

# RECHERCHE COOPÉRATIVE SUR PROGRAMME N° 25

B. HELFFER

J. SJÖSTRAND

## **Analyse semiclassique pour l'équation de Harper**

*Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg - RCP25*, 1989, tome 40  
« Conférences de B. Helffer, J. Sjöstrand, D. Ruelle et J. Fritz », , exp. n° 1, p. 1-18

[http://www.numdam.org/item?id=RCP25\\_1989\\_\\_40\\_\\_1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RCP25_1989__40__1_0)

© Université Louis Pasteur (Strasbourg), 1989, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Recherche Coopérative sur Programme n° 25 » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

# ANALYSE SEMICLASSIQUE POUR L'EQUATION DE HARPER

par

B. Helffer

et

J.Sjöstrand

Département de Mathématiques,

Département de Mathématiques

Université de Nantes,

Université Paris-sud

URA CNRS 758

URA CNRS 760

44072 Nantes Cédex 03

91405 Orsay Cedex

France

Exposé donné aux rencontres de Strasbourg en Décembre 1988

## §0. Introduction

On se propose dans cet exposé de présenter des résultats récents que nous avons obtenus sur l'équation de Harper et des opérateurs très proches. Cette étude est présentée dans trois longs articles [He-Sj]<sub>2,3,4</sub> et a été présentée dans différents exposés [He-Sj]<sub>a,b,c,d,e</sub>. Nous insisterons donc plus sur certains aspects qui ont été moins développés dans ces précédents exposés. L'origine du problème est l'étude de l'équation de Schrödinger avec champ magnétique périodique. On s'intéresse aux propriétés spectrales de cet opérateur. On regarde tout particulièrement le cas de la dimension 2 et on considère dans  $\mathbb{R}^2$  l'opérateur :

$$(0.1) P_{B,V} = (hD_{x_1} - \frac{1}{2}B x_2)^2 + (hD_{x_2} + \frac{1}{2}B x_1)^2 + V_R(x_1, x_2)$$

où  $B$  est constant  $> 0$ ,  $h > 0$ ,  $R > 0$  et  $V$  est  $C^\infty$ -périodique pour un réseau (qu'on supposera dans la suite carré de côté  $R$  pour simplifier).

La réduction à l'opérateur de Harper (que nous définirons plus loin) peut intervenir dans un grand nombre de cas en fonction des tailles respectives de  $h$ ,  $B$ ,  $R$ . Elle est

décrite dans de nombreux articles dont nous mentionnons quelques titres dans les références ([Ad],[Au],[Bl], [Ch], [Cl-Wa], [Du-No], [Ko], [La],[Lu], [Ly], [No], [Pe], [Wa],.....). Citons les différents contextes :

- la limite champ magnétique faible (i.e.  $B \rightarrow 0$ ) (cf l'autre exposé fait par J.Sj. à Strasbourg [He-Sj]<sub>f</sub>, ou [Be]<sub>1,2</sub>, [He-Sj]<sub>5</sub>, [Ne]<sub>3</sub>)

- la limite champ magnétique fort (i.e.  $B \rightarrow \infty$ ) ( cf [Be]<sub>2</sub>,[He-Sj]<sub>5</sub>)

- la limite semi-classique :  $\hbar \rightarrow 0$  (cf [He-Sj]<sub>2,4</sub>)

- la limite dite du tight binding où les puits s'éloignent (cf [Ca])(i.e  $R \rightarrow \infty$ ). On prend alors  $V_R$  sous la forme  $V_R = \sum_{\alpha \in \Gamma} W(x - R\alpha)$ .

Dans tous ces cas , une partie du spectre se trouve mise en bijection après essentiellement une similitude au spectre d'un opérateur de Harper perturbé. Nous présenterons pour l'essentiel dans la suite les résultats obtenus dans le cas de l'équation de Harper, mais il est fondamental de noter que nos résultats, contrairement à ceux obtenus avec d'autres techniques, sont valables pour des perturbations soigneusement contrôlées de cet opérateur.

Soit donc à considérer l'opérateur suivant défini sur  $\ell^2(\mathbb{Z})$  par :

$$(0.2) \ell^2(\mathbb{Z}) \ni u_n \Rightarrow (H_\theta^{\alpha,\mu} u)_n = u(n+1) + u(n-1) + 2\mu \cos(2\pi\alpha n + \theta)u(n)$$

et on s'intéresse au spectre  $\Sigma_\theta^{\alpha,\mu}$  de  $H_\theta^{\alpha,\mu}$  ou plus exactement à l'ensemble :

$$\Sigma^{\alpha,\mu} = \bigcup_\theta \Sigma_\theta^{\alpha,\mu}.$$

$\alpha$  est ici un paramètre dans  $[0,1]$ ,  $\theta$  varie dans  $[0,2\pi]$  et  $\mu \in \mathbb{R}^+$ .

Rappelons que dans le cas où  $\alpha$  est rationnel:  $\alpha = p/q$ , l'ensemble  $\Sigma^{\alpha,\mu}$  est constitué de  $q$  bandes. En 1976 le physicien Hofstadter eut l'idée de faire apparaître comment ces bandes se répartissaient en fonction du développement en fraction continue (fini de  $\alpha$ ) en représentant sur une droite d'abscisse  $\alpha$  dans le plan le spectre  $\Sigma^{\alpha,\mu}$ . En faisant varier  $\alpha$  parmi les rationnels compris entre 0 et 1 dont le dénominateur est inférieur à 50, le dessin obtenu (voir figure 1) est appelé le papillon de Hofstadter; il permet d'imaginer la structure du spectre dans le cas irrationnel et de conjecturer que cet ensemble est en général un Cantor, conjecture due à M.Kac et appelée par B.Simon

dans [Si] : la conjecture des 10 martinis. Par une analyse poussée du papillon, Hofstadter donnait un certain nombre de règles précises sur la répartition des bandes. Une autre description complémentaire donnée par Wannier [Wa] et reprise dans [Cl-Wa] est basée sur des considérations sur la densité d'état . On trouvera dans [Gu-He-Tr] une présentation commentée de nombreux dessins ou zooms tirés du papillon.

Rappelons maintenant quelques résultats connus concernant  $\Sigma^{\alpha,\mu}$  .

$\Sigma^{\alpha,\mu}$  a les propriétés suivantes :

(0.3) Si  $\alpha = p/q$  est rationnel , le spectre est composé de q segments disjoints ( sauf pour q pair ou 2 segments se touchent au milieu de  $\Sigma^{\alpha,\mu}$  (cf [Be-Si], [Mo], [C-E-Y]). La longueur de l'intervalle entre 2 bandes est minorée par  $8^{-q}$  ([C-E-Y]) .

(0.4) Si  $\alpha$  est irrationnel , le spectre  $\Sigma_{\theta}^{\alpha,\mu}$  est indépendant de  $\theta$  (cf par exemple [He-Sj]<sub>1</sub>)

(0.5) Si E est dans le spectre ,  $-E$  est dans le spectre

(0.6) Le spectre est contenu dans  $[-2-2\mu, 2+2\mu]$

(0.7)  $\Sigma^{\mu} = \mu \Sigma^{1/\mu}$  (dualité d'aubry , cf [Au] , [Si] , [Be-Si])

(0.8)  $\Sigma^{\alpha,\mu} = \Sigma^{1-\alpha, \mu}$

(0.9) Pour certaines familles de  $\alpha$  irrationnels :

[a] nombres de Liouville (cf [C-E-Y]) , i.e. t.q :

$$\forall C > 0, \exists p/q \text{ tel que } |\alpha - p/q| < C^{-q}$$

ou

[b] (cf [He-Sj]<sub>2,3,4</sub>) nombres dont le développement en fraction continue est donné par :

$\alpha = 1 / (q_0 + 1 / (q_1 + 1 / (q_2 + \dots)))$  avec  $|q_j| \geq C$ , avec  $C$  assez grand (dans le cas  $\mu = 1$ )

ou

[c] Pour un ensemble  $G_\delta$ -dense non explicité de  $\alpha$  (cf [Be-Si],[Mo]),

il est démontré que le spectre est un Cantor.

Notre contribution correspond donc au cas  $(0.9)_b$ . Nous expliquerons plus en détail au §1 les résultats obtenus par les méthodes semi-classiques. Ces méthodes de démonstration sont totalement différentes des autres résultats mentionnés en (0.9). Elles sont basées sur l'analyse semi-classique et justifient des démonstrations assez heuristiques de Wilkinson [Wilk] et de Azbel [Az].

### §1. Structure cantorienne du spectre de Harper; l'étude semi-classique

L'analyse de Wilkinson est basée sur une analyse W.K.B. qui fait intervenir une infinité de " puits " dans l'espace  $T^* \mathbb{R}$ . On remarque en effet que l'étude de  $\Sigma^{\alpha,1}$  est équivalente à l'étude de l'opérateur pseudo-différentiel :

$\cos hD_x + \cos x$  sur  $L^2(\mathbb{R})$  avec  $h/2\pi = \alpha$

On entend par là qu'à un petit paramètre  $h$  et un symbole  $p = p(x, \xi)$  (de classe  $C^\infty$ )  $2\pi$ -périodique par rapport à  $x$  et  $\xi$  (dépendant éventuellement d'autres paramètres dont  $h$ ), on associe son  $h$ -quantifié de Weyl, noté  $p^w(x, hD_x)$ , qui est l'opérateur borné sur  $L^2(\mathbb{R})$  défini par l'unique prolongement continu de:

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) \ni u \rightarrow (p^w(x, hD_x)u)(x) = (2\pi h)^{-1} \int e^{i(x-y\xi)/h} p((x+y)/2, \xi) u(y) dy.d\xi$$

Dans notre cas particulier,  $p(x, \xi) = \cos x + \cos \xi$ . Les puits sont alors pour un niveau d'énergie donné les composantes connexes de  $p^{-1}(E)$ . Pour chacune de ces composantes connexes, on peut construire par des techniques à la Maslov ([Ma]) des quasimodes et les valeurs spectrales ainsi obtenues donnent une bonne approximation du spectre modulo  $O(h^\infty)$ . On peut ainsi construire près d'une de ses valeurs

spectrales  $\lambda_n(h)$  une base de l'espace spectral correspondant au spectre de l'opérateur de Harper contenu dans  $]\lambda_n(h) - Ch^2, \lambda_n(h) + Ch^2[$ . Cette base (qui est presque orthonormale) est constituée de fonctions bien localisées dans chacun des puits et se déduisant les unes des autres par des opérateurs de translation d'un puits à un autre qui commutent avec l'opérateur de Harper. Mais ces puits interagissent par effet tunnel et l'opérateur de Harper restreint à cet espace est décrit dans cette base par une matrice infinie qui n'est pas tout à fait diagonale. Pour  $h$  assez petit, Wilkinson indique comment, en analysant ces interactions, on tombe sur un nouvel opérateur de Harper avec  $\mu = 1$ , mais avec un nouvel  $h$ . Pour obtenir la structure complète du spectre, on "n'a qu'à" itérer cette procédure indéfiniment. La suite des  $h$  qu'on obtient est donnée par le développement du premier  $h/2\pi$  en fraction continue, et Wilkinson indique que sa procédure marche si tous les  $h$  sont petits. Son travail montre une intuition remarquable, étant donné que ses arguments du point de vue mathématique sont assez flous, mais la rigueur mathématique est remplacée par l'intuition du physicien et des vérifications numériques très soigneuses dans l'esprit de celles de Hofstadter. Comme l'avait pressenti J. Bellissard, il se trouve que les techniques que nous avons développées dans le cas d'un nombre fini de puits dans  $[\text{He-Sj}]_1$  pour l'étude de l'effet tunnel pour l'équation de Schrödinger et étendues au cas d'une infinité de puits par Carlsson [Car], peuvent fournir la justification rigoureuse des arguments de Wilkinson [Wilk], mais à chaque étape de la procédure, il y a une petite zone du spectre qui demande une analyse différente (abordée de manière non rigoureuse chez Azbel [Az] et développée dans  $[\text{He-Sj}]_4$ ).

### Théorème 1.1

Soit  $\varepsilon_0 > 0$ , il existe alors  $C_0 > 0$ , tel que si  $h/2\pi \in ]0,1[ \setminus \mathbb{Q}$  et  $h/2\pi$  admet le développement en fractions continues :

$$h/2\pi = 1/(q_1 + 1/(q_2 + 1/(q_3 + \dots)))$$

avec  $q_j \in \mathbb{Z}$ ,  $|q_j| \geq C_0$ , on a :

Le plus petit intervalle fermé qui contient  $Sp(P)$  est de la forme :

$$[-2 + O(1/|q_1|), 2 - O(1/|q_1|)].$$

$Sp(P) \cap J \subset \cup_{N_- \leq i \leq N_+} J_i$ , où les  $J_j$  sont des intervalles fermés de longueur  $\neq 0$ , avec

$$\partial J_j \subset Sp(P).$$

$J_{j+1}$  se trouve à droite de  $J_j$  à une distance  $\approx 1/|q_1|$ .  $J_0$  est de longueur  $2\varepsilon_0 + O(1/|q_1|)$ , contenant 0 à une distance  $O(1/|q_1|)$  de son centre. Les autres bandes sont de largeur  $e^{-C(j)/|q_1|}$ , avec  $C(j) \approx 1$ .

Pour  $j \neq 0$ , soit  $K_j$  la fonction affine croissante, qui transforme  $J_j$  en  $[-2, 2]$ ;

$$\text{on a alors : } K_j[J_j \cap Sp P] \subset \cup_k J_{j,k}$$

où les  $J_{j,k}$  ont les mêmes propriétés avec  $q_1$  remplacé par  $q_2$  et ainsi de suite.

Ici  $a \approx b$  signifie que  $a/b$  et  $b/a$  sont majorées par une constante qui ne dépend que de  $\varepsilon_0$ .

#

L'étude du spectre près de la valeur critique 0 de  $\cos \xi + \cos x$  et qui correspond à un point col est plus délicate; La construction décrite précédemment est inapplicable car les puits ne sont plus compacts et on a affaire à une forte interaction par effet tunnel. Disons simplement que dans le mécanisme itératif esquissé plus haut un nouveau modèle apparaît et il faut savoir étudier pour quelles valeurs des paramètres un certain système  $2 \times 2$  d'opérateurs pseudo-différentiels  $Q^w(x, h'D_x, h)$  est inversible.

Le symbole "principal" de ce pseudo-différentiel est de la forme :

$$(1.1) \quad Q_0(x, \xi) = \begin{pmatrix} b + \bar{a} e^{-i\xi} & \bar{b} + a e^{ix} \\ \bar{b} + a e^{-ix} & b + \bar{a} e^{i\xi} \end{pmatrix}$$

où  $a$  et  $b$  sont des fonctions d'un certain nombre de paramètres antérieurs mais qui vérifient:

$$(1.2) \quad |a|^2 + |b|^2 = 1, \quad \arg(b) - \arg(a) = \pi/2$$

Notons ici que :

$$(1.3) \quad \det(Q_0(x, \xi)) = (b\bar{a} + a\bar{b}) (\cos \xi + \cos x) + 2i(|b|^2 + |a|^2) \sin(2\arg b)$$

La description du spectre qui résulte de ce procédé par récurrence où selon les zones de spectre considérées on oscille entre l'étude de 4 problèmes liés à l'étude de perturbation de :  $\cos(hD_x) + \cos(x)$  ou de  $Q(x, hD_x)$  est très précise si tous les  $q_j$  apparaissant dans le développement en fraction continue de  $\alpha$  sont assez grands en module. On obtient comme conséquence de cette étude , le théorème suivant qui complète le précédent et qui n'est qu'un sous - produit d'un théorème plus précis:

Theorème 1.2 Soit  $h \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  admettant le développement en fraction continue :

$$(1.4) \quad h/2\pi = 1/(q_1 + 1/q_2 + 1/q_3 + \dots), \quad q_j \in \mathbb{Z}, \quad 1 \leq j < \infty \quad \text{avec,}$$

$$(1.5) \quad |q_j| \geq C_0$$

Soit  $P^w(x, hD_x, h)$  une famille d'opérateurs pseudo-différentiels autoadjoints dont les symboles de Weyl correspondants  $p(x, \xi, h)$  s'étendent à la bande  $|\operatorname{Im}(x, \xi)| < 1/\varepsilon$  et vérifient :

$$(1.6) \quad p((x, \xi) + 2\pi \alpha, h) = p(x, \xi, h) \quad \forall \alpha \in \mathbb{Z}^2$$

$$(1.7) \quad p((x, \xi), h) = p((\xi, -x), h) = p(x, -\xi, h)$$

$$(1.8) \quad |p(x, \xi, h) - (\cos \xi) + (\cos x)| \leq \varepsilon \quad \text{pour } |\operatorname{Im}(x, \xi)| \leq 1/\varepsilon \quad \text{et } |h| < 2/C_0$$

Alors si  $h/2\pi$  vérifie (1.3) - (1.5) pour  $C_0 > 0$  assez grand et si  $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$  with  $\varepsilon_1 > 0$  assez petit le spectre de  $P$ ,  $\operatorname{Sp}(P)$  est de mesure de Lebesgue 0 , n'a pas de point isolé et est nulle part dense.

Remarque 1.3 : En particulier, le spectre de  $\cos hD_x + \cos x$  ( c.à.d  $\Sigma^{\alpha, 1}$  pour l'équation de Harper) est un ensemble de Cantor, ce qui démontre (0.9)<sub>b</sub>.

Remarque 1.4 :

Pour les applications mentionnées dans l'introduction (et aussi au cours de la récurrence dans la démonstration du théorème 1.2), on a besoin d'étendre le

théorème 1.2 sous la forme suivante. On considère une famille holomorphe d'opérateurs autoadjoints (pour  $\mu$  réel)  $p^w(x, hD_x, h, \mu)$  où  $\mu$  est dans un voisinage complexe de  $[-3, +3]$ . On appelle  $\mu$ -spectre de  $p^w(x, hD_x, h, \mu)$  l'ensemble des  $\mu$  tels que  $0 \in p^w(x, hD_x, h, \mu)$ . Alors, si (1.2)–(1.6) est vérifiée avec (1.6) remplacée par :  $|p(x, \xi, h, \mu) - (\cos \xi + \cos x - \mu)| \leq \varepsilon$  pour  $|\text{Im}(x, \xi)| \leq 1/\varepsilon$  et  $|h| < \eta(\varepsilon)$ , la conclusion du théorème 1.2 est vraie pour le  $\mu$ -spectre de  $p^w(x, hD_x, h, \mu)$  (on retrouve le théorème précédent en considérant  $p^w(x, hD_x, h, \mu) = p^w(x, hD_x, h) - \mu$ ).

## §2 Analyse semi-classique près d'un rationnel

On a vu au § précédent comment étudier le spectre pour l'opérateur de Harper lorsque  $\alpha$  est très petit et admet un développement en fraction continue avec tous les  $q_j$  de module supérieur à  $C_0$  (avec  $C_0$  assez grand). Par ailleurs, lorsque  $\alpha = p/q$ , il est possible de ramener l'étude du spectre de Harper à l'étude de la réunion des spectres d'une famille de matrices  $q \times q$ . C'est juste une application de la théorie de Floquet. La famille de matrices est paramétrée par  $\theta = (\theta_1, \theta_2)$  et donnée par :

$$(2.1) M_{p,q}(\theta_1, \theta_2) = e^{i\theta_1} J_q^p + e^{-i\theta_1} J_q^{p*} + e^{i\theta_2} K_q + e^{-i\theta_2} K_q^*$$

où :

$$(2.2) (K_q)_{ij} = \delta_{i,j+1} \quad \text{pour } i=1, \dots, q ; j=1, \dots, q \text{ (et par convention } q+1=1)$$

$$(2.3) (J_q^p)_{ij} = e^{2i\pi(j-1)(p/q)} \delta_{i,j} \quad \text{pour } i=1, \dots, q ; j=1, \dots, q \text{ (par convention } J_q^1 = J_q)$$

En particulier  $J_q$  et  $K_q$  sont deux matrices unitaires telles que :

$$(2.4) (J_q)^q = I ; (K_q)^q = I \text{ et } J_q \cdot K_q = e^{(2i\pi/q)} K_q \cdot J_q$$

Les valeurs propres  $\lambda_j(\theta_1, \theta_2)$  de la matrice  $M(\theta_1, \theta_2)$  rangées par ordre croissant parcourent chacune une des  $q$  bandes du spectre de l'opérateur de Harper. Bien entendu, on peut se poser le problème de la multiplicité ou du recouvrement éventuel

des bandes. Il est assez classique que ces bandes ne se recouvrent pas et ne peuvent qu'éventuellement se toucher. Comme on l'a rappelé dans l'introduction, la conjonction de résultats de [Be-Si],[Mo] (cf aussi [C-E-Y]) donne que les bandes sont toujours disjointes sauf dans le cas pair où les deux bandes centrales se touchent. Un autre point intéressant concernant cette famille de matrices est que:

$$(2.5) \det(M_{p,q}(\theta_1, \theta_2) - E) = P_{p,q}(E) + 2(-1)^{q+1} (\cos(q\theta_1) + \cos(q\theta_2))$$

Considérons maintenant le cas où  $\alpha$  est seulement proche de  $p/q$ , c.à.d :

$$(2.6) \alpha = p/q + h$$

Le résultat intéressant (qui n'est qu'un cas particulier d'un résultat général sur le spectre d'opérateurs pseudodifférentiels  $(2\pi)\alpha$ -quantifiés à symbole  $2\pi$ -périodique par rapport à  $x$  et  $\xi$ ) est l'équivalence des deux propriétés suivantes :

$$(2.7) E \in \text{Sp} (\cos(2\pi \alpha D_x) + \cos x) \iff E \in \text{Sp} (M_{p,q}(x, (2\pi)hD_x))$$

L'étude spectrale de l'équation de Harper pour  $\alpha$  proche de  $(p/q)$  est donc équivalente à celle d'un système  $(q \times q)$  d'opérateurs pseudodifférentiels  $(2\pi h)$ -quantifiés qui relèvent de l'analyse semi-classique en ce sens qu'on a retrouvé un petit paramètre. Ce point de vue apparait dans les travaux de Wilkinson [Wilk] et Sokoloff [Sok] et également dans le langage des  $C^*$ -algèbres chez Bellissard [Be]<sub>1,2</sub>. L'étude de tels systèmes pseudo-différentiels modulo  $O(h^\infty)$  (ou même modulo un  $O(\exp(-\varepsilon/h))$ ) n'offre pas trop de surprises et est menée en détail dans [He-Sj]<sub>3</sub>. Donnons quelques indications. Lorsqu'on regarde près d'un niveau d'énergie appartenant à une bande simple (ce qui est presque toujours le cas) ou bien dans le cas où les deux bandes se touchent à condition d'éviter l'intervalle  $]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[$  [ dans lequel deux bandes se touchent (ce qui est toujours le cas si  $q$  est pair), on peut toujours se ramener après une mise par blocs pseudo-différentielle valable modulo  $O(h^\infty)$  (attention, on ne se contente pas de mettre par blocs le symbole principal, ce qui ne donnerait une décomposition que modulo  $O(h)$ !) à l'étude d'un opérateur pseudodifférentiel  $h$ -quantifié dont le symbole principal est  $\lambda_\ell(x, \xi)$  si l'énergie considérée se trouve dans la  $\ell^{\text{ème}}$  bande. Le calcul du sous-principal  $\lambda_\ell^{(1)}(x, \xi)$

(coefficient de  $h$  du symbole de Weyl de cet opérateur) peut être fait explicitement. Il porte une information intéressante liée à la  $\ell^{\text{ème}}$  bande et est donné par la formule suivante ; on omet la référence à  $\ell$  et on désigne par  $e(x,\xi)$  une section  $C^\infty$  du noyau de  $\ker(M_{p,q}(x,\xi) - \lambda(x,\xi))$  de norme 1 dans  $C^n$ . Ce sous-principal est donné par :

(2.8)

$$\lambda^{(i)}(x,\xi) = (1/i) [ \langle (M - \lambda(x,\xi)) \partial_x e(x,\xi) | \partial_\xi e(x,\xi) \rangle + \langle \partial_\xi M \cdot \partial_x e | e \rangle + \langle \partial_x M \cdot e | \partial_\xi e \rangle - (1/2i) (\partial_{x,\xi}^2 \lambda)(x,\xi) ]$$

Ce sous-principal n'est pas intrinsèque dans la mesure où il dépend de la manière dont on a décomposé par bloc, c'est à dire surtout du choix de  $e(x,\xi)$ . L'invariance est à prendre au sens suivant; deux choix différents de  $e(x,\xi)$ :  $e'$  et  $e''$  conduisent à deux sous-principaux  $\lambda'^{(i)}(x,\xi)$  et  $\lambda''^{(i)}(x,\xi)$  tels qu'il existe une fonction  $C^\infty$  définie au voisinage du puits  $\phi$  telle que:

$$(2.9) \quad \lambda'^{(i)}(x,\xi) - \lambda''^{(i)}(x,\xi) = \partial \lambda / \partial \xi \cdot \partial \phi / \partial x - \partial \lambda / \partial x \cdot \partial \phi / \partial \xi = \{ \lambda, \phi \}(x,\xi)$$

Toutes les quantités spectrales faisant intervenir ce sous-principal sont indépendantes du choix du représentant dans la classe d'équivalence définie par (2.9). En particulier la fonction  $f_1 = f_1(E)$  définie par :

$$(2.10) \quad f_1(E) = (1/2\pi) \int_0^{T(E)} \lambda^{(i)}(\phi_t(x,\xi)) dt$$

où  $\phi_t$  désigne le flot hamiltonien associé à  $H_\lambda$  et  $(x,\xi)$  est un point tel que  $\lambda(x,\xi) = E$  est indépendante du choix de  $e$ . On trouve par exemple la formule plus intrinsèque suivante qui est réminiscente des travaux de Avron-Seiler ([Av-Se]) et de l'expression de la formule de Kubo apparaissant dans l'étude de l'effet Hall quantique; si  $\Pi(x,\xi)$  désigne le projecteur orthogonal sur  $\text{Ker}(M(x,\xi) - \lambda(x,\xi))$ , on a, en choisissant  $\varepsilon = \pm 1$  de telle sorte que  $\lambda(x,\xi) = E$  entoure  $\varepsilon \lambda(x,\xi) \leq E$ :

$$(2.11) \quad f_1(E) = (1/2i\pi) \frac{d}{dt} \left( \int_{\varepsilon \lambda(x,\xi) \leq t} \text{Trace} ( (d\Pi \cdot (M - \lambda) \cdot d\Pi)(x,\xi) ) \right)_{t=E} + (1/i\pi) \int_{\varepsilon \lambda(x,\xi) \leq E} \text{Trace} ( (\Pi \cdot d\Pi \cdot d\Pi \cdot \Pi)(x,\xi) )$$

Si :

$$(2.12) \quad f_0(E) = (1/2\pi) \int_{\varepsilon \lambda(x,\xi) \leq E} dx.d\xi$$

la règle de quantification obtenue est donnée en dehors d'un voisinage de la valeur critique de  $\lambda(x,\xi)$  correspondant au point selle par:

$$(2.13) \quad f_0(\lambda_n(h)) - h f_1(\lambda_n(h)) = (n + \frac{1}{2})|h| + O(h^2)$$

En particulier, près du bout d'une bande qui ne touche pas la bande voisine, on peut décrire complètement la structure du spectre modulo  $O(h^\infty)$ , et retrouver la formule de Rammal-Wilkinson qui est mentionnée par J.Bellissard dans  $[Be]_2$  (voir figure 2 où la structure du spectre près de  $(1/3)$  a été calculée).

L'étude semi-classique près du point où les deux bandes se touchent est également intéressante et a des parentés avec le système considéré en (1.1). On se ramène par le même type d'arguments que précédemment à un système pseudodifférentiel  $2 \times 2$  dont il faut faire une étude semi-classique près de l'énergie 0.

Mentionnons simplement le modèle le plus simple rencontré qui est typique de la situation rencontrée (cf  $[He-Sj]_4$ ).

Dans le cas  $q = 2$ , la matrice  $M_{1,2}(\theta_1, \theta_2)$  est simplement la matrice :

$$(2.14) \quad M_{1,2}(\theta_1, \theta_2) = \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & \cos \theta_2 \\ \cos \theta_2 & -\cos \theta_1 \end{pmatrix}$$

dont le déterminant est  $-(\cos^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_2) = -2 - \cos(2\theta_1) - \cos(2\theta_2)$

qui s'annule à l'ordre 2 en  $\theta_1 = \pi/2, \theta_2 = \pi/2$ .

De même que l'étude semi-classique (modulo  $O(h^2)$ ) de  $\cos(hD_x) + \cos x$  près de  $-2$  se ramenait à l'étude du spectre de l'oscillateur harmonique:  $-2 + (1/2)(h^2 D_y^2 + y^2)$  (où on a posé  $y = (x - \frac{\pi}{2})$ ), l'étude du système (2.14) se ramène modulo  $O(h^{3/2})$  à celle d'un des modèles les plus simples d'équation de Dirac à savoir :

$$\begin{pmatrix} x & hD_x \\ hD_x & -x \end{pmatrix}$$

dont le spectre est donné par des valeurs propres de multiplicité 1:  $0, \pm \sqrt{nh}$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ).

Mentionnons pour terminer que l'étude semi-classique modulo  $O(h^\infty)$  du spectre n'est que la première étape de l'étude du spectre de l'équation de Harper dans le cas où  $\alpha$  est proche d'un rationnel. L'étude de l'effet tunnel doit être menée avec attention (cf [He-Sj]<sub>3</sub>). L'amélioration obtenue est simple à décrire: on peut remplacer les hypothèses (1.4) et (1.5) par l'hypothèse plus générale que la propriété n'est à faire qu'à partir d'un certain rang  $N$  sur les  $q_j$ . Le  $C_0$  assez grand dépend toutefois de la donnée des  $q_j$  pour  $j < N$ . A des modifications mineures près, la conclusion du théorème (1.1) est la même. Nous n'avons aucun doute sur le fait que le spectre de l'équation de Harper est un cantor sous ces mêmes hypothèses (compte-tenu de [He-Sj]<sub>4</sub>) mais nous n'avons pas eu le courage d'écrire la démonstration détaillée.

# PAPILLON DE HOFSTADTER

Spectre de l'équation de HARPER

J.P. GUILLEMET B. HELFFER P. TRETON  
Département de Mathématiques  
UNIVERSITÉ DE NANTES

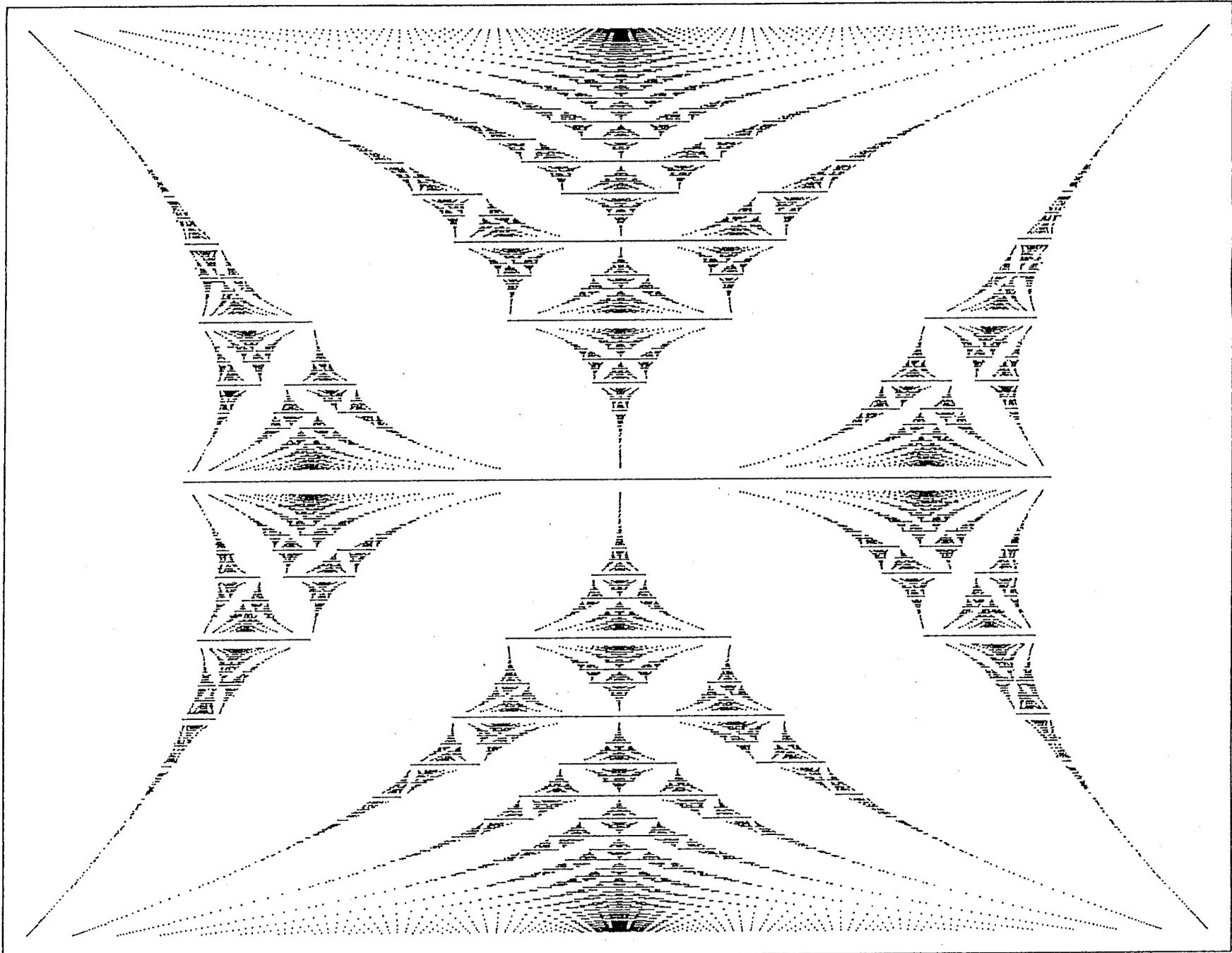


FIGURE 1

12bis



## Références

[Ad] E.N.Adams II :

Motion of an electron in a perturbed periodic potential

Phys.Rev. Vol85 n°1 ,Jan.1 ,1952

[Au] S.Aubry :

The new concept of transition by breaking of analyticity

Solid state Sci.8(1978)

[Av-Se] J.Avron-R.Seiler:

Quantization of the Hall conductance for general multiparticle Schrödinger hamiltonians

Phys.Review letters, vol.54, n°4, Janvier 1985, 259-262

[Az] Ya Azbel :

Energy spectrum of a conduction electron in a magnetic field

Soviet Physics JETP vol.19 , n°3 Sept.1964

[Be] J.Bellissard :

[1]Almost periodicity in solid state Physics and  $C^*$  -algebras

Harald Bohr Centennary conference on almost periodic functions

April,25 1987

[2] $C^*$ -Algebras in solid State Physics-2D Electrons in a uniform

magnetic field ; Warwick conference on operator algebras (jul 1987)

[Be-Si] J.Bellissard-B.Simon :

Cantor Spectrum for the Almost Mathieu Equation

Journal of functional Analysis , vol.48 , N°3 , Oct 1982

[Bl] E.I.Blount :

Bloch Electrons in a magnetic field ; Phys.Rev.126 (1962) 1636–1653

[Bu] V.S.Buslaev :

développements semi-classiques pour des équations à coefficients  
périodiques ; Yspehi Mat. Nayk n°42,6 (258) (1987)

Russian Math.Surveys 42:6(1987) p.97–125

[Ca] J.Callaway :

Energy band theory

Academic press 1964

[Car] U.Carlsson : manuscript ( 1987)

[Ch] R.G.Chambers :

The wave function of a Bloch electron in a Magnetic field

Proc.Phys.Soc.89 (1966) , 695–710

[C-E-Y]Man Duen Choi, G.A.Elliott, N.Yui :

Gauss polynomials and the rotation algebra (preprint 1988)

[Cl-Wa] F.H.Claro–W.H.Wannier :

Magnetic subband structure of electrons in Hexagonal lattices

Phys.Rev. B19 (1979) , 6068–74

[Du-No] B.A.Dubrovin–S.P.Novikov :

[1]Ground states of a two-dimensional electron in a periodic magnetic  
field

Zh.Eksp.Teor.Fiz. 79 ;p.1006–1016

[2] Ground states in a periodic field, magnetic Bloch functions and vector bundles

Sov.Math.Dokl.Vol.22 (1980) n°1

[Gu-He-Tr] J.P.Guillement, B.Helffer,P.Treton :

Walk inside the Hofstadter's butterfly

(preprint 1988, université de Nantes)

[He-Sj] B.Helffer,J.Sjostrand :

[1] Multiple wells in the semi-classical limit I

comm. in P.D.E,9(4), p.337-408, (1984)

[2] Analyse semi-classique pour l'équation de Harper (avec application à l'étude de l'équation de Schrödinger avec champ magnétique) ; Mémoires de la SMF vol 34 (1988) sous presse

[3] Analyse semi-classique pour l'équation de Harper II

preprint octobre 88

[4] Analyse semi-classique pour l'équation de Harper III

annoncé au Séminaire EDP de l'école Polytechnique 87-88

à paraître aux mémoires de la SMF 89

[5] Equation de Schrödinger avec champ magnétique et équation de Harper ; preprint décembre 1988

[a] Analyse semi-classique pour l'équation de Harper

Séminaire EDP de l'école Polytechnique 86-87 exposé 10

[b] Analyse semi-classique pour l'équation de Harper

Proceedings du colloque de st-Jean de Monts Juin 87

[c] Semi-classical analysis for Harper's equation

dans : Recent developments in hyperbolic equations

Proc. of the conference on hyperbolic equations, université de Pise (1987) p.312-322 ;

Pitman research notes in Math.Series n°183; Longman Scientific technical

[d] Structure cantorienne du spectre de l'opérateur de Harper

Séminaire EDP de l'école Polytechnique (1987–1988) exposé n°12

[e] Formes normales pour des opérateurs pseudodifférentiels  
semiclassiques en dimension 1

Séminaire EDP de l'école Polytechnique 1988–89, exposé n°2

[f] Periodic Schrödinger operators with constant weak magnetic fields

Exposé aux journées de Strasbourg, Décembre 1988

[g] Opérateurs de Schrödinger avec champs magnétiques faibles et  
constants.

Séminaire EDP de l'école Polytechnique 1988–1989, exposé du 28.2.89

[Ho] D.Hofstadter :

Energy Levels and Wave functions of Bloch electrons in rational and  
irrational magnetic fields

Phys.Rev.B 14 (1976) , 2239 – 2249

[Ko] W.Kohn :

Theory of Bloch functions in a magnetic field: the effective Hamiltonian

Phys.Rev. Vol. 115 n°6 September 15 (1959)

[La] L.D.Landau :

Zeitschrift. Physik 64 ,629 (1930)

[Lu] J.M.Luttinger :

The effect of a magnetic field on electrons in a periodic potential

Phys.Rev.84 n°4(1951) p.814–817

[Lys] A.S.Lyskova :

Topological properties of the Schrödinger operator in a magnetic field

and with a weak potential.

Usp.Mat.Nauk. 36 n°5 p.181–182

[Ma] V.P.Maslov :

Théorie des perturbations et méthodes asymptotiques.

Dunod (1972)

[Mo] P.(Van) Mouche :

[1] Clustering and Nesting of Energy spectra

Proceedings ICIAM 87 , Paris la Villette , June29 – July3 1987

[2] The coexistence problem for the discrete Mathieu operator

Preprint Février 88

[Ne] G.Nenciu :

[1]Existence of the exponentially localised Wannier functions

Comm.in Math.Phys. 91 ,81– 85 (1983)

[2]Stability of energy gaps under variation of the magnetic field

Letters in Mathematical Physics 11 (1986) p.127–132

[3]Bloch electrons in a magnetic field : rigorous justification of the Peierls– Onsager effective Hamiltonian(preprint avril 1988)

[No] S.P.Novikov :

[1]Magnetic Bloch functions and vector – bundles

Typical dispersion laws and their quantum numbers

Soviet Math.Dokl. Vol.23 (1981) n°2

[2]Two dimensional operators in periodic fields

Journal of soviet Mathematics.Vol 28 , n°1,Janvier 1985

[Pe] R.Peierls :

Zur theory des diamagnetismus von Leitungselectronen

Z. für Physik 80 (1933) 763–791

[Si] B.Simon :

Almost periodic Schrödinger operators. A review

Advances in applied mathematics 3 p.463–490 (1982)

[Sok] J.B.Sokoloff :

Unusual band structure, wave functions and electrical conductance in crystals with incommensurate periodic potentials

Physics reports (review section of physics letters) , 126,n°4,(1985),  
p.189–244

[Wa] G.H.Wannier :

Phys.Status Solidi B88 ; 757 (1978)

[Wilk] M.Wilkinson :

[1] Critical properties of electron eigenstates in incommensurate systems  
Proc.R.Soc.London A391, p.305–350, (1984)

[2] An example of phase holonomy in WKB theory  
J.Phys.A. Math.Gen.17 (1984), p.3459–3476

[3] Von Neumann lattices of Wannier functions for Bloch electrons  
in a magnetic field  
Proc. R.Soc.Lond.A 403 ,p 135–166(1986)

[4] An exact effective hamiltonian for a perturbed Landau Level  
Journal of Physics A, vol.20, n°7, 11 May 1987 p.1761

[Z] J.Zak :

Magnetic Translation Group

Physical Review Volume 134 , N°6A , Juin 1964