

# RECHERCHE COOPÉRATIVE SUR PROGRAMME N° 25

J. FELDMAN

J. MAGNEN

V. RIVASSEAU

R. SENEOR

## **Méthodes pour la théorie constructive des champs renormalisables asymptotiquement libres**

*Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg - RCP25, 1984, tome 34*  
« Conférences de : P. Collet, P.A. Meyer, P. Moussa, V. Rivasseau, Y. Sibuya et B. Mal-  
grange », , exp. n° 3, p. 67-89

[http://www.numdam.org/item?id=RCP25\\_1984\\_\\_34\\_\\_67\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RCP25_1984__34__67_0)

© Université Louis Pasteur (Strasbourg), 1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Recherche Coopérative sur Programme n° 25 » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

METHODES POUR LA THEORIE CONSTRUCTIVE  
DES CHAMPS RENORMALISABLES ASYMPTOTIQUEMENT LIBRES \*

J. FELDMAN \*\*, J. MAGNEN, V. RIVASSEAU, R. SÈNEOR

Centre de Physique Théorique de l'Ecole Polytechnique  
Plateau de Palaiseau - 91128 Palaiseau - Cedex - France

"Groupe de Recherche du C.N.R.S. n° 48"

Résumé :

On montre de façon détaillée une borne exponentielle uniforme sur les graphes convergents de la théorie  $\phi_4^4$  à l'aide d'une version simplifiée du développement dans l'espace de phase. Cet exemple illustre la puissance de cette technique, qui permet de redémontrer de façon plus simple des résultats importants de la théorie de la renormalisation perturbative BPHZ, et d'obtenir la construction des premiers modèles asymptotiquement libres dont le comptage de puissance est marginal et non pas "superrenormalisable". La construction d'un tel modèle (la théorie critique  $\phi_4^4$  avec cutoff ultraviolet) est esquissée.

A612.0684

Juin 1984

---

\* Cet article est l'élaboration d'un exposé donné par l'un des auteurs (V.R.) à la réunion de juin 84 de la RCP 25, à Strasbourg.

\*\* Adresse permanente : Department of Mathematics, University of British Columbia, Vancouver B.C. Canada V6T1Y4.

## I - INTRODUCTION

Il y a une dizaine d'années la théorie dite "constructive" des champs atteignait un premier objectif important, la construction de modèles superrenormalisables décrivant des champs véritablement en interaction. Parmi les clés (nombreuses...) de ce succès on peut rappeler l'utilisation de méthodes fonctionnelles dans l'espace euclidien, le prolongement à l'espace de Minkovski se faisant à l'aide du théorème d'Osterwalder-Schrader, et la mise au point de développements inspirés de la théorie perturbative des champs : le plus puissant d'entre eux, le "développement dans l'espace de phase" inventé par Glimm et Jaffe [1] permettait la construction du premier modèle à renormalisation vraiment non-triviale ( $\phi_3^4$ ).

Récemment un nouveau pas a été franchi : le contrôle mathématique rigoureux des premiers modèles juste renormalisables et asymptotiquement libres devient possible, là aussi au terme d'un mûrissement progressif de plusieurs approches convergentes ; nous voudrions en rappeler quelques étapes marquantes de ces dernières années (80-83) sans prétendre être en aucune façon exhaustif.

a) Dans la lignée de la théorie constructive des champs le "développement dans l'espace de phase" a été progressivement perfectionné, et appliqué à l'étude de théories critiques de masse nulle superrenormalisables [2] ; son esprit s'est rapproché de plus en plus de celui du groupe de renormalisation.

b) Une autre voie d'approche a cherché à rendre progressivement rigoureuse la théorie du groupe de renormalisation : après la construction de  $\phi_3^4$  [3], un programme systématique d'étude des points critiques a été entrepris avec la construction de théories de masse nulle superrenormalisables [4], le contrôle d'approximations hiérarchiques [5] etc...

c) La théorie de la renormalisation perturbative a été elle même approfondie : les grands ordres de la perturbation ont pu être bornés [6], et la construction perturbative de théories asymptotiquement libres mutilées, comme les théories planaires [7] [8] a été menée à bien.

Les résultats nouveaux annoncés ces derniers mois constituent un aboutissement important de tous ces efforts :

- La construction complète d'une théorie de masse nulle ( $\phi_4^4$  avec cut off ultra violet) asymptotiquement libre, de comptage de puissance juste renormalisable a été obtenue par deux équipes, l'une suivant la voie a [10], l'autre la voie b [9].

- L'étude de la transformée de Borel de la théorie  $\phi_4^4$  dans sa limite ultra violette a progressé [11].

- Les résultats de théorie des perturbations mentionnés précédemment (bornes des grands ordres, construction de théories planaires) ont été redémontrés de façon plus simple [12] [13].

- La construction de théories des champs asymptotiquement libres à deux dimensions (modèle de Gross-Neveu massif) a été entreprise [14] et devrait aboutir prochainement.

Au vu de ces progrès on peut à notre avis espérer que le contrôle rigoureux des théories de jauge non abéliennes en dimension 4 (sorte d'objectif ultime de la "longue marche" de la théorie constructive des champs ....) se situe dans un avenir plus trop lointain, au moins en ce qui concerne une version régularisée à longue distance. Du point de vue de leur limite ultraviolette les théories de jauge non abéliennes utilisées en physique des particules sont en effet des modèles juste renormalisables et asymptotiquement libres.

Nous allons montrer maintenant par un exemple très simple mais traité en détail comment fonctionne la "localisation dans l'espace de phase" qui est la technique de base de notre approche ([10][13][14]) des situations juste renormalisables. L'idée directrice est de diviser l'espace de moments en "tranches" croissant selon une loi géométrique. Les quantités de la théorie seront systématiquement découpées selon cette grille, estimées, et les estimations resommées. Le découpage

en moments selon une échelle exponentielle (contrairement aux versions plus anciennes du développement dans l'espace de phase [1][2]) est une discrétisation optimale pour l'étude des théories juste renormalisables où les opérateurs "marginiaux" ont un comportement asymptotique logarithmique dans l'énergie, mais ne comportent pas de corrections du type "Loglog" par exemple.

II - UN RESULTAT DE THEORIE PERTURBATIVE : LA BORNE UNIFORME SUR LES GRAPHES CONVERGENTS DE  $\phi_4^4$ .

Soit  $G$  un graphe de la théorie des perturbations de  $\phi_4^4$ . C'est donc un ensemble de lignes internes, de lignes externes et de vertex, tel que chaque ligne interne joigne deux vertex, chaque ligne externe est attachée à un seul vertex, et exactement 4 lignes au total (internes ou externes) sont attachées à chaque vertex. Nous supposerons désormais le graphe  $G$  connexe et noterons  $n(G)$ ,  $L(G)$ ,  $E(G)$  et  $B(G)$  respectivement le nombre de vertex, de lignes internes, de lignes externes et de boucles du graphe  $G$ . On a les relations topologiques :

$$L(G) = 2 n(G) - \frac{1}{2} \cdot E(G) \quad (\text{II.1})$$

$$B(G) = L(G) - n(G) + 1 = n(G) - \frac{E(G)}{2} + 1 \quad (\text{II.2})$$

On notera  $v_E(G)$  l'ensemble des vertex externes de  $G$ , c'est à dire ceux auxquels est attachée au moins une ligne externe. Un sous graphe  $H$  de  $G$  est un sous ensemble de lignes internes de  $G$  avec les vertex qui s'y rattachent : on étend de manière naturelle aux sous graphes toutes les notations précédentes. Pour un vertex  $v$  fixé on désignera par  $x_v$  la position de  $v$  dans  $\mathbb{R}^4$ , et pour une ligne  $l$  donnée on désignera par  $x_l$  et  $y_l$  les positions des deux vertex attachés à la ligne  $l$ .

Pour une théorie  $\phi_4^4$  de masse unité le propagateur dans l'espace  $\mathbb{R}^4$  est la transformée de Fourier de  $\frac{1}{p^2+1}$ , donc est singulier aux points coïncidents. Plus précisément, en écrivant

$\frac{1}{p^2+1} = \int_0^\infty e^{-\alpha(p^2+1)} d\alpha$  et en prenant la transformée de Fourier, on peut, à des constantes de proportionnalité près que nous oublierons, définir le propagateur d'une ligne interne comme :

$$C(x, y) = \int_0^\infty \frac{d\alpha}{\alpha^2} e^{-\alpha} \cdot e^{-\frac{|x-y|^2}{4\alpha}} \quad (\text{II.3})$$

L'amplitude de Feynman (non renormalisée) d'un graphe  $G$  est alors une distribution, fonction des moments externes  $\vec{k}_v$  attachés aux vertex de  $\mathcal{V}_E(G)$ , définie par l'intégrale suivante (si elle converge) :

$$A_G(\vec{k}_v) = \int \dots \int_{\mathbb{R}^4} \prod_v d^4 x_v \prod_e \frac{C(x_e, y_e)}{e} \prod_{v \in \mathcal{V}_E(G)} e^{i \vec{k}_v \cdot x_v} \quad (\text{II.4})$$

Le théorème de Weinberg permet d'affirmer que l'intégrale précédente est absolument convergente si pour tout sous graphe connexe  $H$  de  $G$  le degré de convergence  $c(H) = 2\ell(H) - 4b(H)$  est strictement positif. D'après (II.1) et (II.2) on a :

$$c(H) = E(H) - 4 \quad (\text{II.5})$$

La condition  $c(H) > 0$  est donc équivalente à  $E(H) \geq 6$  (car  $E(H)$  est pair ....) pour tout sous graphe  $H$  de  $G$ , ce que nous supposons désormais : le graphe  $G$  est dit alors complètement convergent. Remarquons qu'on a alors l'importante inégalité :

$$c(H) \geq \frac{E(H)}{3} \quad (\text{II.6})$$

qui est typique d'une théorie renormalisable. Dans le cas d'une théorie "superrenormalisable" ( $\phi_2^4, \phi_3^4$ ) on aurait une inégalité beaucoup plus forte : le degré de convergence d'un graphe serait plus grand qu'une fonction linéaire de  $n(G)$  : dans le cas non renormalisable ( $\phi_5^4$  ...) même l'inégalité (II.6) disparaîtrait.

Par invariance par translation des propagateurs  $C(x_e, y_e)$  on peut fixer un vertex  $v_0$  particulier de  $G$  et intégrer  $x_{v_0}$

dans (II.4), obtenant  $A_G = \delta\left(\sum_{v \in V_E} \vec{k}_v\right) A'_G(\vec{k}_v)$ , avec

$$|A'_G(\vec{k}_v)| \leq A''_G = \int_{\mathbb{R}^4} \dots \int_{\mathbb{R}^4} \prod_{v \neq v_0} d^4 x_v \prod_{\ell} C(x_\ell, y_\ell) \Big|_{x_{v_0}=0} \quad (II.7)$$

Nous allons alors démontrer :

Théorème 1 : Il existe une constante  $K$  telle que pour tout graphe  $G$  complètement convergent :

$$A''_G \leq K^{n(G)} \quad (II.8)$$

Remarques : Ce théorème a été démontré dans [6]. Dans le cas d'un graphe  $G$  planaire il existe une démonstration indépendante due à G.'t Hooft [15]. Pour les modèles superrenormalisables de telles estimations uniformes des grands graphes ont été un des ingrédients des démonstrations de Glimm et Jaffe [16][1]. Mais alors que dans ces modèles superrenormalisables on peut obtenir des estimations uniformes en brisant un grand graphe en un produit de petits à l'aide d'inégalités de convexité, la situation dans le cas de  $\phi_4^4$  est plus serrée et les estimations doivent être plus globales. La version que nous donnons ici s'inspire de [13], mais nous nous sommes volontairement restreints à ne pas énoncer ce théorème sous une forme trop générale afin de simplifier sa démonstration et de la rendre la plus transparente possible. Celle-ci comprend quatre étapes :

- 1) Préparation du graphe
- 2) Somme sur les positions des vertex
- 3) "Récolte" du comptage de puissance
- 4) Somme sur les attributions de moments.

1. Préparation du graphe

Soit  $M > 1$  un nombre fixé, base de l'échelle géométrique des énergies. Dans ce qui suit on choisira (par analogie avec la section III)  $M$  entier, bien que ce ne soit pas à proprement parler nécessaire pour la démonstration du Théorème I ;  $K, K', K'' \dots$  désigneront génériquement des constantes numériques, pouvant dépendre du choix de  $M$ , mais dont la valeur exacte importe peu, car nous n'essayons pas de chercher un  $K$  minimal dans (II.8).

Lemme : 
$$C(x, y) \leq K \sum_{i=0}^{\infty} M^{2i} e^{-\frac{M^i}{2} |x-y|} \quad (II.9)$$

Preuve : de (II.3) on tire aisément :

$$C(x, y) \leq K \frac{1}{|x-y|^2} e^{-\frac{|x-y|}{2}} \quad (II.10)$$

Si  $|x-y| \geq 1$ , le membre de droite de (II.10) est borné par le terme  $i=0$  de (II.9). Sinon on peut écrire, d'après (II.10) :

$$\begin{aligned} C(x, y) &\leq \frac{K}{|x-y|^2} \leq \frac{K'}{|x-y|^2} \int_{|x-y|}^{\infty} s ds e^{-s/2} \dots \\ \dots &= K' \sum_{i=0}^{\infty} \int_{M^i}^{M^{i+1}} s ds e^{-\frac{s}{2} |x-y|} \leq K'' \sum_{i=0}^{\infty} M^{2i} e^{-\frac{M^i}{2} |x-y|} \end{aligned}$$

En utilisant (II.7) et (II.9) on peut écrire : (on rappelle que dans tout ce qui suit  $x, y_0$  est fixé à l'origine de  $\mathbb{R}^4$ ).

$$A''_G \leq K^{n(G)} \sum_{\{i_\ell=0\}}^{\infty} \prod_{\ell} \pi M^{2i_\ell} \int_{\mathbb{R}^4} \int_{\mathbb{R}^4} \prod_{v \neq v_0} \pi d^4 x_v \prod_{\ell} e^{-\frac{M^{i_\ell}}{2} |x_\ell - y_\ell|} \quad (II.11)$$

(En effet d'après (II.1) un terme  $K^{L(G)}$  est borné par  $K^{2n(G)} = [K']^{n(G)}$ )  
 Dans (II.11) nous fixons désormais une famille d'entiers  $\{i_\ell\}$ ,  $\ell = 1, \dots, L(G)$  dans la multi-somme, que nous appellerons une "attribution de moments". En effet la "tranche"  $i_\ell$  pour le propagateur de la ligne  $\ell$  correspond bien à une décroissance exponentielle, donc à une énergie de l'ordre de  $M^{i_\ell}$ .

Définissons  $G_j$  comme le sous graphe de  $G$  formé de toutes les lignes  $l$  d'indice  $i_l \geq j$ . Chaque  $G_j$  est formé d'un nombre fini de composantes connexes notées  $G_j^k$ ,  $k = 1, \dots, q_j$ . Un vertex  $v$  pouvant avoir des lignes situées à des étages d'indices différents il sera représenté sur la Figure 1 par une ligne pointillée allant de l'étage  $h_v$  à l'étage  $b_v$  où :

$$h_v = \sup \{ i_l \mid l \text{ est attachée à } v \}$$

$$b_v = \inf \{ i_l \mid l \text{ est attachée à } v \}.$$

(II.12)

(Par convention  $b_v = -1$  si  $v \in V_E(G)$ ).

Un graphe  $G_j^k$  contient en général plusieurs composantes  $G_{j+1}^{k'}$  de la tranche supérieure  $j+1$ . On notera  $G_{j-1}^{p(k)}$  le graphe connexe de l'étage  $j-1$  contenant  $G_j^k$ .

Intuitivement il va être possible, à l'échelle  $j$ , de sommer sur  $\mathbb{R}^4$  (à l'aide de la décroissance exponentielle des lignes de  $G_j^k$ ), tous les vertex de  $G_j^k$ , sauf un qui représente l'invariance par translation de  $G_j^k$  à l'étage  $j$ . Celle-ci sera brisée aux étages inférieurs lorsque les  $G_j^k$  finissent par se réunir en une composante connexe unique (car  $G_0 = G$ ). Nous allons donc définir un vertex particulier  $v_j^k$  pour chaque  $G_j^k$ , par rapport auquel les autres vertex de  $G_j^k$  seront sommés. Lorsque  $v_0 \in G_j^k$  il faut bien sûr poser  $v_j^k = v_0$ . On choisit  $v_j^k$  par récurrence sur  $j$  de la façon suivante :

- pour  $j = 0$ ,  $G_0 = G_0^1 = G$  : on pose  $v_0^1 = v_0$
- soit  $j \in \mathbb{N}^*$ ,  $k \leq q_j$  ; si  $v_{j-1}^{p(k)} \in G_j^k$  on pose  $v_j^k = v_{j-1}^{p(k)}$  ; sinon on choisit  $v_j^k$  arbitrairement dans  $G_j^k$ .

On vérifie alors aisément que si un vertex  $v$  est égal à  $v_j^k$  pour un certain choix de  $(j, k)$  il est aussi égal à un  $v_{j'}^{k'}$  pour tout  $j'$  tel que  $j \leq j' \leq h_v$ .

L'indice de sommation  $i_v$  d'un vertex  $v \neq v_0$ , indiquant la hauteur de l'étage où il sera sommé est alors défini par  $i_v = \sup \{ j \mid j \leq h_v, v \neq v_j^k \forall k \}$

Pour chaque valeur de  $(j, k)$ ,  $j \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq k \leq q_j$  on fait ensuite le choix d'un arbre  $T_j^k$  de  $G_j^k$  (ensemble de lignes de  $G_j^k$  sans boucles passant par tous les vertex de  $G_j^k$ ). On pose

$$\lambda(T_j^k) = \sum_{\ell \in T_j^k} |x_\ell - y_\ell| \quad (\text{II.13})$$

Alors, comme  $M \geq 2 \Rightarrow M^i \geq \frac{1}{2} \sum_{j=0}^i M^j$ , on peut écrire

$$\prod_{\ell} e^{-\frac{M^i}{2} |x_\ell - y_\ell|} \leq \prod_{\ell} \prod_{j=0}^i e^{-\frac{M^j}{4} |x_\ell - y_\ell|} \leq \prod_j \prod_{k=1}^{q_j} e^{-\frac{M^j}{4} \lambda(T_j^k)} \quad (\text{II.14})$$

### 2. Somme sur les positions des vertex

Pour chaque  $G_j^k$  notons  $W_j^k$  l'ensemble des vertex  $v \neq v_0$  de  $G_j^k$  tels que  $i_v = j$ , et  $\pi_j^k$  le nombre d'éléments de  $W_j^k$ .

Grâce à l'astuce du "tour de l'arbre" [26] (Figure 2) il est facile de montrer qu'il existe un ordre de  $W_j^k = \{v_1, v_2, \dots, v_{\pi_j^k}\}$  tel que :

$$\lambda(T_j^k) \geq |x_{v_1} - x_{v_2}| + |x_{v_2} - x_{v_3}| + \dots + |x_{v_{\pi_j^k-1}} - x_{v_{\pi_j^k}}| \quad (\text{II.15})$$

Commençant par la plus haute valeur de  $j$  tel que  $G_j \neq \emptyset$  puis descendant les échelles, on peut donc sommer les positions des vertex de  $W_j^k$  grâce à la décroissance en arbre correspondant à  $T_j^k$  dans (II.14).

Le résultat de ces sommations successives sera (puisque  $\int_{\mathbb{R}^4} d^4x e^{-\alpha|x|} \leq K\alpha^{-4}$ ) :

$$\int_{\mathbb{R}^4} \int_{\mathbb{R}^4} \prod_{v \neq v_0} d^4x_v \prod_j \prod_{k=1}^{q_j} e^{-\frac{M^j}{4} \lambda(T_j^k)} \leq K^{n(G)} \prod_j \prod_{k=1}^{q_j} [M^{-4j}]^{\pi_j^k} \quad (\text{II.16})$$

### 3. Récolte du comptage de puissance

On écrit, grâce à (II.5) et (II.6) :

$$\begin{aligned} \prod_e M^{2i_e} \prod_j \prod_{k=1}^{q_j} [M^{-4j}]^{r_j^k} &= M^{-2L(G)+4[n(G)-1]} \prod_j \prod_{k=1}^{q_j} M^{2L(G_j^k)-4[n(G_j^k)-1]} \\ &= M^{c(G)} \prod_j \prod_{k=1}^{q_j} [M^{-c(G_j^k)}] \\ &\leq K^{n(G)} \prod_j \prod_{k=1}^{q_j} \left[ M^{-\frac{E(G_j^k)}{3}} \right] \quad (\text{II.17}) \end{aligned}$$

En effet à l'étape  $j$  un seul vertex,  $v_j^k$ , de  $G_j^k$  n'est pas encore sommé, d'où les facteurs  $[n(G_j^k)-1]$ . En remarquant que pour  $b_v < j \leq h_v$ ,  $v \in v_E(G_j)$ , on obtient de (II.11), (II.16) et (II.17) l'inégalité :

$$A''_G \leq K^{n(G)} \sum_{\{i_\ell=0\}}^{\infty} \prod_v M^{-\frac{1}{3}(h_v - b_v)} \quad (\text{II.18})$$

Par conséquent, on a reconstruit une décroissance exponentielle, cette fois dans la séparation entre les attributions de moments des lignes attachées à un vertex. Cette décroissance permet d'effectuer la multi-somme sur les familles d'entiers  $\{i_\ell\}$  dans la dernière étape.

#### 4. Somme sur les choix des moments

Appelons  $i_v^1, i_v^2, i_v^3$  et  $i_v^4$  les indices attribués aux quatre lignes attachées à un vertex  $v$ , en rappelant que par convention les lignes externes attachées à  $v$  ont un indice  $-1$ .

On a alors

$$\prod_v M^{-\frac{1}{3}(h_v - b_v)} \leq \prod_v M^{-\frac{1}{18} \sum_{(j,j')} |i_v^j - i_v^{j'}|} \quad (\text{II.19})$$

où la somme dans (II.19) est faite sur les 6 paires d'indices différents

$(j, j')$  entre 1 et 4. On peut alors numéroter les lignes internes de  $G$  comme  $l_1, l_2, \dots, l_{L(G)}$  de sorte que  $l_1$  soit attachée à un vertex externe de  $G$ ,  $l_2$  soit attachée à  $l_1$ ,  $l_3$  attachée à  $l_1 \cup l_2$ , etc. De cette façon, pour  $1 \leq k \leq L(G)$   $l_1 \cup l_2 \cup \dots \cup l_k$  est un sous graphe connexe de  $G$ .

Sommant alors successivement sur  $i_{l_{L(G)}}, i_{l_{L(G)-1}}, \dots, i_{l_1}$  à l'aide de la relation :

$$\forall j \in \mathbb{N}, \quad \sum_{i=0}^{\infty} M^{-\frac{1}{18}|i-j|} \leq 2 \sum_{i=0}^{\infty} M^{-\frac{i}{18}} = 2 \left[ 1 - M^{-\frac{1}{18}} \right]^{-1}$$

on peut borner la somme (II.18) par  $K^{L(G)}$  ce qui en utilisant à nouveau (II.1) achève la démonstration du théorème. (En effet pour chaque ligne  $l_k, k > 1$  le graphe  $l_1 \cup \dots \cup l_k$  étant connexe, il existe une ligne  $l_j, j < k$  attachée à  $l_k$  et on utilise le facteur de décroissance de la paire  $(l_j, l_k)$  dans (II.19) pour sommer sur  $i_{l_k}$  : enfin on utilise la décroissance entre  $i_{l_1}$  et l'indice -1 de la ligne externe de  $G$  attachée à  $l_1$  pour sommer sur  $i_{l_1}$ ).

### III - SCHEMA DE CONSTRUCTION DE LA THEORIE $\phi_4^4$ REGULARISEE DE MASSE NULLE

$\Lambda$  désigne une partie compacte de  $\mathbb{R}^4$ .

On considère la famille de mesures de probabilités

$$d\mu_\Lambda(\phi) = \frac{1}{Z(\Lambda)} e^{-\left[ \int_\Lambda g : \phi^4 : + \frac{1}{2} m^2(\Lambda, g) : \phi^2 : \right]} d\nu_\Lambda(\phi) \quad (\text{III.1})$$

-  $d\nu_\Lambda$  étant la mesure gaussienne sur  $S'(\Lambda)$  de covariance

$$C(x, y) = \int \frac{e^{-p^2}}{p^2} e^{i p \cdot (x-y)} d^4 p \quad (\text{III.2})$$

(Il y a dans (III.2) un choix implicite des conditions au bord).

-  $m(\Lambda, g)$  est la renormalisation de masse, choisie par un calcul inductif de façon à se placer au point critique.

-  $Z(\Lambda)$  est un facteur de normalisation.

Les objets d'étude principaux sont les fonctions de corrélation (ou fonctions de Schwinger)

$$S_E^\Lambda(x_1, \dots, x_E) = \int \phi(x_1) \dots \phi(x_E) d\mu_\Lambda(\phi) \quad (\text{III.3})$$

On peut alors démontrer les théorèmes suivants [9][10] :

Théorème II : (Existence de  $\phi_4^4$  de masse nulle avec cutoff ultraviolet)

Pour  $\varepsilon$  suffisamment petit et  $0 \leq g \leq \varepsilon$ , il existe un choix de  $m(\Lambda, g)$  tel que la limite thermodynamique  $\Lambda \rightarrow \mathbb{R}^4$  du modèle existe et décrit un champ de masse nulle. Plus précisément les limites quand  $\Lambda \rightarrow \mathbb{R}^4$  de  $d\mu_\Lambda$  et  $S_E^\Lambda$  existent, sont notées  $d\mu$  et  $S_E$ , et  $S_2(x, y)$  décroît plus lentement que n'importe quelle exponentielle de  $|x-y|$  pour  $|x-y|$  grand.

Théorème III : (Comportement de  $\phi_4^4$  de masse nulle)

Le comportement à longue distance des fonctions de corrélation est gaussien, l'approche à ce comportement étant logarithmique. Ceci signifie par exemple :

$$S_2(x, y) \underset{|x-y| \rightarrow \infty}{\simeq} \frac{1 + O(g^2)}{|x-y|^2} \left( 1 + \frac{O(1)}{\log|x-y|} \right) \quad (\text{III.4})$$

$$S_4^T(x_1, x_2, x_3, x_4) \underset{|x_i - x_j| \rightarrow \infty}{\simeq} \int_{\mathbb{U}} \prod_i S_2(x_i, y) d^4y \frac{O(1)}{\inf[\log|x_i - x_j|]} \quad (\text{III.5})$$

où  $S_4^T(x_1, x_2, x_3, x_4) = S_4(x_1, x_2, x_3, x_4) - S_2(x_1, x_2) S_2(x_3, x_4)$

-  $S_2(x_1, x_3) S_2(x_2, x_4) - S_2(x_1, x_4) S_2(x_2, x_3)$

Pour un énoncé plus précis du théorème III, voir [10]. Ces théorèmes confirment pleinement les analyses du modèle  $\phi_4^4$  par la technique (partiellement non rigoureuse) du groupe de renormalisation [17]. Ils montrent également que contrairement au cas de  $\phi_2^4$  ou  $\phi_3^4$  on ne peut pas construire une théorie  $\phi_4^4$  non triviale (non gaussienne) en prenant simplement une limite d'échelle de la théorie critique régularisée à petite constante de couplage positive. Il existe aussi des résultats [18], [19] et des conjectures de trivialité de  $\phi_4^4$  plus généraux (voir par exemple [20][21]) portant sur toutes les valeurs de la constante de couplage, que notre méthode ne permet pas jusqu'à présent d'étudier. Nous allons présenter le schéma de construction d'un développement convergent qui démontre les théorèmes I et II et fournit un outil systématique d'étude asymptotique de la théorie à longue distance, selon le plan suivant :

- a) Généralités
- b) Les cluster-expansions emboîtées
- c) Le développement sur les couplages entre fréquences (et la domination)
- d) La renormalisation ; calcul des constantes effectives et liberté asymptotique
- e) Estimations finales et convergence du développement.

a) Généralités

Comme il s'agit d'étudier cette fois une limite infra-rouge on introduit une échelle de moments  $M_i = M^{-i}$ ,  $i \in \mathbb{N}^*$ ,  $M$  entier  $\geq 2$ . On décompose le propagateur libre  $C(p)$  comme :

$$C(p) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i(p) \quad C_i(p) = \frac{1}{p^2} [e^{-M_{i-1}^{-2} p^2} - e^{-M_i^{-2} p^2}]$$

On décompose également le champ  $\phi$  comme somme de variables indépendantes  $\phi_i$ , ayant pour covariance  $C_i$  :

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x)$$

Nous voulons localiser également dans l'espace direct  $\Lambda \subset \mathbb{R}^4$  Par conséquent nous associons à chaque échelle de moments  $i$  un réseau cubique  $\mathcal{D}_i$ , qui recouvre  $\Lambda$  par une union (finie) de cubes disjoints  $\Delta$  de côté  $M_i$ , leurs coins étant situés sur  $M^i \mathbb{Z}^4$ , de sorte que chaque cube de  $\mathcal{D}_i$  soit exactement l'union de  $M^4$  cubes de  $\mathcal{D}_{i-1}$ .

Pour chaque échelle  $i$  (en commençant par  $i = 1$ ) nous effectuerons :

- une "cluster expansion" dans la mesure gaussienne  $d\nu_i$  de covariance  $C_i$ , afin d'estimer les corrélations entre différentes régions de l'espace à l'échelle d'énergie  $M^{-i}$ ; la  $i$ -ème cluster expansion sera faite selon les cubes du réseau  $\mathcal{D}_i$  que "distinguent" des propagateurs d'énergie  $M^{-i}$  d'après la relation de Heisenberg.

- un développement limité, dans chaque cube  $\Delta$  de  $\mathcal{D}_i$ , dans un paramètre  $\epsilon_\Delta$  qui teste le couplage entre les champs localisés dans  $\Delta$ ,  $\phi_{h,i}(x) = \sum_{j \leq i} \phi_j(x)$  et  $\phi_{l,i}(x) = \sum_{j > i} \phi_j(x)$ ,  $x \in \Delta$ , respectivement de haute et de basse énergie par rapport à la taille de  $\Delta$ . En effet dans (III.1) ces hautes et basses fréquences sont couplées par l'exponentielle de l'interaction.

Le développement final se présente comme une somme sur des graphes. Comme la théorie est juste renormalisable, les sous graphes avec 6 jambes basses (externes) ou plus correspondent à des opérateurs irrelevantes et seront sommés sans difficultés. Par contre, les sous graphes à 2 ou 4 jambes externes basses doivent être "renormalisés", c'est-à-dire que la valeur effective des opérateurs correspondants,  $:\phi^4:$ ,  $:\phi^2:$  et  $(\nabla\phi)^2$  à basse énergie doit être calculée par l'addition de contre-termes qui compensent, pour la théorie découplée (à  $\epsilon_\Delta = 0$ ) les divergences de ces sous graphes.

La convergence générale du développement est assurée par la liberté asymptotique infra-rouge. Elle permet de transformer la divergence infra rouge du sous graphe  $G_0$  (Fig. 3) en un comportement en  $\frac{1}{|\log E|}$  de la constante de couplage effective à basse énergie  $E$  (dans [8] un mécanisme similaire est utilisée du côté ultra-violet pour une théorie  $g\phi^4$  planaire avec  $g < 0$ ).

L'utilisation de "constantes effectives à basse énergie" distingue cette méthode de celle de [2] et la rapproche de la philosophie du groupe de renormalisation [9],[17].

b) Les "cluster expansions" emboîtées

Nous utilisons la version "en arbre" de la cluster expansion décrite dans [22]-[24], plus simple et plus puissante que les versions originales [25]. L'idée est de tester de façon inductive le couplage gaussien d'échelle  $i$  entre l'intérieur d'un ensemble de cubes de  $\mathcal{D}_i$  (reliés entre eux par des propagateurs  $C_i$  formant un graphe en arbre) et tout l'extérieur. En commençant par un cube donné de  $\mathcal{D}_i$  (par exemple le premier dans l'ordre lexicographique, pour fixer complètement l'algorithme) on engendre tous les liens possibles d'échelle  $i$  avec un autre cube de  $\mathcal{D}_i$  ; la somme pouvant être faite grâce à la décroissance exponentielle en  $\exp(-M_i|x-y|)$  de  $C_i$ , adaptée à la taille des cubes de  $\mathcal{D}_i$ . Puis on engendre tous les liens possibles entre cet ensemble de 2 cubes et les cubes extérieurs, et ainsi de suite. On obtient une somme de termes indicés par les collections d'arbres disjoints recouvrant  $\mathcal{D}_i$ . La convergence de ce développement pose un problème combinatoire non trivial aujourd'hui bien maîtrisé [22]-[24]. (L'analogue plus simple serait dans la section précédente, la sommation sur les positions des vertex ( $2^\circ$ )).

c) Le développement dans le couplage entre fréquences

Entre la "cluster expansion" d'étage  $i$  et d'étage  $i+1$  on intercale un développement systématique, dans tous les cubes de  $\mathcal{D}_i$ , dans le couplage entre  $\varphi_{h,i}$  et  $\varphi_{b,i}$ . Très schématiquement, on

introduit des paramètres  $\epsilon_{\Delta}$ , un pour chaque  $\Delta \in \mathcal{D}_i$  et on écrit, par exemple pour le terme en  $:\varphi^4:$  de l'exponentielle dans (III.1) :

$$\begin{aligned} \int_{\Delta} : \varphi^4(x) : &= \int_{\Delta} : (\varphi_{h,i}(x) + \epsilon_{\Delta} \varphi_{\theta,i}(x))^4 : + (1 - \epsilon_{\Delta}^4) : \varphi_{\theta,i}^4(x) : \Big|_{\epsilon_{\Delta}=1} \\ &= \int_{\Delta} : \varphi^4(\epsilon_{\Delta}, x) : \Big|_{\epsilon_{\Delta}=1} \end{aligned} \quad (\text{III.6})$$

de sorte que la théorie à  $\epsilon_{\Delta} = 1$  soit la théorie complète et la théorie à  $\epsilon_{\Delta} = 0$  soit la théorie où dans  $\Delta$  les fréquences hautes et basses ne soient plus couplées. On écrit alors systématiquement une formule de Taylor au cinquième ordre pour chaque  $\epsilon_{\Delta}$  :

$$F(\epsilon_{\Delta}=1) = F(0) + F'(0) + \frac{F''(0)}{2!} + \frac{F'''(0)}{3!} + \frac{F^{(4)}(0)}{4!} + \int_0^1 \frac{(1-t_{\Delta})^4}{4!} F^{(5)}(t_{\Delta}) dt_{\Delta} \quad (\text{III.7})$$

Chaque dérivation en  $\epsilon_{\Delta}$  appliquée à l'exponentielle de (III.1) crée un "vertex" avec au moins un champ de fréquence basse et un champ de fréquence haute. Les champs hauts  $\varphi_{h,i}$ , appelés "bien localisés" seront estimés après une inégalité de Schwarz, par intégration avec la mesure gaussienne  $d\nu(\phi)$ . Les champs de basse fréquence  $\varphi_{\theta,i}$ , "mal localisés" seront décomposés en "moyenne et fluctuation" à l'échelle  $i$  :

$$\varphi_{\theta,i} = \delta_i[\varphi_{\theta,i}] + m_i(\varphi_{\theta,i}) \quad (\text{III.8})$$

où

$$m_i(f) = M_i^4 \int_{\mathbb{R}^4} \eta(M_i(x-x')) f(x') d^4x' \quad (\text{III.9})$$

$$\delta_i(f) = f - m_i(f)$$

$\eta$  étant une fonction  $\mathcal{E}^{\infty}$  normalisée de support compact contenu dans le carré unité (fonction de lissage). La partie fluctuante peut de nouveau être considérée comme "bien localisée" (de haut-moment) et être

estimée par une intégration gaussienne à l'aide de  $d\nu(\phi)$ . La moyenne  $m_i(\varphi_{\theta,i})$  au contraire, devra être bornée par le terme  $\exp[-g \int_{\Delta} \phi^4]$  dans (III.1) donc "dominée". C'est ici qu'on utilise la stabilité du terme en  $\phi^4$  pour les grands champs  $\phi$ , et qu'en quelque sorte on "tronque" la série des perturbations, qui normalement est divergente, à l'aide d'un argument "non perturbatif".

Comme le développement est poussé au 5ème ordre dans chaque  $\epsilon_{\Delta}$ , les termes avec au plus 4 jambes mal localisées dans  $\Delta$  ont forcément  $\epsilon_{\Delta} = 0$ . L'exponentielle de l'interaction dans  $\Delta$  factorise alors en une partie "champs hauts" que multiplie une partie "champs bas", comme indiqué en (III.6). Ceci permet de "renormaliser" les sous graphes correspondants par l'introduction de contre termes locaux (fictifs car ils existent à  $\epsilon_{\Delta} = 0$  et s'annulent dans la théorie couplée à  $\epsilon_{\Delta} = 1$ ).

Par contre les termes à  $\epsilon_{\Delta} \neq 0$  comportent au moins 5 jambes de bas moments et par un argument un peu analogue à la section précédente (3e) leur comptage de puissance favorable permettra de les sommer.

Au contraire de [2], où le développement est fait des basses fréquences vers les hautes, ce qui est un peu moins naturel pour l'étude d'une limite infra-rouge, les champs  $m_i(\varphi_{\theta,i})(x)$  créés à l'étape  $i$  auront une dépendance explicite dans les  $\epsilon_{\Delta}$  pour  $\Delta \in \mathcal{D}_j$ ,  $j > i$ ,  $x \in \Delta$ , et pourront donc être redérivés plus tard. Sans cette règle, un nombre arbitraire de tels champs pourraient s'accumuler dans un cube  $\Delta$ , venant de cubes  $\Delta' \subset \Delta$  avec  $\epsilon_{\Delta'} = 0$ . Le développement, "mal tronqué" divergerait alors de la même façon que la théorie des perturbations ordinaire. Avec notre règle, seulement  $4M^4$  jambes de ce type peuvent venir s'accumuler dans un cube  $\Delta$  fixé.

#### d) La renormalisation

Le développement esquissé précédemment fournit une somme de termes indexés par des graphes c'est à dire des unions de cubes de différents étages  $\mathcal{D}_i$  connectés, dans un étage donné, par des propagateurs explicites de la "cluster expansion" correspondante, et entre

étages par des vertex (lignes pointillées de la Fig. 1) créés par les dérivations dans les  $\epsilon_{\Delta}$  et ayant des lignes dans les différents étages en question. On appellera sous graphe un sous ensemble connexe de cubes tous plus hauts qu'un étage  $j$  donné. Le développement final sera convergent si l'on peut établir sur un graphe une borne exponentiellement décroissante dans le nombre de cubes qu'il contient (car on pourra alors utiliser un argument de Kirkwood-Salzburg général pour prouver l'existence de la limite thermodynamique, puis calculer plus explicitement les premiers termes du développement pour obtenir les comportements asymptotiques du Théorème III).

Pour cela il faut pouvoir, intuitivement, resommer la position des petits cubes des sous graphes dans les plus grands cubes des étages inférieurs et garder un facteur petit par cube (pour la décroissance exponentielle évoquée). Sans pouvoir entrer dans les détails, disons qu'un champ  $\varphi_i$  bien localisé dans un cube  $\Delta$ , donc estimé à l'aide de la covariance  $C_i$  fournit par le comptage de puissance un facteur  $C_i^{1/2} \simeq M_i \leq |\Delta|^{-1/4}$ , où  $|\Delta|$  désigne le volume de  $\Delta$ . De même un champ mal localisé moyenné  $m_i(\varphi_{\theta,i})$  produit dans  $\Delta \in \mathcal{D}_i$ , estimé à l'aide de  $e^{-S_{\Delta}} \phi^4$  fournit par une estimation de Hölder simple aussi un facteur  $|\Delta|^{-1/4}$  [1][2].

Par conséquent lorsqu'un sous graphe  $G$  a plus de 4 jambes externes (basses) on obtient un facteur  $|\Delta|^{-\frac{\epsilon(G)}{4}} \leq |\Delta|^{-1-\epsilon}$  qui est suffisant pour "sommer" la position des vertex du sous graphe dans le cube  $\Delta$ . Par contre on doit renormaliser les sous graphes à 2 et 4 lignes externes c'est à dire transformer de la convergence interne de ces sous graphes en convergence externe à l'aide de contre termes.

Ces contre termes seront locaux et "fictifs" puisqu'ils n'existeront pas à  $\epsilon_{\Delta} = 1$  comme indiqué précédemment. Par exemple il correspondra au sous graphe  $G_0$  de la figure 3 un contre terme dans chaque cube  $\Delta$ , donc l'exponentielle de l'interaction sera en fait, pour  $\Delta \in \mathcal{D}_1$  :

$$\exp \left[ -g : (\varphi_R + t_\Delta \varphi_B)^4 - (1 - t_\Delta^4) g_1 : \varphi_B^4 : \right] \quad (\text{III.10})$$

avec 
$$g_1 = g - \sum_{G \text{ graphe engendré à l'étape 1}} c_G^1 \quad (\text{III.11})$$

Le contre terme  $c_G^1$  de  $G$  est dans le cas de  $G = G_0$ , logarithmiquement divergent, donc  $c_{G_0}^1 = \text{const. } g^2$ , et ce résultat se conserve aux étages inférieurs car l'échelle de nos tranches de moments est logarithmique.

Les contre termes jouent deux rôles :

- Lorsqu'ils sont "descendus" de l'exponentielle par les dérivations en  $t_\Delta$ , ils s'ajoutent aux termes correspondants ; chaque soustraction créant un gradient portant sur une ligne externe, améliore le comptage de puissance du graphe et permet sa sommation. Un point technique à signaler : pour que ces gradients soient compatibles avec les opérations de moyennage (III.9), il faut, pour celles-ci, utiliser des convolutions avec une fonction  $e^\infty$ , comme indiqué, ce qui rend légèrement plus délicate l'estimation de Hölder évoquée à propos de la domination de ces champs.

- Pour la théorie découplée à  $t_\Delta = 0$  on voit dans la formule (III.10) que les champs bas sont gouvernés par une constante de couplage effective  $g_1$  et non plus  $g$ . En itérant cet argument on trouverait,  $G_0$  étant le plus petit graphe logarithmiquement divergent, qu'à l'étage  $i$  la théorie découplée est gouvernée par une constante effective  $g_i$  satisfaisant la relation de récurrence :

$$g_{i+1} = g_i - (\text{const.}) g_i^2 + (\text{termes en } O(g_i^3)) \quad (\text{III.12})$$

Cette relation donne un comportement asymptotique

$$g_i \approx \frac{1}{\text{const. } i} \approx \frac{1}{\text{const. } |\log M^{-i}|} \quad \text{qui est le comportement logarithmiquement décroissant annoncé (liberté asymptotique).}$$

Les renormalisations de masse et de fonctions d'onde se font dans le même esprit, avec une différence toutefois : le terme  $m^2(\Lambda, g)$  dans l'exponentielle

(III.1) doit être progressivement ajusté à l'introduction de chaque nouvel étage de moments pour que la masse effective à basse énergie tende bien vers 0 et que la théorie finale soit donc bien de masse nulle.

La définition précise des contre termes dans la formule (III.12) est compliquée et déborde le cadre de cet exposé ; il faut en effet les calculer par un "développement de Mayer", puisqu'apparaissant dans l'exponentielle, les contre termes sont essentiellement des "fonctions de Schwinger tronquées" et non pas des fonctions de Schwinger ordinaires. La solution de ce problème technique, bien compris aujourd'hui grâce à la masse considérable de littérature qu'il a suscité, ne nécessite cependant aucune idée particulièrement originale.

e) Estimations finales

Les estimations sont inductives : on somme pour chaque vertex sa position dans les cubes hauts puis on resomme les cubes les plus hauts dans les cubes plus bas à l'aide des deux sources de convergence :

- les  $|\Delta|^{-1/4}$  dûs aux contractions (estimations gaussiennes) et à la domination des champs
- les  $\frac{M_j}{M_i}$  dûs à chaque gradient s'appliquant sur une jambe basse d'indice  $j$ , partant d'un sous graphe à l'échelle  $i$ .

Enfin on contrôle les différentes constantes numériques (une par carré d'un graphe) en choisissant  $g$  assez petit. En effet on aura toujours au moins un facteur  $g_i^{1/4}$  par carré de  $D_i$ , et grâce à la liberté asymptotique, ces facteurs seront tous suffisamment petits pour contrôler les constantes numériques en question si on choisit  $\epsilon$  assez petit dans le théorème II.

REFERENCES

- [1] J. Glimm, A. Jaffe, Fortschr. Physik 21, 327 (1973).
- [2] J. Magnen, R. Sénéor, Annals of Phys. 152, 130 (1984).
- [3] G. Benfatto et al., Comm. Math. Phys. 59, 143 (1978) et 71, 95 (1980).
- [4] K. Gawedzki, A. Kupiainen, Annals of Phys. 147, 198 (1983).
- [5] K. Gawedzki, A. Kupiainen, Journ. of Stat. Phys., 29, 683 (1982).
- [6] C. de Calan, V. Rivasseau, Comm. Math. Phys. 82, 69 (1981).
- [7] G. 't Hooft, Comm. Math. Phys. 88, 1 (1983).
- [8] V. Rivasseau, à paraître, Comm. Math. Phys.
- [9] K. Gawedzki, A. Kupiainen, en préparation.
- [10] J. Feldman, J. Magnen, V. Rivasseau, R. Sénéor, en préparation.
- [11] K. Gawedzki, communication.
- [12] G. Gallavotti, F. Nicolo, en préparation .
- [13] J. Feldman, J. Magnen, V. Rivasseau, R. Sénéor, en préparation.
- [14] J. Feldman, J. Magnen, V. Rivasseau, R. Sénéor, en préparation.
- [15] G. 't Hooft, Comm. Math. Phys. 86, 449 (1982).
- [16] J. Glimm, Comm. Math. Phys. 10, 1 (1968).
- [17] J. Kogut, K. Wilson, Phys. Rep. 12C, 75 (1975).
- [18] M. Aizenman, Comm. Math. Phys. 86, 1 (1982).

- [19] J. Fröhlich, Nucl. Phys. B200 (FS4) 281 (1982).
- [20] G. Gallavotti, V. Rivasseau, Ann. Inst. H. Poincaré, 40, 185 (1984).
- [21] A. Sokal, Ann. Inst. H. Poincaré, 37, 317 (1982).
- [22] D. Brydges, Comm. Math. Phys. 58, 313 (1978).
- [23] C.A. Battle, P. Federbush, Ann. Phys. 142, 95 (1982).
- [24] R. Sénéor, Proceedings Brasov meeting (1983).
- [25] J. Glimm, A. Jaffe, T. Spencer, Erice Lectures on Constructive Field Theory (1973).
- [26] Archimède, Proc. Renc. Phys. Math. Univ. Syracuse (-230) ?

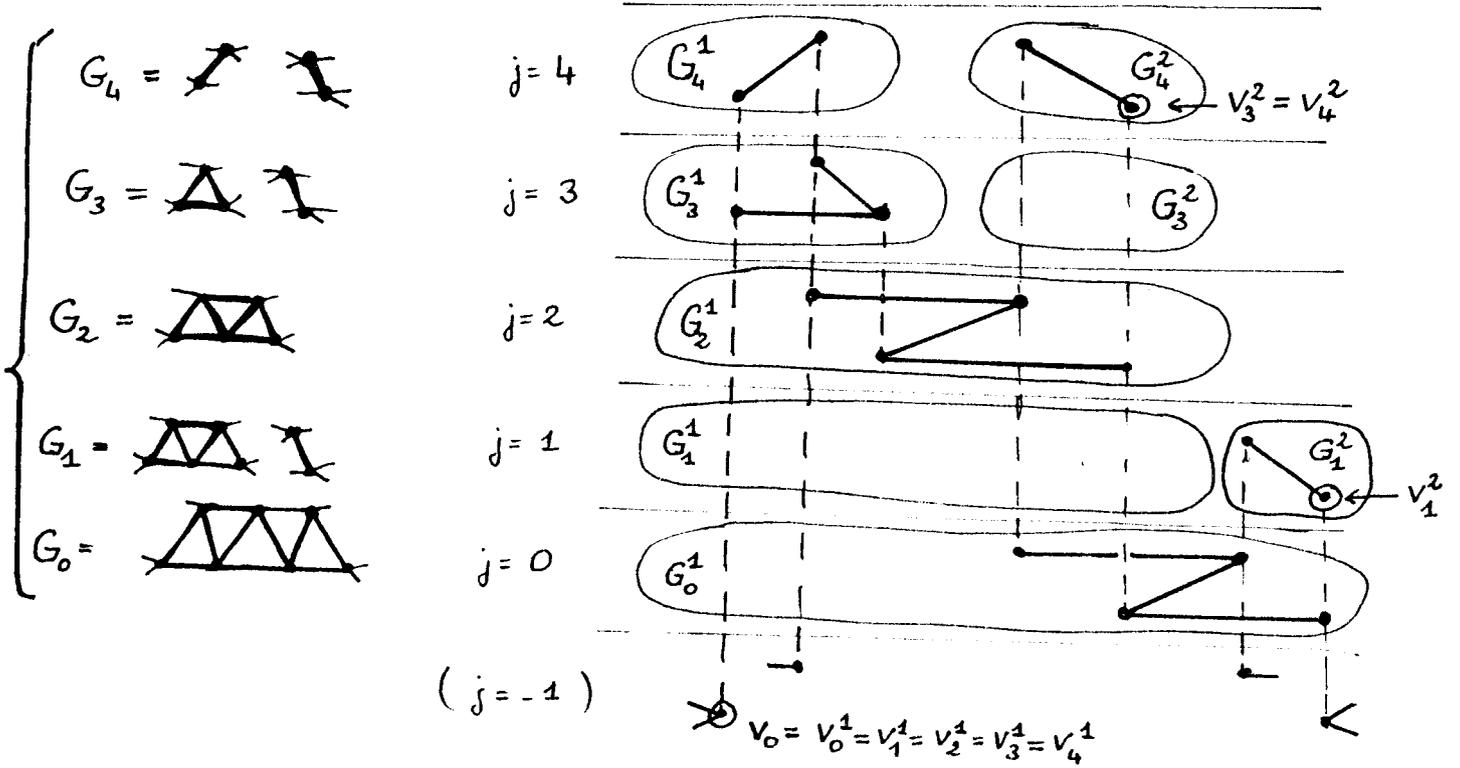


Figure 1

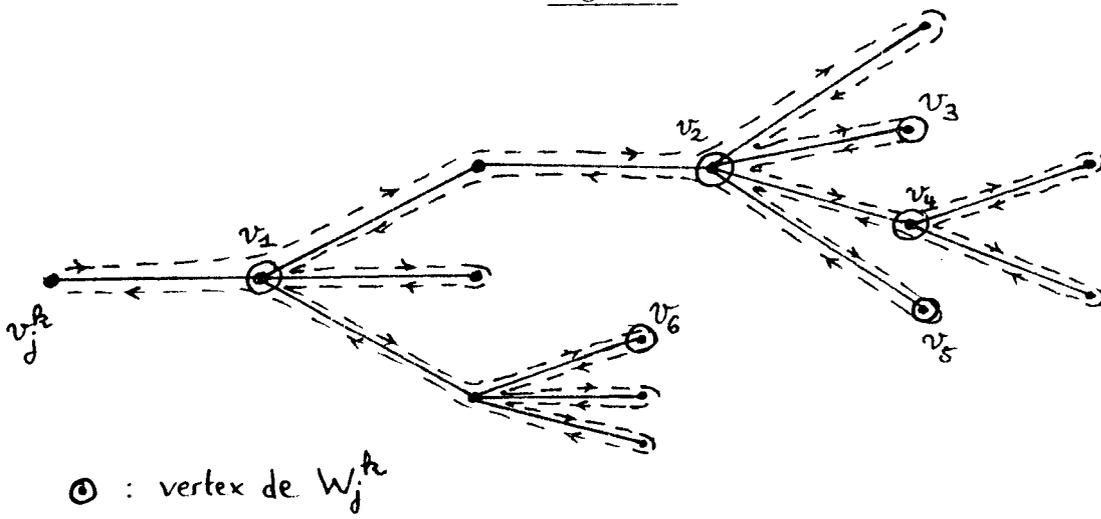


Figure 2

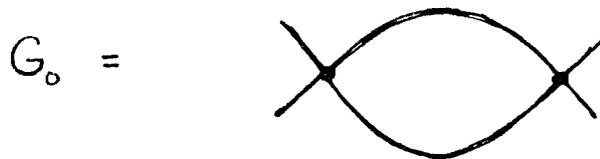


Figure 3