

$$(ZD)' \qquad [y, [m, x]] + [[m, x], y] = 0.$$

Il est clair que toute représentation d'une algèbre de Lie définit à la fois une représentation et une coreprésentation au sens des algèbres de Leibniz.

Le produit tensoriel d'une coreprésentation N et d'une représentation M est le quotient de $N \otimes_k M$ par les relations

$$[n, x] \otimes m \sim n \otimes [x, m] \ \textit{et} \ [x, n] \otimes m \sim n \otimes [m, x]$$

pour tout $x \in \mathfrak{g}, n \in N$ et $m \in M$.

5. Algèbre enveloppante (*cf.* [L-P]). — La catégorie des représentations d'une algèbre de Leibniz donnée $\mathfrak{g}$ est une catégorie abélienne. Il est naturel d'essayer de la représenter comme une catégorie de modules sur une certaine algèbre, appelée algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$.

On construit cette algèbre enveloppante de la façon suivante. Considérons deux copies de $\mathfrak{g}$ notées $\mathfrak{g}^\ell$ et $\mathfrak{g}^r$ pour les différencier. Les éléments de $\mathfrak{g}^\ell$ sont notés ℓ_x, ceux de $\mathfrak{g}^r$ sont notés r_x, pour tout $x \in \mathfrak{g}$. Rappelons que pour tout k-module V, $T(V)$ désigne l'algèbre tensorielle $k \oplus V \oplus V^{\otimes 2} \oplus \ldots$, qui est associative et unitaire. Dans $T(\mathfrak{g}^\ell \oplus \mathfrak{g}^r)$ on considère l'idéal bilatère I engendré par les éléments

$$\begin{cases} \text{(i) } r_{[x,y]} - (r_x r_y - r_y r_x) \\ \text{(ii) } \ell_{[x,y]} - (\ell_x r_y - r_y \ell_x) \\ \text{(iii) } (r_y + \ell_y)\ell_x \end{cases}$$

pour tout $x, y \in \mathfrak{g}$.

5.1. Par définition l'*algèbre enveloppante* $UL(\mathfrak{g})$ de l'algèbre de Leibniz $\mathfrak{g}$ est le quotient

$$UL(\mathfrak{g}) := T(\mathfrak{g}^\ell \oplus \mathfrak{g}^r)/I.$$

5.2. Théorème (*cf.* [L-P]). — *La catégorie des représentations (resp. co-représentations) de l'algèbre de Leibniz $\mathfrak{g}$ est équivalente à la catégorie des modules à droite (resp. à gauche) sur $UL(\mathfrak{g})$.*

Il existe plusieurs homomorphismes permettant de comparer $UL(\mathfrak{g})$ à l'algèbre enveloppante, au sens des algèbres de Lie, de $\mathfrak{g}_{\mathrm{Lie}}$. Tout d'abord les homomorphismes d'algèbres d_0, $d_1 : UL(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g}_{\mathrm{Lie}})$ induits par

$$\begin{cases} d_0(\ell_x) = 0 \\ d_0(r_x) = \overline{x} \end{cases} \qquad \begin{cases} d_1(\ell_x) = -\overline{x} \\ d_1(r_x) = \overline{x} \end{cases}$$

sont bien définis, puis, dans l'autre sens, l'homomorphisme $s_0 : U(\mathfrak{g}_{\mathrm{Lie}}) \to UL(\mathfrak{g})$, induit par $s_0(\overline{x}) = r_x$.

5.3. Proposition (*cf.* [L-P]). — *Les homomorphismes d_0, d_1, s_0 ci-dessus vérifient*

$$d_0 s_0 = d_1 s_0 = \mathrm{id} \text{ et } (\operatorname{Ker} d_1)(\operatorname{Ker} d_0) = 0.$$

5.4. *Exemple.* Soit $V = k.x$ un module libre de rang 1 sur k engendré par x. L'algèbre de Leibniz libre $\mathcal{L}(V)$ est isomorphe à $k.x \oplus k.x^2 \oplus \cdots \oplus k.x^n \oplus \cdots$ équipé du crochet

$$\begin{cases} [x, x^i] = x^{i+1} \\ [x^j, x^i] = 0 \qquad \text{si } j > 1. \end{cases}$$

Notons que $\mathcal{L}(V)_{\mathrm{Lie}}$ est l'algèbre de Lie libre sur un générateur, i.e. isomorphe à $k.x$ (l'application quotient envoie x^j sur 0, pour $j > 1$). L'algèbre enveloppante (au sens Lie) de $\mathcal{L}(V)_{\mathrm{Lie}} = k.x$ est l'algèbre de polynômes $k[x]$.

L'algèbre enveloppante (au sens Leibniz) de $\mathcal{L}(V)$ est isomorphe à l'algèbre quotient de polynômes non commutatifs $k\langle x, y\rangle / \{xy = 0\}$. (Poser $r_x + \ell_x = x, \ell_x = -y$). Les applications d_0, d_1 et s_0 sont données par

$$\begin{cases} d_0(x) = x \\ d_0(y) = 0 \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} d_1(x) = 0 \\ d_1(y) = x \end{cases}$$

et $s_0(x) = x + y$.

5.5. *Poincaré-Birkhoff-Witt.* — On peut faire un traitement de UL en tous points analogue à celui de U : filtration, théorème de PBW, algèbre enveloppante d'un produit, etc. (*cf.* [L-P] pour PBW).

6. Cohomologie et homologie d'une algèbre de Leibniz (*cf.* [L1], [C], [L-P]). — Historiquement la notion d'algèbre de Leibniz est apparue de la façon suivante. On sait que le calcul de l'homologie (à coefficients triviaux) d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ peut se faire à partir d'un complexe (de Chevalley-Eilenberg) dont l'espace des n-chaînes est $\Lambda^n \mathfrak{g}$ (produit extérieur n fois). J'ai montré, premièrement, que l'on pouvait relever l'opérateur bord $d : \Lambda^n \mathfrak{g} \to \Lambda^{n-1} \mathfrak{g}$ en un opérateur bord $\tilde{d} : \mathfrak{g}^{\otimes n} \to \mathfrak{g}^{\otimes n-1}$, et, deuxièmement, que la démonstration de $\tilde{d}^2 = 0$ n'utilise que l'identité de Leibniz du crochet. Moralité : le nouveau complexe est encore bien défini pour n'importe quelle algèbre de Leibniz.

En fait on va voir que l'on peut définir plus généralement des groupes d'homologie d'une algèbre de Leibniz à coefficients dans une coreprésentation et des groupes de cohomologie à valeurs dans une représentation. Ces groupes peuvent s'interpréter en termes de foncteurs dérivés (Tor et Ext respectivement) grâce à l'algèbre enveloppante $UL(\mathfrak{g})$.

6.1. *Cohomologie d'une algèbre de Leibniz.* — Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Leibniz et M une représentation de $\mathfrak{g}$. Le n-ième module des cochaînes de $\mathfrak{g}$ à valeurs dans M est

$$C^n(\mathfrak{g}, M) := \mathrm{Hom}_k(\mathfrak{g}^{\otimes n}, M), n \geq 0.$$

On définit un opérateur $d : C^n(\mathfrak{g}, M) \to C^{n+1}(\mathfrak{g}, M)$ par

$$
\begin{aligned}
(df)(x_1,\ldots,x_{n+1}) := {} & [x_1, f(x_2,\ldots,x_{n+1})] \\
& + \sum_{i=2}^{n+1} (-1)^i [f(x_1,\ldots,\hat{x}_i,\ldots,x_{n+1}), x_i] \\
& + \sum_{1\le i<j\le n} (-1)^{j+1} f(x_1,\ldots,x_{i-1},[x_i,x_j],x_{i+1},\ldots,\hat{x}_j,\ldots,x_n).
\end{aligned}
$$

On vérifie que $d \circ d = 0$ grâce aux propriétés des crochets. On a donc un complexe $(C^*(\mathfrak{g}, M), d)$ dont les groupes d'homologie sont notés $HL^n(\mathfrak{g}, M), n \geq 0$.

En basses dimensions on a les interprétations suivantes. Le groupe $HL^0(\mathfrak{g}, M)$ est le sous-module de M des invariants à gauche, i.e. $\{m \in M \mid [x,m] = 0, \forall x \in \mathfrak{g}\}$. Le groupe $HL^1(\mathfrak{g}, M)$ s'identifie au module des dérivations de $\mathfrak{g}$ à valeurs dans M, modulo les dérivations intérieures.

Comme on peut s'y attendre le groupe $HL^2(\mathfrak{g}, M)$ s'interprète en termes d'extensions.

6.2. Théorème [L-P]. — *Pour toute algèbre de Leibniz $\mathfrak{g}$ et toute représentation M de $\mathfrak{g}$ on note* $\mathrm{Ext}(\mathfrak{g}, M)$ *l'ensemble des classes d'isomorphie d'extensions de $\mathfrak{g}$ par M. On a alors un isomorphisme naturel*

$$\mathrm{Ext}(\mathfrak{g}, M) \cong HL^2(\mathfrak{g}, M).$$

Le cas particulier où M est une représentation symétrique est déjà dans [C].

Puisque toute algèbre de Leibniz donne naissance à une extension abélienne de conoyau $\mathfrak{g}_{\mathrm{Lie}}$ et de noyau $\mathfrak{g}^{\mathrm{ann}}$, il existe un élément privilégié dans $HL^2(\mathfrak{g}_{\mathrm{Lie}}, \mathfrak{g}^{\mathrm{ann}})$ que l'on appelle *l'élément caractéristique* de $\mathfrak{g}$.

6.3. *Homologie d'une algèbre de Leibniz.* — Pour toute coreprésentation N de $\mathfrak{g}$ on définit le module des n-chaînes de $\mathfrak{g}$ à coefficients dans N par

$$C_n(\mathfrak{g}, N) = N \otimes \mathfrak{g}^{\otimes n}, n \geq 0.$$

On définit un opérateur bord $d : C_n(\mathfrak{g}, N) \to C_{n-1}(\mathfrak{g}, N)$ par la formule

$$
\begin{aligned}
d_n(m, x_1, \ldots, x_n) = {} & ([m, x_1], x_2, \ldots, x_n) + \\
& + \sum_{i=2}^{n} (-1)^i ([x_i, m], x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_n) + \\
& + \sum_{1\le i<j\le n} (-1)^{j+1} (m, x_1, \ldots, x_{i-1}, [x_i, x_j], \ldots, \hat{x}_j, \ldots, x_n).
\end{aligned}
$$

On vérifie que $d \circ d = 0$ grâce aux propriétés des crochets. On a donc un complexe $(C_*(\mathfrak{g}, M), d)$ dont les groupes d'homologie sont notés

$$HL_n(\mathfrak{g}, M), n \geq 0.$$

6.4. THÉORÈME [L-P]. — *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Leibniz telle que $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}_{\mathrm{Lie}}$ soient libres en tant que k-modules. Alors pour toute représentation M de $\mathfrak{g}$ et toute coreprésentation N de $\mathfrak{g}$ on a des isomorphismes naturels*

$$HL^*(\mathfrak{g}, M) \cong \mathrm{Ext}^*_{UL(\mathfrak{g})}(U(\mathfrak{g}_{\mathrm{Lie}}), M),$$
$$HL_*(\mathfrak{g}, N) \cong \mathrm{Tor}_*^{UL(\mathfrak{g})}(U(\mathfrak{g}_{\mathrm{Lie}}), N).$$

Dans ce théorème $U(\mathfrak{g}_{\mathrm{Lie}})$ est considéré comme un $UL(\mathfrak{g})$-module à droite via l'homomorphisme d_0 décrit après le théorème 5.2. Le principe de la démonstration consiste à construire une résolution libre $W_*(\mathfrak{g})$ du $UL(\mathfrak{g})$-module $U(\mathfrak{g}_{\mathrm{Lie}})$. La démonstration de l'acyclicité se fait grâce à des formules de Cartan.

6.5. *Homologie à coefficients dans la représentation adjointe*

Lorsque $N = k$ est la représentation triviale, l'opérateur d s'écrit simplement

$$d(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (-1)^{j+1} (x_1 \otimes \cdots \otimes x_{i-1} \otimes [x_i, x_j] \otimes \cdots \otimes \hat{x}_j \otimes \cdots \otimes x_n).$$

C'est le complexe défini dans [L1]. Si l'on prend maintenant $N = \mathfrak{g}$, à savoir la représentation adjointe, et que l'on suppose que $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie, alors la formule de 6.3 nous montre que l'on obtient, à un décalage près, le même complexe que précédemment. On a ainsi un isomorphisme

$$HL_n(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) \cong HL_{n+1}(\mathfrak{g}, k), n \geq 0.$$

6.6. *Comparaison avec l'homologie d'une algèbre de Lie*

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie et M un $\mathfrak{g}$-module. Lorsque $\mathfrak{g}$ est considérée comme une algèbre de Leibniz, M peut être considéré à la fois comme une représentation et comme une coreprésentation. Par passage au quotient on définit un morphisme

$$C_n(\mathfrak{g}, M) = M \otimes \mathfrak{g}^{\otimes n} \to M \otimes \Lambda^n \mathfrak{g}$$

qui commute aux opérateurs bords. En effet classiquement (*cf.* par exemple [K1]) l'opérateur bord du complexe donnant l'homologie d'une algèbre de

Lie à coefficients dans un module est

$$d(m \otimes x_1 \wedge \cdots \wedge x_n = \sum (-1)^{i-1} [m, x_i] \otimes x_1 \wedge \cdots \wedge \hat{x}_i \wedge \cdots \wedge x_n)$$
$$+ \sum_{1 \leq i < j \leq n} (-1)^{i+j} m \otimes [x_i, x_j] \wedge x_1 \wedge \cdots \wedge \hat{x}_i \wedge \cdots \wedge \hat{x}_j \wedge \cdots \wedge x_n.$$

On en déduit un homomorphisme naturel

$$HL_n(\mathfrak{g}, M) \to H_n(\mathfrak{g}, M).$$

De même, en cohomologie on a un homomorphisme naturel

$$H^n(\mathfrak{g}, M) \to HL^n(\mathfrak{g}, M).$$

6.7. *Homologie d'une somme d'algèbres de Leibniz*

Dans cette sous-section on prend des coefficients triviaux et on note $HL_n(\mathfrak{g})$ au lieu de $HL_n(\mathfrak{g}, k)$. De plus on suppose que k est un corps.

On sait que pour des algèbres de Lie $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}'$ sur k, l'homologie de la somme directe $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}'$ est donnée par la formule de Künneth (isomorphisme d'espaces vectoriels gradués)

$$H_*(\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}') \cong H_*(\mathfrak{g}) \otimes H_*(\mathfrak{g}').$$

Pour exprimer le résultat pour HL on a besoin de la construction suivante. Le *coproduit*, dans la catégorie de k-algèbres associatives et unitaires, de R et R' est noté $R * R'$. Soit M (resp. N) un k-module $\mathbb{N}$-gradué tel que $M_0 = k$ (resp. $N_0 = k$). On peut le considérer comme une algèbre associative et unitaire en munissant l'idéal d'augmentation $\bigoplus_{i>0} M_i$ (resp. $\bigoplus_{i>0} N_i$) du produit nul. L'unité de $k = M_0$ (resp. N_0) est l'unité de cette algèbre. Il est clair que $M * N$, au sens précédent, est aussi une algèbre $\mathbb{N}$-graduée augmentée. On note $(M * N)_n$ la composante de degré n. On constate que

$$\begin{aligned}
(M * N)_0 &= M_0 \otimes N_0 \cong k, \\
(M * N)_1 &= M_1 \oplus N_1, \\
(M * N)_2 &= M_2 \oplus (M_1 \otimes N_1) \oplus (N_1 \otimes M_1) \oplus M_2,
\end{aligned}$$

plus généralement $(M * N)_n$ s'exprime comme la somme des 2^n composantes du type $X_{i_1} \otimes Y_{i_2} \otimes X_{i_3} \otimes Y_{i_4} \otimes \cdots$ où $X = M$ et $Y = N$, ou $X = N$ et $Y = M$, et $\sum_j i_j = n, i_j \geq 1$.

On remarque que si $M = T(V)$ et $N = T(W)$, où V et W sont deux e.v. sur k, on a alors

$$M * N = T(V) * T(W) \cong T(V \oplus W).$$

6.8. THÉORÈME [L2]. — *Soit k un corps, $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}'$ deux algèbres de Leibniz sur k. On a alors un isomorphisme d'espaces vectoriels gradués*

$$HL_*(\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}') \cong HL_*(\mathfrak{g}) * HL_*(\mathfrak{g}').$$

La démonstration de ce théorème utilise une variante algébrique de l'intégrale itérée de Chen.

6.9. *Structure de comonoïde*

L'homologie classique d'une algèbre de Lie admet une structure de cogèbre induite par la diagonale. Dans le cas des algèbres de Leibniz $HL_*(\mathfrak{g})$ admet une structure de *comonoïde*, i.e. la diagonale induit un homomorphisme

$$\Delta_* : HL_*(\mathfrak{g}) \to HL_*(\mathfrak{g}) * HL_*(\mathfrak{g})$$

qui est co-associatif. L'existence de Δ_* résulte du théorème précédent.

6.10. *Théorie de la déformation*

A toute catégorie "algébrique", par exemple les algèbres associatives, les algèbres associatives et commutatives, les algèbres de Lie, est associée une théorie de la déformation, qui est controlée par une certaine théorie cohomologique. Dans les exemples ci-dessus on trouve, en caractéristique zéro, la cohomologie de Hochschild, la cohomologie de Harrison, (= André-Quillen) et la théorie de cohomologie classique des algèbres de Lie (Chevalley-Eilenberg-Koszul) respectivement. On peut montrer que pour les algèbres de Leibniz cette théorie cohomologique est précisément HL^* (cf.[R]).

7. Calculs de groupes d'homologie HL

On a déjà remarqué (*cf.* 6.5) que l'homologie à coefficients dans la représentation adjointe est, à un décalage près, l'homologie à coefficients triviaux.

Dans la suite on ne s'intéresse qu'aux coefficients triviaux et on note $HL_n(\mathfrak{g})$ au lieu de $HL_n(\mathfrak{g}, k)$.

7.1. *Algèbre de Leibniz abélienne.* — Il est clair d'après la définition de l'homologie, que si $\mathfrak{g}$ est abélienne, alors $HL_n(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}^{\otimes n}$, $n \geq 0$. L'homomorphisme de comparaison avec l'homologie classique est donc simplement le passage au quotient $\mathfrak{g}^{\otimes n} \to \Lambda^n \mathfrak{g}$. Ainsi les théories HL et H sur les algèbres de Lie sont-elles distinctes dès que $n \geq 2$.

En cohomologie on a $HL^n(\mathfrak{g}) = \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}^{\otimes n}, k)$ dans le cas abélien. Ainsi si $\mathfrak{g}$ est de dimension 1 sur k (i.e. $\mathfrak{g} = k$), alors $HL^2(k) = \mathrm{Hom}(k^{\otimes 2}, k) \cong k$.

7.2. *Extensions centrales de $sl_n(A)$.* — Soit A une algèbre associative unitaire sur le corps k, et $g\ell_n(A)$ (resp. $sl_n(A)$) son algèbre des matrices (resp. des matrices de trace nulle). On peut montrer que pour tout $n \geq 5$ on a un isomorphisme

$$HL_2(sl_n(A)) \cong HH_1(A),$$

où $HH_1(A)$ est le premier groupe d'homologie de Hochschild de A à coefficients dans A. Cet isomorphisme est relié à l'algèbre de Leibniz $A \otimes A/\operatorname{Im} b$ (décrite en 2.4) par l'existence du diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & HH_1(A) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & A \otimes A/\operatorname{Im} b \arrow[r, "b"] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d] & HH_0(A) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & 0 \\
0 \arrow[r] & HL_2(sl_n(A)) \arrow[r] & st\ell_n(A) \arrow[r] & g\ell_n(A) \arrow[r] & HL_1(g\ell_n(A)) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

dans lequel le carré du milieu est un diagramme d'algèbres de Leibniz (*cf.* [L-P] pour plus de détails).

7.3. *Algèbres de Lie réductives.* — Soit k un corps de caractéristique zéro. Pour toute algèbre de Lie semi-simple $\mathfrak{g}$ sur k on a (cf. [N])

$$HL_n(\mathfrak{g}) = 0 \ , \ n > 0.$$

En particulier on a $HL_n(sl_r(k)) = 0$ pour tout $n \geq 1$ et donc $HL_n(gl_r(k)) \cong k$ pour tout $n \geq 0$.

7.4. *Algèbre de Lie des matrices $g\ell(A)$.* — On note par $g\ell(A)$ la réunion $\bigcup_n g\ell_n(A)$ des matrices sur A de taille finie quelconque. On suppose que k est un corps de caractéristique 0. On a alors l'isomorphisme d'espaces vectoriels gradués suivant ([C], [L1]),

$$HL_*(g\ell(A)) \cong T(HH_{*-1}(A)),$$

où $HH_*(A)$ désigne l'homologie de Hochschild de A à coefficients dans A et T est le foncteur module tensoriel. Le point principal de la preuve est dû à C. Cuvier.

Remarquons que ce théorème est tout à fait cohérent avec les résultats précédents (car $HH_n(k) = 0$ pour $n > 0$ par exemple).

En fait on a des résultats plus précis pour $g\ell_n(A)$ (*cf.* [C], [L1]),

– les homomorphismes naturels

$$HL_n(g\ell_n(A)) \to HL_n(g\ell_{n+1}(A)) \to \cdots \to H_n(g\ell(A))$$

sont des isomorphismes,

– si A est commutatif on a une suite exacte

$$HL_n(g\ell_{n-1}(A)) \to HL_n(g\ell_n(A)) \to \Omega^{n-1}_{A/k} \to 0 \tag{7.4.1}$$

où $\Omega^n_{A/k}$ est l'e.v. des n-formes différentielles de Kähler de A sur k.

Lorsque A est commutatif et lisse nous conjecturons que $HL_*(g\ell_r(A))$ peut se calculer à partir de la filtration par les λ-opérations de l'homologie de Hochschild :

$$HL_*(g\ell_r(A)) \cong T(\bigoplus_{i<r} HH^{(i)}_{*-1}(A)),$$

cf. [L1, 10.6.22] pour plus de détails. Le calcul de 7.3 montre que cette conjecture est vraie pour $A = k$.

7.5. *Algèbre de Virasoro.* — L'algèbre de Lie $\mathfrak{g} = \mathrm{Der}(\mathbb{C}[z, z^{-1}])$ des dérivations des polynômes de Laurent est parfaite ($\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$). Elle admet donc une extension centrale universelle que l'on appelle l'algèbre de Virasoro. Il se trouve que cette extension est aussi universelle dans la catégorie des algèbres de Leibniz (*cf.* [L-P]). En termes cohomologiques ce résultat signifie qu'il y a des isomorphismes

$$H^2(\mathfrak{g}) \cong HL^2(\mathfrak{g}) \cong k \text{ et } HL_2(\mathfrak{g}) \cong H_2(\mathfrak{g}) \cong k.$$

7.6. *Algèbre de Lie étendue (d'après V. Gnedbaye [Gn]).* — Pour toute algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et toute algèbre unitaire associative et commutative A, le produit tensoriel $\mathfrak{g} \otimes A$ est muni d'une structure d'algèbre de Lie. On peut construire un morphisme naturel

$$HL_*(\mathfrak{g} \otimes A) \to H_*(C(A) \otimes U(\mathfrak{g})_{ab}, b \otimes 1),$$

où $(C(A), b)$ est le complexe de Hochschild de A. Lorsque $\mathfrak{g}$ est réductive et parfaite on peut en déduire un isomorphisme

$$HL_2(\mathfrak{g} \otimes A) \cong HH_1(A) \otimes S^2(\mathfrak{g})_{\mathfrak{g}}$$

et un épimorphisme

$$HL_3(\mathfrak{g} \otimes A) \to (HH_2^-(A) \otimes S^2(\mathfrak{g})_{\mathfrak{g}}) \oplus (HH_2^+(A) \otimes S^3(\mathfrak{g})_{\mathfrak{g}}).$$

8. Liens avec la topologie algébrique

8.1. *Modèle de James de* $\Omega S^2 BG$ (d'après J. Lodder [Lo])

Soit G un groupe discret, BG son classifiant topologique, S^2BG la double suspension réduite d'icelui et enfin $\Omega S^2 BG$ l'espace de lacets de cette suspension. Il est bien connu que l'homologie de ce dernier espace se calcule grâce à l'isomorphisme

$$H_*(\Omega S^2 BG) \cong T(\widetilde{H}_{*-1}(G)), \tag{8.1.1}$$

où $\widetilde{H}_*$ désigne l'homologie réduite ($\widetilde{H}_0 = 0, \widetilde{H}_i = H_i$ pour $i > 0$). D'autre part l'homologie de Hochschild de l'algèbre de groupe $k[G]$ se compare à $\widetilde{H}_*(G)$ grâce à l'existence d'une surjection naturelle

$$HH_{*-1}(k[G]) \twoheadrightarrow \widetilde{H}_{*-1}(G, k).$$

En prenant le module tensoriel de cette application et en utilisant les isomorphismes (7.4.1) et (8.1.1) on obtient une surjection

$$HL_*(g\ell(k[G])) \twoheadrightarrow H_*(\Omega S^2 BG, k).$$

Dans [Lo], J. Lodder a montré que l'on pouvait relever très explicitement cette application au niveau des complexes de chaînes, à condition de remplacer ΩSX par son modèle de James

$$JX = \coprod_n X^n / \sim .$$

Dans cette interprétation chacun des complexes de chaînes se scinde en une somme de sous-complexes. Le i-ième sous-complexe se présente comme le complexe total d'un module i-simplicial et son homologie est précisément la composante T^i.

Comme sous-produit de ce travail J. Lodder obtient une simplification de la démonstration originale de l'isomorphisme (7.4.1).

8.2. *Homologie des modules simpliciaux-symétriques*

Il existe une catégorie ΔS (*cf.* [F-L]) qui contient à la fois les morphismes de la catégorie simpliciale Δ et les éléments des groupes symétriques S_{n+1} ($= \mathrm{Aut}_{\Delta S}[n]$). Il existe aussi un foncteur $\Delta^{op} \to \Delta S$, qui est injectif sur l'ensemble des morphismes de Δ^{op}. Les images des dégénérescences et des faces par ce foncteur sont :

$$\begin{cases} s_j \longmapsto \delta_{j+1} & \text{pour } j = 0, \dots, n-1, \\ d_i \longmapsto \sigma_i & \text{pour } i = 0, \dots, n-1, \\ d_n \longmapsto \sigma_0 c_0^n & \text{où } c_0^n \text{ est le cycle } (0\ 1 \dots n) \in S_{n+1}, \end{cases}$$

cf. [L1], §6.1.11.

A tout foncteur $M : \Delta S \to (k-\mathrm{Mod})$ on peut associer un complexe de Leibniz (M_*, d) en posant

$$(8.2.1) \quad d := \sum_{0<i<j\leq n} (-1)^{j+1} d_i(c_{i+1}^j - c_i^j) + \sum_{0<j\leq n} (-1)^j (d_0 c_1^j + d_n c_j^n),$$

où d_i est la i-ième face décrite ci-dessus et c_i^j est le cycle $(i\; i+1 \dots j) \in S_{n+1} = \mathrm{Aut}_{\Delta S}[n]$.

La relation $d^2 = 0$ est une conséquence des relations, dans ΔS, entre les morphismes de Δ et les éléments des groupes symétriques (*cf.* par exemple [L1], §E.6.1.7). On note $HL_*(M)$ l'homologie du complexe (M_*, d).

Voici un exemple de module simplicial-symétrique. Soit A une algèbre associative unitaire sur k. Le foncteur $C(A) : \Delta S \to (k-\mathrm{Mod})$ est défini par $[n] \longmapsto A^{\otimes n+1}$ et

$$\begin{cases} \delta_i(a_0, \dots, a_n) = (a_0, \dots, a_{i-1}, 1, a_i, \dots, a_n), & \text{pour } i = 0, \dots, n+1, \\ \sigma_j(a_0, \dots, a_n) = (a_0, \dots, a_j a_{j+1}, \dots, a_n), & \text{pour } j = 0, \dots, n-1, \\ c_i^{i+1}(a_0, \dots, a_n) = (a_0, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, a_i, a_{i+2}, \dots, a_n), & \text{pour } i = 0, \dots, n-1. \end{cases}$$

On vérifie aisément que le complexe $(C(A), d)$ est précisément le complexe de Leibniz de A considérée comme une algèbre de Leibniz (en fait de Lie) pour le crochet usuel $[a,b] = ab - ba$.

Un autre exemple est donné par le foncteur $[n] \mapsto k[S_{n+1}] \otimes A^{\otimes n+1}$ issu de la démonstration de l'isomorphisme (7.4.1).

En fait on n'a pas besoin de toute la catégorie ΔS pour définir (M_*, d). Il suffit de se limiter à la sous-catégorie $\Delta^{op} S'$ décrite dans [L1] p. 220.

Remarque. Il est naturel de s'interroger sur le rapport entre cette généralisation non-commutative et la théorie quantique. Ces deux généralisations sont orthogonales, mais on peut les réunifier en construisant des théories de type Hochschild et de type Leibniz pour certains modules simpliciaux tressés. On utilise alors la catégorie ΔB (*cf.* [F-L]) faite à partir de Δ et des groupes de tresses. En particulier on peut appliquer ces théories au foncteur $[n] \mapsto A^{\otimes n+1}$, lorsque l'algèbre A est munie d'une matrice de Yang-Baxter $R : A \otimes A \to A \otimes A$, satisfaisant certaines propriétés.

8.3. *Homotopie rationnelle non-commutative*

La catégorie homotopique des CW-complexes simplement connexes est, rationnellement, équivalente à la catégorie homotopique des $\mathbb{Q}$-algèbres de Lie différentielles graduées réduites. Il est alors naturel de considérer la catégorie homotopique des $\mathbb{Q}$-algèbres de *Leibniz* différentielles graduées réduites comme une théorie de l'homotopie rationnelle "non commutative". Ceci amène immédiatement un certain nombre de questions naturelles : existence de modèles minimaux, analogue non commutatif des cogèbres cocommutatives, analogue des groupes simpliciaux (*cf.* 10 et 11), etc.

9. Homologie non commutative des algèbres associatives

Soit A une algèbre associative unitaire sur k. On suppose que k contient $\mathbb{Q}$. Les énoncés et conjectures qui suivent peuvent s'exprimer en utilisant comme coefficients un A-bimodule M, mais, pour simplifier, on prendra ici $M = A$.

9.1. *Rappel du cas classique* (cf. par exemple [L1]). — Le complexe de Hochschild (C_*, b), où $C_n = A \otimes A^{\otimes n}$, d'homologie $HH_n(A)$, possède les propriétés suivantes. Pour tout A les idempotents eulériens permettent de scinder C_n en

$$C_n = C_n^{(1)} \oplus C_n^{(2)} \oplus \ldots \oplus C_n^{(n)}.$$

(9.1.1) Si A est commutative, $C_*^{(1)}$ est un sous-complexe de C_*, et son homologie n'est autre que l'homologie de Harrison-André-Quillen.

(9.1.2) Si A est commutative et lisse sur k, alors $HH_n^{(1)}(A) = 0$ pour $n > 1$ et $HH_1^{(1)}(A) = \Omega^1_{A/k}$. Pour l'homologie de Hochschild on a alors le théorème de Hochschild-Kostant-Rosenberg :

$$HH_*(A) \cong \Lambda_A(H_*^{(1)}(A)) = \Omega^*_{A/k},$$

où $\Omega^n_{A/k}$ désigne le module des n-formes différentielles de Kaehler.

(9.1.3) Le module $C_n^{(n)}$ est isomorphe à $A \otimes \Lambda^n A$ ($M \otimes \Lambda^n A$ dans la version bimodule), et la restriction du bord de Hochschild b à $C_n^{(n)}$ aboutit dans $C_{n-1}^{(n-1)}$. On a alors un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} C_n^{(n)} & \xrightarrow{b} & C_{n-1}^{(n-1)} \\ \| \wr & & \| \wr \\ A \otimes \Lambda^n A & \xrightarrow{d} & A \otimes \Lambda^{n-1} A, \end{array}$$

dans lequel d est le bord de Chevalley-Eilenberg (cf. 6.6) pour la structure d'algèbre de Lie de A donnée par $[x, y] = xy - yx$.

9.2. *Conjecture pour le cas non commutatif.* — On conjecture qu'il existe un complexe $CL_* = (CL_*(A), \tilde{b})$, et donc des groupes d'homologie $HL_*(A)$, ayant les propriétés suivantes.

(9.2.0) Il existe une application naturelle non triviale

$$\mu : HL_*(A) \to HH_*(A).$$

(9.2.1) Pour tout n le module CL_n admet une décomposition

$$CL_n = CL_n^{(1)} \oplus CL_n^{(2)} \oplus ... \oplus CL_n^{(n)}.$$

Le complexe $CL_*^{(1)}$ est un sous-complexe de CL_*, et son homologie est précisément l'homologie de Hochschild $HH_n(A)$ pour $n \geq 1$.

(9.2.2) Si l'algèbre associative et unitaire A est *quasi-libre* au sens de Cuntz-Quillen (cf. [C-Q]), on sait que $HH_n(A) = 0$ pour $n > 1$, et que $HH_1(A) = A \otimes (A/k)$. Adoptons les notations de Cuntz et Quillen : $\Omega^n A := A \otimes (A/k)^{\otimes n}$ (n-formes différentielles non commutatives sur A). La théorie HL devrait vérifier

$$HL_n(A) = T_A(H_*^{(1)}(A)) = \Omega^n A.$$

(9.2.3) La composante $CL_n^{(n)}$ devrait être isomorphe à $A \otimes A^{\otimes n}$ (plus précisément $M \otimes A^{\otimes n}$ dans la version bimodule), et on devrait avoir un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} CL_n^{(n)} & \xrightarrow{\tilde{b}} & CL_{n-1}^{(n-1)} \\ \| \wr & & \| \wr \\ A \otimes A^{\otimes n} & \xrightarrow{d} & A \otimes A^{\otimes n-1}, \end{array}$$

où d est le bord de Leibniz pour la structure de Leibniz de A donnée par $[x, y] = xy - yx$.

9.3. *Remarque.* — Il y a fort à penser que les groupes $HL_*(A)$ sont en fait définis sur une catégorie plus large que celle des algèbres associatives unitaires. De même qu'une algèbre associative définit une algèbre de Lie, tout objet de cette catégorie devrait définir une algèbre de Leibniz.

10. Homologie non commutative des groupes et K-théorie des corps

10.1. *Théorie HL pour les groupes.* — Il semble tout à fait raisonnable de penser qu'il existe une théorie HL pour la catégorie des groupes.

Voici quelques-unes des propriétés que l'on peut espérer des groupes abéliens $HL_n(G)$ lorsque G est un groupe.

(a) $HL_0(G) = \mathbb{Z}$, $HL_1(G) = G/[G,G]$.

(b) Il existe une application naturelle

$$\varphi : HL_n(G) \to H_n(G) \ , \ n \geq 0.$$

(c) Si G est abélien $HL_n(G_{\mathbb{Q}}) \cong (G_{\mathbb{Q}})^{\otimes n}$ et l'application φ est le passage au quotient

$$(G_{\mathbb{Q}})^{\otimes n} \to \Lambda^n(G_{\mathbb{Q}}).$$

(d) Pour deux groupes G et G' on a un isomorphisme d'espaces vectoriels gradués

$$HL_*(G \times G')_{\mathbb{Q}} \cong HL_*(G)_{\mathbb{Q}} * HL_*(G')_{\mathbb{Q}},$$

où $*$ est l'opération décrite en 6.7.

(e) Pour tout anneau A il existe un groupe abélien gradué $KL_*(A)$ tel que

$$HL_*(GL(A))_{\mathbb{Q}}) \cong T(KL_*(A)_{\mathbb{Q}}).$$

(f) Pour tout corps F on a

$$KL_2(F) \cong HL_2(SL(F)) \cong F^\times \wedge F^\times.$$

Il est aussi raisonnable de conjecturer l'existence d'une transformation naturelle $KL_* \to K_*$ (=K-théorie algébrique) induisant un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} HL_*(GL(A))_{\mathbb{Q}} & \longrightarrow & H_*(GL(A))_{\mathbb{Q}} \\ \| \wr & & \| \wr \\ T(KL_*(A)_{\mathbb{Q}}) & \longrightarrow & \Lambda(K_*(A)_{\mathbb{Q}}). \end{array}$$

Remarquons que, rationnellement, la théorie KL serait complètement déterminée par la théorie HL. Cette théorie KL devrait être reliée aux conjectures de Lichtenbaum et Beilinson concernant le calcul de $K_*(F)_{\mathbb{Q}}$, où F est un corps, de la manière suivante.

10.2. *Les complexes* Γ. — Lichtenbaum et Beilinson conjecturent l'existence, pour tout corps commutatif F, d'un complexe de groupes abéliens $\Gamma_F(n)$ de longueur $n-1$:

$$\Gamma_F(n)_1 \to \Gamma_F(n)_2 \to \cdots \to \Gamma_F(n)_n$$

tel que

$$K_p(F)_{\mathbb{Q}} \cong \bigoplus_{p=n-i+1} H_i(\Gamma_F(n))_{\mathbb{Q}}.$$

Pour $n=1$ on prend $\Gamma_F(1)_1 = F^\times$, d'où $K_1(F)_{\mathbb{Q}} = (F^\times)_{\mathbb{Q}}$. Pour $n=2$ Bloch a construit un complexe

$$\Gamma_F(2) : \mathcal{B}_2(F) \xrightarrow{d^\Gamma} F^\times \wedge F^\times, [x] \longmapsto (1-x)\wedge x$$

où $\mathcal{B}_2(F)$ est le groupe abélien libre sur $F^\times - \{1\}$, modulo l'équation fonctionnelle du dilogarithme

$$[x]-[y]+\left[\frac{y}{x}\right]-\left[\frac{y(1-x)}{x(1-y)}\right]+\left[\frac{1-x}{1-y}\right] \sim 0.$$

Pour $n=3$ un complexe $\Gamma_F(3)$ a été proposé par A. Goncharov [Go].

10.3. *Comparaison avec le cas additif*

Comparons ces conjectures avec le problème analogue où l'on a remplacé le groupe linéaire (d'un corps) par l'algèbre de Lie des matrices (d'une algèbre associative lisse). Il faut alors remplacer la K-théorie algébrique par l'homologie cyclique (car rationnellement $H_*(g\ell(A)) \cong \Lambda(HC_{*-1}(A))$, *cf.* [L-Q]). L'analogue additif de $\Gamma_F(n)$ est alors le complexe de de Rham tronqué

$$\Gamma_A^+(n) : A \xrightarrow{d} \Omega_A^1 \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \Omega_A^{n-1}.$$

Autrement dit, rationnellement on a un isomorphisme

$$HC_{p-1}(A) \cong \Omega_A^{p-1}/d\Omega_A^{p-2} \oplus H_{DR}^{p-3}(A) \oplus H_{DR}^{p-5}(A) \oplus \cdots.$$

Cette décomposition de l'homologie cyclique est la décomposition induite par les λ-opérations (*cf.* [L1]). C'est aussi ce que suppose la conjecture ci-dessus reliant K et l'homologie de Γ.

Dans ce contexte l'homomorphisme composé

$$HH_{n-1}(A) \cong \Omega_A^{n-1} \twoheadrightarrow H_{n-1}(\Gamma_A^+(n)) \hookrightarrow HC_{n-1}(A),$$

qui est l'application naturelle de l'homologie de Hochschild dans l'homologie cyclique, n'est autre que la restriction aux parties primitives de $\varphi : HL_n(g\ell(A)) \to H_n(g\ell(A))$.

Il est donc naturel de penser que, dans le contexte multiplicatif (i.e. GL),

le bon groupe $\Gamma_F(n)_n$ est $KL_n(F)$.

11. Intégrer les algèbres de Leibniz. — Le problème consiste à définir des objets algébriques qui seraient aux algèbres de Leibniz ce que les groupes sont aux algèbres de Lie. Ces objets mythiques seront appelés, pour l'instant, des *coquecigrues*. Une coquecigrue G devrait être munie d'un "commutateur abstrait" $[-,-] : G \times G \to G$ ayant certaines des propriétés des commutateurs dans les groupes. Les groupes seraient des cas particuliers de coquecigrues et toute coquecigrue aurait un groupe universel associé G_{gr}. Les théories d'homologie HL_* et de cohomologie HL^* devraient s'étendre à la catégorie des coquecigrues et le groupe $HL^2(G,A)$ classifierait les extensions, dans la catégorie des coquecigrues, de G par A. En particulier il devrait y avoir au-dessus de $SL_n(F)$ une coquecigrue universelle fournissant une extension de $SL_n(F)$ par $F^\times \wedge F^\times$ pour $n \geq 5$.

L'une des relations attendues entre coquecigrues et algèbres de Leibniz est la suivante. Les commutateurs abstraits définissent une série centrale descendante dont le gradué associé est une algèbre de Leibniz (le crochet étant induit par le commutateur abstrait). Une coquecigrue libre doit donner une algèbre de Leibniz libre.

La catégorie homotopique des coquecigrues simpliciales devrait fournir un modèle entier de la théorie de l'homotopie non commutative décrite en 8.3.

Une coquecigrue munie d'une structure de variété (avec quelques compatibilités) serait un groupe de Leibniz, c'est-à-dire que l'espace tangent aurait une structure d'algèbre de Leibniz (on peut rêver).

Bibliographie

[B-C] BAUES, H.J., CONDUCHE, D., *The central series for Peiffer commutators in groups with operators*, J. Algebra 133 (1990), 1-34.

[B] BRYLINSKI, J.-L., Communication personnelle, mars 1991.

[C-Q] CUNTZ, J., QUILLEN, D., *Algebra extensions and nonsingularity*, preprint Heidelberg, 1992.

[C] CUVIER, C., *Homologie de Leibniz et homologie de Hochschild*, Comptes Rendus Acad. Sc. Paris Sér. A-B 313 (1991), 569-572.

[F-L] FIEDOROWICZ, Z., LODAY, J-L., *Crossed simplicial groups and their associated homology*, Transactions A.M.S. 326 (1991), 57-87.

[Gn] GNEDBAYE, V., *Homologie de Leibniz d'algèbres de Lie étendues à une algèbre commutative*, preprint IRMA (1993).

[Go] GONCHAROV, A.B., *Geometry of configurations, polylogarithms and motivic cohomology*, preprint.

[K1] KOSZUL, J.-L., *Homologie et cohomologie des algèbres de Lie*, Bull. Soc. Math. France 78 (1950), 65-127.

[K2] KOSZUL, J.-L., Communication personnelle, janvier 1991.

[L1] LODAY, J.-L., *"Cyclic Homology"*, Grund. math. Wiss. 301, Springer Verlag, 1992.

[L2] LODAY, J.-L., *Künneth-style formula for the homology of Leibniz algebras*, preprint IRMA, (1993).

[L-P] LODAY, J.-L., PIRASHVILI, T., *Universal enveloping algebras of Leibniz algebras and (co)homology*, Math. Annal. 296 (1993), 139-158.

[L-Q] LODAY, J.-L., QUILLEN, D., *Cyclic homology and the Lie algebra homology of matrices*, Comment. Math. Helvetici 59 (1984), 565-591.

[Lo] LODDER, J.M., *Leibniz homology and the James model*, preprint (1993), New Mexico State University.

[N] NTOLO, P., Thèse en préparation.

[R] ROGER, C., Communication personnelle.

Institut de Recherche Mathématique Avancée
Université Louis Pasteur et C.N.R.S.
7, rue René-Descartes
67084 Strasbourg Cedex

e-mail loday@math.u-strasbg.fr