RECHERCHE COOPÉRATIVE SUR PROGRAMME Nº 25

FRÉDÉRIC PHAM

Résurgence des fleuves

Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg - RCP25, 1990, tome 41
« Conférences de M. Chaperon, A. Chenciner, R. Lozi, J. Martinet et J.P. Ramis, P. Moussa, R. Moussu, F. Pham, R. Thom », , exp. nº 5, p. 151-162
<http://www.numdam.org/item?id=RCP25_1990__41__151_0>

(exposé à la Rencontre de Strasbourg en l'honneur de René THOM, Mai 1989)

RESURGENCE des FLEUVES

Frédéric PHAM

Le texte qui suit paraîtra en "épilogue" de notre livre **"Approche de la résurgence"**, *écrit en collaboration avec* **B.Candelpergher et J.C.Nosmas.**
Sa lecture ne requiert qu'un minimum de connaissance de la théorie de la résurgence, qu'on peut acquérir en lisant le petit exposé introductif de B.Candelpergher *dans la* Gazette des Mathématiciens n°42 (Soc.Math.France, Oct.1989).

Cet épilogue est l'histoire d'une rencontre: celle des idées de F. et M. Diener avec les idées de J.Ecalle. Le cadre en a été le séminaire "Résurgence et analyse non standard" organisé avec F.Diener à Nice en 1988-89, avec comme impulsion initiale les questions de F. et M.Diener sur les développements asymptotiques des "fleuves". Dans leur apparente simplicité, ces questions ont été pour nous tous un extraordinaire "révélateur", à la fois des possibilités de la théorie d'Ecalle et de l'insuffisante maîtrise que nous en avions. Les lignes qui suivent sont le reflet des discussions passionnées entre participants du séminaire, et des explications qu'Ecalle nous a prodiguées sous forme de lettres, échanges téléphoniques, conversations et exposés au séminaire parisien de F. et M.Diener.
Que tous en soient ici remerciés.

0.- PRESENTATION du PROBLEME.

Tracés par un ordinateur (cf. [AG]), les portraits de phase des champs de vecteurs dans le plan $\mathbb{R}^2$ présentent génériquement des concentrations infinies de trajectoires, en violation apparente du principe de Cauchy d'unicité des solutions d'une équation différentielle. Ces trajectoires qui tendent à "canaliser" toutes les trajectoires voisines ont été appelées *fleuves* par F. et M. Diener, qui ont découvert et étudié systématiquement le phénomène [D].

La Fig. 1 est l'exemple favori de F. et M. Diener : extrait de [AG], c'est le portrait de phase de l'équation de Liouville $Y' = Y^2 - X$. On y voit très nettement deux types de fleuves partant à l'infini vers la droite :

1°) une trajectoire asymptotique à $Y = \sqrt{X}$, d'où semblent "surgir" une infinité de trajectoires qui s'en écartent très rapidement (*"fleuve répulsif"*) ;

2°) une "confluence" très marquée, asymptotique à $Y = -\sqrt{X}$, de trajectoires s'attirant mutuellement (*"fleuve attractif"*).

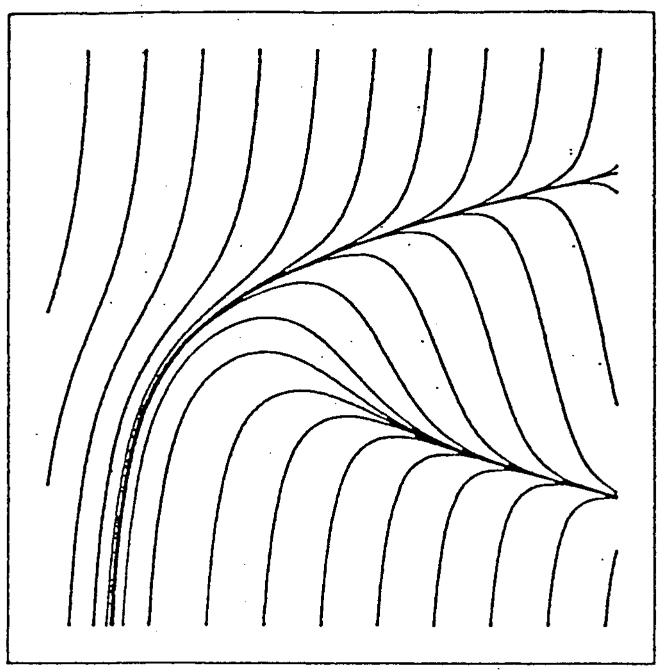

Fig. 1

Portrait de phase de l'équation de Liouville $Y' = Y^2 - X$

On peut s'étonner qu'un phénomène aussi frappant et aussi répandu (cf. [D]) soit resté si longtemps inaperçu des géomètres. Sans doute est-ce parce que le géomètre, "sachant" que par un point ne passe qu'une seule trajectoire, s'arrangera toujours pour que son dessin n'entre pas en contradiction avec ce principe. Pour ouvrir les yeux sur le phénomène des fleuves il fallait donc l'innocence de l'ordinateur, ou de disciples de G. Reeb.

Considérons maintenant un autre type d'innocence, celui d'un étudiant du 1er cycle universitaire, et proposons lui l'exercice suivant :

Exercice : Résoudre l'équation $Y' = Y^2 - X$ sous forme de développement en série de puissances demi-entières décroissantes de X.
Habitué à ce que tout exercice posé par le professeur admette une solution, l'étudiant ne sera pas étonné de trouver une solution *unique* (à la détermination de $X^{1/2}$ près) :

$$\textbf{(0)} \qquad Y = X^{1/2} + \frac{1}{4X} - \frac{5}{32X^{5/2}} + \dots$$

Si c'est un bon étudiant, il se dira peut-être que (0) n'est qu'une solution particulière *parmi une infinité d'autres non exprimables sous cette forme.* S'il maîtrise parfaitement le livre "Calcul infinitésimal" de Dieudonné, il soupconnera peut-être que la série formelle (0) est, pour $X^{1/2} = \sqrt{X}$, un développement asymptotique de la trajectoire que nous avons appelée "fleuve répulsif", et pour $X^{1/2} = -\sqrt{X}$ un développement asymptotique des trajectoires groupées sous l'étiquette "fleuve attractif".

C'est alors que le maître intervient pour lui révéler que la série (0) est divergente (cf. [D3]), et pour poser sa
QUESTION : Existe-t-il un procédé de "sommation" permettant, à partir de la seule donnée de la série (0), de reconstruire toutes les solutions de l'équation différentielle ?

Nous allons montrer qu'à condition de se restreindre à des "bassins" convenables au voisinage de l'infini, la réponse est *oui*, précisément parce que la série est divergente.

1.- Fleuves formels.

On considère une équation différentielle dans le domaine réel

$$Y' = F(X,Y) \qquad (1)$$

où F est – disons – une fonction rationnelle de X et Y : $F \in \mathbb{R}(X,Y)$.

1.1 Définition. On appelle *"fleuve formel"* une série formelle $\hat{Y} \in \mathbb{R}((X^{-1/q}))$ (série de puissances fractionnaires décroissantes de X) telle que

$$F(X, \hat{Y}(X)) = 0$$

$d_X(F'_Y(X, \hat{Y}(X)) > -1$, où d_X désigne le degré en X , c'est-à-dire l'exposant du premier terme non nul de la série considérée.

Cette définition est la version formelle de la définition des "fleuves" récemment proposée par *F. Blais* [B].

Commentaire. Soit $Y^{(o)}$ une solution de (1) ayant $\hat{Y}$ pour développement asymptotique, et soit Y une solution "voisine"

$$Y = Y^{(o)} + u\, Y^{(1)} + \ldots \quad (u \text{ "petit"}).$$

Le terme $Y^{(1)}$ est solution de l'équation "linéarisée"

(1)' $$\frac{d}{dX} Y^{(1)} = F'_Y(X, y^{(0)}(X))\, Y^{(1)} .$$

Pour en calculer un développement asymptotique, posons

$$F'_Y(X, \hat{Y}(X)) = E(X) + \frac{\tau}{X} + \ldots ,$$

où $E(X)$ est la somme des termes de degré > -1 . En notant $z(X)$ la primitive nulle en 0 de $E(X)$, on déduit de (1)' que $Y^{(1)}$ admet un développement asymptotique de la forme

$$\hat{Y}^{(1)} = X^{\tau} e^{z(X)}\, y^{(1)}(X) ,$$

où $\quad y^{(1)} = 1 + O(X^{-1/q}) \in \mathbb{R}[[X^{-1/q}]]$

la condition $y^{(1)}(\infty) = 1$ fixe la normalisation de $\hat{Y}^{(1)}$).

Exemple : l'équation de Liouville $Y' = Y^2 - X$.

$$F'_Y(X, \hat{Y}) = 2\hat{Y} \text{ a pour primitive } \frac{4}{3} X^{3/2} + \frac{1}{2} \operatorname{Ln} X + \frac{5}{24} X^{-3/2} + \ldots ,$$

ce qui donne

$$\hat{Y}^{(1)} = X^{1/2}\, e^{\frac{4}{3} X^{3/2}} \left(1 + \frac{5}{24} X^{-3/2} + \ldots\right) .$$

1.2 Proposition. *Pour tout fleuve formel* $\hat{Y}$ *, l'expression* $\hat{Y} + u\,\hat{Y}^{(1)}$ *construite* *ci-dessus est le début d'un développement formel à une indéterminée* u

$$\hat{Y}^{\bullet}(X,u) = \hat{Y}^{(o)} + u\,\hat{Y}^{(1)} + u^2\,\hat{Y}^{(2)} + \ldots \quad (\hat{Y}^{(o)} = \hat{Y}) \qquad (2),$$

où $$\hat{Y}^{(m)} = (X^{\tau}e^{z(X)})^m\, y^{(m)}(X) \quad , \; y^{(m)} \in \mathbb{R}((X^{-1/q})) \; ,$$

qui est formellement solution de l'équation différentielle. Ce développement est unique une fois choisie la normalisation de $\hat{Y}^{(1)}$.

On l'appelle *"intégrale formelle"* de l'équation différentielle.

La preuve, facile, est laissée au lecteur.

1.3 Réduction d'un fleuve formel.

Le changement de variable $X \longmapsto z(X) = X^{p/q}(c + O(X^{-1/q}))$ $(c \neq 0)$ permet de récrire chacun des termes $\hat{Y}^{(m)}$ de l'intégrale formelle sous la forme

$$\hat{Y}^{(m)}(z) = e^{mz} z^{m\sigma} f^{(m)}(z) \qquad (\sigma = \tau p/q,\; f^{(m)} \in \mathbb{R}((z^{-1/p}))\;),$$

ce qui suggère de considérer $\hat{Y}^{\bullet}$ comme un "symbole" en z de support $0, -1, -2, \ldots$.
Concurremment à ce changement de variable, un changement de fonction inconnue va s'avérer commode. Ecrivant, pour r assez grand,
$\hat{Y} = c_0 X^{\alpha_0} + c_1 X^{\alpha_1} + \ldots + c_r X^{\alpha_r}(1 + O(X^{-1/q}))$ (avec $c_i \neq 0$, $\alpha_0 > \alpha_1 > \ldots$),
on va remplacer l'inconnue Y par Φ qui s'en déduit par la formule

$$Y = c_0 X^{\alpha_0} + c_1 X^{\alpha_1} + \ldots + c_r X^{\alpha_r}(1 + \Phi) \qquad (3).$$

Lemme de réduction: Pour r assez grand, le changement de variable et de fonction inconnue $(X,Y) \longmapsto (z,\Phi)$ met l'équation différentielle (1) sous la forme

$$((d/dz)-1)\Phi = G(z,\Phi) \qquad (4),$$

où $G = G_0(z) + G_1(z)\Phi + G_2(z)\Phi^2 + \ldots \in \mathbb{R}\{z^{-1/p}, \Phi\}$,
avec $G_0 \in z^{-1/p}\,\mathbb{R}\{z^{-1/p}, \Phi\}$, $G_1 \in z^{-1}\,\mathbb{R}\{z^{-1/p}, \Phi\}$.

Preuve. Considérons l'algorithme suivant de construction d'un fleuve formel $\hat{Y}$ (cf. [B]):
les r premiers termes de $\hat{Y}$ étant supposés construits, on les retranche à la fonction

inconnue Y , ce qui donne une nouvelle fonction inconnue Y_r solution d'une équation différentielle de la forme

$$Y_r' = F_r(X, Y_r) \qquad , \qquad F_r \in \mathbb{R}(X^{1/q}, Y_r) \ ;$$

alors le degré α_r du terme suivant $c_r X^{\alpha_r}$ devra être une pente du polygone de Newton de F_r ; plus précisément, si l'on développe F_r en série de composantes quasi-homogènes de poids $(1, \alpha_r)$, la partie initiale de F_r (composante de poids maximal) devra être de poids $> \alpha_r - 1$, et divisible par $Y_r - c_r X^{\alpha_r}$. Or il résulte de [B] que pour tout fleuve formel $\hat{Y}$ ce processus poussé assez loin donne un *"fleuve non critique"*, c.à.d. que pour r assez grand $Y_r - c_r X^{\alpha_r}$ est un facteur simple de la partie initiale de F_r .
Pour un tel choix de r le lemme de réduction se vérifie sans difficulté.

1.4 Tout est maintenant prêt pour mettre en route la machinerie d'Ecalle.
Prenant z comme nouvelle variable, on remarque que le changement de fonction inconnue (3) ne change pas les propriétés de résurgence (les X^{α_r} sont des constantes de résurgence en z). On peut donc raisonner sur l'équation différentielle (4), qui se traite exactement comme toutes les équations du premier ordre déjà étudiées par Ecalle (notamment celle de notre "Visite aux sources", §5). Les paragraphes ci-après détaillent la signification des énoncés ainsi obtenus (pour leur démonstration, cf. Rés.II §).

Pour exploiter concrètement ces énoncés il faut ensuite repasser à la variable X , en prenant garde au caractère multiforme du changement de variable. *Pour rendre la lecture plus facile, en évitant une discussion fastidieuse des nombreux cas possibles, nous supposerons dans ce qui suit que le changement de variable est celui qui intervient dans le cas de l'équation de Liouville:*

$$z \equiv c\, X^{3/2} \quad (c>0).$$

Le soin de traiter le cas général est laissé au lecteur.

2- Le fleuve répulsif, somme de Borel du fleuve formel.

1er énoncé (résurgence du fleuve formel):

La transformée de Borel $\mathbb{y}(\zeta)$ du fleuve formel $\hat{Y}(z)$ se prolonge analytiquement sur le revêtement universel de $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, ...\}$, avec une croissance exponentielle à l'infini (uniforme) dans tout secteur angulaire $-\pi+\varepsilon < \operatorname{Arg} \zeta < \pi+\varepsilon$.

Il en résulte notamment que la série formelle $\hat{Y}(z)$ est sommable de Borel, définissant une fonction holomorphe dans un demi-plan $\operatorname{Re} z >> 0$.

Retour à la variable X :

La sommation de Borel du fleuve formel définit donc une fonction $Y(X)$ holomorphe dans un voisinage sectoriel de l'infini de direction $-\pi/3 < \operatorname{Arg} X < \pi/3$. Restreinte à $\operatorname{Arg} X = 0$ cette fonction est analytique réelle, et c'est *l'unique solution analytique réelle de l'équation différentielle qui ait $\hat{Y}$ comme développement asymptotique: c'est donc le "fleuve répulsif".*
En fait cette solution $Y(X)$ est facile à prolonger à la direction $-\pi < \operatorname{Arg} X < \pi$: ce prolongement s'effectue en faisant pivoter l'axe d'intégration "de Borel" dans le secteur $-\pi < \operatorname{Arg} \zeta < \pi$, ce qui donne en z un secteur d'analyticité de direction $-3\pi/2 < \operatorname{Arg} z < 3\pi/2$.

2e énoncé (résurgence de l'intégrale formelle):

Soit $\mathbb{y}^{(m)}(\zeta)$ la transformée de Borel de la composante $y^{(m)}(z)$ de l'intégrale formelle. Sa translatée $\mathbb{y}^{(m)}(\zeta+m)$ (germe sectoriel en $\zeta = -m$, dans la direction réelle >0) se prolonge analytiquement sur le revêtement universel de $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, ...\}$. De plus elle vérifie une majoration de type exponentiel, uniforme dans tout secteur évitant les singularités:

$$| \mathbb{y}^{(m)}(\zeta) | < c a^m e^{\tau|\zeta|} \qquad (5).$$

La sommation de l'intégrale formelle dans la direction réelle >0 soulève deux difficultés:

1°) chaque mineur $\mathbb{y}^{(m)}$ a (pour m>0) des singularités dans la direction réelle >0, ce qui oblige à distinguer entre sommation latérale *droite* et *gauche* ; mais aucune de ces deux sommations ne donne une fonction *réelle* (les deux fonctions sont complexes conjuguées) ; on introduira plus loin un procédé de sommation dite *"médiane"* destiné à résoudre ce genre de difficulté;

2º) même à supposer qu'on ait défini la sommation $Y^{(m)}$ de chaque $\hat{Y}^{(m)}$, il reste la difficulté de convergence de la série $\tilde{Y} = \sum Y^{(m)}$, dont les termes successifs ont des comportements en e^{mz}, de plus en plus explosifs pour z réel $\gg 0$; nous reviendrons au §5 sur cette difficulté, qui reflète le caractère *répulsif* du fleuve $Y^{(0)}$.

3 .- Reconstruction du fleuve attractif par "sommation médiane" de l'intégrale formelle.

Avec notre hypothèse simplificatrice $X \cong z^{2/3}$, la direction $\operatorname{Arg} X = 0$ ne correspond pas seulement à $\operatorname{Arg} z = 0$ mais aussi à $\operatorname{Arg} z = 3\pi$ (direction "opposée" à $\operatorname{Arg} z = 0$ sur le revêtement à 3 feuillets de $\mathbb{C}^*$). Chacun des mineurs $\mathfrak{y}^{(m)}$ est holomorphe sur le revêtement à 3 feuillets d'un petit disque épointé de centre $-m$, et l'on désignera par $^*\mathfrak{y}^{(m)}$ le germe sectoriel dans la direction réelle négative qui s'en déduit par prolongement analytique de $\pm 3\pi$ autour de $\zeta = -m$. Mais là encore, la sommation dans cette direction se heurte à la nécessité de choisir entre sommation latérale droite et gauche (à cause des singularités aux entiers <0), avec le défaut de réalité qui s'ensuit.

Sommation médiane.

Soit α une direction réelle (>0 ou <0), et soit $\varphi \in \mathcal{R}_\alpha$ une série formelle *réelle dans la direction* α. Soit C l'opérateur involutif ($C^2 = 1$) de "conjugaison hermitienne" des fonctions holomorphes (de z ou ζ) défini par $(Cf)(z) = \bar{f}(\bar{z})$. Evidemment cet opérateur échange les présommations droite et gauche

$$C\, s_{\alpha+} = s_{\alpha-}\, C$$

et change donc l'automorphisme de passage en son inverse:

$$\dot{\mathfrak{S}}_{(\alpha)}\, C = C\, \dot{\mathfrak{S}}_{(\alpha)}^{-1} \qquad (\text{où } \dot{\mathfrak{S}}_{(\alpha)} = s_{\alpha+}^{-1}\, s_{\alpha-}).$$

La dérivation étrangère directionnelle $\dot{\Delta}_{(\alpha)}$ anticommute donc avec C, *de sorte que l'opérateur*

$$s_{\alpha\,\mathrm{med}} := s_{\alpha+} \exp(\dot{\Delta}_{(\alpha)}/2) = s_{\alpha-} \exp(-\dot{\Delta}_{(\alpha)}/2)$$

commute avec C.

Définition (J.Ecalle): $s_{\alpha\,\mathrm{med}}$ s'appelle la *présommation médiane.*

Pour appliquer cette présommation à la solution formelle $\hat{Y}$ *dans la direction réelle négative* nous utiliserons une information supplémentaire:

3^e énoncé ("équation du pont").

L'intégrale formelle vérifie des équations de résurgence de la forme

$$\dot{\Delta}_\omega \hat{Y}^{\bullet} = A_\omega u^{n+1} \partial_u \hat{Y}^{\bullet}$$

pour les $\omega \in \tilde{\mathbb{C}}$ (revêtement universel de $\mathbb{C}^*$) qui se projettent sur $n = -1, 1, 2, 3, \ldots$; toutes les autres dérivées étrangères sont nulles.

Revenant à notre situation particulière, notons $*$ le point *opposé* à $\zeta = 1$ sur le revêtement à 3 feuillets de $\mathbb{C}^*$. De l'équation du pont on tire par la formule de Taylor

$$\exp(\pm \dot{\Delta}_{(*)}/2)\, \hat{Y}^{\bullet}(u) = \hat{Y}^{\bullet}(u \pm A_*/2) \tag{6}$$

où la notation $\dot{\Delta}_{(*)}$ désigne la dérivée étrangère *directionnelle* dans la direction réelle négative, et sous-entend un prolongement analytique préalable de 3 demi-tours, pour se mettre sur le feuillet du point $*$.

Appliquée à la solution formelle $\hat{Y} = \hat{Y}^{\bullet}(0)$ cette formule s'écrit

$$\exp(\pm \dot{\Delta}_{(*)}/2)\, \hat{Y} = \hat{Y}^{\bullet}(\pm A_*/2) \tag{7}$$

On en conclut que
la présommation médiane de la solution formelle coïncide avec une présommation latérale de l'intégrale formelle pour une valeur (imaginaire pure) $u = \pm A_*/2$ *du paramètre.*
Plus généralement,
pour tout u *réel fixé, l'intégrale formelle* $\hat{Y}^{\bullet}(u)$ *est une "trans-série formelle"* (série d'exponentielles, à coefficients séries formelles) *invariante par* C *dont la présommation médiane dans la direction du point* $*$ *est donnée par*

$$s_{*\mathrm{med}}\, \hat{Y}^{\bullet}(u) = s_{*+}\, \hat{Y}^{\bullet}(u + A_*/2) = s_{*-}\, \hat{Y}^{\bullet}(u - A_*/2) \qquad (*)$$

Proposition: la présommation médiane dans la direction $(*)$ est une *sommation*, et fournit pour tout $u \in \mathbb{R}$ une solution réelle de l'équation différentielle.
Preuve (Ecalle en a une autre, basée sur des majorations plus explicites):
L'absence de singularités ailleurs que sur l'axe réel négatif implique que la (pré-)sommation dans la direction $\alpha+$ [resp. $\alpha-$] coïncide avec les (pré-)sommations "de Borel" dans les directions voisines $\alpha' = e^{i\theta}\alpha$ [resp. $e^{-i\theta}\alpha$] ($\theta > 0$ petit). Or les majorations de l'énoncé 2 (§2) impliquent que pour $|ue^z| < C$ (constante convenable) ces

dernières sont des *sommations* . Les deux membres de droite de l'équation $(*)$ définissent ainsi, pour tout $u \in \mathbb{R}$, deux fonctions de z au voisinage de $-\infty$, qui sont solutions de la même équation différentielle (4) et ne diffèrent que par une fonction exponentiellement évanescente: elles coïncident donc.

Revenant à la variable X , nous obtenons ainsi une famille, paramétrée par $u \in \mathbb{R}$, de solutions *réelles* $Y(X,u)$ de l'équation différentielle, définies pour X réel $> C(u)$. Ces solutions diffèrent par des exponentiellement petits, et forment donc la famille de solutions locales à l'infini regroupées sous l'étiquette collective de *"fleuve attractif"*.

4.- Signification des coefficients de résurgence A_ω .

Le caractère *divergent* de la solution formelle est la source du *"phénomène de Stokes"*, que traduit l'équation du pont: *les sommations dans les différentes directions ne sont pas prolongements analytiques les unes des autres.* Par exemple dans notre cas $X \cong z^{2/3}$ un phénomène de Stokes se produit quand on cherche à prolonger la somme de Borel du fleuve formel au delà d'un voisinage sectoriel de l'infini de direction $-\pi < \mathrm{Arg}\, X < +\pi$. Ce prolongement n'est possible qu'au prix du remplacement de la série formelle $\hat{Y}$ par l'intégrale formelle $\hat{Y}^{\bullet}(u)$ pour $u = A_\omega$, $\omega = e^{\pm i\pi}$. Mais on récolte ainsi une infinité de singularités $\zeta = -1, -2, -3, \ldots$, de sorte que, pour des raisons de convergence de la série des exponentielles, le prolongement analytique sectoriel au voisinage de l'infini est impossible au delà de $\mathrm{Arg}\, z = 3\pi/2$ (c.à.d. $\mathrm{Arg}\, X = \pi$) et en deçà de $\mathrm{Arg}\, z = -3\pi/2$ (c.à.d. $\mathrm{Arg}\, X = -\pi$). Le prolongement analytique reste donc "bloqué à mi-chemin" de la direction $\mathrm{Arg}\, z = \pm 3\pi$ qui correspond au fleuve attractif.

Conclusion: *la divergence de la série* $\hat{Y}$ *est responsable du fait que fleuve attractif et fleuve répulsif ne sont pas simplement reliés* (par prolongement analytique au voisinage de l'infini).

Ce phénomène est à rapprocher d'une constatation faite par F. et M.Diener sur les portraits de phase d'équations différentielles: on n'a jamais vu de trajectoire du type "fleuve répulsif" se raccorder à une trajectoire du type "fleuve attractif" (comme deux branches d'une même courbe), *sauf dans le cas où la solution formelle est convergente.* Il serait intéressant d'approfondir le lien entre cette constatation (globale dans le plan réel) et le phénomène analysé plus haut (local à l'infini du plan complexe).

Calcul des A_ω.

L'analyse des équations différentielles du premier ordre montre que la convergence de la solution formelle $\hat{Y}$ *équivaut* à la nullité de tous les A_ω (ω au dessus de -1 dans le

revêtement considéré): en effet, d'après l'équation du pont, c'est là la condition d'annulation de toutes les dérivées étrangères, donc de sommabilité "de Borel" dans toutes les directions (compte tenu des majorations exponentielles dans le plan des ζ). Mais l'intérêt de cette remarque est avant tout théorique, car les dérivations étrangères sont des opérations transcendantes, et les A_ω sont donc des invariants *transcendants* de $\hat{Y}$, qu'il est impossible *en général* de calculer algébriquement à partir des coefficients de la série $\hat{Y}$.
Pour la même raison, la remarque selon laquelle *si* $\hat{Y}$ *est divergente, l'intégrale formelle est engendrée par la résurgence de la solution formelle* (c.à.d. s'en déduit par action de $\exp(u\Delta_\omega/A_\omega)$) n'est pas d'une portée pratique beaucoup plus grande que celle-ci: une équation différentielle du premier ordre est entièrement déterminée une fois qu'on en connaît une solution *transcendante sur le corps de ses coefficients* (cette remarque nous a été faite par R.Moussu).

5. - Solutions voisines du fleuve répulsif.

Revenons à la direction $\operatorname{Arg} z = 0$, qui nous a fourni le fleuve répulsif (§2). Le fait que e^z soit une exponentielle croissante nous a enlevé tout espoir de sommer l'intégrale formelle pour z arbitrairement grand, mais il n'est pas absurde d'espérer la sommer pour $|ue^z|$ assez petit. Cela correspond à l'idée que u sert à paramétrer, au voisinage de $u = 0$, les trajectoires voisines du fleuve répulsif, mais seulement pour des "temps" z pas trop grands, de façon que la trajectoire n'ait pas le temps de trop décoller du fleuve répulsif.
Question: l'intégrale formelle admet-elle une somme médiane dans la direction réelle >0, bien définie pour $|ue^z|$ *assez petit ?*
La réponse est *non* en général: comme nous l'a expliqué Ecalle, les présommations médianes de chaque composante élémentaire de l'intégrale formelle ne sont pas des sommations, et il faut travailler davantage pour paramétrer les trajectoires voisines du fleuve répulsif; la difficulté vient de l'existence d'une infinité de dérivations étrangères non triviales dans la direction réelle >0, ce qui rend $\exp(\dot{\Delta}_{(\alpha)}/2)$ plus difficile à contrôler. *Une exception agréable est l'équation de Liouville, ou plus généralement toutes les équations de Ricatti:* dans ce cas l'intégrale formelle est une fonction homographique de u, et l'équation du pont prend une forme particulièrement simple (cf. paragraphe suivant) qui permet là encore de ramener la sommation médiane à des sommations latérales.

6. - Cas des équations de Ricatti.

(ce paragraphe reste à rédiger)...

[AG] **M.Artigue, V.Gautheron** *Systèmes différentiels, étude graphique.* Cedic, Paris 1983.

[B] **F.Blais** Fleuves critiques *C.R.Acad.Sc. Paris,* 307, ser.I, p.439-442 (1988), et *Thèse, Univ. Paris VII* (1989).

[D] **F. et M.Diener** *Fleuves* (collection d'articles, Univ. Paris VII, 1987): *ce recueil contient notamment:*

[D1] **F. et M.Diener** Fleuves *Analyse non standard et représentation du réel,* Oran 1984

[DR] **M.Diener et G.Reeb** Champs polynomiaux: nouvelles trajectoires remarquables, *Bull.Soc.Math.Belgique,* 38 (1986).

[D2] **F. et M.Diener** Some asymptotic results in ordinary differential equations *Non standard analysis and its applications,* Cambridge Univ. Press 1988

[D3] **F.Diener** Fleuves et variétés centrales *Singularités d'équations différentielles,* Astérisque 150-151 (1987).