RECHERCHE COOPÉRATIVE SUR PROGRAMME Nº 25

G. MALTSINIOTIS

Formes différentielles invariantes à gauche sur le groupe quantique $GL_{p,q}(2)$

Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg - RCP25, 1992, tome 43
« Conférences de A. Aspect, B. Carter, R. Coquereaux, G.W. Gibbons, Ch. Kassel, Y. Kosman-Schwarzbach, S. Majid, G. Maltsiniotis, P. Pansu, G.A. Vilkovisky, Z. Wojtkowiak », , exp. nº 9, p. 163-180

<http://www.numdam.org/item?id=RCP25_1992__43__163_0>

FORMES DIFFERENTIELLES INVARIANTES A GAUCHE SUR LE GROUPE QUANTIQUE $GL_{p,q}(2)$

G. MALTSINIOTIS

Le but de cet article est de décrire les formes différentielles invariantes à gauche, sur la déformation quantique à deux paramètres du groupe $GL(2)$, relatives au calcul différentiel introduit dans [**Mal1**] et redécouvert indépendamment par Manin [**Man4**]. On en déduit des formules de Maurer-Cartan quantiques et une description de l'algèbre enveloppante de ce groupe quantique. Je tiens à exprimer ma gratitude à P. Cartier qui a grandement influencé ce travail.

(0.0.) On se fixe un anneau commutatif K. On dira module pour K-module, application linéaire pour application K-linéaire et $\otimes$ désignera le produit tensoriel sur K. Les algèbres considérées seront des K-algèbres associatives unifères et les morphismes d'algèbres des morphismes unifères. Si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille d'indéterminées, on notera $K\langle(x_i)_{i\in I}\rangle$ l'algèbre des polynômes non commutatifs en les x_i, autrement dit, l'algèbre associative unifère libre engendrée par la famille $(x_i)_{i\in I}$.

(0.1.) Bigèbres différentielles graduées. On rappelle qu'une *bigèbre* est un triplet (B,Δ,ε), où B désigne une algèbre et

$$\Delta : B \to B\otimes B \quad \text{et} \quad \varepsilon : B \to K$$

des morphismes d'algèbres, appelés respectivement *coproduit* et *coünité*, satisfaisant aux relations

$$(\Delta\otimes 1_B)\Delta = (1_B\otimes\Delta)\Delta \quad \text{et} \quad (\varepsilon\otimes 1_B)\Delta = 1_B = (1_B\otimes\varepsilon)\Delta \quad .$$

On appelle *antipode* d'une bigèbre (B,Δ,ε) une application linéaire $I : B \to B$ telle que

$$\mu(I\otimes 1_B)\Delta = \eta\varepsilon = \mu(1_B\otimes I)\Delta \quad ,$$

où μ (resp. η) désigne l'application linéaire $\mu : B\otimes B \to B$ (resp. $\eta : K \to B$) définie par la multiplication (resp. l'unité)

$$\mu(a\otimes b) = ab\ , \quad a,b\in B \quad \text{et} \quad \eta(\lambda) = \lambda\cdot 1\ , \quad \lambda\in K \quad .$$

Un antipode d'une bigèbre, s'il existe, est unique et est un antihomomorphisme de bigèbres :

$$I(ab) = I(b)I(a)\ , \quad a,b\in B\ , \qquad I(1) = 1$$

et

$$I\Delta = \sigma\Delta I \quad \text{et} \quad \varepsilon I = \varepsilon \quad ,$$

où $\sigma : B \otimes B \to B \otimes B$ désigne l'application linéaire définie par $\sigma(a \otimes b) = b \otimes a$. On appelle *bigèbre de Hopf* une bigèbre munie d'un antipode.

Une *algèbre différentielle graduée* est un couple (Ω, d) formé d'une algèbre graduée par $\mathbb{N}$

$$\Omega = \bigoplus_{m \in \mathbb{N}} \Omega^m \quad , \qquad \Omega^m \Omega^n \subset \Omega^{m+n} \quad ,$$

et d'une application linéaire homogène de degré 1

$$\mathrm{d} : \Omega \to \Omega \quad , \quad \mathrm{d} = \bigoplus_{m \in \mathbb{N}} \mathrm{d}_m \quad , \quad \mathrm{d}_m : \Omega^m \to \Omega^{m+1} \quad ,$$

satisfaisant aux conditions :

i) $\mathrm{d}(ab) = \mathrm{d}(a)b + (-1)^m a\, \mathrm{d}(b)$, $\quad a \in \Omega^m$, $b \in \Omega$;

ii) $\mathrm{d}^2 = 0$.

Un morphisme d'une algèbre différentielle graduée (Ω, d) dans une autre (Ω', d') est une application linéaire homogène de degré 0

$$u : \Omega \to \Omega' \quad , \quad u = \bigoplus_{m \in \mathbb{N}} u_m \quad , \quad u_m : \Omega^m \to \Omega'^m$$

telle que $u\,\mathrm{d} = \mathrm{d}'\,u$. Si (Ω', d') et (Ω'', d'') désignent deux algèbres différentielles graduées, leur produit tensoriel (Ω, d) est défini comme suit. Comme module $\Omega = \Omega' \otimes \Omega''$. La graduation de Ω est définie par

$$\Omega^m = \bigoplus_{m_1 + m_2 = m} \Omega'^{m_1} \otimes \Omega''^{m_2} \quad ,$$

la multiplication est définie par

$$(a' \otimes a'')(b' \otimes b'') = (-1)^{mn} a'b' \otimes a''b'' \quad , a' \in \Omega' ,\ b' \in \Omega'^m ,\ a'' \in \Omega''^n ,\ b'' \in \Omega''$$

et la différentielle par

$$\mathrm{d}(a' \otimes a'') = \mathrm{d}'\,a' \otimes a'' + (-1)^m a' \otimes \mathrm{d}''\,a'' \quad , \quad a' \in \Omega'^m ,\ a'' \in \Omega'' \quad .$$

On dira souvent, par abus de langage, que Ω est une algèbre différentielle graduée (sans préciser la différentielle) et on notera $\Omega'\,{}^g\!\otimes \Omega''$ le produit tensoriel de deux algèbres différentielles graduées Ω' et Ω''. Une *bigèbre différentielle graduée* est un quadruplet $(\Omega, \mathrm{d}, \Delta, \varepsilon)$, où (Ω, d) est une algèbre différentielle graduée et

$$\Delta : \Omega \to \Omega\,{}^g\!\otimes \Omega \quad \text{et} \quad \varepsilon : \Omega \to K$$

sont des morphismes d'algèbres différentielles graduées (K étant muni de la structure triviale d'algèbre différentielle graduée), appelés respectivement *coproduit* et *coünité*, satisfaisant aux relations

$$(\Delta \otimes 1_\Omega)\Delta = (1_\Omega \otimes \Delta)\Delta \quad \text{et} \quad (\varepsilon \otimes 1_\Omega)\Delta = 1_\Omega = (1_\Omega \otimes \varepsilon)\Delta \quad .$$

On se gardera de croire que $(\Omega, \Delta, \varepsilon)$ soit alors en général une bigèbre ordinaire (en effet, les algèbres $\Omega \otimes \Omega$ et $\Omega \,{}^g\!\otimes \Omega$ sont en général non isomorphes). Le triplet $(\Omega, \Delta, \varepsilon)$ est en fait ce qu'on appelle une *bigèbre graduée gauche*. On appelle *antipode* d'une bigèbre différentielle graduée $(\Omega, \Delta, \varepsilon)$ une application linéaire $I : \Omega \to \Omega$ telle que $\mathrm{d}\, I = I\, \mathrm{d}$ et

$$\mu(I \otimes 1_\Omega)\Delta = \eta\varepsilon = \mu(1_\Omega \otimes I)\Delta \quad ,$$

où μ (resp. η) désigne l'application linéaire $\mu : \Omega \otimes \Omega \to \Omega$ (resp. $\eta : K \to \Omega$) définie par la multiplication (resp. l'unité) de Ω. Un antipode d'une bigèbre différentielle graduée, s'il existe, est unique et est un antihomomorphisme de bigèbres différentielles graduées :

$$I(ab) = (-1)^{mn} I(b)I(a) \; , \quad a \in \Omega^m \, , b \in \Omega^n \; , \qquad I(1) = 1$$

$$I\Delta = \sigma\Delta I \quad \text{et} \quad \varepsilon I = \varepsilon \quad ,$$

où $\sigma : \Omega \,{}^g\!\otimes \Omega \to \Omega \,{}^g\!\otimes \Omega$ désigne l'application linéaire définie par

$$\sigma(a \otimes b) = (-1)^{mn} b \otimes a \, , \; a \in \Omega^m \, , b \in \Omega^n \quad .$$

On appelle *bigèbre différentielle graduée de Hopf* une bigèbre différentielle graduée munie d'un antipode.

(1.1.) La déformation quantique à deux paramètres de l'algèbre des fonctions sur l'espace affine des matrices 2×2. Soient a, b, c et d des indéterminées. L'algèbre des polynômes non commutatifs $M = K\langle a, b, c, d\rangle$ possède une structure de bigèbre, le coproduit Δ (resp. la coünité ε) étant défini par

$$\begin{aligned} \Delta(a) &= a \otimes a + b \otimes c \quad , \\ \Delta(b) &= a \otimes b + b \otimes d \quad , \\ \Delta(c) &= c \otimes a + d \otimes c \quad , \\ \Delta(d) &= c \otimes b + d \otimes d \quad , \end{aligned}$$

$$(\text{resp.} \qquad \varepsilon(a) = \varepsilon(d) = 1 \quad \text{et} \quad \varepsilon(b) = \varepsilon(c) = 0 \quad) \quad .$$

Soient p, q des éléments inversibles de K et $J_{p,q}$ l'idéal bilatère de M engendré par les générateurs

(1) $\qquad ba - pab \quad ,$

(2) $\qquad dc - pcd \quad ,$

(3) $\qquad ca - qac \quad ,$

(4) $\qquad db - qbd \quad ,$

(5) $\qquad cb - p^{-1}qbc \quad ,$

(6) $\qquad da - ad - (q - p^{-1})bc \quad .$

On vérifie facilement que $J_{p,q}$ est aussi un coïdéal de M :

$$\Delta(J_{p,q}) \subset J_{p,q} \otimes M + M \otimes J_{p,q} \quad ,$$

ce qui implique que si l'on pose

$$M_{p,q} = M / J_{p,q} \quad ,$$

alors l'algèbre $M_{p,q}$ est munie d'une structure de bigèbre, obtenue par passage au quotient de celle de M ([**AST**], [**Mal1**], [**Su**]). Par abus de notation, on notera également a, b, c et d les images de a, b, c et d dans $M_{p,q}$ et Δ (resp. ε) le coproduit (resp. la coünité) de $M_{p,q}$. En utilisant le lemme de Bergman, le "diamond lemma" ([**Be**]), on démontre que la famille

$$(a^m b^n c^r d^s)_{m,n,r,s \in \mathbb{N}}$$

est une base du K-module $M_{p,q}$. Si $p = q = 1$, $M_{p,q}$ est l'algèbre des polynômes (commutatifs) sur l'espace affine des matrices carrées d'ordre 2, le coproduit étant celui déduit de la multiplication des matrices. L'algèbre $M_{p,q}$ peut donc être considérée comme une déformation quantique de cette algèbre de polynômes.

(1.2.) Complexe bicovariant des différentielles sur $M_{p,q}$. Soient α, β, γ et δ de nouvelles indéterminées. L'algèbre des polynômes non commutatifs

$$\Omega = K\langle a, b, c, d, \alpha, \beta, \gamma, \delta \rangle \quad ,$$

graduée par le degré total en α, β, γ et δ, possède une structure d'algèbre différentielle graduée définie par l'unique antidérivation K-linéaire $\mathrm{d} : \Omega \to \Omega$ de carré nul telle que

$$\mathrm{d}a = \alpha \quad , \quad \mathrm{d}b = \beta \quad , \quad \mathrm{d}c = \gamma \quad , \quad \mathrm{d}d = \delta \quad .$$

Par exemple,

$$\mathrm{d}(ca\delta b\beta\alpha d) = \gamma a\delta b\beta\alpha d + c\alpha\delta b\beta\alpha d - ca\delta\beta^2\alpha d - ca\delta b\beta\alpha\delta \quad .$$

La structure de bigèbre de M se prolonge de façon unique en une structure de bigèbre différentielle graduée sur Ω. Le coproduit est l'unique prolongement K-linéaire de $\Delta : M \to M \otimes M$, noté également $\Delta : \Omega \to \Omega \,{}^{g}\!\otimes \Omega$, en un morphisme d'algèbres différentielles graduées. En particulier, on a

$$\begin{aligned}
\Delta(\alpha) &= \alpha \otimes a + \beta \otimes c + a \otimes \alpha + b \otimes \gamma \quad , \\
\Delta(\beta) &= \alpha \otimes b + \beta \otimes d + a \otimes \beta + b \otimes \delta \quad , \\
\Delta(\gamma) &= \gamma \otimes a + \delta \otimes c + c \otimes \alpha + d \otimes \gamma \quad , \\
\Delta(\delta) &= \gamma \otimes b + \delta \otimes d + c \otimes \beta + d \otimes \delta \quad .
\end{aligned}$$

La coünité est l'unique prolongement K-linéaire de $\varepsilon : M \to K$, noté également $\varepsilon : \Omega \to K$, en un morphisme d'algèbres différentielles, la différentielle sur K étant identiquement nulle. En particulier, on a

$$\varepsilon(\alpha) = \varepsilon(\beta) = \varepsilon(\gamma) = \varepsilon(\delta) = 0 \quad .$$

On désigne par $R_{p,q}$ l'idéal bilatère de Ω engendré par $J_{p,q}$ et les générateurs

$$\alpha a - pqa\alpha \ , \tag{7}$$
$$\beta b - pqb\beta \ , \tag{8}$$
$$\gamma c - pqc\gamma \ , \tag{9}$$
$$\delta d - pqd\delta \ , \tag{10}$$
$$\alpha c - pc\alpha \ , \tag{11}$$
$$\beta d - pd\beta \ , \tag{12}$$
$$\alpha b - qb\alpha \ , \tag{13}$$
$$\gamma d - qd\gamma \ , \tag{14}$$
$$\beta a - pa\beta - (pq-1)b\alpha \ , \tag{15}$$
$$\delta c - pc\delta - (pq-1)d\gamma \ , \tag{16}$$
$$\gamma a - qa\gamma - (pq-1)c\alpha \ , \tag{17}$$
$$\delta b - qb\delta - (pq-1)d\beta \ , \tag{18}$$
$$\alpha d - d\alpha \ , \tag{19}$$
$$\beta c - pq^{-1}c\beta - (p-q^{-1})d\alpha \ , \tag{20}$$
$$\gamma b - p^{-1}qb\gamma - (q-p^{-1})d\alpha \ , \tag{21}$$
$$\delta a - a\delta - (q-p^{-1})b\gamma - (p-q^{-1})c\beta - (pq-2+p^{-1}q^{-1})d\alpha \ , \tag{22}$$

$$\alpha^2 \ , \tag{23}$$
$$\beta^2 \ , \tag{24}$$
$$\gamma^2 \ , \tag{25}$$
$$\delta^2 \ , \tag{26}$$
$$\alpha\gamma + p\gamma\alpha \ , \tag{27}$$
$$\beta\delta + p\delta\beta \ , \tag{28}$$
$$\alpha\beta + q\beta\alpha \ , \tag{29}$$
$$\gamma\delta + q\delta\gamma \ , \tag{30}$$
$$\alpha\delta + \delta\alpha \ , \tag{31}$$
$$\beta\gamma + pq^{-1}\gamma\beta + (p-q^{-1})\delta\alpha \quad . \tag{32}$$

On démontre que l'idéal $R_{p,q}$ est stable par d et qu'il est aussi un coïdéal de Ω ([**Mal1**], [**Man4**]), ce qui implique que si l'on pose

$$\Omega_{p,q} = \Omega / R_{p,q} \quad ,$$

alors l'algèbre $\Omega_{p,q}$ est munie d'une structure de bigèbre différentielle graduée, appelée *complexe de de Rham quantique* des formes différentielles sur $M_{p,q} = \Omega^0_{p,q}$. Si $p = q = 1$, alors $\Omega_{p,q}$ n'est autre que le complexe de de Rham algébrique ordinaire sur l'espace affine des matrices carrées d'ordre 2. L'idéal $R_{p,q}$ est bigradué pour la bigraduation de Ω définie par le degré total en a, b, c et d et en α, β, γ et δ, ce qui implique que $\Omega_{p,q}$ est aussi une algèbre bigraduée

$$\Omega_{p,q} = \bigoplus_{m\in\mathbb{N},\, n\in\mathbb{N}} \Omega_{p,q}^{m,n} \quad .$$

Pour cette bigraduation, la différentielle est bihomogène de bidegré (-1,1). Il résulte du "diamond lemma" de Bergman [**Be**] que la famille

$$(a^m b^n c^r d^s \delta^i \gamma^j \beta^k \alpha^l)_{m,n,r,s\in\mathbb{N},\, i,j,k,l\in\{0,1\}}$$

est une base du K-module $\Omega_{p,q}$.

(1.3.) Le déterminant quantique, le groupe quantique $GL_{p,q}(2)$ et son complexe de de Rham quantique. On appelle déterminant quantique l'élément

$$t = ad - q^{-1}cb = da - qbc = da - pcb = ad - p^{-1}bc \quad ,$$

de $M_{p,q}$. On vérifie aussitôt que

$$\Delta(t) = t \otimes t \quad , \quad \varepsilon(t) = 1 \quad ,$$

que

$$\mathrm{d}t = a\delta - q^{-1}c\beta - p^{-1}b\gamma + p^{-1}q^{-1}d\alpha$$

et que

$$\begin{aligned} ta &= at \quad , \\ tb &= p^{-1}qbt \quad , \\ tc &= pq^{-1}ct \quad , \\ td &= dt \quad , \\ \\ \alpha t &= pqt\alpha \quad , \\ \beta t &= p^2 t\beta \quad , \\ \gamma t &= q^2 t\gamma \quad , \\ \delta t &= pqt\delta \quad . \end{aligned}$$

En particulier, on a

$$\begin{pmatrix} d & -qb \\ -q^{-1}c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -pb \\ -p^{-1}c & a \end{pmatrix} = tI$$

(formules de Cramer quantiques).

Soient t^{-1} une nouvelle indéterminée et $J'_{p,q}$ l'idéal bilatère de $M' = K\langle a,b,c,d,t^{-1}\rangle$, engendré par les générateurs (1) à (8) de (0.1) et

(33) $$tt^{-1} - 1 \quad ,$$

(34) $$t^{-1}t - 1 \quad .$$

On désigne par $G_{p,q}$ l'algèbre quotient

$$G_{p,q} = M' / J'_{p,q}$$

et l'on démontre que l'application canonique de $M_{p,q}$ dans $G_{p,q}$ est injective, que le coproduit Δ (resp. la coünité ε) de $M_{p,q}$ se prolonge de façon unique en un morphisme d'algèbres, noté également

$$\Delta : G_{p,q} \to G_{p,q} \otimes G_{p,q}$$

$$(\text{resp.} \quad \varepsilon : G_{p,q} \to K)$$

et qu'on définit ainsi une structure de bigèbre sur $G_{p,q}$. On remarque que

$$\Delta(t^{-1}) = t^{-1} \otimes t^{-1} \quad \text{et} \quad \varepsilon(t^{-1}) = 1$$

et que

$$\begin{aligned}
t^{-1}a &= at^{-1} \quad , \\
t^{-1}b &= pq^{-1}bt^{-1} \quad , \\
t^{-1}c &= p^{-1}qct^{-1} \quad , \\
t^{-1}d &= dt^{-1} \quad .
\end{aligned}$$

Enfin, on vérifie qu'il existe un unique antihomomorphisme d'algèbres

$$I : G_{p,q} \to G_{p,q}$$

tel que

$$\begin{aligned}
I(a) &= t^{-1}d = dt^{-1} \quad , \\
I(b) &= -qt^{-1}b = -pbt^{-1} \quad , \\
I(c) &= -q^{-1}t^{-1}c = -p^{-1}ct^{-1} \quad , \\
I(d) &= t^{-1}a = at^{-1} \quad .
\end{aligned}$$

et l'on a

$$\begin{aligned}
I(t) &= I(ad - p^{-1}bc) \\
&= I(d)I(a) - p^{-1}I(c)I(b) \\
&= (at^{-1})(dt^{-1}) - p^{-1}(-p^{-1}ct^{-1})(-pbt^{-1}) \\
&= adt^{-2} - q^{-1}cbt^{-2} \\
&= (ad - p^{-1}bc)t^{-2} = t^{-1}
\end{aligned}$$

et

$$I(t^{-1}) = t \quad .$$

L'application I est un antipode de la bigèbre $G_{p,q}$. On définit ainsi une structure de bigèbre de Hopf sur l'algèbre $G_{p,q}$, appelée algèbre des fonctions régulières sur le groupe quantique $GL_{p,q}(2)$. Si $p = q = 1$, l'algèbre $G_{1,1}$ n'est autre que l'algèbre des fonctions régulières (fonctions rationnelles partout définies) sur le groupe linéaire $GL(2)$ et l'antipode correspond à l'inversion des matrices.

Considérons maintenant l'algèbre quotient

$$\Omega_{G_{p,q}} = K\langle a,b,c,d,t^{-1},\alpha,\beta,\gamma,\delta\rangle / R'_{p,q} \quad ,$$

où $R'_{p,q}$ désigne l'idéal bilatère de $K\langle a,b,c,d,t^{-1},\alpha,\beta,\gamma,\delta\rangle$ engendré par les générateurs (1) à (34) ci dessus. On vérifie que les applications canoniques de $\Omega_{p,q}$ et de $G_{p,q}$ dans $\Omega_{G_{p,q}}$ sont injectives et que

$$\begin{aligned} \alpha t^{-1} &= p^{-1}q^{-1}t^{-1}\alpha \quad , \\ \beta t^{-1} &= p^{-2}t^{-1}\beta \quad , \\ \gamma t^{-1} &= q^{-2}t^{-1}\gamma \quad , \\ \delta t^{-1} &= p^{-1}q^{-1}t^{-1}\delta \quad . \end{aligned}$$

La différentielle de $\Omega_{p,q}$ se prolonge de façon unique en une application K-linéaire, notée également

$$\mathrm{d} : \Omega_{G_{p,q}} \to \Omega_{G_{p,q}} \quad ,$$

faisant de cette algèbre une algèbre différentielle graduée (pour la graduation du degré total en α, β, γ et δ) et l'on a

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(t^{-1}) &= -t^{-1}\,\mathrm{d}t\,t^{-1} \\ &= t^{-1}(a\delta - q^{-1}c\beta - p^{-1}b\gamma + p^{-1}q^{-1}d\alpha)t^{-1} \\ &= t^{-2}(p^{-1}q^{-1}a\delta - p^{-1}q^{-2}c\beta - p^{-2}q^{-1}b\gamma + p^{-2}q^{-2}d\alpha) \quad . \end{aligned}$$

De même, les coproduits (resp. les coünités) de $G_{p,q}$ et de $\Omega_{p,q}$ ont un prolongement unique commun en un morphisme d'algèbres différentielles graduées, noté également

$$\Delta : \Omega_{G_{p,q}} \to \Omega_{G_{p,q}} \, {}^{g}\!\otimes \Omega_{G_{p,q}} \qquad (\text{resp. } \varepsilon : \Omega_{G_{p,q}} \to K\ ) \quad ,$$

qui font de $\Omega_{G_{p,q}}$ une bigèbre différentielle graduée. Enfin, l'antipode I de $G_{p,q}$ se prolonge de façon unique en un antihomomorphisme d'algèbres différentieles graduées, noté également $I : \Omega_{G_{p,q}} \to \Omega_{G_{p,q}}$, qui est un antipode de $\Omega_{G_{p,q}}$, et l'on a

$$\begin{aligned} I(\alpha) &= t^{-1}\delta + \mathrm{d}(t^{-1})d \quad , \\ I(\beta) &= -qt^{-1}\beta - q\,\mathrm{d}(t^{-1})b \quad , \\ I(\gamma) &= -q^{-1}t^{-1}\gamma - q^{-1}\,\mathrm{d}(t^{-1})c \quad , \\ I(\delta) &= t^{-1}\alpha + \mathrm{d}(t^{-1})a \quad . \end{aligned}$$

On définit ainsi une structure de bigèbre différentielle graduée de Hopf sur $\Omega_{G_{p,q}}$, appelée *complexe de de Rham quantique* des formes différentielles sur le groupe quantique $GL_{p,q}(2)$. Si $p = q = 1$, alors $\Omega_{G_{p,q}}$ n'est autre que le complexe de de Rham algébrique ordinaire du groupe linéaire $GL(2)$.

(2.1.) Éléments invariants d'une bigèbre différentielle de Hopf. Considérons une bigèbre différentielle de Hopf $(\Omega, \mathrm{d}, \Delta, \varepsilon, I)$ et soit ω un élément homogène de degré m de Ω, $\omega \in \Omega^m$. Alors on a

$$\Delta(\omega) = \sum_{i=0}^{m} \Delta_i(\omega) \quad , \quad \Delta_i(\omega) \in \Omega^i \otimes \Omega^{m-i} \quad , \quad 1 \leq i \leq m \quad ,$$

cette décomposition étant unique. On dit que ω est *invariant à gauche* (resp. *à droite*) si $\Delta_0(\omega) = 1 \otimes \omega$ (resp. si $\Delta_m(\omega) = \omega \otimes 1$). Si ω est un élément quelconque de Ω, on dit qu'il est invariant à gauche (resp. à droite) si toutes ses composantes homogènes le sont. On vérifie aussitôt que l'ensemble des éléments invariants à gauche (resp. à droite) de Ω est une sous-algèbre différentielle graduée de Ω notée Ω_λ (resp. Ω_ρ). De plus, on a $\Omega^0_\lambda = \Omega^0_\rho = K$. En effet, si par exemple $f \in \Omega^0_\lambda$, alors $\Delta(f) = 1 \otimes f$, ce qui implique que $(1_\Omega \otimes \varepsilon)\Delta(f) = (1_\Omega \otimes \varepsilon)(f)$, d'où $f = \varepsilon(f) \cdot 1$, ce qui prouve que $f \in K$.

On dit qu'une matrice $A = (a^i_j)_{1 \leq i,j \leq n}$ à coefficients dans Ω^0 est une *matrice multiplicative* si

$$\Delta(a^i_j) = \sum_{k=1}^{n} a^i_k \otimes a^k_j \quad , \quad \varepsilon(a^i_j) = \delta^i_j \quad , \quad 1 \leq i,j \leq n \quad ,$$

où δ^i_j désigne le symbole de Kronecker. On vérifie facilement que si A désigne une matrice multiplicative alors la transposée de la matrice $I(A)$ est également une matrice multiplicative. De plus, on a alors

$$I(A) \cdot A = A \cdot I(A) = 1_n \quad ,$$

où 1_n désigne la matrice unité d'ordre n (autrement dit, une matrice multiplicative A est inversible d'inverse $I(A)$). En effet,

$$\sum_{k=1}^{n} I(a^i_k) a^k_j = \mu(I \otimes 1_\Omega)\Delta(a^i_j) \qquad 1 \leq i,j \leq n \quad ,$$

où $\mu : \Omega \otimes \Omega \to \Omega$ désigne l'application linéaire définie par la multiplication. En vertu de la définition de l'antipode, on a donc

$$\sum_{k=1}^{n} I(a^i_k) a^k_j = \varepsilon(a^i_j) = \delta^i_j \quad ,$$

ce qui prouve que $I(A) \cdot A = 1_n$ et l'on démontre de façon analogue que $A \cdot I(A) = 1_n$.

Proposition (2.1.1.) *Soient $(\Omega, \mathrm{d}, \Delta, \varepsilon, I)$ une bigèbre différentielle de Hopf et A une matrice multiplicative à coefficients dans Ω^0. Alors les coefficients de la matrice $I(A) \cdot \mathrm{d}A$ sont des éléments invariants à gauche de Ω^1.*

Démonstration. Posons $A = (a^i_j)_{1\le i,j\le n}$ et $I(A)\cdot \mathrm{d}\,A = (\omega^i_j)_{1\le i,j\le n}$. On a

$$\begin{aligned}
\Delta(\omega^i_j) &= \Delta\left(\sum_{k=1}^{n} I(a^i_k)\,\mathrm{d}\,a^k_j\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n} \Delta\left(I(a^i_k)\right)\Delta\left(\mathrm{d}\,a^k_j\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{r=1}^{n} I(a^r_k)\otimes I(a^i_r)\right)\left(\sum_{s=1}^{n}\left(\mathrm{d}\,a^k_s\otimes a^s_j + a^k_s\otimes \mathrm{d}\,a^s_j\right)\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} I(a^r_k)\,\mathrm{d}\,a^k_s\otimes I(a^i_r)a^s_j\\
&+ \sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} I(a^r_k)a^k_s\otimes I(a^i_r)\,\mathrm{d}\,a^s_j \quad .
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
\Delta_0(\omega^i_j) &= \sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} I(a^r_k)a^k_s\right)\otimes I(a^i_r)\,\mathrm{d}\,a^s_j\\
&= \sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\delta^r_s\otimes I(a^i_r)\,\mathrm{d}\,a^s_j\\
&= 1\otimes\sum_{r=1}^{n} I(a^i_r)\,\mathrm{d}\,a^r_j = 1\otimes\omega^i_j \quad ,
\end{aligned}$$

ce qui démontre la proposition.

(2.2.) Formes différentielles invariantes à gauche sur $GL_{p,q}(2)$. On se fixe désormais deux éléments inversibles p et q de K et l'on désigne simplement par Ω la bigèbre différentielle graduée de Hopf $\Omega_{G_{p,q}}$. Par définition du coproduit dans Ω, la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}$$

est multiplicative et en vertu de la proposition (2.1.1.), les coefficients de la matrice

$$\omega = \begin{pmatrix}\omega_a & \omega_b\\ \omega_c & \omega_d\end{pmatrix} = I(A)\cdot\mathrm{d}\,A = t^{-1}\begin{pmatrix} d & -qb\\ -q^{-1}c & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} t^{-1}(d\alpha - qb\gamma) & t^{-1}(d\beta - qb\delta)\\ t^{-1}(-q^{-1}c\alpha + a\gamma) & t^{-1}(-q^{-1}c\beta + a\delta)\end{pmatrix}$$

sont des éléments invariants à gauche de Ω^1 (on dira des *1-formes différentielles invariantes à gauche*). Comme la matrice $I(A)$ est l'inverse de la matrice A, on a $\mathrm{d}\,A = A\omega$, autrement dit

$$\begin{aligned}
\alpha &= a\omega_a + b\omega_c \\
\beta &= a\omega_b + b\omega_d \\
\gamma &= c\omega_a + d\omega_c \\
\delta &= c\omega_b + d\omega_d \quad .
\end{aligned}$$

Un calcul simple mais fastidieux permet, à partir de ces formules, de montrer qu'on a les relations de commutation suivantes :

$$\begin{aligned}
&\omega_a a = pqa\omega_a \\
&\omega_a b = b\omega_a \\
&\omega_a c = pqc\omega_a \\
&\omega_a d = d\omega_a \\
&\omega_b a = pa\omega_b + (p - q^{-1})b\omega_a \\
&\omega_b b = pb\omega_b \\
&\omega_b c = pc\omega_b + (p - q^{-1})d\omega_a \\
&\omega_b d = pd\omega_b \\
&\omega_c a = qa\omega_c \\
&\omega_c b = qb\omega_c + (q - p^{-1})a\omega_a \\
&\omega_c c = qc\omega_c \\
&\omega_c d = qd\omega_c + (q - p^{-1})c\omega_a \\
&\omega_d a = a\omega_d + (pq - 1)b\omega_c + (pq - 2 + p^{-1}q^{-1})a\omega_a \\
&\omega_d b = pqb\omega_d + (pq - 1)a\omega_b \\
&\omega_d c = c\omega_d + (pq - 1)d\omega_c + (pq - 2 + p^{-1}q^{-1})c\omega_a \\
&\omega_d d = pqd\omega_d + (pq - 1)c\omega_b
\end{aligned}$$

Un calcul du même type nous permet de vérifier qu'on a les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
&\omega_a^2 = 0 \\
&\omega_b\omega_a = -\omega_a\omega_b \\
&\omega_b^2 = 0 \\
&\omega_c\omega_a = -\omega_a\omega_c \\
&\omega_c\omega_b = -\omega_b\omega_c \\
&\omega_c^2 = 0
\end{aligned}$$

$$\omega_d\omega_a = -\omega_a\omega_d - (pq-1)\omega_b\omega_c$$
$$\omega_d\omega_b = -pq\omega_b\omega_d - (pq-1)\omega_a\omega_b$$
$$\omega_d\omega_c = -p^{-1}q^{-1}\omega_c\omega_d - (p^{-1}q^{-1}-1)\omega_a\omega_c$$
$$\omega_d^2 = -(p^{-1}q^{-1}-1)\omega_b\omega_c$$

Théorème (2.2.1.) *L'algèbre des formes différentielles invariantes à gauche Ω_λ est engendrée par ω_a, ω_b, ω_c et ω_d. De façon plus précise, la famille $(\omega_a^i\omega_b^j\omega_c^k\omega_d^l)_{0\leq i,j,k,l\leq 1}$ est une base du K-module Ω_λ et l'on a un isomorphisme de K-modules de Ω avec $\Omega^0\otimes\Omega_\lambda = G_{p,q}\otimes\Omega_\lambda$.*

Démonstration. La première observation est que la famille $(\alpha^i\beta^j\gamma^k\delta^l)_{0\leq i,j,k,l\leq 1}$ est une base du Ω^0-module à gauche Ω. Cela résulte facilement du fait que la famille

$$(a^m b^n c^r d^s \delta^i\gamma^j\beta^k\alpha^l)_{m,n,r,s\in\mathbb{N},\, i,j,k,l\in\{0,1\}}$$

est une base du K-module $\Omega_{p,q}$ (cf. (1.2.)), du fait que $\Omega_{p,q}$ s'envoie injectivement dans Ω et des relations de commutation de t^{-1} avec a, b, c, d et α, β, γ, δ (cf. (1.3.)). Comme $\omega = A^{-1}\cdot \mathrm{d}A$ et $\mathrm{d}A = A\omega$, on en déduit facilement que $(\omega_a^i\omega_b^j\omega_c^k\omega_d^l)_{0\leq i,j,k,l\leq 1}$ est une aussi une base du Ω^0-module à gauche Ω, ce qui implique que la famille

$$(\omega_a^i\omega_b^j\omega_c^k\omega_d^l\otimes\omega_a^{i'}\omega_b^{j'}\omega_c^{k'}\omega_d^{l'})_{0\leq i,j,k,l,i',j',k',l'\leq 1}$$

est une base du $\Omega^0\otimes\Omega^0$-module à gauche $\Omega\otimes\Omega$. Soit maintenant η un élément de Ω^m. En vertu de ce qui précede, η peut s'écrire de façon unique sous la forme

$$\eta = \sum_{\substack{0\leq i,j,k,l\leq 1\\ i+j+k+l=m}} f_{ijkl}\omega_a^i\omega_b^j\omega_c^k\omega_d^l \quad , \quad f_{ijkl}\in\Omega^0 \quad .$$

D'autre part, posons

$$\Delta(\eta) = \sum_{i=0}^{m}\Delta_i(\eta) \quad , \quad \Delta_i(\eta)\in\Omega^i\otimes\Omega^{m-i} \quad , \quad 1\leq i\leq m \quad .$$

Comme les formes $\omega_a^i\omega_b^j\omega_c^k\omega_d^l$ sont invariantes à gauche, on a

$$\Delta_0(\eta) = \sum_{\substack{0\leq i,j,k,l\leq 1\\ i+j+k+l=m}} \Delta(f_{ijkl})(1\otimes\omega_a^i\omega_b^j\omega_c^k\omega_d^l) \quad .$$

Si η est invariante à gauche, on a

$$\Delta_0(\eta) = 1\otimes\eta = \sum_{\substack{0\leq i,j,k,l\leq 1\\ i+j+k+l=m}} (1\otimes f_{ijkl})(1\otimes\omega_a^i\omega_b^j\omega_c^k\omega_d^l) \quad .$$

On en déduit que pour tout i, j, k et l on a $\Delta(f_{ijkl}) = 1 \otimes f_{ijkl}$, d'où $f_{ijkl} \in \Omega^0_\lambda$, ce qui prouve que $f_{ijkl} \in K$ (cf. (2.1.)) et démontre le théorème.

(2.3.) Formules de Maurer-Cartan. Les formules de Maurer-Cartan sont valables dans un cadre très général. On a la proposition suivante :

Proposition (2.3.1.) *Soient $(\Omega, \mathrm{d}, \Delta, \varepsilon, I)$ une bigèbre différentielle de Hopf, A une matrice multiplicative à coefficients dans Ω^0 et posons $\omega = I(A) \cdot \mathrm{d}A$. Alors on a*

$$\omega^2 + \mathrm{d}\omega = 0$$

(formules de Maurer-Cartan).

Démonstration. Comme A est une matrice multiplicative, on a

$$I(A) \cdot A = A \cdot I(A) = 1$$

(cf. (2.1.)), ce qui implique que

$$\mathrm{d}(I(A)) \cdot A + I(A) \cdot \mathrm{d}A = 0 \quad ,$$

d'où

$$\mathrm{d}(I(A)) = -I(A) \cdot \mathrm{d}A \cdot I(A) \quad .$$

On en déduit que

$$\mathrm{d}(I(A) \cdot \mathrm{d}A) = \mathrm{d}(I(A)) \cdot \mathrm{d}A = -I(A) \cdot \mathrm{d}A \cdot I(A) \cdot \mathrm{d}A \quad ,$$

ce qui prouve la proposition.

En appliquant la proposition ci-dessus a notre exemple, on en déduit, en utilisant les formules de (2.2.), que l'on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\omega_a &= -\omega_b\omega_c \quad , \\
\mathrm{d}\omega_b &= -\omega_b\omega_d - \omega_a\omega_b \quad , \\
\mathrm{d}\omega_c &= p^{-1}q^{-1}\omega_c\omega_d + p^{-1}q^{-1}\omega_a\omega_c \quad , \\
\mathrm{d}\omega_d &= p^{-1}q^{-1}\omega_b\omega_c \quad .
\end{aligned}$$

(3.1.) Dual de Koszul d'une algèbre quadratique. Supposons désormais que K soit un corps. Soit

$$\bigoplus_{m \in \mathbb{N}} A^m$$

une K-algèbre graduée telle que $A^0 = K$, $E = A^1$ soit un K-espace vectoriel de dimension finie et A soit engendrée par A^1. On en déduit un morphisme surjectif d'algèbres graduées

$$\mathrm{T}(E) \to A \quad .$$

On désigne par R le noyau de ce morphisme, qui est un idéal bilatère gradué de A

$$R = \bigoplus_{m \in \mathbb{N}} R^m \quad , \quad R^m \subset A^m$$

et l'on a $R^0 = R^1 = \{0\}$. On dit que l'algèbre A est quadratique, si l'idéal bilatère R est engendré par $R^2 \subset E \otimes E$. Sous ces hypothèses, le *dual de Koszul* de l'algèbre A est l'algèbre quadratique

$$A^! = \mathrm{T}(E^*)/R^! \quad ,$$

où $R^!$ désigne l'idéal bilatère de $\mathrm{T}(E^*)$ engendré par l'orthogonal $R^{2\perp} \subset E^* \otimes E^* = (E \otimes E)^*$ de $R^2 \subset E \otimes E$ ([**Pr**], [**Man1**], [**Man2**]).

Soient $e_1, \ldots, e_n$ une base de E, $e^1, \ldots, e^n$ la base duale de E^* et $b_1, \ldots, b_m$ une base de A^2. Posons

$$\varpi = \sum_{i=1}^{n} e_i \otimes e^i \in E \otimes E^* \subset A \otimes \mathrm{T}(E^*)$$

et

$$\varpi^2 = \varpi \cdot \varpi = \sum_{j=1}^{m} b_j \otimes f^j \quad , \quad f^j \in E^* \otimes E^* \quad .$$

Alors on vérifie facilement que la famille $(f^j)_{1 \leq j \leq m}$ engendre $R^{2\perp}$ et

$$A^! = \mathrm{T}(E^*)/(f^1, \ldots, f^m) \quad .$$

Supposons maintenant que l'algèbre quadratique A soit munie d'une différentielle $\mathrm{d} : A \to A$ de degré 1 qui en fait une algèbre différentielle graduée. A ces données on peut associer une autre algèbre quadratique $A(\mathrm{d})$ comme suit : On pose $E' = E \oplus K$ et

$$A(\mathrm{d}) = \mathrm{T}(E')/R' \quad ,$$

où R' désigne l'idéal bilatère de $\mathrm{T}(E')$ engendré par

$$R^2 \bigoplus \left(\bigoplus_{i=1}^{n} K(e \otimes e_i + e_i \otimes e - \mathrm{d}e_i) \right) \bigoplus K(e \otimes e) \quad ,$$

où $\mathrm{d}e_i$ désigne aussi un relèvement de $\mathrm{d}e_i$ dans $E \otimes E$ et e l'élément $(0,1)$ de $E' = E \oplus K$. Soit $e^1, \ldots e^n, e^*$ la base de $(E \oplus Ke)^*$, duale à $e_1, \ldots, e_n, e$, et posons

$$\varpi' = \varpi + e \otimes e^* \quad .$$

On a

$$\begin{aligned} \varpi'\varpi' &= \varpi\varpi + \sum_{i=1}^{n} e_i e \otimes e^i e^* + \sum_{i=1}^{n} e e_i \otimes e^* e^i \\ &= \varpi\varpi + \sum_{i=1}^{n} e_i e \otimes (e^i e^* - e^* e^i) + \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}e_i \otimes e^* e^i \end{aligned}$$

(dans $A(\mathrm{d}) \otimes \mathrm{T}(E'^*)$). En particulier, ceci implique que e^* est un élément du centre de $A(\mathrm{d})^!$. On peut donc considérer l'algèbre quotient $UA(\mathrm{d})$ de $A(\mathrm{d})^!$ par l'idéal bilatère engendré par $e^* - 1$ et il résulte de la formule ci dessus que si $b_1, \cdots, b_m$ désigne une base de A^2 et si

$$\varpi\varpi + \mathrm{d}\,\varpi = \sum_{j=1}^{m} b_j \otimes g^j \quad , \quad g^j \in \mathrm{T}(E^*) \quad ,$$

où

$$\mathrm{d}\,\varpi = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}\,e_i \otimes e^i \quad ,$$

alors l'algèbre $UA(\mathrm{d})$ est isomorphe à $\mathrm{T}(A^*)/(g^1, \ldots, g^m)$.

Exemple (3.1.1.) Si (A, d) désigne l'algèbre différentielle graduée des formes différentielles invariantes à gauche sur $GL(2)$, alors l'algèbre $UA(\mathrm{d})$ est isomorphe à l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie $\mathfrak{Gl}_2$.

(3.2.) L'algèbre enveloppante du groupe quantique $GL_{p,q}(2)$. En s'inspirant de l'exemple ci-dessus, on définit l'algèbre enveloppante du groupe quantique $GL_{p,q}(2)$ comme étant l'algèbre $U\Omega_\lambda(\mathrm{d})$, où Ω_λ désigne l'algèbre différentielle graduée des formes différentielles invariantes à gauche sur $GL_{p,q}(2)$ (cf. (2.2.)). Soit X_a , X_b , X_c , X_d la base de $\Omega_\lambda^{1^*}$, duale à la base ω_a , ω_b , ω_c , ω_d de Ω_λ^1. En utilisant les notations de (3.1.) et les formules de (2.2.), on a

$$\varpi = \omega_a \otimes X_a + \omega_b \otimes X_b + \omega_c \otimes X_c + \omega_d \otimes X_d$$

et

$$\begin{aligned}
\varpi^2 &= \omega_a\omega_a \otimes X_aX_a + \omega_a\omega_b \otimes X_aX_b + \omega_a\omega_c \otimes X_aX_c + \omega_a\omega_d \otimes X_aX_d \\
&+ \omega_b\omega_a \otimes X_bX_a + \omega_b\omega_b \otimes X_bX_b + \omega_b\omega_c \otimes X_bX_c + \omega_b\omega_d \otimes X_bX_d \\
&+ \omega_c\omega_a \otimes X_cX_a + \omega_c\omega_b \otimes X_cX_b + \omega_c\omega_c \otimes X_cX_c + \omega_c\omega_d \otimes X_cX_d \\
&+ \omega_d\omega_a \otimes X_dX_a + \omega_d\omega_b \otimes X_dX_b + \omega_d\omega_c \otimes X_dX_c + \omega_d\omega_d \otimes X_dX_d \\
&= \omega_a\omega_b \otimes X_aX_b + \omega_a\omega_c \otimes X_aX_c + \omega_a\omega_d \otimes X_aX_d - \omega_a\omega_b \otimes X_bX_a \\
&+ \omega_b\omega_c \otimes X_bX_c + \omega_b\omega_d \otimes X_bX_d - \omega_a\omega_c \otimes X_cX_a - \omega_b\omega_c \otimes X_cX_b \\
&+ \omega_c\omega_d \otimes X_cX_d - \omega_a\omega_d \otimes X_dX_a - (pq-1)\omega_b\omega_c \otimes X_dX_a - pq\omega_b\omega_d \otimes X_dX_b \\
&- (pq-1)\omega_a\omega_b \otimes X_dX_b - p^{-1}q^{-1}\omega_c\omega_d \otimes X_dX_c - (p^{-1}q^{-1}-1)\omega_a\omega_c \otimes X_dX_c \\
&- (p^{-1}q^{-1}-1)\omega_b\omega_c \otimes X_d^2 \quad .
\end{aligned}$$

De même, en utilisant les formules de (2.3.), on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\,\varpi &= \mathrm{d}\,\omega_a \otimes X_a + \mathrm{d}\,\omega_b \otimes X_b + \mathrm{d}\,\omega_c \otimes X_c + \mathrm{d}\,\omega_d \otimes X_d \\
&= -\omega_b\omega_c \otimes X_a - \omega_b\omega_d \otimes X_b - \omega_a\omega_b \otimes X_b \\
&+ p^{-1}q^{-1}\omega_c\omega_d \otimes X_c + p^{-1}q^{-1}\omega_a\omega_c \otimes X_c + p^{-1}q^{-1}\omega_b\omega_c \otimes X_d \quad .
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
\varpi^2 + \mathrm{d}\,\varpi = \omega_a\omega_b \otimes (X_aX_b - X_bX_a - (pq-1)X_dX_b - X_b) \\
+ \omega_a\omega_c \otimes (X_aX_c - X_cX_a - (p^{-1}q^{-1}-1)X_dX_c + p^{-1}q^{-1}X_c) \\
+ \omega_a\omega_d \otimes (X_aX_d - X_dX_a) \\
+ \omega_b\omega_c \otimes (X_bX_c - X_cX_b - (pq-1)X_dX_a - (p^{-1}q^{-1}-1)X_d^2 - X_a + p^{-1}q^{-1}X_d) \\
+ \omega_b\omega_d \otimes (X_bX_d - pqX_dX_b - X_b) \\
+ \omega_c\omega_d \otimes (X_cX_d - p^{-1}q^{-1}X_dX_c + p^{-1}q^{-1}X_c) \quad .
\end{aligned}$$

L'algèbre enveloppante du groupe quantique $GL_{p,q}(2)$ est donc isomorphe au quotient de l'algèbre des polynômes non commutatifs $K\langle X_a, X_b, X_c, X_d\rangle$ par l'idéal bilatère engendré par les relations

$$\begin{aligned}
&X_aX_b - X_bX_a = (pq-1)X_dX_b + X_b \quad , \\
&X_aX_c - X_cX_a = (p^{-1}q^{-1}-1)X_dX_c - p^{-1}q^{-1}X_c \quad , \\
&X_aX_d - X_dX_a = 0 \quad , \\
&X_bX_c - X_cX_b = (pq-1)X_dX_a + (p^{-1}q^{-1}-1)X_d^2 + X_a - p^{-1}q^{-1}X_d \quad , \\
&X_bX_d - pqX_dX_b = X_b \quad , \\
&X_cX_d - p^{-1}q^{-1}X_dX_c = -p^{-1}q^{-1}X_c \quad .
\end{aligned}$$

On remarque que si $p = q = 1$, on retrouve les relations

$$\begin{aligned}
&[X_a, X_b] = X_b \quad , \\
&[X_a, X_c] = -X_c \quad , \\
&[X_a, X_d] = 0 \quad , \\
&[X_b, X_c] = X_a - X_d \quad , \\
&[X_c, X_d] = -X_c \quad ,
\end{aligned}$$

définissant l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie $\mathfrak{Gl}_2$.

RÉFÉRENCES

[**Ab**] E. Abe, "Hopf algebras," Cambridge Tracts in Math. 74, Cambridge Univ. Press, 1980.

[**Ao1**] K. Aomoto, *q-analogue of the de Rham cohomology associated with Jackson integrals. I*, Proc. Japan Acad. **66** (**A**) (1990), 161-164.

[**Ao2**] K. Aomoto, *q-analogue of the de Rham cohomology associated with Jackson integrals. II*, Proc. Japan Acad. **66** (**A**) (1990), 240-244.

[**Ao3**] K. Aomoto, *Finiteness of a cohomology associated with certain Jackson integrals*, Tôhoku Math. J. **43** (1991), 75-101.

[**AST**] M. Artin, W. Schelter, J. Tate, *Quantum deformations of GL_n*, Comm. Pure Appl. Math. **44** (1991), 879-895.

[**Be**] G. M. Bergman, *The diamond lemma for ring theory*, Adv. Math. **29** (1978), 178-218.

[**Bd**] D. Bernard, *Quantum Lie algebras and differential calculus on quantum groups*, Preprint (1990).

[**Bo**] N. Bourbaki, "Éléments de Mathématique," Algèbre, Chapitres 1 à 3, Hermann, Paris, 1970.

[**Br**] T. Brzeziński, *Exterior bialgebras*, Preprint (1991).

[**BDR**] T. Brzeziński, H. Dabrowsky, J. Rembieliński, *On the quantum differential calculus and the quantum holomorphicity*, J. Math. Phys. **33, 1** (1992), 19-24.

[**CSWW**] U. Carow-Watamura, M. Schlieker, S. Watamura, W. Weich, *Bicovariant differential calculus on quantum groups $SU_q(N)$ and $SO_q(N)$*, Commun. Math. Phys. **142** (1991), 605-641.

[**Ca**] P. Cartier, *Calcul différentiel non commutatif*, Exposés à l'E.N.S. (1989).

[**Co**] A. Connes, *Non-commutative differential geometry*, Publications Mathématiques de l'I.H.E.S. **62** (1985), 41-144.

[**DM**] P. Deligne, J. S. Milne, *Tannakian categories*, in "Hodge cycles, motives, and Shimura varieties," Lecture Notes in Mathematics 900, Springer-Verlag, 1982, pp. 101-228.

[**Dr**] V. G. Drinfel'd, *Quantum groups*, in "Proceedings of the International Congress of Mathematicians 1986, Berkeley," AMS, 1987, pp. 798-820.

[**DV1**] M. Dubois-Violette, *Dérivations et calcul différentiel non commutatif*, C.R.A.S. **307** (1988), 403-408.

[**DV2**] M. Dubois-Violette, *Noncommutative differential geometry, quantum mechanics and gauge theory*, Preprint, L.P.T.H.E.-Orsay 90/31 (1990).

[**DKM1**] M. Dubois-Violette, R. Kerner, J. Madore, *Noncommutative differential geometry of matrix algebras*, J. Math. Phys. **31, 2** (1990), 316-322.

[**DKM2**] M. Dubois-Violette, R. Kerner, J. Madore, *Noncommutative differential geometry and new models of gauge theory*, J. Math. Phys. **31, 2** (1990), 323-330.

[**FT**] P. Feng, B. Tsygan, *Hochschild and cyclic homology of quantum groups*, Commun. Math. Phys. **140** (1991), 481-521.

[**EGA IV$_4$**] A. Grothendieck, "Éléments de géométrie algébrique IV," Publications Mathématiques de l'I.H.E.S. 32, 1967.

[**Gr**] A. Grothendieck, *On the De Rham cohomology of algebraic varieties*, Publications Mathématiques de l'I.H.E.S. **29** (1966), 95-103.

[**GRR**] D. Gurevich, A. Radul, V. Rubtsov, *Non-commutative differential geometry and Yang-Baxter equation*, Preprint (1990).

[**HW**] T. Hibi, M. Wakayama, *A q-analogue of Capelli's identity for $GL(2)$*, Preprint, Hokkaido University (1991).

[**J1**] M. Jimbo, *A q-difference analogue of $U(g)$ and the Yang-Baxter equation*, Lett. Math. Phys. **10** (1985), 63-69.

[**J2**] M. Jimbo, *Quantum R matrix for the generalized Toda system*, Commun. Math. Phys. **102** (1986), 537-547.

[**J3**] M. Jimbo, *A q-analogue of $U(gl(N+1))$, Hecke algebras and the Yang-Baxter equation*, Lett. Math. Phys. **11** (1986), 247-252.

[**Ju**] B. Jurčo, *Differential calculus on quantized simple Lie groups*, Lett. Math. Phys. **22** (1991), 177-186.

[**Ka**] M. Karoubi, "Homologie cyclique et K-théorie," Asterisque 149, 1987.

[**Kas**] C. Kassel, *Cyclic homology of differential operators, the Virasoro algebra and a q-analogue*, Preprint (1991).
[**Mal1**] G. Maltsiniotis, *Groupes quantiques et structures différentielles*, C.R.A.S. **311, Sér. I** (1990), 831-834.
[**Mal2**] G. Maltsiniotis, *Calcul différentiel sur le groupe linéaire quantique*, Preprint (1990).
[**Mal3**] G. Maltsiniotis, *Groupoïdes quantiques*, C.R.A.S. **314, Sér. I** (1992), 249-252.
[**Mal4**] G. Maltsiniotis, *Le langage des espaces et des groupes quantiques*, Preprint (1992).
[**Man1**] Yu. I. Manin, *Some remarks on Koszul algebras and quantum groups*, Ann. Inst. Fourier **37, 4** (1987), 191-205.
[**Man2**] Yu. I. Manin, "Quantum groups and non-commutative geometry," Centre de Recherches Mathématiques de l'Université de Montréal, 1988.
[**Man3**] Yu. I. Manin, *Multiparametric quantum deformation of the general linear supergroup*, Commun. Math. Phys. **123** (1989), 163-175.
[**Man4**] Yu. I. Manin, *Notes on quantum groups and quantum de Rham complexes*, Preprint, MPI/91-60 (1991).
[**MNW1**] T. Masuda, Y. Nakagami, J. Watanabe, *Noncommutative differential geometry on the quantum $SU(2)$, I: An algebraic viewpoint*, K-Theory **4** (1990), 157-180.
[**MNW2**] T. Masuda, Y. Nakagami, J. Watanabe, *Noncommutative differential geometry on the quantum two sphere of Podles, I: An algebraic viewpoint*, K-Theory **5** (1991), 151-175.
[**M-H**] F. Müller-Hoissen, *Differential calculi on the quantum group $GL_{p,q}(2)$*, Preprint, GOET-TP 55/91 (1991).
[**NUW**] M. Noumi, T. Umeda, M. Wakayama, *A quantum analogue of the Capelli identity and an elementary differential calculus on $GL_q(n)$*, Preprint, University of Tokyo (1991).
[**Po**] P. Podles, *Differential calculus on quantum spheres*, Lett. Math. Phys. **18** (1989), 107-119.
[**Pr**] S. B. Priddy, *Koszul resolutions*, Trans. Amer. Math. Soc. **152** (1970), 39-60.
[**RTF**] N. Yu. Reshetikhin, L. A. Takhtadzhyan, L. D. Fadeev, *Quantization of Lie groups and Lie algebras*, Len. Math. J. **1, 1** (1990), 193-225.
[**Ro**] M. Rosso, *Algèbres enveloppantes quantifiées, groupes quantiques compacts de matrices et calcul différentiel non commutatif*, Duke Math. J. **61, 1** (1990), 11-40.
[**Sch**] A. Schirrmacher, *Remarks on the use of R-matrices*, Preprint (1991).
[**SWZ**] A. Schirrmacher, J. Wess, B. Zumino, *The two-parameter deformation of $GL(2)$, its differential calculus, and Lie algebra*, Z. Phys. C - Particles and Fields **49** (1991), 317-324.
[**SVZ**] W. B. Schmidke, S. P. Vokos, B. Zumino, *Differential geometry of the quantum supergroup $GL_q(1|1)$*, Z. Phys. C - Particles and Fields **48** (1990), 249-255.
[**Su**] A. Sudbery, *Consistent multiparameter quantisation of $GL(n)$*, J. Phys. A: Math. Gen. **23** (1990), L697-L704.
[**Ta**] L. A. Takhtadzhyan, *Noncommutative homology of quantum tori*, Funct. Anal. and Appl. **23, 2** (1989), 147-149.
[**Tsy**] B. Tsygan, *Notes on differential forms on quantum groups*, Preprint (1991).
[**WZ**] J. Wess, B. Zumino, *Covariant differential calculus on the quantum hyperplane*, Preprint (1990).
[**Wo1**] S. L. Woronowicz, *Twisted $SU(2)$ group. An example of a non-commutative differential calculus*, Publ. RIMS **23** (1987), 117-181.
[**Wo2**] S. L. Woronowicz, *Differential calculus on compact matrix pseudogroups (quantum groups)*, Commun. Math. Phys. **122** (1989), 125-170.
[**Za1**] S. Zakrzewski, *A differential structure for quantum mechanics*, J. of Geom. and Phys. **2, 3** (1985), 135-145.
[**Za2**] S. Zakrzewski, *Quantum and classical pseudogroups. Part II. Differential and symplectic pseudogroups*, Commun. Math. Phys. **134** (1990), 371-395.