P. A. Meyer

**Diffusions quantiques, d'après Evans-Hudson**

*Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg - RCP25*, 1992, tome 42
« Conférences de Y. Benoist, D. Kastler, J.-F. Le Gall, P.-A. Meyer, V. Rivasseau, R. Stora, W. Thirring, I.T. Todorov », , exp. n° 3, p. 25-33
<http://www.numdam.org/item?id=RCP25_1992__42__25_0>

# Diffusions quantiques, d'après Evans–Hudson

par P.A. Meyer
INSTTTUT DE RECHERCHE MATHEMATIQUE AVANCEE
7, rue René Descartes STRASBOURG

**1. Equations différentielles dans une variété.** Considérons une équation différentielle ordinaire dans une variété $V$ de classe $\mathcal{C}^\infty$

$$\dot{x}(t) = F(x(t), t)\ , \quad x(0) = \xi$$

où $x(t)$ est une courbe différentiable, et où la nature géométrique de $F(x,t)$ est celle d'un champ de vecteurs dépendant du temps. Pour préparer le travail ultérieur, on l'écrit

$$dx(t) = F(x(t), t)\, dt\ , \quad x(0) = \xi,$$

(on devrait écrire $x(t,\xi)$ en toute rigueur) dont la signification est la suivante : pour toute fonction $f$ de l'algèbre $\mathcal{A} = \mathcal{C}^\infty(V)$

$$(1) \qquad f(x(t)) = f(\xi) + \int_0^t L_s f \circ x(s,\xi)\, ds$$

Ici $L_s f(x)$ vaut $< df, F(x,s) >$ . On peut encore le voir d'une autre manière : désignons par $X_t$ le difféomorphisme $\xi \longmapsto x(t,\xi)$ de $V$, et utilisons la même notation pour l'automorphisme correspondant de $\mathcal{A}$, soit $f \longmapsto f \circ X_t$ (nous écrirons aussi $X_t f$). De même considérons $L_s$ comme une application linéaire de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{A}$. Alors on a sur $\mathcal{A}$

$$(2) \qquad X_u = I + \int_0^u X_t L_t\, dt\ ,$$

Cette équation nous donne aisément, à partir du fait que $X_t$ est multiplicatif sur $\mathcal{A}$, le fait que $L_s$ est une dérivation de $\mathcal{A}$, autrement dit que $F(\cdot, s)$ est un champ de vecteurs.

**2. Equations différentielles classiques avec bruit.** On va maintenant introduire une équation différentielle avec termes de bruit. L'allure d'une telle équation est la suivante

$$(3) \qquad dx(t) = F_0(x(t), t)\, dt + \sum_\alpha F_\alpha(x(t), t)\, dZ_t^\alpha\ , \quad x(0) = \xi\ .$$

On posera $dt = dZ^0(t)$, et là où l'indice 0 est autorisé on notera l'indice par une lettre $\rho, \sigma$ plutôt que $\alpha, \beta$. On écrira parfois explicitement $x(t,\xi)$ ou $x(\omega, t, \xi)$.

Quelques remarques informelles : un bruit est de nature aléatoire, donc il y a un paramètre aléatoire caché $\omega$, et les seules choses qui auront un véritable sens physique dans une telle équation seront les moyennes $<>$ en $\omega$. Ces moyennes dépendent du point initial $\xi$, et on s'intéresse particulièrement à $P_t(\xi, f) = < f \circ x(t,\xi) >$ , le semi-groupe de la diffusion. Nous considérons que les bruits sont de nature *scalaire* (*plate*, comme le $dt$ de (1), et contrairement au $x(t)$ qui se promène dans un espace courbe). L'équation contient plusieurs espèces de bruits, chacune desquelles comporte sa réponse particulière $F_\alpha$ ; on peut souvent faire une normalisation des bruits de sorte que $<dZ^\alpha(t)> = 0$ (parce qu'on pourrait faire entrer la moyenne dans le premier terme), et $<dZ^\alpha(t)dZ^\beta(t)> = \delta^{\alpha\beta}dt$ (parce qu'on peut toujours appliquer le procédé de Schmidt pour les orthonormer). Enfin, les bruits à deux instants différents sont non corrélés. Le modèle le plus courant est celui du *bruit blanc* de multiplicité $\nu$, (ou mouvement brownien $\nu$-dimensionnel) et je m'y tiendrai.

On donne maintenant un sens à l'équation (3) : $f$ étant une fonction de $\mathcal{A}$, on calcule $f(x(t)-f(x(0))$ en appliquant la formule de Taylor. Je l'écris en supposant pour commencer que l'on est dans $\mathbb{R}^n$ : on a d'abord quelque chose d'habituel (la convention de sommation est utilisée ici et dans la suite)

$$f(x(t)) = f(x(0)) + \int_0^t D_i f(x(s)) F^i_\rho(x(s), s)\, dZ^\rho_s + \ldots$$

et ensuite une correction du second ordre due aux bruits

$$\ldots + \frac{1}{2}\int_0^t D_{ij} f(x(s)) F^i_\alpha(\ ) F^j_\beta(\ ) \delta^{\alpha\beta} ds\ .$$

Les intégrales figurant sur la première ligne n'ont pas de sens hors du contexte probabiliste, car $dZ^\alpha_t$ n'est pas une différentielle ordinaire (de fonction à variation bornée). C'est Ito qui a donné un sens précis aux intégrales stochastiques

$$\int_0^t H_s\, dZ^\alpha_s$$

pour lesquelles il est essentiel que la v.a. $(H_t)$ ne dépende que du déroulement du processus antérieurement à l'instant $t$. Ito a démontré alors l'existence et l'unicité des solutions de l'équation différentielle avec bruit (équation de diffusion). La nature géométrique du système des $F_\rho$ est celle d'un objet non tensoriel, d'ordre deux, et a été décrite par Schwartz.

On peut associer à l'équation différentielle stochastique (sur une variété compacte ou sur $\mathbb{R}^n$ par exemple), une famille de difféomorphismes aléatoires $\xi \longmapsto x(\omega, t, \xi)$ notés $X_t$, et nous écrirons encore $X_t f = f \circ X_t$. Nous pouvons alors écrire l'équation sous la forme

$$X_t f = f + \int_0^t X_s L_\rho(s) f\, dZ^\rho_s \tag{4}$$

où $L_\rho(s)$ est une application de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{A}$, donnée dans $\mathbb{R}^n$ (ou en coordonnées locales) par

$$L_\alpha(s)f(x) = F^i_\alpha(x,s) D_i f(x) \quad ;$$
$$L_0(s)f(x) = F^i_0(x,s) D_i f(x) + \frac{1}{2} F^i_\alpha(x,s) F^j_\beta(x,s)\, \delta^{\alpha\beta} D_{ij} f(x)\ .$$

Mais si l'on cherche directement à écrire que $X_t$ est un automorphisme d'algèbre, on obtient ces relations sans coordonnées, sous forme globale

$$L_\alpha(fg) - (L_\alpha f)g - f L_\alpha(g) = 0 \quad ; \quad L_0(fg) - (L_0 f)g - f L_0(g) = \sum_\alpha L_\alpha f\, L_\alpha g\ .$$

Les premières relations signifient que les $L_\alpha$ sont des dérivations (champs de vecteurs). La dernière exprime que $L_0$, le générateur de la diffusion, est un opérateur du second ordre, dont l'"opérateur carré du champ" figure du côté droit.

**3. Diffusions quantiques.** Nous allons maintenant "quantifier" la situation précédente. L'algèbre $\mathcal{A}$ devient une $^*$-algèbre non nécessairement commutative : nous ne restreindrons pas la généralité en réalisant cette algèbre comme algèbre d'opérateurs bornés sur un espace de Hilbert $\mathcal{J}$, dit *espace initial.* Nous quantifions le bruit suivant la recette habituelle : remplacer l'espace de Wiener $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sur lequel est réalisé le bruit blanc $(Z_t^\alpha)$ par l'espace de Hilbert $\Phi = L^2(\Omega)$. *Or celui-ci est l'espace de Fock construit sur l'espace Hilbertien* $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^\nu)$, un espace de Fock quelque peu inhabituel en physique, car la structure d'ordre de $\mathbb{R}_+$ va intervenir constamment. Le bruit va être constitué, au lieu des processus $Z_t^\rho$, par des processus non commutatifs d'opérateurs $\Lambda_\sigma^\rho(t)$, que nous allons décrire plus loin. On va coupler la variété et le bruit, c'est à dire former le produit tensoriel $\Psi = \mathcal{J} \otimes \Phi$ et identifier un opérateur $L$ sur $\mathcal{J}$ à l'opérateur $L \otimes I$ sur $\Psi$. Le "processus stochastique" $X_t$ à valeurs dans $V$ sera remplacé par une *famille d'homomorphismes contractifs (de $^*$-algèbre) de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{B}(\Psi)$*. Nous soulignerons les analogies probabilistes en écrivant soit $X_t f$ ($f \in \mathcal{A}$, $X_t f \in \mathcal{B}(\Psi)$), soit $f \circ X_t$. Nous exigerons enfin que $X_0$ soit l'identité, *i.e.* $X_0 f = f \otimes I$.

Passons à la définition des opérateurs. L'espace de Hilbert $\Phi$ admet une *base continue,* formée des monômes

$$dZ_{s_1}^{\alpha_1} \dots dZ_{s_n}^{\alpha_n} \quad \text{avec} \quad s_1 < \dots < s_n,\ \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \{1, \dots, \nu\}\,.$$

Cela signifie que toute variable aléatoire $f \in L^2(\Omega)$ admet un développement en intégrales stochastiques multiples orthogonales

$$\int_{s_1 < \dots < s_n} f_a(s_1, \dots, s_n)\, dZ_{s_1}^{\alpha_1} \dots dZ_{s_n}^{\alpha_n}$$

(un type d'intégrales pour chaque multiindice $a = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$), le carré de la norme d'une telle intégrale étant

$$\int_{s_1 < \dots < s_n} |f_a(s_1, \dots, s_n)|^2\, ds_1 \dots ds_n\,.$$

Le cas $n = 0$ correspond à un monôme vide noté $\mathbf{1}$, de norme 1. On peut adopter une notation très concise, en écrivant les monômes de base sous la forme $dZ_\pi$, où $\pi$ est une application définie sur une partie finie $A = \mathrm{dom}(\pi) = \{s_1 < \dots < s_n\}$ de $\mathbb{R}_+$, à valeurs dans l'ensemble $\{1, \dots, \nu\}$ ; on pose aussi $|\pi| = |A| = n$. la donnée de $\pi$ équivaut aussi à la donnée des $n$ ensembles finis disjoints $A_i = \pi^{-1}(i)$. On écrira alors

$$f = \int_\Pi f(\pi)\, dZ_\pi\,, \qquad \|f\|^2 = \int_\Pi |f(\pi)|^2 d\pi\,.$$

Nous noterons $\Phi_t$ et $\Phi^t$ les sous espaces engendrés par les monômes $Z_\pi$ dont le domaine est à gauche (à droite) de $t$ ; on a un isomorphisme $\Phi \sim \Phi_t \otimes \Phi^t$, et nous dirons qu'un opérateur (borné pour simplifier) de la forme $A_t \otimes I^t$ est *antérieur à l'instant* $t$.

Décrivons maintenant l'effet des "différentielles d'opérateurs" $d\Lambda_\rho^\sigma(s)$ sur les monômes de base : $d\Lambda_0^\alpha(s)$ est un opérateur de création, il tue le monôme $dZ_\pi$ si $s \in \mathrm{dom}(\pi)$, et sinon il y rajoute l'élément différentiel $dZ_s^\alpha$ ; $d\Lambda_\alpha^0(s)$ est un opérateur d'annihilation, qui tue le monôme si l'élément différentiel $dZ_s^\alpha$ n'y est pas, et s'il y est le remplace par $ds = dZ_s^0$. Les opérateurs $d\Lambda_\alpha^\beta(s)$ de même remplacent $dZ_s^\alpha$ par $dZ_s^\beta$, ce sont des opérateurs de nombre si $\alpha = \beta$, et d'échange sinon. Enfin $d\Lambda_0^0(t)$ est simplement la multiplication par $dt$. Ce formalisme heuristique peut être rendu entièrement rigoureux, et les règles de composition des opérateurs sont résumées dans la *table d'Evans*, qui généralise à la fois la table d'Ito et les relations CCR

$$d\Lambda_\varphi^\psi d\Lambda_\rho^\sigma = \widehat{\delta}_\varphi^\sigma d\Lambda_\rho^\psi$$

le symbole $\widehat{\delta}_\varphi^\sigma$ différant du symbole de Kronecker usuel par le fait que $\widehat{\delta}_0^0 = 0$. Les éléments différentiels $d\Lambda_\rho^\sigma(t)$ sont faits pour être intégrés : on peut définir des *intégrales stochastiques d'opérateurs* $\int_0^t H_s d\Lambda_\rho^\sigma(s)$, où pour tout $t$ l'opérateur $H_t$ est antérieur à l'instant $t$. Il est inutile de donner ici les détails techniques.

Nous pouvons maintenant écrire une équation de diffusion quantique : on cherche à construire des homomorphismes d'algèbres $X_t$, transformant $f \in \mathcal{A}$ en un opérateur $X_t f$ antérieur à l'instant $t$, de telle sorte que

$$X_t f = f + \sum_{\rho\sigma} \int_0^t X_s(L_\sigma^\rho f)\, d\Lambda_\rho^\sigma(s)$$

les coefficients de la diffusion $L_\sigma^\rho$ étant des applications de l'algèbre initiale $\mathcal{A}$ dans elle même.

La condition que $X_t$ soit un homomorphisme va imposer aux coefficients de la diffusion des *relations de structure* : il y a d'abord deux conditions immédiates, $(L_\rho^\sigma)^* = L_\sigma^\rho$ et $L_\rho^\sigma I = 0$. La condition non triviale exprime la multiplicativité et s'écrit

$$L_\rho^\sigma(fg) - (L_\rho^\sigma f)g - f L_\rho^\sigma g = \sum_\alpha L_\alpha^\sigma L_\rho^\alpha g\ .$$

Elle se scinde en trois, suivant le rôle spécial de l'indice 0 :

1) La matrice $\Lambda(f) = (L_\alpha^\beta(f))$ est telle que $f \longmapsto fI + \Lambda(f) = \Sigma(f)$ soit un homomorphisme de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{M}_\nu(\mathcal{A})$

2) Le vecteur colonne $L_0^\alpha(f) = L^\alpha(f) = \lambda(f)$ détermine le vecteur ligne $L_\alpha^0(f)$ par conjugaison. Il suffit donc d'exprimer une condition pour l'un des deux. Celle-ci est

$$\lambda(fg) = \lambda(f)g + \Sigma(f)\lambda(g)\ .$$

3) Pour le "générateur" $L(f) = L_0^0(f)$ de la diffusion, la propriété s'écrit ainsi

$$L(f^*g) - f^*L(g) - L(f^*)g = \sum_\alpha L_\alpha(f^*)L^\alpha(g) = <\lambda(f), \lambda(g)>\ .$$

en désignant par $<f, g>$ le "produit scalaire" $f^*g$ sur $\mathcal{A}$ à valeurs dans $\mathcal{A}$, ainsi que son extension naturelle à $\mathcal{A}^\nu$.

Evans et Hudson ont montré, inversement, que si les conditions de structure sont satisfaites, il existe bien une solution unique à l'équation de diffusion, au moins dans le cas où les coefficients $L^\sigma_\rho$ sont bornés. Applebaum, Mohari–Sinha sont parvenus à affaiblir cette condition trop restrictive.

On comprend mieux les équations de structure en employant un peu de langage de la cohomologie de Hochschild. La dernière relation de structure donne le calcul du cobord de la 1–cochaîne $L(f)$ sur $\mathcal{A}$ à valeurs dans le bimodule $\mathcal{A}$. On peut interpréter la relation précédente en introduisant sur $\mathcal{A}^\nu$ une structure de $\mathcal{A}$-bimodule autre que la structure usuelle, et pour laquelle le produit à droite reste $\mathrm{m}\cdot f = \mathrm{m}f$ mais $f\cdot\mathrm{m} = \Sigma(f)\mathrm{m}$. Alors $\lambda$ devient une dérivation, *i.e.* un 1–cocycle. Autrement dit, pour se donner une diffusion quantique, on se donne d'abord l'homomorphisme $\Sigma(\cdot)$, puis la ligne $\lambda$ de "champs de vecteurs", et il reste à se donner le générateur $L$, ce qui est un problème de nature cohomologique (un cocycle donné est il un cobord ?). Hudson a mis en évidence l'impossibilité de construire certaines diffusions dans certaines algèbres à cohomologie non triviale ( les tores non commutatifs).

**4. Diffusions intérieures.** La cohomologie apparaît aussi de manière naturelle dans le problème de la caractérisation des *diffusions intérieures,* c'est à dire des diffusions de la forme

$$X_t f = U_t f U_t^*$$

où $(U_t)$ est une famille adaptée d'opérateurs unitaires sur $\Psi$, solution d'une équation différentielle stochastique du type antérieurement étudié dans les travaux de Hudson–Parthasarathy :

$$dU_t = U_t\big(\sum_{\rho\sigma} K^\rho_\sigma d\Lambda^\sigma_\rho(t)\big)\,,$$

où les coefficients $K^\sigma_\rho$ sont des opérateurs sur l'espace initial $\mathcal{J}$. Il sera commode de poser

$$\overset{*}{K}{}^\rho_\sigma = (K^\sigma_\rho)^*\,.$$

Les conditions nécessaires sur les coefficients pour l'unitarité des $U_t$ (suffisantes lorsque les coefficients sont bornés, par exemple,) sont

$$K^\rho_\sigma + \overset{*}{K}{}^\rho_\sigma + \sum_\alpha K^\rho_\alpha \overset{*}{K}{}^\alpha_\sigma = 0 = K^\rho_\sigma + \overset{*}{K}{}^\rho_\sigma + \sum_\alpha \overset{*}{K}{}^\rho_\alpha K^\alpha_\sigma\,.$$

D'autre part, le passage des coefficients $K^\rho_\sigma$ aux coefficients $L^\rho_\sigma(f)$ de la diffusion intérieure est donné par

$$L^\rho_\sigma(f) = \overset{*}{K}{}^\rho_\sigma f + f K^\rho_\sigma + \sum_\alpha \overset{*}{K}{}^\rho_\alpha f K^\alpha_\sigma\,.$$

Les conditions d'unitarité précédentes sont *équivalentes* aux équations de structure pour la diffusion intérieure.

**5. Chaînes de Markov.** Parthasarathy et Sinha ont montré que, si l'algèbre $\mathcal{A}$ est commutative, les opérateurs $X_t f$ commutent tous entre eux, et on peut alors utiliser la méthode des diffusions quantiques pour construire des processus classiques. Nous allons donner deux exemples de cette situation. Il va falloir faire appel pour cela à un peu de technique probabiliste.

Considérons un espace d'états fini $E$. Nous prenons pour $\mathcal{A}$ l'algèbre de toutes les fonctions complexes sur $E$, avec son involution évidente, et nous considérons une chaîne de Markov $(X_t)$ de fonction de transition $(p_t(i,j))$. Nous posons pour tout couple $(i,j)$ $a(i,j) = \frac{d}{dt}p_t(i,j)|_{t=0}$. Si $\varphi(i,j)$ est une fonction de deux variables nous définissons la fonction $N\varphi$ d'une seule variable par la formule $N\varphi(i) = \sum_{j\neq i} a(i,j)\varphi(i,j)$ (le noyau de Lévy de la chaîne). Nous poserons aussi, pour une fonction $f$ d'une variable $Af(i) = \sum_j a(i,j)f(h)$ (le générateur). Pour toute fonction $\varphi(i,j)$ nulle sur la diagonale, il est classique que le processus

$$M_t(\varphi) = \sum_{s\leq t} \varphi(X_{s-}, X_s) - \int_0^t N\varphi(X_s)\, ds$$

est une martingale de carré intégrable, et le crochet oblique de deux telles martingales est donné par

$$< M(\varphi), M(\psi)>_t = \int_0^t <\varphi,\psi> \circ X_s\, ds \ ,$$

où $<\varphi,\psi> \ = N(\varphi\psi)$ est un "produit scalaire à valeurs dans l'algèbre $\mathcal{A}$". Sous la condition que le nombre des points $j$ tels que $n(i,j) \neq 0$ soit indépendant de $i$ (nous le noterons alors $\nu+1$), on peut trouver des fonctions $z^\alpha$, $\alpha = 1,\ldots,\nu$, formant une base orthonormale sur $\mathcal{A}$ de l'espace des fonctions de deux variables nulles sur la diagonale. Ajoutant la fonction $z^0(i,j) = 1$, on obtient une base sur $\mathcal{A}$ de toutes les fonctions de deux variables. En particulier, on a une formule de multiplication, qui prend la forme

$$z^\alpha z^\beta = \delta^{\alpha\beta} + \sum\nolimits_\gamma c_\gamma^{\alpha\beta} z^\gamma \ ,$$

où $c_\gamma^{\alpha\beta}$ est une fonction d'une seule variable. Nous complèterons le tableau des $c_\tau^{\rho\sigma}$ en convenant que

$$c_0^{\alpha\beta} = \delta^{\alpha\beta} \ , \qquad c_\tau^{\rho 0} = c_\tau^{0\rho} = \delta_\tau^\rho \ .$$

Les martingales $Z_t^\alpha = M_t(z^\alpha)$ satisfont à toutes les conditions de normalisation que nous avons exigées pour un "bruit", et Biane a démontré récemment que toutes les fonctionnelles de carré intégrable de la chaîne sont développables en intégrales stochastiques multiples (chaos de Wiener) des $Z^\alpha$, exactement comme dans le cas du mouvement brownien à $\nu$ dimensions. La seule différence est que les coefficients du développement chaotique dépendent du point initial de la chaîne. Autrement dit, c'est un *développement chaotique à coefficients dans l'algèbre* $\mathcal{A}$. Nous poserons aussi $Z_t^0 = t$. On a alors une "formule d'Ito"

$$f(X_t) = f(X_0) + \sum_\sigma \int_0^t D_\sigma f(X_{s-})\, dZ_s^\sigma \qquad .$$

où l'on a posé $D_0 = A$ et

$$D_\alpha f(i) = \sum\nolimits_j n(i,j) z^\alpha(i,j)(f(j) - f(i)) \ .$$

Cette formule s'obtient en remarquant que la martingale $f(X_t)-f(X_0)-\int_0^t Af(X_s)\,ds$ est de la forme $M_t(\varphi)$ avec $\varphi(i,j)=f(j)-f(i)$. Ensuite, , désignons par $X_tf$ l'opérateur de multiplication par la v.a. $f\circ X_t$ (égale p.s. à $f\circ X_{t-}$). Nous allons écrire ces opérateurs sous la forme d'une intégrale stochastique, i.e. nous allons calculer l'opérateur de multiplication par $d(f\circ X_t)$ ; compte tenu de la "formule d'Ito" cela revient à savoir multiplier par $dZ_t^\alpha$. Or on a

$$dZ_t^\alpha dZ_t^\beta = \sum_\rho c_\sigma^{\alpha\beta}\, dZ_t^\sigma \ .$$

On a aussi $dZ_t^\alpha dZ_t^0 = 0$, $dZ_t^\alpha \mathbf{1} = dZ_t^\alpha$, donc l'opérateur de multiplication par $dZ_t^\alpha$ vaut $\sum_\beta X_t(c_\sigma^{\alpha\rho})\,d\Lambda_\rho^\sigma(t)$. Alors on voit que l'équation différentielle stochastique quantique satisfaite par la chaîne est

$$d(X_tf) = \sum_{\rho\sigma} X_t(D_\tau(f)\,c_\sigma^{\tau\rho})\,d\Lambda_\sigma^\tau(t)\ .$$

Cela réalise l'idée très ancienne de Kolmogorov, d'unifier les chaînes de Markov continues et les processus de diffusion.

**6. Construction de diffusions classiques.** Nous allons ici reproduire les résultats d'un très joli travail d'Applebaum [2], qui montre comment on peut construire des diffusions classiques au moyen d'équations différentielles stochastiques quantiques, gouvernées seulement par les opérateurs de création et d'annihilation. J'ignore quelles sont exactement les conditions analytiques, Applebaum n'ayant pas encore publié les démonstrations complètes (voir toutefois [1]).

Nous nous proposons de donner une construction quantique de l'équation différentielle stochastique classique suivante dans une variété $\mathcal{C}^\infty$ $V$ — donnée sans connexion, de sorte que l'é.d.s. est prise au sens de Stratonovitch

$$dX_t = \sum_\rho \xi_\rho(X_t)\circ dB_t^\rho$$

Les $\xi_\rho$ sont des champs de vecteurs, $dB_t^0 = dt$ comme d'habitude. Soit $\mathcal{A}$ l'algèbre $\mathcal{C}^\infty(V)$ ; on a pour $f\in\mathcal{A}$, les intégrales stochastiques étant prises cette fois au sens d'Ito

$$d(f\circ X_t) = \xi_\alpha(f)\circ X_t\, dB_t^\alpha + (\xi_0(f) + \frac{1}{2}\sum_\alpha \xi_\alpha\xi_\alpha f)\circ X_t\, dt\ .$$

Pour interpréter cela comme e.d.s. quantique, nous prenons pour espace de Hilbert (complexe) initial $\mathcal{J} = L^2(\mu)$, où la mesure $\mu$ admet dans toute carte locale une densité $\mathcal{C}^\infty$ strictement positive. Le sous-espace $\mathcal{D} = \mathcal{C}_c^\infty(V)$ est dense dans $\mathcal{J}$. L'algèbre $\mathcal{A}$ est considérée opèrant sur $\mathcal{J}$ par multiplication.

Considérons l'algèbre de Lie $\mathcal{L}$ des opérateurs de domaine $\mathcal{D}$, de la forme $K=\xi+k$, $k\in\mathcal{A}$, $\xi$ étant un champ de vecteurs $\mathcal{C}^\infty$ (complexe) : ces opérateurs laissent stable $\mathcal{D}$ ; d'autre part, tout élément de $\mathcal{L}$ admet un adjoint formel, admettant lui aussi $\mathcal{D}$ comme domaine stable. En effet, il suffit d'examiner le cas d'un champ de vecteurs réel $\xi$, et on a alors $\xi+\xi^* = -\operatorname{div}\xi\in\mathcal{A}$, div étant la divergence des champs de vecteurs par rapport à la mesure $\mu$. Il est important de noter que le crochet $[K,f]$ d'un élément de $\mathcal{L}$ avec $f \in \mathcal{A}$ appartient à $\mathcal{A}$. Plus précisément, ce crochet est égal à l'opérateur de multiplication par la fonction $\xi f$.

Oublions pour un instant l'indice 0. Donnons nous des opérateurs $K_\alpha = \xi_\alpha + k_\alpha \in \mathcal{L}$. Pour faire joli, donnons nous aussi un opérateur $H$, n'appartenant pas nécessairement à $\mathcal{L}$, mais admettant $\mathcal{D}$ comme domaine stable, tel que $[H,\mathcal{A}] \subset \mathcal{A}$, et symétrique ($H = H^*$). Considérons l'équation différentielle stochastique suivante du type de Hudson–Parthasarathy

$$dU_t = U_t \Big( \sum_\alpha (K_\alpha da_t^{\alpha+} - K_\alpha^* da_t^{\alpha-}) + (iH - \frac{1}{2}\sum_\alpha K_\alpha^* K_\alpha)\,dt \Big) .$$

Cette équation satisfait aux conditions formelles d'unitarité. La diffusion intérieure associée, sur l'algèbre $\mathcal{B}$ de tous les opérateurs sur $\mathcal{J}$, s'écrit pour $f \in \mathcal{B}$

$$dX_t f = \sum_\alpha X_t([K_\alpha, f])\,da_t^{\alpha+} - X_t([K_\alpha^*, f])\,da_t^{\alpha-} + X_t(Af)\,dt ,$$

le générateur $A$ étant donné par

$$\begin{aligned} Af &= i\,[H,f] + \frac{1}{2}\sum_\alpha (2K_\alpha^* f K_\alpha - K_\alpha^* K_\alpha f - f K_\alpha^* K_\alpha) \\ &= i\,[H,f] + \frac{1}{2}\sum_\alpha ( [K_\alpha^*, f]\,K_\alpha + K_\alpha^*[f, K_\alpha] ) , \end{aligned}$$

et les conditions imposées aux $K_\alpha$ et à $H$ entraînent que les coefficients de cette diffusion quantique appliquent $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{A}$ : en effet, il suffit de vérifier que pour $L \in \mathcal{L}$ on a $[L^*, f]\,L + L^*[f, L] \in \mathcal{A}$, et on utilise le fait que $L^* = -L + \ell$, $\ell \in \mathcal{A}$ ; cet opérateur est alors égal à $[L, [L, f]] - \ell[L, f]$, et il appartient bien à $\mathcal{A}$.

On pourra donc construire (si l'on est optimiste quant à l'analyse!) une diffusion quantique *sur* $\mathcal{A}$. Comme $\mathcal{A}$ est commutative, on peut l'interpréter comme un processus stochastique classique. Si on veut l'identifier à l'équation différentielle stochastique de départ, on doit identifier $dB_t^\alpha$ à $dQ_t^\alpha = da_t^{\alpha+} + da_t^{\alpha-}$, $[K_\alpha, f]$ à $\xi_\alpha f$, ce qui oblige à prendre pour $K_\alpha$ les champs $\xi_\alpha$ donnés, mais laisse libres les fonctions $k_\alpha$. Calculant alors l'opérateur $Af$, nous obtenons comme prévu un élément de $\mathcal{A}$, (l' opérateur de multiplication par) la fonction

$$Af = i\,[H,f] + \frac{1}{2}\sum_\alpha \xi_\alpha \xi_\alpha f + \sum_\alpha (\tfrac{1}{2}\operatorname{div} \xi_\alpha - k_\alpha)\xi_\alpha f$$

Prenons pour l'instant $H = 0$, et comparons à l'équation de Stratonovitch : les générateurs sont égaux à condition que l'on ait $k_\alpha = \frac{1}{2}\operatorname{div} \xi_\alpha$, le choix qui fait de $iK_\alpha$ un opérateur autoadjoint. On voit donc que les coefficients de la diffusion quantique traduisant l'é.d.s. classique dépendent de l'écriture de l'espace de Hilbert initial comme espace $L^2(\mu)$, mais que le choix naturel des coefficients s'écrit de manière intrinsèque sur les $K_\alpha$.

Si l'on revient alors à l'équation exponentielle, celle–ci s'écrit maintenant

$$dU_t = U_t \left( \sum_\alpha K_\alpha dQ_t^\alpha + \left( \frac{1}{2} \sum_\alpha K_\alpha K_\alpha \right) dt \right) ,$$

qui est joli, parce qu'il a exactement la même forme que l'équation de départ. Mais alors, nous voyons comment on peut introduire le champ de vecteurs supplémentaire $\xi_0$ figurant dans cette équation : on prend $K_0 = \xi_0 + k_0$ tel que $iK_0$ soit autoadjoint, et on choisit $iH = K_0$ ; alors $i[H, f]$ est l'opérateur de multiplication par $\xi_0 f$, et on a une correspondance tout à fait satisfaisante entre é.d.s. classiques et quantiques.

## REFERENCES


[1] APPLEBAUM (T.). Quantum Diffusions on Involutive Algebras. *Proc. of the 1988 Heidelberg Conf. on Quantum Probability.* A paraître

[2] APPLEBAUM (T.). The Quantum Theory of Classical Diffusions on Riemannian Manifolds. A paraître

[3] EVANS (M.P.). Existence of Quantum Diffusions. *Prob. Th. Rel. Fields (ZW),* **81**, 1989, p. 473-483.

[4] EVANS (M.P.) et HUDSON (R.L.). Multidimensional quantum diffusions. *Quantum Probability and Applications III,* LN 1303, Springer 1988.

[5] EVANS (M.P.) et HUDSON (R.L.). Perturbations of quantum diffusions. *Proc. London Math. Soc.*, à paraître.

[6] HUDSON (R.L.) et PARTHASARATHY (K.R.). Quantum Ito's formula and stochastic evolutions. *Comm. Math. Phys.*, **93**, 1984, p. 301–323.

[7] MOHARI (A.). and SINHA (K.B.). Quantum stochastic flows with infinite degrees of freedom and countable state Markov chains. *Preprint,* Indian Statistical Institute, Delhi, 1989. A paraître dans *Sankhya.*

[8] PARTHASARATHY (K.R.). and SINHA (K.B.). Markov chains as Evans–Hudson diffusions in Fock space. *Sém. Prob. XXIV,* a paraître.