

RECHERCHE COOPÉRATIVE SUR PROGRAMME N° 25

P. COLLET

Modèles d'Ising avec interactions aléatoires sur des réseaux diamants

Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg - RCP25, 1984, tome 34
« Conférences de : P. Collet, P.A. Meyer, P. Moussa, V. Rivasseau, Y. Sibuya et B. Malgrange », , exp. n° 1, p. 1-41

http://www.numdam.org/item?id=RCP25_1984__34__1_0

© Université Louis Pasteur (Strasbourg), 1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Recherche Coopérative sur Programme n° 25 » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

MODELES D'ISING AVEC INTERACTIONS ALEATOIRES SUR DES RESEAUX DIAMANTS

P. Collet

Centre de Physique Théorique, Ecole Polytechnique, 91128 Palaiseau Cedex.
Groupe de Recherche du C.N.R.S. n°48

I. INTRODUCTION

Il est maintenant bien établi que le groupe de renormalisation est un outil puissant pour l'étude des transitions de phase en mécanique statistique. Récemment il a été utilisé avec succès en théorie constructive des champs, pour l'étude des systèmes dynamiques, en théorie de la turbulence et dans bien d'autres domaines de la physique. La difficulté principale dans l'utilisation de cette méthode est la dérivation de la transformation de renormalisation, c'est pourquoi Migdal et Kadanoff ont cherché à développer une méthode systématique pour résoudre approximativement ce problème. Bien que leur méthode ait l'avantage de fournir une expression explicite pour la transformation de renormalisation, la qualité de leur approximation semble être assez mauvaise dans la région critique.

Il est cependant bien connu que pour certains modèles sur des réseaux dits diamantés, la transformation de Migdal - Kadanoff est exacte. On peut donc obtenir pour ces modèles des résultats rigoureux dont on espère qu'ils sont qualitativement semblables aux résultats correspondants pour des réseaux plus réalistes. Plusieurs travaux ont déjà été consacrés dans cette optique à l'étude de la percolation, de l'équation de Schrodinger aléatoire et à des modèles de verres de spin. C'est à ce problème que nous nous sommes récemment intéressés ([C.E], [C.E.G.M.1], [C.E. G.M.2]) et dont quelques résultats vont être exposés dans la suite. Le chapitre II décrit la construction des deux modèles (A et B) que nous avons considérés, le chapitre III est consacré à l'étude du modèle A et le chapitre IV à l'étude du modèle B.

II. CONSTRUCTION DES MODELES ET TRANSFORMATION DE RENORMALISATION

Pour construire le réseau diamanté, nous choisissons tout d'abord un nombre $n \geq 2$. La construction est récursive et commence avec un réseau contenant deux sites A et B reliés par un lien. Nous transformons ce réseau en un réseau à $n+2$ sites B_1, \dots, B_n, A, B , et $2n$ liens reliant les sites A et B aux sites $(B_i)_{1 \leq i \leq n}$ (voir figure). Nous appliquons cette construction récursivement à tous les liens déjà formés, et après N étapes nous obtenons un réseau noté L_N .

Si $n = 2^d$, il est possible de donner une autre construction du réseau. Soit \underline{e} une direction de lien dans un réseau \mathbb{Z}^d (nous prendrons $\underline{e} = (1, 0, 0, \dots, 0)$). Soit B_N un parallélépipède de côté 2^N dans la direction \underline{e} , et 2^{N-1} dans les directions transverses. Soit \underline{i} un point de B_N , nous supposons que sa première coordonnée i_1 satisfait à $0 \leq i_1 \leq 2^N - 1$. Soit r le plus grand entier tel que 2^r divise i_1 . L'ensemble des points \underline{i} de première coordonnée i_1 est divisé en $2^{(N-r)(d-1)}$ hypercubes de dimension $d-1$ et de côté 2^r , et tous les points d'un même hypercube sont identifiés. Il est facile de voir que l'on obtient ainsi le réseau L_{N-1} . Nous allons maintenant décrire nos modèles A et B.

Modèle A. A tout site \underline{i} du réseau L_N nous associons une variable de spin d'Ising $S_{\underline{i}} = \pm 1$. A chaque lien $(\underline{i}, \underline{j})$ nous associons une variable aléatoire $\xi_{\underline{i}, \underline{j}}$ qui est une copie indépendante d'une variable ξ donnée a priori. L'Hamiltonien $H_N(\underline{\xi}, \underline{S})$ est donné par

$$H_N(\underline{\xi}, \underline{S}) = \sum_{\substack{\underline{i}, \underline{j} \\ \text{plus proches} \\ \text{voisins}}} \xi_{\underline{i}, \underline{j}} S_{\underline{i}} S_{\underline{j}} .$$

Pour chaque configuration $\underline{\xi}$ des couplages, nous avons la loi de probabilité de Gibbs des spins qui est donnée par

$$P_{N, \beta, \xi}(\underline{S}) = Z_N(\beta, \underline{\xi})^{-1} \exp[-\beta H_N(\underline{\xi}, \underline{S})]$$

où β est la température inverse et $Z_N(\beta, \underline{\xi})$ une constante de normalisation. Les "observables physiques" sont des fonctions des variables de spin et nous nous intéressons à leurs moyennes dans la limite thermodynamique $N \rightarrow +\infty$ (notée $\langle \cdot \rangle$), le but étant d'obtenir des propriétés presque sûres par rapport aux variables $\underline{\xi}$. Nous remplacerons ce problème par le problème plus simple d'obtenir des valeurs moyennes par rapport aux variables $\underline{\xi}$.

Modèle B . Il est très semblable au modèle A, la différence vient du choix des couplages. Nous allons supposer pour simplifier que $n = 2^d$. Pour chaque valeur de i_1 , $0 \leq i_1 \leq 2^N - 1$, nous construisons une copie η_{i_1} indépendante de ξ . Si \underline{i} et \underline{j} sont deux points du réseau L_N qui sont reliés par un lien, et si $\underline{i} = (i_1, \dots)$, $\underline{j} = (i_1 + 1, \dots)$ nous posons $\xi_{\underline{i}, \underline{j}} = \eta_{i_1}$. La construction du modèle thermodynamique se poursuit comme dans le modèle A.

Il est maintenant facile de déterminer la transformation de renormalisation, c'est en quelque sorte la transformation inverse de la construction du réseau, elle fait passer d'un réseau L_{N+1} à un réseau L_N . Plus précisément, on somme sur toutes les variables $S_{\underline{i}}$ où \underline{i} est un

point du réseau L_{N+1} qui n'appartient pas au réseau L_N . On obtient ainsi un nouveau modèle sur le réseau L_N . Pour simplifier l'exposé, nous allons supposer pour le moment que la température β a été incorporée dans les couplages. Il est facile de voir que grâce au choix très spécial du réseau et à la forme des couplages, la renormalisation se ramène à changer la variable aléatoire ξ qui sert à construire le modèle. La règle de renormalisation est donnée par les formules suivantes.

Modèle A . ξ étant donnée, on en construit $2n$ copies indépendantes

$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \xi'_1, \xi'_2, \dots, \xi'_n$. La variable aléatoire renormalisée $R(\xi)$ est donnée par

$$R(\xi) = \sum_{j=1}^n \text{th}^{-1}(\text{th}\xi_j \text{ th}\xi'_j) \quad (1) .$$

Modèle B . ξ étant donnée, on en construit deux copies indépendantes ξ_1 et ξ_2 . La variable aléatoire renormalisée $R(\xi)$ est donnée par

$$R(\xi) = n \text{th}^{-1}(\text{th}\xi \text{ th}\xi') \quad (2) .$$

Le pas suivant dans l'analyse du groupe de renormalisation consiste à étudier la suite des couplages $(\xi_p)_{p \in \mathbb{N}}$ construite de la manière suivante. ξ est une variable aléatoire donnée, et on pose $\xi_0 = \beta\xi$. Les ξ_p sont déterminées récursivement par

$$\xi_{p+1} = R(\xi_p)$$

Nous allons voir que suivant la valeur de β , la suite des ξ_p peut avoir un comportement asymptotique très différent. Ce phénomène est le signal d'une transition de phase et l'étude des observables physiques permet de préciser la nature des phases.

Dans toute la suite, nous allons supposer que les variables aléatoires sont de moyenne nulle (cette propriété est invariante par renormalisation).

III. ETUDE DU MODELE A

La formule (1) suggère immédiatement de considérer le cas où le nombre n est grand, on peut en effet espérer que la variable aléatoire $R(\xi)$ est très proche d'une variable gaussienne et que le problème devient plus simple. Nous allons tout d'abord donner un argument heuristique avant d'énoncer des résultats rigoureux. Supposons que la variable aléatoire ξ est presque sûrement petite.

On peut alors remplacer la formule (1) par la formule

$$R(\xi) = \sum_1^n \xi_i \xi_i' .$$

Posons $\sigma = E(\xi^2)^{1/2}$, $\sigma' = E(R(\xi)^2)^{1/2}$, il vient facilement

$$\sigma' = n^{1/2} \sigma .$$

Nous avons donc le comportement suivant pour la variable aléatoire

$$\xi_p = R^p(\xi_0) :$$

- i) Si $\sigma_o (= E(\xi_o^2)^{1/2}) < n^{-1/2}$, alors $\sigma_p (= E(\xi_p^2)^{1/2}) \rightarrow 0$,
ce qui implique $\xi_p \rightarrow 0$ p.s., et nous sommes dans la phase
à haute température.
- ii) Si $\sigma_o > n^{-1/2}$, $\sigma_p \rightarrow +\infty$, et notre approximation n'est plus
valable.
- iii) Si $\sigma_o = n^{-1/2}$, $\sigma_p = n^{-1/2} \quad \forall p$, et nous avons un point fixe (au
niveau de la variance). De plus

$$\left. \frac{d\sigma'}{d\sigma} \right|_{\sigma = n^{-1/2}} = 2,$$

c'est à dire que l'exposant critique est Log 2.

Si nous réintroduisons explicitement la température, nous avons

$$\sigma_o = \beta E(\xi^2)^{1/2} \quad \text{et nous obtenons une transition de phase pour } \beta = n^{-1/2} E(\xi^2)^{-1/2}.$$

L'argument heuristique précédent sert de guide à l'approche rigoureuse du problème, et nous allons maintenant énoncer les principaux résultats. Pour simplifier l'exposé, nous allons supposer les variables aléatoires symétriques. Considérons tout d'abord le cas à haute température (β grand).

Théorème 1 Soit ξ une variable aléatoire de moyenne nulle, symétrique et de variance 1. Si $\beta < (50n)^{-1/2}$, alors

$$E[(R^p(\beta\xi))^2] \leq 2^{-p}/50n \quad \forall p.$$

La preuve est élémentaire et repose sur l'inégalité (voir [C.E.])

$$|\text{th}^{-1}(\text{th}x \text{ th}y)|^2 \leq 25x^2 y^2.$$

Ce théorème nous apprend que pour β petit, la renormalisation entraîne les couplages vers zéro, c'est-à-dire vers la phase à haute température, ce qui n'a rien d'étonnant. Nous allons considérer maintenant le cas des grandes valeurs de β .

Théorème 2 Soit ξ une variable aléatoire réelle, de moyenne nulle, symétrique, et de variance non nulle. Soit ξ' une copie indépendante de ξ et posons

$$Q = E(\text{Inf}(\xi^2, \xi'^2)/8).$$

Il existe un nombre $N_0 = N_0(Q) > (320)^2$ tel que si β est assez grand et $n > N_0$, la suite de variables aléatoires ξ_p donnée par $\xi_p = R^P(\beta\xi)$ a les propriétés suivantes :

1) $\sigma_p = E(\xi_p^2)^{1/2} > (n^{1/2}/320)^P \beta Q^{1/2}$ (i.e. $\sigma_p \rightarrow +\infty$).

2) Si la densité de probabilité de ξ est dans L_∞ , ξ_p a aussi une densité de probabilité f_p , et elle satisfait à l'inégalité

$$|f_p(x) - (2\pi\sigma_p^2)^{-1/2} \exp(-x^2/2\sigma_p^2)| \leq K \sigma_p^2 n^{-1/2}/(\sigma_p + |x|)^{3/2}$$

pour tout nombre réel x , et où K est une constante universelle.

La preuve de ce théorème repose sur l'idée déjà mentionnée que la variable aléatoire ξ_p est presque une variable gaussienne. Une version quantitative de cette affirmation est fournie par l'inégalité de Berry - Esseen [P]. Si ξ_p est presque une variable aléatoire gaussienne, il est

facile d'utiliser la formule (1) pour donner une borne inférieure pour la variance de $R(\xi_p)$ en fonction de la variance de ξ_p . Ceci conduit au 1) du théorème. Malheureusement ce premier énoncé ne suffit pas pour affirmer que la suite ξ_p tend vers l'infini presque sûrement. On obtient ce résultat en faisant une hypothèse supplémentaire sur la loi de probabilité, un énoncé possible est donné par le 2) du théorème. Nous renvoyons le lecteur à l'article [CE] pour les détails de la preuve.

Nous allons maintenant considérer le problème plus délicat du comportement critique. Nous nous limiterons au cas des variables aléatoires ξ ayant une densité f . Si n est grand, le résultat approché nous conduit à penser que cette densité doit être proche d'une Gaussienne. Nous allons donc chercher un point fixe de R qui dans une certaine échelle s'écrit :

$$(2\pi s)^{-1/2} \exp(-x^2/2s) + \varphi(x)$$

où φ est une fonction petite qui satisfait à

$$\varphi \in L_\infty, \int x^8 |\varphi(x)|^2 dx < +\infty, \text{ et } \int \varphi(x) dx = \int x^2 \varphi(x) dx = 0 \quad .$$

Il est commode d'écrire R sous la forme d'une composition de deux opérations, $R = R_2 \circ R_1$ où R_1 correspond au terme en th^{-1} , et R_2 à la sommation de n variables aléatoires indépendantes. Plus précisément, si f est la densité de ξ , la densité de $R_1(\xi)$ que nous noterons $R_1(f)$ est donnée par

$$R_1(f)(x) = (1 - \text{th}^2 x) \int dy |y|^{-1} (1 - y^2)^{-1} (1 - y^2 (\text{th} x)^2)^{-1} f(\text{th}^{-1} y) f(\text{th}^{-1} (\text{th} x(y))).$$

Si η est une variable aléatoire de densité g , il est bien connu que la densité $R_2(g)$ de $R_2(\eta)$ est donnée par

$$R_2(g) = g * g * \dots * g \text{ (n fois)}.$$

Il est remarquable que si la densité f de ξ est proche d'une gaussienne (dans le sens ci-dessus), la fonction $R_1(f)$ en est très éloignée. Cette fonction a en particulier une singularité à $x=0$. Par contre l'opérateur R_2 contracte si fortement vers le sous espace des fonctions gaussiennes que $R_2 \circ R_1(f)$ appartient presque à cet espace. Comme nous l'avons vu dans l'argument simplifié, il suffit alors d'ajuster la variance pour avoir un point fixe. Le théorème s'énonce plus simplement après un changement d'échelle (qui dépend de n). Nous noterons M le nouvel opérateur qui se déduit de R par cette transformation. Dans cette nouvelle échelle, le point fixe gaussien correspondant à $n = +\infty$ à une variance égale à 1. Si n est fini, nous décomposons le point fixe en une partie gaussienne de variance S (proche de 1) et une déviation φ (de moyenne et variance nulles). La topologie sur φ est donnée par la norme

$$\|\varphi\| = \|\varphi\|_{L^\infty} + \left(\int x^8 |\varphi|^2(x) dx \right)^{1/2}.$$

Une densité de probabilité proche d'une gaussienne est donc décrite par un couple (s, φ) et nous utilisons l'espace H de ces couples avec la norme

$$\|(s, \varphi)\|_H = |s - 1| + \|\varphi\|$$

On a alors le théorème suivant (voir [C.E.]).

Théorème 3 Soit $B = \{(s, \varphi) \in H \mid \|(s, \varphi)\|_H \leq (\log n)^{10}/n\}$. La transforma-
tion M de B dans H a un point fixe unique (s_0, φ_0) dans B pour n grand.

De plus

$$s_0 = 1 + o((\log n)^{10}/n)$$

$$\varphi_0 = o((\log n)^{10}/n) .$$

L'opérateur linéaire $DM_{(s_0, \varphi_0)}$ a une valeur propre simple égale à $2 + o(n^{-1/2})$,
le reste du spectre est contenu dans le disque unité ouvert.

Ce résultat permet d'appliquer la méthode habituelle du groupe de renormalisation (variétés stables et instables, indices critiques). La dernière étape de l'analyse consiste à déduire des conséquences physiques des résultats précédents. La méthode permet d'étudier certaines observables du type spin moyen ou corrélation. Si E désigne l'espérance par rapport aux couplages nous avons le résultat suivant (transition du paramètre d'Edwards-Anderson).

Théorème 4 Sous les conditions du théorème 2 nous avons

i) $E(\langle s \rangle) = 0$ pour toute température

$$\text{ii) } E(\langle s^2 \rangle) = \begin{cases} 0 & \text{à haute température} \\ \neq 0 & \text{à basse température.} \end{cases}$$

La preuve de ce résultat est basée sur une relation de récurrence des moyennes des observables vis-à-vis de la renormalisation. Plus précisément si A et B sont des constantes, si S_0 est un spin du réseau L_N mais pas du réseau L_{N-1} et si S'_0 est un site voisin du réseau L_{N-1} , on a

$$\langle AS_0 + BS'_0 \rangle_{L_N} = \langle A'S'_0 + B'S'_1 \rangle_{L_{N-1}}$$

où S'_1 est un spin du réseau L_{N-2} voisin de S'_0 , et

$$A' = B + AX(1-X'^2)(1-X^2 X'^2)^{-1}, \quad B' = AX'(1-X^2)(1-X^2 X'^2)^{-1}$$

où X et X' sont des copies indépendantes de la variable aléatoire $\text{th } \xi$.

En utilisant ce résultat, on obtient finalement

$$\langle S_0 \rangle_{L_N} = A_N S_N + B_N S'_N$$

où S_N et S'_N sont les spins sur les sites extrêmes du réseau. Les constantes A_N et B_N sont des expressions très compliquées en terme des couplages, mais le comportement de ces variables aléatoires quand N tend vers l'infini peut être analysé et conduit au théorème 4 (voir [C.E.]).

IV. ETUDE DU MODELE B

Ce modèle semble être beaucoup plus difficile à étudier que le modèle A. Nous allons tout d'abord donner une formulation un peu plus maniable de l'itération. Si X est une variable aléatoire à valeurs dans $[-1, 1]$ (nous supposons X symétrique et moyenne nulle), nous définissons $R(X)$ par

$$R(X) = q(XX')$$

où X' est une copie identique et indépendante de X et où q est donnée par

$$q(s) = \text{th}(n \text{ th}^{-1}(s)) \quad .$$

Cette formulation est équivalente à celle du paragraphe II par le changement de variable $X = \text{th } \xi$.

On pose $X_0 = \text{th } \beta \xi$, et $X_p = R^p(X_0)$. Il faut maintenant étudier le comportement de la suite de variables aléatoires (X_p) pour p tendant vers l'infini. Le premier résultat montre l'existence de transitions de phase pour certaines variables aléatoires ξ .

Théorème 5 Supposons qu'il existe un nombre $c > 0$ tel que

$$c \leq |\xi| \leq c^{-1} \quad \text{p.s.}$$

Alors

- i) A haute température (β petit) $R^p(X_0) \rightarrow 0$ p.s.
- ii) A basse température (β grand) $|R^p(X_0)| \rightarrow 1$ p.s.

Ce résultat suit immédiatement de la remarque suivante. Si $0 < a < b < 1$,

$$q([a,b]^2) \subset [q(a^2), q(b^2)] \quad .$$

La transformation $s \rightarrow q(s^2)$ a deux points fixes stables $s=0$ et $s=1$ dont les bassins d'attraction sont séparés par un unique point fixe instable. L'analyse des phases à haute et basse température se fait maintenant comme dans le modèle A (voir [CEGM1]). L'analyse du comportement critique semble être beaucoup plus difficile (voir [CEGM1] pour quelques résultats). Ceci nous a amené à introduire un problème approximé (plus

simple) de la manière suivante. Nous remplaçons les densités de probabilité par des densités constantes sur les ensembles $[-2^{-q}, -2^{-q-1}] \cup [2^{-q-1}, 2^{-q}]$, et soit a_q la valeur de cette nouvelle densité. Nous noterons $g(z)$ la fonction génératrice de la série $2^{-q} a_q z^q$, c'est-à-dire

$$g(z) = \sum_{q=0}^{\infty} 2^{-q} a_q z^q$$

Cette fonction est holomorphe dans le disque unité, et elle a des coefficients de Taylor positifs en $z = 0$. Elle vérifie de plus $g(1) = 1$. La renormalisation approchée S est donnée par

$$S(g)(z) = g(0)^2 + (g(z)^2 - g(0)^2)/z.$$

Il est facile de vérifier que $S(g)$ a les mêmes propriétés d'analyticité que g (y compris $S(g)(1) = 1$). Dans l'espace de fonctions analytiques considéré, S a trois points fixes : $g=1$, $g(z)=z$ et " $g=z^\infty$ " ($g(z)=0$ si $|z| < 1$, $g(z)=\infty$ si $|z| > 1$). Le comportement global des itérations de S est donné dans le théorème suivant (voir [CEGM2]).

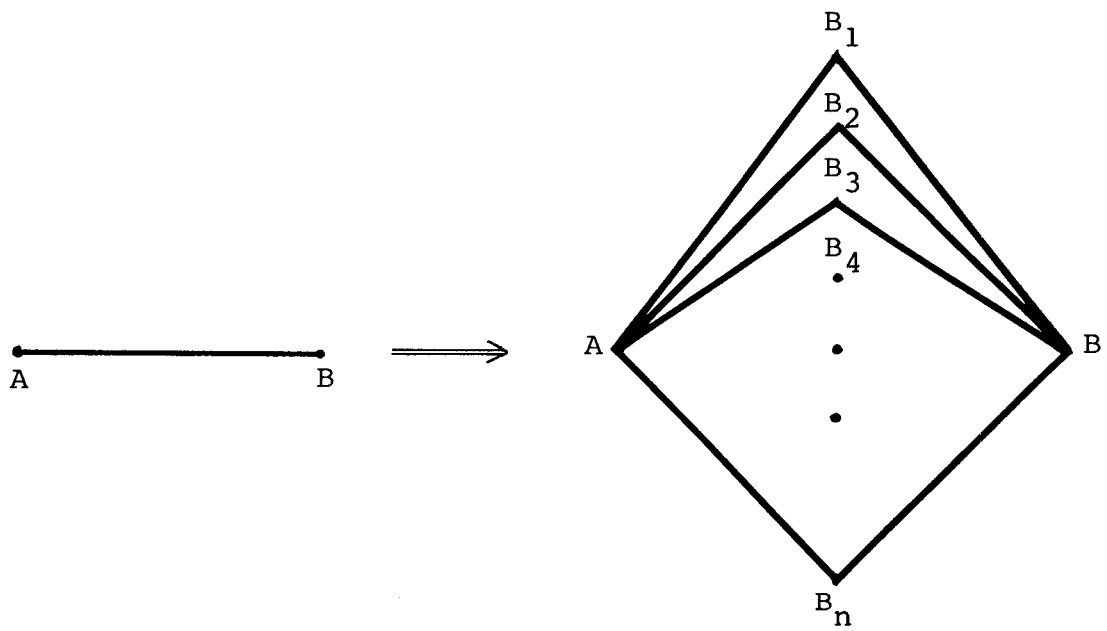
Théorème 6 Soit g une fonction holomorphe dans le disque unité, à coefficients de Taylor en zéro positifs et satisfaisant à $g(1)=1$. Alors

- 1) Si g ne s'étend pas en une fonction holomorphe jusqu'à $z=2$, ou si $g(2) - 2g'(2) < 0$, alors $S^q(g)(z) \rightarrow z^\infty$ si $q \rightarrow +\infty$.
- 2) Si $g(2) - 2g'(2) > 0$, ou $g(2) - 2g'(2) = 0$ mais g n'est pas la fonction $g(z) = z$, alors $S^q(g) \rightarrow 1$ si $q \rightarrow +\infty$.

Il s'agit là d'un comportement très inhabituel pour le groupe de renormalisation. La surface invariante $g(2) - 2g'(2) = 0$ joue le rôle d'une surface critique, mais les modèles qui s'y trouvent sont déjà dans la phase à basse température. En particulier ce modèle n'a pas d'indices critiques. Nous conjecturons que le modèle B a les mêmes propriétés.

REFERENCES

- [C.E] P. Collet, J-P. Eckmann, A spin glass model with random couplings. *Comm. Math. Phys.* 93, 379-407 (1984).
- [C.E.G.M.1] P. Collet, J-P. Eckmann, Y. Glaser, A. Martin, A spin glass with random couplings. *Journ. Stat. Phys.* à paraître.
- [C.E.G.M.2] P. Collet, J-P. Eckmann, Y. Glaser, A. Martin, Study of the iterations of a mapping associated to a spin glass model. *Comm. Math. Phys.* 94, 3 (1984) 353-370, et RCP 25 volume 33 (1984).
- [P] V.V. Petrov, Sums of independent random variables Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York (1975).



Construction du réseau

Le << Calcul de Malliavin >>, et un peu de pédagogie
par P.A. Meyer

I. Introduction.

En 1976, Malliavin a publié une démonstration probabiliste du fameux théorème de Hörmander sur l'hypoellipticité d'un opérateur $X_0 + \sum_i X_i^2$, où les X_i sont des champs de vecteurs. La démonstration de Malliavin est bien plus longue que les démonstrations analytiques modernes de ce théorème, mais elle ne constitue pas un tour de force gratuit. Malliavin a inventé ou perfectionné un certain nombre d'outils - processus d'Ornstein-Uhlenbeck sur l'espace de Wiener et laplacien associé, espaces de Sobolev en dimension infinie, différentiabilité des flots stochastiques - présentant un grand intérêt propre. D'autre part, la méthode a été appliquée depuis lors à plusieurs autres problèmes. On compte maintenant une bonne vingtaine d'articles importants sur ce sujet, et plusieurs exposés << pédagogiques >>.

Bien entendu, si extraordinaire que soit le succès de Malliavin, il n'est pas sorti du néant : il a été préparé par des travaux sur l'analyse de Wiener (Gross, Kree, Kuo...), ou sur les flots stochastiques (Eels, Elworthy...). D'autre part, l'intérêt porté au << Calcul >> par un grand nombre de probabilistes doit beaucoup à la propagande efficace de David Williams (Durham 1980).

Dans la postérité du travail de Malliavin, on peut distinguer deux écoles : la première, avec Stroock et les auteurs japonais (S. Watanabe, Ikeda, Shigekawa, Kusuoka...) reste fidèle à l'esprit initial, qui est l'analyse sur l'espace de Wiener en dimension infinie - bien que les japonais se débarrassent en partie du laplacien d'Ornstein-Uhlenbeck. La seconde école dérive des travaux de Bismut, qui a découvert une méthode élémentaire d'application très générale pour aboutir à des << formules d'intégration par parties >> du type de celle de Malliavin. Au procédé de Bismut se rattachent les travaux de D. Michel, M. Maurel, Bichteler-Jacod, Fonken, Leandre... Bismut lui-même a poussé ses idées jusqu'à une démonstration probabiliste du théorème d'Atiyah-Singer (parution en cours, J. Funct. Anal. 1984).

Malgré la plus grande généralité et simplicité de la méthode de Bismut, mon goût personnel m'a porté à rester fidèle au point de vue de Malliavin et Stroock. Cet exposé ne comporte pas de démonstrations détaillées, mais tente de dégager la simplicité fondamentale des idées dans leurs grandes lignes, et aussi de faire admirer les tours de force technique dans les détails. Chaque fois que je l'ai pu, j'ai indiqué une référence que je parviens à lire (trop souvent, cela signifiera que je l'ai écrite moi-même).

Cet exposé a fait l'objet de quelques cours à l'Indian Statistical Institute de Calcutta. La version anglaise comportait à la fin une sérieuse erreur,

qui simplifiait agréablement la démonstration au moment difficile. Cette erreur a été corrigée par R. Léandre, que je remercie vivement, et qui a fait une rédaction lisible du théorème complet de Hörmander. Néanmoins, la version toute récente de Norris est plus simple, et nous la suivrons ici.

II. Le théorème de Hörmander

Nous considérons dans \mathbb{R}^d une équation différentielle stochastique

$$(2.1) \quad X_t = x + \int_0^t a(X_s) dB_s + \int_0^t b(X_s) ds$$

en notation matricielle : plus explicitement, avec la convention usuelle de sommation sur les indices répétés en diagonale, cela s'écrit

$$(2.2) \quad X_t^i = x^i + \int_0^t a_{\lambda}^i(X_s) dB_s^{\lambda} + \int_0^t b^i(X_s) ds \quad \begin{array}{l} i=1, \dots, d \\ \lambda=1, \dots, m \end{array}$$

La théorie classique des e.d.s. suppose une condition de Lipschitz sur les coefficients. Alors l'équation a une solution unique issue de x , appelons la X_t^x , et nous pouvons poser pour toute f bornée sur \mathbb{R}^d

$$P_t f(x) = E[f(X_t^x)]$$

Alors, si f a de plus des dérivées bornées d'ordres 1,2

$$\frac{\partial}{\partial t} P_t f = Lf \quad \text{où} \quad Lf = \frac{1}{2} \sum_{\lambda} a_{\lambda}^i a_{\lambda}^j D_{ij} f + b^i D_i f$$

(nous avons laissé \sum_{λ} parce que λ n'est pas répété en diagonale). Le problème est d'étudier la régularité des mesures $P_t(x, dy)$. On a le choix entre deux directions

- peu de régularité et beaucoup d'ellipticité - c'est le point de vue le plus ancien : cf. les diffusions à coefficients continus de Stroock-Varadhan
- régularité C^{∞} et dégénérescence possible. C'est là notre point de vue pour toute la suite, et nous supposons une fois pour toutes que a et b ont des dérivées bornées de tous ordres (mais il est inutile de les supposer bornées elles mêmes).

Pour énoncer le théorème de Hörmander, nous transformons (2.1) en une équation différentielle stochastique au sens de Stratonovich, ce qui modifie le champ de vecteurs b (nous désignerons alors celui-ci par a_0)
Plus exactement, c'est seulement lorsqu'on utilise la différentielle de Stratonovich $*dB_s$ que les a_{λ} et b se transforment comme des champs de vecteurs sous les difféomorphismes de \mathbb{R}^d

$$(2.3) \quad X_t = x + \int_0^t a(X_s) *dB_s + \int_0^t a_0(X_s) ds$$

Alors le générateur infinitésimal de la diffusion prend la forme de Hörmander

$$(2.4) \quad L = a_0 + \frac{1}{2} \sum_{\lambda \geq 1} a_{\lambda}^2$$

(a_{λ} est un opérateur différentiel du premier ordre, et a_{λ}^2 du second).

Voici le théorème de Hörmander ; les [,] sont des crochets de Lie.

Si en tout point x , le rang du système (infini) de vecteurs

$a_\lambda (\lambda \geq 1)$, $[a_\lambda, a_\mu] (\lambda, \mu \geq 0)$, $[[a_\lambda, a_\mu], a_\nu] (\lambda, \mu, \nu \geq 0)$, $[[[.....$

est égal à d , alors pour tout x $P_t(x, dy)$ a une densité C^∞ .

Noter que l'on a commencé avec $\lambda \geq 1$: si l'on avait inclus a_0 parmi ces vecteurs, on aurait abouti seulement à une conclusion plus faible : les résolvantes $\int_0^\infty e^{-ct} P_t(x, dy) dt$ ($c > 0$) ont une densité C^∞ . Nous verrons en fait que si pour un x le rang est d , alors pour cet x $P_t(x, dy)$ a une densité C^∞ .

La situation est plus simple si a_0 n'est pas du tout inclus dans le système : c'est le cas traité par Malliavin dans son premier article. Le théorème complet a été traité par Bismut (y compris le théorème sur les résolvantes) et par Stroock . L'essentiel n'est pas d'avoir << annexé >> le théorème de Hörmander aux probabilités, mais d'avoir découvert une méthode générale, et aussi de mieux comprendre comment fonctionnent les diffusions (à cet égard, Bismut a fait une analyse très fine dans []).

III. Etude d'un exemple élémentaire.

Ce paragraphe contient l'idée essentielle de Malliavin : tout ce que nous expliquons restera vrai en dimension infinie (avec une simplification : les mesures gaussiennes sont bornées, alors que la mesure de Lebesgue ne l'est pas). L'idée d'une << formule d'intégration par parties >> est commune à toutes les versions du << Calcul >>, y compris celle de Bismut.

Soient μ la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^k , X une application de \mathbb{R}^k dans \mathbb{R}^d , suffisamment différentiable et propre , de sorte que la mesure image $m = X(\mu)$ est une mesure de Radon sur \mathbb{R}^d . Nous nous proposons de trouver des conditions suffisantes pour que m soit absolument continue, et si possible ait une densité C^∞ .

Le critère que nous utiliserons (que tout le monde utilise depuis Malliavin) est le suivant : m est absolument continue si ses dérivées premières au sens des distributions sont des mesures. autrement dit, si pour $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$, à support dans un compact K , on a

$$(3.1) \quad | \langle D_1 m, f \rangle | \quad (= | \langle m, D_1 f \rangle | = | \int D_1 f \circ X d\mu |) \leq c(K) \|f\|_\infty$$

$c(K)$ dépendant seulement du compact K . Ce critère est une conséquence facile de l'inégalité élémentaire de Gagliardo-Nirenberg (voir Stein, Singular integrals and differentiability properties of functions, p. 129). Plus précisément, m aura dans ce cas une densité appartenant à $L_{loc}^{d/d-1}$ si $d > 1$, continue si $d=1$.

Pour vérifier que la densité est C^∞ , on vérifie que pour tout opérateur de dérivation D^α on a une inégalité semblable

$$(3.2) \quad | \langle D^\alpha m, f \rangle | \quad (= | \int D^\alpha f \circ X \, d\mu |) \leq c(K, \alpha) \|f\|_\infty ,$$

ce résultat étant sans doute plus classique que (3.1).

Sur l'espace de départ $\mathbb{R}^k = E$ introduisons les opérateurs

$$(3.3) \quad \begin{aligned} Ah &= \frac{1}{2} \Delta h \quad (\text{le générateur du mouvement brownien}) \\ \Gamma(g, h) &= \text{grad} g \cdot \text{grad} h = A(gh) - gAh - hAg \end{aligned}$$

qui pour de bonnes fonctions g, h possèdent les propriétés

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \langle g, Ah \rangle_\mu &= \langle Ag, h \rangle_\mu \quad (A \text{ est } \mu\text{-symétrique}) \\ \Gamma(f(g^1, \dots, g^d), h) &= \sum_{i=1}^d \Gamma(g^i, h) D_i f(g^1, \dots, g^d) \end{aligned}$$

ici g^1, \dots, g^d sont des fonctions sur E , et f une fonction sur \mathbb{R}^d , toutes au moins deux fois différentiables.

Nous abordons l'étude de (3.1). D'après (3.4), en prenant pour g^i les coordonnées X^i de X , on a

$$(3.5) \quad \Gamma(f(X), X^j) = \sum_i \Gamma(X^i, X^j) D_i f(X)$$

Arrêtons nous pour examiner la nature géométrique de $\Gamma(X^i, X^j)$: en un point x , l'application X admet une application linéaire tangente de $E = \mathbb{R}^k$ dans $F = \mathbb{R}^d$, de matrice $M_\lambda^i = D_\lambda X^i(x)$, et la seconde formule (3.3) nous montre que $\Gamma(X^i, X^j) = \sum_\lambda M_\lambda^i M_\lambda^j$; ce sont les coefficients d'une forme bilinéaire sur $F' \times F'$, $(u, v) \mapsto \Gamma(u \circ X, v \circ X)_x = \sum_\lambda M_\lambda^i M_\lambda^j u_i v_j$. - cependant, il est plus courant d'appeler $(\Gamma(X^i, X^j))_{ij}$ la matrice de Malliavin, et son déterminant le déterminant de Malliavin. La forme définie plus haut est toujours positive, elle est non-dégénérée si et seulement si ${}^t M$ est injective, i.e. si la différentielle de X est surjective.

Nous extrayons de (3.5) les dérivées autant qu'il est possible, par les formules de Cramer : si Δ est le déterminant de Malliavin, et h une fonction C^∞ arbitraire sur E

$$h \Delta D_i f(X) = \sum_j h b_{ij} \Gamma(f(X), X^j)$$

où b_{ij} est le cofacteur d'indices (i, j) dans la matrice de Malliavin. Nous intégrons sur E , remplaçons $\Gamma(f(X), X^j)$ par sa valeur (3.3), et utilisons la symétrie (3.3) pour déplacer A de manière à libérer f des dérivations. Cela nous donne la formule d'intégration par parties de Malliavin

$$(3.6) \quad \begin{aligned} \int h \Delta D_i f(X) \, d\mu &= - \int f(X) L_i h \, d\mu \\ L_i h &= \sum_j (A(h b_{ij} X^j) - X^j A(h b_{ij}) + h b_{ij} A X^j) = \sum_j (\Gamma(X^j, h b_{ij}) + 2 h b_{ij} A X^j) \end{aligned}$$

Si X est de classe C^2 , $L_i h$ est continue.

Prenons d'abord $h=1$. Nous déduisons de (3.1) que la loi image de $\Delta \mu$

par X est absolument continue. En particulier, si $\Delta \neq 0$ p.p., la loi image de μ est absolument continue. $\Delta \neq 0$ signifie, rappelons le, que la différentielle de X est surjective. La condition de classe C^2 semble trop forte (je suppose que le problème a été étudié par les géomètres, mais je n'ai aucune référence : peut être la condition C^2 est elle, après tout, la meilleure qui soit indépendante des dimensions k et d ...)

Ensuite, supposons $\Delta \neq 0$ partout (plus précisément, le déterminant d'une matrice positive étant ≥ 0 , $\Delta > 0$ partout, donc Δ est borné inférieurement sur tout compact). Nous pouvons remplacer alors h par h/Δ , et obtenir

$$\int h D_i f(X) d\mu = - \int f(X) \bar{L}_i(h) d\mu \quad \bar{L}_i(h) = L_i(h/\Delta)$$

qui peut être itérée si X est de classe C^∞

$$(3.7) \quad \int h D^\alpha f(X) d\mu = (-1)^{|\alpha|} \int f(X) \bar{L}^\alpha(h) d\mu$$

et comme $\bar{L}^\alpha(h)$ est une fonction continue, en prenant $h=1$ on prouve aisément (3.2). Donc m a une densité C^∞ .

Cette démonstration repose uniquement sur (3.3)-(3.4), et n'utilise donc presque rien de la structure de \mathbb{R}^k . Elle va s'étendre presque sans modification en dimension infinie, chaque fois que l'on pourra construire des opérateurs A et Γ satisfaisant aux propriétés ci-dessus.

IV. Analyse sur l'espace de Wiener

Ce paragraphe est plus long qu'il n'est nécessaire pour traiter seulement le calcul de Malliavin. Mais je trouve que le sujet est vraiment intéressant (pour les démonstrations, voir un article d'exposition dans le Sém. Prob. XVI LN 920, et le Sém. Prob. XVIII, LN 1059). Plusieurs articles en cours de publication, sans rapport direct avec le calcul de Malliavin, développent les résultats présentés ici - voir les références à la fin.

1. Soit E un e.v.t.l.c. métrisable et complet, de dual E' (les éléments de E' sont désignés par des lettres grecques, la forme bilinéaire canonique sur $E \times E'$ est notée $\{ , \}$, ainsi $\alpha(x) = \{x, \alpha\}$). Nous nous donnons une mesure gaussienne μ sur E , de support E . Sa covariance

$$(4.1) \quad q(\alpha, \beta) = \int \{x, \alpha\} \{x, \beta\} \mu(dx)$$

est alors une forme bilinéaire positive non dégénérée sur $E' \times E'$, et nous désignons par \mathcal{H} le complété de E' pour q . On peut associer à tout élément ξ de \mathcal{H} une v.a. gaussienne $\tilde{\xi}$ sur E , et celle-ci détermine une forme sur E' $\alpha \mapsto \int \alpha \tilde{\xi} d\mu$; on peut montrer que cette forme linéaire provient d'un élément $i(\xi)$ de E , et que i est une injection continue de \mathcal{H} dans E . Il est inutile de faire une théorie générale, car nous nous intéressons avant tout à la situation bien concrète suivante :

E est l'espace des applications continues nulles en 0 de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R}^d , avec la topologie de la convergence compacte (E est aussi l'espace canonique du mouvement brownien, et pour $w \in E$ nous posons $w(t) = B_t(w)$).

μ est la mesure de Wiener sur E .

E' est l'espace des mesures à support compact sur \mathbb{R}_+ , sans masse en 0, à valeurs dans \mathbb{R}^d . Si nous identifions une telle mesure α à sa primitive $\alpha(t) = \alpha(]t, \infty[)$ nulle à l'infini, E' apparaît comme un espace de fonctions à variation bornée à support compact à valeurs dans \mathbb{R}^d , la dualité étant donnée par

$$\{w, \alpha\} = - \int_{\mathbb{R}_+} w_s \cdot d\alpha_s = \int_{\mathbb{R}_+} \alpha_s \cdot dB_s(w) \quad (\text{intégrale stochastique formelle})$$

et il est clair alors que $q(\alpha, \beta) = \int \alpha_s \cdot \beta_s ds$, de sorte que $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$. La v.a. gaussienne $\tilde{\xi}$ associée à $\xi \in \mathcal{H}$ est l'intégrale stochastique

$$\tilde{\xi} = \int \xi_s \cdot dB_s \quad (\text{définie p.p. sur } E)$$

quant à l'injection i de \mathcal{H} dans E , elle associe à ξ la fonction continue nulle en 0

$$i(\xi) = \int_0^\cdot \xi_s \cdot dB_s$$

L'espace $\underline{\underline{CM}} = i(\mathcal{H})$ est l'espace des fonctions de Cameron-Martin.

2. Soit μ_t l'image de μ par la dilatation $w \mapsto \sqrt{t} w$; alors les mesures μ_t forment un semi-groupe de convolution sur E , et les noyaux Π_t

$$\int \Pi_t(u, dw) f(w) = \int f(u+w) \mu_t(dw)$$

forment un semi-groupe markovien, qui est l'analogue en dimension infinie du semi-groupe brownien sur \mathbb{R}^n . Il est très facile de montrer, dans ce cas précis¹, qu'il existe un véritable « mouvement brownien » (Z_t) en dimension infinie, admettant ce semi-groupe de transition et à trajectoires continues dans E . Prenant $d=1$ pour simplifier, on construit un drap brownien (B_{st}) indexé par \mathbb{R}_+^2 , et l'on pose $Z_t = B_{\cdot t}$: c'est le mouvement brownien issu de 0. La continuité des trajectoires de Z_\cdot résulte de la continuité des surfaces trajectoires du drap brownien.

Malheureusement, ce mouvement brownien en dimension infinie est moins utile qu'en dimension finie, car il n'a plus de mesure invariante σ -finie (néanmoins Malliavin, et semble t'il Kusuoka récemment, l'ont utilisé en analyse). Le processus vraiment utile est le suivant: désignant par Z_t le mouvement brownien dans E , on pose

$$(4.2) \quad Y_t = e^{-t} Z_{e^{2t}-1} \quad (\text{processus d'Ornstein-Uhlenbeck})$$

Ceci est un processus de Markov, homogène dans le temps, non invariant par translation, dont le semi-groupe est donné par la formule de Mehler

$$(4.3) \quad P_t(u, f) = \int f(ue^{-t} + w\sqrt{1-e^{-2t}}) \mu(dw)$$

1. Le cas général a été traité par Gross.

Ce semi-groupe possède la propriété fondamentale de symétrie par rapport à μ

$$(4.4) \quad \langle P_t f, g \rangle_\mu = \langle f, P_t g \rangle_\mu$$

(pour les détails - faciles - voir Sém. Prob. XVI, p. 95 et suivantes, en notant que notre Y_t d'ici correspond au Y_{2t} de la référence, de sorte que si l'on travaillait sur \mathbb{R}^n au lieu de E , les générateurs du m^t br. et du processus d'O-U seraient respectivement $\frac{1}{2}\Delta$, et $\Delta - x.\text{grad}$). Nous pouvons alors définir sur E le premier des opérateurs de Malliavin : pour $1 \leq p < \infty$, (P_t) est un semi-groupe fortement continu sur $L^p(\mu)$, et

DEFINITION. $(A, \mathcal{D}_p(A))$ est le générateur infinitésimal de (P_t) opérant sur L^p .

Nous modifions cette définition de manière à bien séparer régularité locale et intégrabilité. Considérons le processus d'O-U (Y_t) avec sa mesure initiale invariante μ ; soulignons aussi (provisoirement) le fait que les éléments de L^p sont des classes en les notant \dot{f}, \dot{g} . Alors la relation $\dot{f} \in \mathcal{D}_p(A)$ et $A\dot{f} = \dot{g}$ signifie que nous pouvons trouver deux représentants f, g de ces deux classes avec les propriétés suivantes

1) $f(Y_t)$ est une semimartingale continue, de décomposition canonique

$$(4.5) \quad f(Y_t) = f(Y_0) + \int_0^t g(Y_s) ds + M_t^f$$

où $\int_0^t |g(Y_s)| ds$ est p.s. fini pour tout t fini, et M^f est une martingale locale continue, nulle en 0.

2) $f \in L^p$, $g \in L^p$, et M^f est une vraie martingale.

La propriété 1) seule s'énonce en disant que f appartient au domaine étendu de A , et que $Af = g$ (notation : $f \in \mathcal{D}_0(A)$). On dit que f est un représentant précisé de la classe \dot{f} (un tel représentant est connu mieux que p.p.).

On a ensuite le théorème suivant, assez facile (Sém. XVI, p. 103-106)

THEOREME. 1) Le domaine étendu $\mathcal{D}_0(A)$ est une algèbre, et l'on peut donc poser pour $g, h \in \mathcal{D}_0(A)$

$$(4.6) \quad \Gamma(g, h) = A(gh) - gAh - hAg.$$

2) L'interprétation probabiliste de $\Gamma(g, h)$ est donnée par

$$(4.7) \quad d\langle M^g, M^h \rangle_t = \Gamma(g, h) \circ Y_t dt.$$

3) $\Gamma(\dots)$ est une application bilinéaire symétrique positive de $\mathcal{D}_0 \times \mathcal{D}_0$ dans L^0 (espace des classes de v.a. finies μ -p.p.), qui applique $\mathcal{D}_p \times \mathcal{D}_q$ dans L^r si $1 > p, q, r < \infty$, $r^{-1} = p^{-1} + q^{-1}$.

4) Soient g^1, \dots, g^d des éléments de \mathcal{D}_0 , f une fonction C^2 sur \mathbb{R}^d .

Alors la fonction composée $f(g^1, \dots, g^d)$ appartient à \mathcal{D}_0 , et l'on a des << formules d'Ito >>

$$(4.8) \quad Af(g^1, \dots, g^d) = \sum_i D_i f(g^1, \dots, g^d) Af^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j} D_{ij} f(g^1, \dots, g^d) \Gamma(g^i, g^j)$$

$$(4.9) \quad \Gamma(f(g^1, \dots, g^d), h) = \sum_i D_i f(g^1, \dots, g^d) \Gamma(g^i, h) \quad (h \in \mathcal{D}_0)$$

c'est à dire (3.4). Nous avons donc tous les ingrédients nécessaires pour appliquer le procédé du paragraphe III. Pour séparer au maximum la simplicité des idées de l'appareil technique, supposons établis les résultats suivants qui sont vrais, mais ne sont pas strictement nécessaires pour le << Calcul >>

(4.10) Soit $\mathcal{D}' = \bigcap_{1 < p < \infty} \mathcal{D}_p(A)$. Nous dirons qu'une fonction f sur E est une fonction test si $fe^{\mathcal{D}'}, Afe^{\mathcal{D}'}, A^2fe^{\mathcal{D}'}, \dots$. Alors l'espace $\underline{\mathcal{S}}$ des fonctions test - évidemment stable par A - est une algèbre. En particulier, si f et g sont des fonctions-test, $\Gamma(f, g)$ en est une aussi.

(4.11) Soit f une fonction-test positive ; si $1/f$ appartient à tout L^p , $1/f$ est une fonction-test.

Soit alors X une v.a. aléatoire à valeurs dans \mathbb{R}^d ; désignons par X^i ses composantes, et supposons que les X^i soient des fonctions-test. Alors les $\Gamma(X^i, X^j)$ sont des fonctions-test, et le déterminant de Malliavin Δ est une fonction-test. Supposons démontré que

$$(4.12) \quad 1/\Delta \text{ appartient à tout } L^p, \quad 1 < p < \infty.$$

Alors la loi de X admet une densité C^∞ (si $\Delta \neq 0$ p.s., on démontre à bien moins de frais que X a une loi absolument continue).

L'intérêt de la notion de fonction-test est aussi d'ouvrir la voie à une théorie des distributions sur l'espace de Wiener (travail commencé par S. Watanabe []). D'autre part, Malliavin a montré que les fonctions appartenant à $\mathcal{D}_F(A^n)$ sont continues¹ sur E (pour la topologie de la convergence compacte) hors de fermés de petite capacité (pour une capacité d'autant plus forte que n est grand). Cela n'a plus rien à voir avec l'existence de densités, mais c'est vraiment très beau.

Malheureusement, le théorème (4.10) est pénible. Voir Sém. Prob. XVIII, LN 1059, p. 179-193, et les Proceedings du congrès de Bangalore (LN in Inf. and Control 49), p. 210 . Voir aussi plus bas le n°4 .

3. Nous allons maintenant indiquer un procédé qui ramène les propriétés de différentiabilité ci-dessus, et le calcul de l'opérateur Γ , au calcul de dérivées ordinaires.

Soit (ξ_n) une base orthonormale fixe de $L^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d) = \mathcal{H}$; nous posons $\tilde{\xi}_n = \int \xi_n(s) \cdot dB_s$, $i(\xi_n) = u_n = \int_0^\cdot \xi_n(s) ds$ (fonctions de Cameron-Martin). Nous appellerons polynôme sur E toute fonction de la forme $H(\tilde{\xi}_1, \dots, \tilde{\xi}_k)$, où k est un entier et H un polynôme sur \mathbb{R}^k . Les polynômes appartiennent à \mathcal{D} . Et même fortement différentiables d'ordre convenable.

à tous les L^p , forment une algèbre dense dans tous les L^p , stable par les opérateurs P_t, A , etc. Remarquer que la notion de polynôme utilisée dépend du choix de la base (ξ_n) .

Pour voir ces propriétés, on remarque que tout polynôme est combinaison linéaire de polynômes du type suivant

$$(4.13) \quad H(w) = H_{n_1}(\tilde{\xi}_1(w)) \dots H_{n_k}(\tilde{\xi}_k(w))$$

où $H_{n_1} \dots H_{n_k}$ sont des polynômes d'Hermite sur \mathbb{R} , de degrés n_1, \dots, n_k , et qu'alors on a (avec $n = n_1 + \dots + n_k$)

$$(4.14) \quad P_t H = e^{-nt} H \quad (\text{donc} \quad AH = -nH).$$

Par exemple, les premiers polynômes d'Hermite sur \mathbb{R} sont $1, x, x^2 - 1$.

Donc si ξ, η sont des éléments de \mathcal{H} orthogonaux et normés, on a

$$A1=0, \quad A\tilde{\xi} = -\tilde{\xi}, \quad A(\tilde{\xi}^2 - 1) = -2(\tilde{\xi}^2 - 1), \quad A(\tilde{\xi}\tilde{\eta}) = -2\tilde{\xi}\tilde{\eta}$$

d'où l'on peut déduire l'effet de A sur des expressions analogues sans restriction sur ξ, η (en particulier, la formule $\Gamma(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) = 2\langle \xi, \eta \rangle_{\mathcal{H}}$).

Soient $\xi \in \mathcal{H}$, $u = i(\xi)$. L'image de la mesure μ sous la translation $w \mapsto w + u = \tau_u(w)$ est absolument continue par rapport à μ , avec la densité

$$(4.15) \quad \exp(\int \xi_s \cdot dB_s - \frac{1}{2} \int |\xi_s|^2 ds) = \exp(\tilde{\xi} - \frac{1}{2} \|\xi\|^2)$$

qui appartient à tout L^p . Donc la translation opère sur les classes.

Nous définissons la dérivée $\nabla_{\xi} f$ d'une fonction de f comme la limite de $\frac{1}{t}(f(\cdot + tu) - f(\cdot))$ lorsque $t \rightarrow 0$, et le gradient ∇f comme la suite des dérivées $\nabla_{\xi_n} f$ relatives à la base choisie (nous évitons de préciser le sens

du mot limite, et de parler de différentielle). Par exemple, si f est un polynôme, la dérivée existe au sens fort dans tout L^p ($p < \infty$) pour tout ξ

et c'est un polynôme de degré inférieur. Nous définissons les dérivées itérées, et les gradients itérés : par exemple, $\nabla^2 f = (\nabla_{\xi_n} \nabla_{\xi_m} f)_{n,m}$, et nous posons

$$\|\nabla f\|^2 = \sum_n (\nabla_{\xi_n} f)^2, \quad \|\nabla^2 f\|^2 = \sum_{n,m} (\nabla_{\xi_n} \nabla_{\xi_m} f)^2, \quad \text{etc.}$$

(ce sont des fonctions positives sur E). On a les formules suivantes, simples mais très importantes (f est un polynôme)

$$(4.16) \quad \nabla_{\xi} P_t f = e^{-t} P_t \nabla_{\xi} f$$

$$(4.17) \quad \Gamma(f, f) = 2\|\nabla f\|^2$$

Cette dernière surtout ramènera le calcul de la matrice de Malliavin à celui de dérivées ordinaires.

4. Il nous reste à voir comment on vérifie l'appartenance au domaine de A^n , où A est le laplacien d'Ornstein-Uhlenbeck. Pour cela, nous introduisons

un autre opérateur C , qui est formellement $-\sqrt{-A}$: c'est le générateur d'un semi-groupe markovien (Q_t) construit à partir de (P_t) par « subordination à la Bochner » et qui agit sur les polynômes d'Hermite (4.13) par $Q_t H = e^{-\sqrt{n}t} H$, $CH = -\sqrt{n} H$. Pour vérifier que f appartient à $\mathcal{D}_p(A^n)$, comme C^2 vaut $-A$, il suffit de vérifier que $f \in \mathcal{D}_p(C^{2n})$. Or on a le théorème suivant :

THEOREME. Une fonction $f \in L^p$ appartient à $\mathcal{D}_p(C^n)$ si et seulement si

- 1) Elle est dérivable dans L^p jusqu'à l'ordre n
- 2) $\|\nabla f\|, \|\nabla^2 f\| \dots \|\nabla^n f\|$ appartiennent à L^p

(et de plus, les normes L^p de ces gradients itérés contrôlent les normes de $Cf, \dots, C^n f$ dans L^p).

Pour $p=2$, ces théorèmes ont été établis, bien avant le calcul de Malliavin, par M. et P. Krée. Pour $p \neq 2$, il s'agit essentiellement d'une théorie des espaces de Sobolev sur E . Ce théorème est à la base de la démonstration de (4.10), et la difficulté essentielle se présente pour $n=1$ (après quoi la récurrence sur n est assez facile). Voir sur tout cela Sém. Prob. XVIII.

5. Jusqu'à maintenant, nous n'avons pas vraiment utilisé le fait que E était l'espace de Wiener, plutôt que n'importe quel espace muni d'une mesure gaussienne. Disons un mot de la relation entre le processus d'O-U et l'intégrale stochastique. Ce n° n'est pas indispensable pour la suite.

On sait que tout élément de L^2 peut se représenter sous la forme

$$f = E[f] + \int_0^\infty u_s \cdot dB_s$$

où (u_s) n'est pas déterministe, mais est un processus prévisible tel que $E[\int_0^\infty |u_s|^2 ds] < \infty$. Alors on peut montrer que

$$P_t f = E[f] + e^{-t} \int_0^\infty P_t u_s \cdot dB_s$$

et ceci caractérise le semi-groupe d'O-U. On a alors par dérivation (pour une justification rigoureuse, voir Sém. Prob. XVI, p. 109-112)

$$Af = \int_0^\infty (Au_s - u_s) \cdot dB_s$$

formule qui joue un grand rôle chez Stroock (Stroock indique aussi la manière, plus compliquée, dont Γ opère sur les intégrales stochastiques). Par comparaison, notons la formule élémentaire

$$(4.18) \quad \nabla_\xi f = \int_0^\infty \nabla_\xi u_s \cdot dB_s + \int_0^\infty \xi_s \cdot u_s ds \quad .$$

V. Vue d'ensemble du programme de Malliavin.

Du point où nous sommes arrivés, nous pouvons voir toute la démonstration. Nous avons notre équation différentielle stochastique (2.1)

$$X_t = x + \int_0^t a(X_s)dB_s + \int_0^t b(X_s)ds \quad (\text{ou (2.3)/Stratonovich})$$

à coefficients C^∞ (toutes dérivées d'ordre <0 bornées). Nous allons démontrer d'abord que (t restant désormais fixé > 0)

X_t est une fonction-test à valeurs dans \mathbb{R}^d

ce qui va se ramener à vérifier que toutes les dérivées $\nabla_\xi X_t, \nabla_\xi \nabla_\eta X_t \dots$ existent dans tout L^p , et que les gradients de tous ordres sont dans tout L^p . Il faudra aussi calculer explicitement le gradient du premier ordre, qui nous donnera la matrice de Malliavin $\Gamma(X^i, X^j)$, de déterminant Δ .

Cette partie constitue ce que l'on appelle depuis Malliavin le calcul des variations stochastique (au sens de : variation des solutions d'une équation différentielle). Compte tenu de la méthode très simple du § III, l'existence d'une densité C^∞ se ramène à vérifier que

Les conditions de Hörmander entraînent que $1/\Delta$ est dans tout L^p .

Le << calcul des variations >> est une très belle théorie, de difficulté moyenne ; c'est la dernière partie qui est le véritable tour de force technique dans la démonstration de Malliavin.

Ce que nous allons exposer maintenant est commun à toutes les versions du << Calcul >> : la méthode de Bismut ne diffère de celle de Malliavin que dans la démonstration de l'implication

(tous les gradients et $1/\Delta$ sont dans tout L^p) \Rightarrow (X_t a une densité C^∞) que nous avons traitée aux paragraphes III-IV, et que Bismut traite sans parler de semi-groupes.

VI. Calcul des variations stochastique

1. Le théorème des flots stochastiques. C'est un résultat très important - en partie redécouvert par Malliavin : des résultats antérieurs de Blagoveshenskii-Freidlin et de Neveu étaient passés un peu inaperçus, mais contenaient l'essentiel - sans rapport direct avec le problème des densités. Il a été mis sous forme définitive après Malliavin par Bismut (Mécanique Aléatoire : Lecture Note in M. 866) dans le cas brownien, et surtout par Kunita (Stochastic Integrals, proceedings de Durham, LN 851). On trouvera deux exposés dans le langage des semimartingales dans Sém. Prob. XV (LN 850) et Sém. Prob XVI (supplément), LN 921 ⁽¹⁾.

1. Dans XV, la 2e partie de la p. 107 commence avec un << il est clair que >> qui est faux, et se termine par une conjecture fautive (Léandre, Sém. XVII). Dans XVIb, p.153, la formule (4) est fautive, la forme correcte étant (5.2) ci-dessous.

Pour une expression commode, nous écrivons l'e.d.s. sous la forme

$$(6.1) \quad X_t = x + \int_0^t a(X_s) dZ_s \quad (\text{ou } *dZ_s \text{ au sens de Stratonovich})$$

($X_t = (X_t^i) \in \mathbb{R}^d$), où les $Z_t^\lambda = M_t^\lambda + V_t^\lambda$ sont des semimartingales continues nulles en 0 - dans le cas de (2.1), $Z_t^0 = t$, la partie martingale M_t^0 est nulle, et pour $\lambda > 0$ $Z_t^\lambda = B_t^\lambda$ (mouvements browniens indépendants), les parties à variation finie V_t^λ sont nulles. Nous disons que le système est quasibrownien si les crochets $\langle M^\lambda, M^\lambda \rangle_t$ ont des densités m_t^λ , les parties à variation finie V_t^λ des densités v_t^λ , toutes bornées en valeur absolue par une constante Θ . Nous sommes avec (2.1) dans ce cas, et $\Theta=1$.

Le premier résultat n'exige pas que la matrice a soit C^∞ , mais seulement que les dérivées premières soient bornées par K (condition de Lipschitz). C'est une inégalité d'Emery, ZW 41, 1978 :

LEMME. Si le système est quasibrownien, on a pour $1 < p < \infty$

$$(6.2) \quad \left\| \sup_{s \leq t} |X_s - x| \right\|_{L^p} \leq \frac{|a(x)|}{K} (e^{c_p \Theta K t} - 1)$$

($|\cdot|$ est la norme sur \mathbb{R}^d , $|a|$ est le sup des normes $|\cdot|$ des colonnes de a , c_p est une constante qui ne dépend que de p).

Donc l'appartenance de X_t à tout L^p ne pose pas de problème.

Nous supposons ensuite que toutes les dérivées de a sont bornées :

THEOREME. Il existe une fonction $X(x, t, \omega)$ (ou $X_t^x(\omega)$) avec les propriétés suivantes :

- 1) Pour x fixé, $X_t^x(\cdot)$ est une solution de (6.1).
- 2) Pour (t, ω) fixé, $X(\cdot, t, \omega)$ est C^∞ en x , et ses dérivées $D_x^\alpha(x, t, \omega)$ sont continues en (x, t) (y compris pour $\alpha=0$!).
- 3) Ces dérivées sont les solutions des é.d.s. qui apparaissent naturellement par dérivation formelle de (6.1), comme dans la théorie des é.d. ordinaires.

Ajoutons juste pour l'intérêt de la chose (cela ne servira pas) que pour tout (t, ω) fixé, $X(t, \cdot, \omega)$ est un difféomorphisme de \mathbb{R}^d , comme pour les é.d. ordinaires. On a donc construit un flot de difféomorphismes de \mathbb{R}^d . Ce dernier point est le seul difficile dans la démonstration du théorème.

Tout cela s'applique aussi à la forme Stratonovich de (5.1).

En particulier, calculons les dérivées premières $D_i X_t^x(\omega)$: en différentiant formellement (6.1), nous obtenons

$$D_i X_t^j = \delta_i^j + \int_0^t D_k a^\lambda(X_s) D_i X_s^k dZ_s^\lambda$$

que nous allons écrire avec de meilleures notations : posons

$$(6.3) \quad U_i^j(x, t, \omega) = D_i X_t^j(x, t, \omega) \quad ; \quad dL_t^j = dZ_t^\lambda D_i a^j(X_t(x, \omega))$$

alors la relation précédente s'écrit comme une équation linéaire (après calcul de $X(x, t, \omega)$)

$$(6.4) \quad U_t = I + \int_0^t dL_s U_s \quad (\text{ou } *dL_s \text{ si (6.1)/Stratonovich})$$

Cette équation est d'un type très bien connu : l'étude la plus lisible est sans doute celle de Karandikar dans Sém. Prob. XVI, p.385. Il en résulte que U_t est inversible, son inverse $V_t = U_t^{-1}$ est solution d'une é.d.s. linéaire analogue. Si l'on a pris (6.1) et (6.4) au sens de Stratonovich, on a simplement

$$(6.5) \quad V_t = I - \int_0^t V_s *dL_s .$$

Si l'équation (6.1) est quasibrownienne, la semimartingale directrice L est aussi quasibrownienne, et de même toutes les semimartingales directrices des équations analogues aux ordres supérieurs. En appliquant (6.2), on obtient pour le calcul de Malliavin (équation (2.1), cas brownien) le résultat auxiliaire suivant, très utile :

THEOREME. X et toutes ses dérivées, U et toutes ses dérivées, $V=U^{-1}$ et toutes ses dérivées, appartiennent à tous les L^p ($p < \infty$).

2. Calcul des $\nabla_{\xi} X_t$ et de la matrice de Malliavin.

Nous sommes dans le cas brownien (2.1) : $Z_t^0 = t$, $Z_t^\lambda = B_t^\lambda$ pour $\lambda > 0$ (forme Ito pour fixer les idées). On choisit $\xi \in \mathcal{H}$, on pose $u = \int_0^\cdot \xi_s ds$ (m composantes ξ^λ , $\lambda > 0$; on conviendra que $\xi^0 = u^0 = 0$). Dans notre version $X_t^X(w)$, nous remplaçons w par $w + \varepsilon u$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$, ce qui nous donne une fonction $X(x, \varepsilon, t, w)$ qui, pour ε fixé, est solution de l'é.d.s.

$$X_t = x + \int_0^t a(X_s) dZ_s + \int_0^t \varepsilon a(X_s) du_s$$

et dont nous voulons étudier la dérivabilité L^p par rapport à ε . Or on peut construire une meilleure version de cette fonction de la manière suivante : ajoutons une composante $X^{d+1} = \varepsilon$ au vecteur X ; nous ferons varier ε entre -1 et 1 seulement, et notons j une fonction C_c^∞ sur \mathbb{R} , égale à l'identité sur $[-1, 1]$. Alors le nouveau vecteur \bar{X}_t dans \mathbb{R}^{d+1} est solution de

$$\begin{aligned} \bar{X}_t^i &= x^i + \int_0^t a_\lambda^i(X_s) dZ_s^\lambda + \int_0^t j(\bar{X}_s^{d+1}) a_\lambda^i(X_s) du_s^\lambda \quad (i \leq d) \\ \bar{X}_t^{d+1} &= \varepsilon + 0 \quad (\text{toutes les semimartingales directrices nulles}) \end{aligned}$$

équation à laquelle s'applique le théorème sur les flots. Il existe donc une version C^∞ en (x, ε) $X(x, \varepsilon, t, w)$ de cette é.d.s., qui pour ε fixé coïncide p.s. avec la précédente. Pour cette version, les dérivées de tous ordres en ε existent p.s., et aussi dans L^p d'après les bornes indiquées plus haut. Mais la dérivabilité L^p reste inchangée si l'on change de version.

Nous aurions pu utiliser plusieurs ξ et plusieurs ε , ce qui nous aurait donné

THEOREME. Les dérivées partielles $\nabla_{\xi_1} \dots \nabla_{\xi_n} X_t$ existent à tous les ordres et dans tous les L^p .

De plus, le raisonnement précédent justifie le calcul des dérivées par dérivation formelle en ε :

LEMME. La dérivée $\nabla_{\xi} X_t = Y_t$ est solution de l'équation linéaire non homogène

$$(6.6) \quad Y_t^i = \int_0^t a_{\lambda}^i(X_s) \xi_s^{\lambda} ds + \int_0^t D_j a_{\lambda}^i(X_s) Y_s^j dB_s^{\lambda}.$$

Rappelons les matrices U_i^j et dL_i^j (6.3). Ajoutons une notation

$$H_t = \int_0^t a_{\lambda}(X_s) \xi_s^{\lambda} ds$$

nous voyons que $Y_t = H_t + \int_0^t dL_s Y_s$, où H_t est donné. La solution explicite de telles é.d.s. est connue : voir par ex. Sém. XVI suppl. p.155¹. On a

$$(6.7) \quad \boxed{\nabla_{\xi} X_t = U_{t0} \int_0^t U_s^{-1} a_{\lambda}(X_s) \xi_s^{\lambda} ds}$$

une formule vraiment fondamentale.

COMMENTAIRE. Si l'équation (2.1) est interprétée au sens de Stratonovich, les a_{λ} (y compris a_0) ont le sens géométrique de champs de vecteurs, et tous les calculs matriciels faits ci-dessus prennent un sens invariant par les difféomorphismes de \mathbb{R}^d . U_t s'interprète alors comme une application linéaire de T_x (l'espace tangent au point initial de la trajectoire) dans T_{X_t} (l'espace tangent mobile au point X_t). L'intégration dans la formule (6.7) est faite dans T_x où se trouvent les $U_s^{-1} a_{\lambda}(X_s)$, et l'intégrale est envoyée dans T_{X_t} par U_t .

Les équations linéaires donnant U_t prennent une signification plus sophistiquée : il n'y a pas de « matrices » sur les variétés ; pour avoir une équation matricielle il faut se placer sur la « variété des repères », un objet inhabituel chez les probabilistes. De là, l'auréole de mystère qui environne certaines parties du calcul de Malliavin.

Nous allons calculer les coefficients $\Gamma(X_t^i, X_t^j)$ de la matrice (forme) de Malliavin, grâce à la formule (4.17). Rappelons que (ξ_n) est une base orthonormale de $L^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$, ce qui signifie que pour tout couple de fonctions déterministes $h_s = (h_{\lambda s})$, $k_s = (k_{\lambda s})$ ($\lambda=1, \dots, d$) on a

$$\int_0^t h_s \cdot k_s ds = \sum_n \left(\int_0^t h_{\lambda s} \xi_{ns}^{\lambda} ds \right) \left(\int_0^t k_{\lambda s} \xi_{ns}^{\lambda} ds \right)$$

si h, k appartiennent à L^2 . Ecrivons (6.7) sous la forme abrégée

$$\nabla_{\xi_n} X_t = \int_0^t U_{st} a_{\lambda s} \xi_{ns}^{\lambda} ds \quad (a_{\lambda s} = a_{\lambda}(X_s), U_{st} = U_t U_s^{-1})$$

1. Quelques erreurs de la réf. : ligne 5, il faut $dU_s^{-1} H_s$ dans la dernière intégrale, et ligne 8 $\Phi_t = U_t H_0 + \Phi_t^1$.

Nous obtenons (les fonctions $U_{st} a_s$ appartenant à L^2 sur $[0,t]$ pour tout w

$$(6.8) \sum_n \mathbf{v}_{\xi_n} X_t^i \mathbf{v}_{\xi_n} X_t^j = \int_0^t \sum_{\lambda} U_{st} a_{\lambda}^{i\lambda} U_{st} a_{\lambda}^{j\lambda} ds$$

Prenez d'abord $i=j$: nous voyons que le gradient ∇X_t^i est dans tout L^p , ce qui d'après la partie IV va entraîner que X_t^i appartient à $\mathcal{D}_p(C)$ pour tout p . Un calcul analogue (plus lourd) permet de montrer que tous les gradients itérés sont dans tout L^p , donc que X_t^i est dans tous les $\mathcal{D}_p(C^n)$, i.e. est une fonction test. Le lecteur s'en persuadera en calculant le second gradient.

Ceci étant fait, la formule ci-dessus va nous donner la matrice de Malliavin. Comme nous nous en servons tout le temps, soignons plutôt les notations.

3. Forme explicite de la matrice de Malliavin.

Soit E un espace euclidien (dimension finie) avec un produit scalaire $(\cdot|\cdot)$. Rappelons que $E \otimes E$ est l'espace des fonctionnelles bilinéaires sur $E' \times E'$, $x \otimes y$ étant la forme bilinéaire $x(\cdot)y(\cdot)$ (produit ordinaire). Au moyen du produit scalaire, on peut aussi interpréter $x \otimes y$ comme forme bilinéaire sur $E \times E$ $((x|\cdot)(y|\cdot))$ et $x \otimes x$ comme forme quadratique $((x|\cdot)^2)$ sur E .

Si F est un second espace euclidien, U une application linéaire de E dans F , $U \otimes U$ est une application linéaire de $E \otimes E$ dans $F \otimes F$.

Avec ces notations, et en posant toujours $a_{\lambda s} = a_{\lambda}(X_s)$, la << matrice de Malliavin >> est en réalité un élément de $T_{X_t} \otimes T_{X_t}$, qui s'écrit

$$(6.9) \quad \Gamma_t = 2U_t \otimes U_t \int_0^t \sum_{\lambda} U_s^{-1} a_{\lambda s} \otimes U_s^{-1} a_{\lambda s} ds \quad (1)$$

Comme nous avons démontré plus haut que les X_t sont des fonctions-test, tout le problème est ramené à la non-dégénérescence de la forme bilinéaire Γ_t .

4. Crochets de Lie et leur utilisation.

Considérons un champ de vecteurs C^∞ k sur \mathbb{R}^d (nous écrirons simplement k_s pour $k(X_s)$). Le processus $U_t^{-1}(k_t)$ prend ses valeurs dans l'espace tangent T_{X_t} au point initial, et c'est une semimartingale, dont nous allons expliciter la décomposition canonique. Celle-ci fait apparaître le crochet de Lie $[u,v]$ de deux champs de vecteurs C^∞ , loi de composition (non associative, antisymétrique, \mathbb{R} -linéaire) sur l'espace des champs de vecteurs C^∞ . Aucune propriété spéciale des crochets de Lie n'est utilisée dans la suite. La formule suivante est démontrée dans le séminaire XVI suppl. p. 163 (32) et p. 164 (35). Les notations renvoient à (2.3) (forme Stratonovich de l'é.d.s. de départ, d'où la notation a_0) mais la sommation sur λ exclut la valeur 0, et les i.s. sont des intégrales d'Ito

1. Le facteur 2 vient de (4.17).

$$(6.10) \quad U_t^{-1} k_t = k(x) + \int_0^t U_s^{-1} [a_\lambda, k]_s dB_s^\lambda + \int_0^t U_s^{-1} \left(\frac{1}{2} \sum_\lambda [a_\lambda, [a_\lambda, k]]_s + [a_0, k]_s \right) ds$$

La démonstration de cette formule est un pur calcul, et nous n'en dirons rien.

VII. Les conditions de Hörmander

1. Préliminaires, et existence d'une densité (sans régularité).

Nous sommes ramenés à étudier la non-dégénérescence de Γ_t , et l'intégrabilité de l'inverse de son déterminant. Mais en tête de Γ_t (6.9), nous avons un opérateur $U_t \otimes U_t$, et nous avons vu (cf. après (6.5)) que U_t est inversible, avec un inverse V_t appartenant à tout L^p . Donc ce facteur est inessentiel, et nous sommes ramenés à étudier l'élément aléatoire de $T_x \otimes T_x$ que voici

$$Q_t = \int_0^t \sum_\lambda U_s a_{\lambda s} \otimes U_s a_{\lambda s} ds \quad (\lambda > 0)$$

ou encore, en utilisant le produit scalaire euclidien, la forme quadratique positive aléatoire

$$(7.1) \quad Q_t(v) = \int_0^t \sum_\lambda (U_s^{-1} a_{\lambda s} | v)^2 ds \quad (\lambda > 0)$$

Le cas le plus simple est celui (cas elliptique) où les vecteurs a_λ engendrent T_x . Dans ce cas (traité en détail par Stroock), la non-dégénérescence est évidente, et l'étude du déterminant très faisable : de sorte que l'on a une étude des équations elliptiques par une méthode purement probabiliste. Nous laisserons cela de côté.

Montrons, d'après Malliavin, pourquoi la condition de Hörmander entraîne la non-dégénérescence p.s. de Q_t (donc l'existence de densités). Soit $K_t(w)$ l'espace vectoriel (aléatoire) engendré dans T_x par les vecteurs $U_s^{-1} a_{\lambda s}(w)$ ($\lambda > 0, s \leq t$). Soit v un vecteur dans le noyau de la forme $Q_t(., w)$. Alors v est orthogonal (pour $(. | .)$) à $U_s^{-1} a_{\lambda s}(w)$ pour presque tout $s \leq t$ et tout λ , donc (par continuité) à $K_t(w)$, et - à plus forte raison - à l'intersection sur t $K_{0+}(w)$. Il suffit donc de démontrer que $K_{0+}(w) = T_x$ pour presque tout w . D'autre part, la tribu \underline{F}_{0+} du mouvement brownien est dégénérée, cette intersection est égale p.s. à un sous-espace non aléatoire. Finalement, il suffit de montrer qu'un v non aléatoire, orthogonal à K_{0+} , est nécessairement nul.

Une famille croissante de sous-espaces d'un espace de dimension finie ne peut croître que par sauts. Donc pour tout w , il existe un premier saut $S(w)$ de la famille $(K_t(w))_t$, et S est un temps d'arrêt > 0 .

Considérons une semimartingale de la forme

$$Y_s = (U_s^{-1} a_{\mu s} | v) \quad \mu > 0$$

Elle est nulle pour $s < S$, donc sa partie martingale s'annule aussi. Appliquant (6.10), nous en déduisons que

$$(U_s^{-1} [a_\lambda, a_\mu]_s | v) = 0 \text{ pour presque tout } s < S \quad (\lambda > 0)$$

donc (continuité) pour tout $s < S$. Recommencant l'opération, on trouve que tous les crochets itérés de tous ordres contenant seulement les a_λ , $\lambda > 0$ sont des champs de vecteurs k tels que $(U_s^{-1} k_s | v) = 0$, $s < S$.

Revenons à Y_s , et écrivons que sa partie à variation finie est nulle. D'après (6.10), et le résultat précédent, on a $(U_s^{-1} [a_0, a_\mu]_s | v) = 0$ pour $s < S$. D'où en itérant, les crochets itérés contenant a_0 possèdent la même propriété.

L'hypothèse de Hörmander nous dit alors que v , orthogonal à tous les crochets itérés au point x , est nécessairement nul.

2. Le problème principal : réductions successives.

Désormais, x et l'instant t auquel on cherche à établir l'existence d'une densité restent fixés (on écrira plutôt t_0).

Soit X une v.a. positive. Comment vérifier que $1/X$ appartient à tout L^p ? Ce n'est pas aussi difficile qu'on pourrait le croire : il suffit de vérifier que $P\{1/X > N\}$ est $O(N^{-p})$ pour tout p . Remplaçant $1/N$ par ε , cela veut dire que $P\{X < \varepsilon\} = O(\varepsilon^p)$ pour tout p .

Abréviations : si X possède cette propriété, nous dirons que X n'est pas trop petit, et nous écrirons $O(\varepsilon^\infty)$ au lieu de $O(\varepsilon^p)$ pour tout p . Plus précisément, si X dépend d'un paramètre u , nous dirons que $P\{X(u) < \varepsilon\}$ est uniformément $O(\varepsilon^\infty)$ si $P\{X(u) < \varepsilon\} \leq K_p \varepsilon^p$ pour tout p , avec K_p indépendant de u .

a) Nous commençons par un lemme technique, sans intérêt spécial (la démonstration peut être omise)

LEMME. Soit \mathcal{K} un ensemble fini de champs de vecteurs C^∞ . Il existe un temps d'arrêt $T \leq t_0$ pas trop petit, tel que pour $s \leq T$

$$(7.2) \quad |X_s - x| \leq 1/M, \quad |U_s^{-1} - I| \leq 1/M, \quad |U_s^{-1} k_s| \leq M$$

($k \in \mathcal{K}$, M est une constante choisie arbitrairement).

Démonstration. Posons $V_s = U_s^{-1}$, $X_s^* = \sup_{r \leq s} |X_r - x|$, $V_s^* = \sup_{r \leq s} |V_r - I|$. D'après (6.2) nous avons pour $s \leq t_0$

$$\|X_s^*\|_p, \|V_s^*\|_p \leq c_p s$$

Si nous posons

$$T_M = \inf \{ s : |X_s| |v| |V_s| \geq 1/M \} \wedge t_0$$

nous avons $P\{T_M < \varepsilon\} = P\{X_\varepsilon^* \vee V_\varepsilon^* > 1/M\} \leq M^p \|X_\varepsilon^* + V_\varepsilon^*\|_p^p \leq M^p (2c_p)^p \varepsilon^p$, donc T_M n'est pas trop petit. Pour satisfaire à la dernière inégalité, comme k est lipschitzien au voisinage de x , on prend $T = T_{M'}$, $M' \geq M$ assez grand.

b) Dans l'application que nous ferons de ce lemme, \mathcal{K} sera l'ensemble des crochets itérés d'ordre $\leq i$, où i est un certain entier fourni par l'hypothèse de Hörmander. Plus précisément, posons nos définitions : F_0 sera l'ensemble des champs a_λ ($\lambda > 0$) ; G_1 sera l'ensemble des crochets $[a_\mu, k]$, $k \in F_0$, avec cette fois $\mu \geq 0$; G_2 l'ensemble des crochets $[a_\mu, k]$, $k \in G_1$, etc. Nous posons $F_n = F_0 \cup G_1 \dots \cup G_n$. Par hypothèse, il existe un entier l tel que $F_l|_x$ engendre T_x , et nous prendrons $\mathcal{K} = F_{l+2}$ pour nous donner un peu d'aisance.

c) Le second lemme technique est beaucoup plus difficile, et contient du point de vue probabiliste l'essence de la démonstration. L'idée de base du lemme se trouve chez Malliavin ; l'énoncé précis a été dégagé par Stroock, mais s'y trouve encombré de constantes inutiles, et la démonstration de Stroock est terrible. Comme nous l'avons dit au début, elle a été bien simplifiée par Léandre (non publié) et par Norris (à paraître dans Sémin. Prob. XIX), qui lui donne une forme très compréhensible (même si elle reste longue...).

Soient (Y_t) une semimartingale continue, T un temps d'arrêt borné par t_0 . Nous dirons que (Y_t) est régulière si l'on peut écrire sur $[0, T]$

$$Y_t = y + \int_0^t h_{\lambda s} dB_s^\lambda + \int_0^t a_s ds \quad (\lambda = 1, \dots, m)$$

avec pour $r \leq T$ $|a_s| \leq C$, $\|h_s\| \leq C$.

LEMME. Supposons que Y soit régulière, et que les h_λ, a soient elles mêmes régulières (avec le même mouvement brownien et la même constante C). Alors pour q assez grand ($q > 36$ selon Norris) on a

$$P\left\{\int_0^T Y_s^2 ds < \varepsilon, \int_0^T (\|h_s\|^2 + |a_s|^2) ds \geq \varepsilon^{1/q}\right\} = o(\varepsilon^\infty)$$

et plus précisément, la condition $o(\varepsilon^\infty)$ est uniforme si l'on fixe t_0, C, q (et la dimension m du mouvement brownien directeur).

Nous ne tenterons pas de démontrer ce lemme ici.

Maintenant, nous allons suivre exactement la démonstration de la première section (existence d'une densité), en remplaçant tous les raisonnements qualitatifs par des estimations précises. Par exemple, les étapes d)-f) correspondent à l'application de la loi de C-1. Cette très ingénieuse réduction du problème est due à Malliavin lui même.

Nous sous-entendons désormais que Σ_λ porte sur $\lambda > 0$ seulement. Si k est un champ de vecteurs, v un élément de T_x , nous désignons par $Q_v(k)$ la forme quadratique aléatoire

$$(7.3) \quad Q_v(k) = \int_0^T (U_s^{-1} k_s | v)^2 ds \quad (T \text{ est défini en a))$$

d) Reprenons la forme quadratique aléatoire (7.1). Le déterminant Δ étant le produit des valeurs propres, nous minorons Δ par Λ^d , où Λ est la plus petite valeur propre, c'est à dire

$$\inf_{v \in S} \int_0^{t_0} \Sigma_\lambda (U_s^{-1} a_{\lambda s} | v)^2 ds \quad (S, \text{ sphère unité de } T_x)$$

Il suffit de démontrer que $1/\Lambda^d$ est dans tout L^p . Or cela équivaut au même résultat avec Λ au lieu de Λ^d .

On diminue l'intégrale en remplaçant t_0 par $T \leq t_0$. Donc il suffit en fait de montrer que $1/\inf_{v \in S} \Sigma_\lambda Q_v(a_\lambda)$ appartient à tout L^p .

e) En raison du choix de T , toutes les formes quadratiques $\Sigma_\lambda Q_v(a_\lambda)$ sont uniformément lipschitziennes sur la sphère unité S , leur constante de Lipschitz commune θ dépendant de la constante M de a) (non encore choisie). On peut recouvrir S avec des boules de rayon ε/θ , de centres v_i , dont le nombre est de l'ordre de $C(\varepsilon/\theta)^{-d} = C(\theta)\varepsilon^{-d}$. D'autre part, si l'on a $\Sigma_\lambda Q_v(a_\lambda) < \varepsilon$, il existe au moins un v_i tel que $\Sigma_\lambda Q_{v_i}(a_\lambda) < 2\varepsilon$.
Donc

$$\begin{aligned} P\{\inf_v \Sigma_\lambda Q_v(a_\lambda) < \varepsilon\} &\leq P\{\inf_i \Sigma_\lambda Q_{v_i}(a_\lambda) < 2\varepsilon\} \\ &\leq C(\theta)\varepsilon^{-d} \sup_i P\{\Sigma_\lambda Q_{v_i}(a_\lambda) < 2\varepsilon\} \end{aligned}$$

Comme nous nous intéressons à une condition en $O(\varepsilon^\infty)$, le facteur en ε^{-d} est indifférent. On est donc ramené à démontrer que

$$(7.4) \quad P\{\Sigma_\lambda Q_v(a_\lambda) < \varepsilon\} = O(\varepsilon^\infty) \text{ uniformément en } v \in S.$$

f) Nous dirons qu'un champ de vecteurs k est bon en $v \in S$, si l'on a

$$(7.5) \quad P\{Q_u(k) < \varepsilon\} = O(\varepsilon^\infty) \text{ uniformément sur un voisinage de } v.$$

Nous dirons qu'une famille finie F de champs de vecteurs est bonne, si, pour tout $v \in S$, il existe (au moins) un champ de la famille qui est bon en v . Pour établir l'existence d'une densité C^∞ , il nous suffit de démontrer (d'après (7.4)) que la famille des a_λ ($\lambda > 0$) est bonne (argument de compacité sur les voisinages (7.5)), autrement dit, que F_0 est bonne (cf. b)). Vérifions d'autre part que pour ℓ assez grand, F_ℓ est bonne : par hypothèse, en effet, les éléments de $F_\ell|_x$ engendrent T_x pour ℓ grand. Donc

$$\sup_{k \in F_\ell} (u|k)^2 \geq C > 0 \text{ pour tout } u \in S$$

Fixons v : il existe un $k \in F_\ell$ tel que $(v|k)^2 > C/2$, et cela s'étend à tous les éléments d'un voisinage V de v . Si la constante M de a) a été choisie assez grande, on aura encore $(U_s^{-1} k_s | u)^2 < C/2$ pour $s \leq T$, donc

$$P\left\{\int_0^T (U_s^{-1} k_s | u)^2 ds < \varepsilon\right\} \leq P\{CT/2 < \varepsilon\} = O(\varepsilon^\infty)$$

e) Soient $v \in S$, et k un champ de vecteurs. Posons pour $u \in S$

$$A_k(u) = \int_0^T (U_s^{-1} k_s | u)^2 ds$$

Nous dirons que k est bon en v s'il existe un voisinage V de v tel que

$$\sup_{u \in V} P\{A_k(v) < \varepsilon\} = O(\varepsilon^\infty).$$

Nous dirons enfin qu'une famille finie de champs de vecteurs est bonne si pour tout v , il existe (au moins) un champ de la famille bon en v : nous cherchons à montrer que la famille

$$F_0 = \{a_\lambda, \lambda > 0\}$$

est bonne en v . En effet, si cela est établi, pour tout v et tout p la fonction $1/A_{a_\lambda}(u)$ appartiendra à L^p avec norme bornée pour $u \in V$ voisinage de v , d'où le même résultat pour $1/A(u)$ plus petite, et par compacité la norme de $1/A(u)$ sera bornée sur S entière.

f) Soit G_1 la famille des crochets $[a_\lambda, j]$, $j \in F_0$ et cette fois $\lambda \geq 0$, puis G_2 la famille des crochets $[a_\lambda, j]$, $j \in G_1$, etc, et soit $F_n = F_0 \cup G_1 \dots \cup G_n$. Vérifions que pour ℓ assez grand, la famille F_ℓ est bonne en v .

En effet, d'après l'hypothèse de Hörmander, les champs de F_ℓ pris au point x engendrent T_x , donc

$$\sup_{k \in F_\ell} (k|u)^2 \geq C > 0 \text{ pour tout } u \in S$$

on peut donc trouver un $k \in F_\ell$ tel que $(k|v)^2 > C/2$, et cela s'étend à tout un voisinage V de v ; si la constante M de a) a été choisie assez grande, on aura encore $(U_s^{-1} k_s | u)^2 > C/2$ pour $s \leq T$ (rappelons qu'en a), nous nous sommes donnés une marge de sécurité jusqu'à l'ordre $\ell+2$), donc

$$P\{\int_0^T (U_s^{-1} k_s | u)^2 ds < \varepsilon\} \leq P\{\frac{C}{2}T < \varepsilon\} = O(\varepsilon^\infty)$$

indépendamment de u , puisque T n'est pas trop petit.

g) Tout revient donc à ceci : v étant fixé, choisissons un champ $k \in F_\ell$, bon en v ; si $k \in F_0$, nous n'avons rien à faire. Sinon, nous pouvons écrire $k = [a_\mu, j]$, où j est un champ d'ordre inférieur, et $\mu \geq 0$. Tout revient à montrer que j est bon en v , car en recommençant l'opération, on descendra finalement jusqu'à F_0 .

Nous posons $Y_s^u = (U_s^{-1} j_s | u)$ (la mention de u sera omise la plupart du temps), semi-martingale dont la décomposition est donnée par (6.10)

$$(7.5) \quad Y_s = (j(x)|u) + \int_0^s U_r^{-1} [a_\lambda, j]_r dB_r^\lambda + \int_0^s U_r^{-1} (\frac{1}{2} \Sigma_\lambda [a_\lambda, a_\lambda, j]_r + [a_0, j]_r) dr \\ = Y_0 + M_s + A_s$$

h) Voici la proposition cruciale, telle qu'elle est énoncée par Norris

(en substance, elle a été dégagée par Stroock, mais la démonstration donnée par Stroock était terrible !). La contribution essentielle de Norris est

indépendamment de u , puisque T n'est pas trop petit (cf. a)).

g) Nous savons donc que F_ℓ est bonne en v , nous voulons démontrer que F_0 est bonne en v , et tout revient à prouver que

si F_i est bonne en v , alors F_{i-1} est bonne en v ,

ce qui correspond à la dernière partie de la section 1. Or soit k un élément de $F_i \setminus F_{i-1}$, bon en v . Par définition, il existe un $j \in F_{i-1}$ et un $\mu \geq 0$ tel que $k = [a_\mu, j]$, et tout revient à montrer que j est bon en v .

Pour cela, nous introduisons la semimartingale (cf. (6.10))

$$(7.5) \quad Y_t^u = (U_t^{-1} j_t | u) = (j(x) | u) + \int_0^t (U_s^{-1} [a_\lambda, j]_s | u) dB_s^\lambda + \int_0^t (U_s^{-1} (\frac{1}{2} \Sigma_\lambda [a_\lambda, [a_\lambda, j]]_s + [a_0, j]_s | u) ds$$

Si T est le t. d'a. fourni par a), toutes ces semimartingales sont régulières au sens du lemme c), avec une constante de régularité C indépendante de u , et il en est de même des semimartingales intervenant dans la représentation (7.5) - c'est pour cela qu'en b) nous sommes montés jusqu'à $F_{\ell+2}$! Mais alors le lemme c) va nous donner, indépendamment de ueS

$$(7.6) \quad P\{Q_u(j) < \varepsilon, Q_u([a_\lambda, j]) \geq \varepsilon^{1/q}\} = O(\varepsilon^\infty) \quad (\lambda > 0)$$

($Q_u(j)$ est le terme $\int_0^T Y_s^2 ds$ figurant dans le lemme c), tandis que $Q_u([a_\lambda, j])$ est un morceau de $\int_0^T \|h_s\|^2 ds$). Si l'on avait $k = [a_\lambda, j]$ avec $\lambda > 0$, on a aussi

$$P\{Q_u([a_\lambda, j]) \leq \varepsilon^{1/q}\} = O(\varepsilon^\infty) \quad \text{uniformément en } ueV$$

puisque k est bon en v par hypothèse. Par conséquent

$$P\{Q_u(j) < \varepsilon\} = O(\varepsilon^\infty) \quad \text{indépendamment de } ueV$$

ce qui signifie que j est bon en v , le résultat désiré.

La situation est un peu moins simple lorsque $k = [a_0, j]$: désignons par h le champ de vecteurs $\frac{1}{2} \Sigma_\lambda [a_\lambda, [a_\lambda, j]] + [a_0, j]$; le lemme c) nous donne l'information

$$(7.7) \quad P\{Q_u(j) < \varepsilon, Q_u(h) \geq \varepsilon^{1/q}\} = O(\varepsilon^\infty) \quad \text{indépendamment de } u.$$

D'autre part, nous avons (7.6), et en écrivant (7.6) pour $[a_\lambda, j]$ au lieu de j

$$(7.8) \quad P\{Q_u([a_\lambda, j]) < \varepsilon^{1/q}, Q_u([a_\lambda, [a_\lambda, j]]) \geq \varepsilon^{1/q^2}\} = O(\varepsilon^\infty)$$

De tout cela, nous déduisons qu'il suffit de borner $P(B_\varepsilon) = O(\varepsilon^\infty)$, où

$$B_\varepsilon = \{Q_u(j) < \varepsilon, \forall \lambda Q_u([a_\lambda, j]) < \varepsilon^{1/q}, \forall \lambda Q_u([a_\lambda, [a_\lambda, j]]) \leq \varepsilon^{1/q^2}, Q_u(h) \leq \varepsilon^{1/q}\}$$

Mais sur B_ε , $Q_u(h)$ et tous les $Q_u([a_\lambda, [a_\lambda, j]])$ sont $\leq C\varepsilon^{1/q^2}$; il en est de même de $Q_u(k)$, et comme k est bon en v , on a

$$P\{Q_u(k) \leq C\varepsilon^{1/q^2}\} = O(\varepsilon^\infty) \text{ uniformément au voisinage de } v$$

Cela achève la démonstration (aux résultats techniques admis près).

BIBLIOGRAPHIE DU CALCUL DE MALLIAVIN

1. Les principaux articles de MALLIAVIN sont

- Stochastic calculus of variation and hypoelliptic operators. Proc. Intern. Conf. on Stoch. Differential Equations, Kyoto 1976 (Kinokuniya-Wiley 1978)
- C^k hypoellipticity with degeneracy. Stochastic Analysis. Acad. Press 1978.

Il y a aussi un article important (exposé au congrès J. Deny, 1983), avec de très beaux résultats sur les espaces de Sobolev en dimension infinie :

- Implicit functions in finite corank on the Wiener space.

Je ne sais pas où cet article doit paraître. Il faut ajouter à cela deux notes aux Comptes Rendus contenant des résultats importants,

- Sur certaines intégrales stochastiques oscillantes (CRAS 295, 1982, p.295)
- Calcul des variations stochastique subordonné au processus de la chaleur (CRAS 295, 1982, p. 167).

2. Dans le prolongement direct des articles de Malliavin, on trouve l'énergique propagande de STROOCK : plusieurs articles ont pour but de rendre entièrement précis les détails de la méthode de Malliavin ; l'état définitif est sans doute

- Some applications of stochastic calculus to p.d.e.'s. St Flour Lectures 1981, Lecture Notes in M. 976, 1982.

Mais voir aussi Journal Funct. Anal. 44, 1981, et deux articles dans Math. Systems Theory 14, 1981, p. 25 et p. 141. Le point de vue de ces articles est assez proche de celui des notes ci-dessus. Stroock a très tôt appliqué le calcul de Malliavin à des problèmes nouveaux ; voir par ex.

- HOLLEY-STROOCK : J. Funct. Anal. 42, 1981, p. 29-63 (application à la mécanique statistique).

D'autre part, un certain nombre d'articles de KUSUOKA-STROOCK développent le << calcul >> . Voir par exemple un article dans Proc. Katata 1982 Intern. conf.; Kinokuniya, Tokyo, 1984. Ils ont des applications récentes à l'hypercontractivité de semi-groupes, aux diffusions en temps petit...

3. Un certain nombre de travaux de l'école Japonaise ont pour particularité de développer le << calcul >> sur l'espace de Wiener, sans utiliser le laplacien d'Ornstein-Uhlenbeck de manière essentielle. Voir d'abord le livre

- IKEDA-WATANABE. Stochastic differential equations and diffusion processes. North-Holland-Kodansha 1981

qui utilise les résultats de SHIGEKAWA (Derivatives of Wiener functionals and absolute continuity of induced measures . J.M. Kyoto Univ. 20, 1980, p. 263) Voir aussi Proc. Jap. Acad. 54, 1978, p. 230. Voir aussi

- S. KUSUCKA. Dirichlet forms and diffusion processes in Banach spaces. J. Fac. Sci. Univ. Kyoto, 29, 1982, p. 79.

H. SUGITA. Sobolev spaces of Wiener functionals and Mall. Calc.. A paraître.

Un autre article de Kusuoka (Analytic functionals of Wiener processes and absolute continuity . Functional analysis in Markov processes, Katata-Kyoto 1981, Lect. Notes in M. 923) étudie la nécessité des conditions de Hormander pour l'absolue continuité, sous des hypothèses d'analyticité sur l'espace de Wiener (en un sens faible convenable).

4. Au sujet de l'analyse sur l'espace de Wiener, je voudrais citer des articles anciens concernant le cas L^2 : M. KREE (CRAS 279, 1974, p. 157, développé dans Bull. S.M. France 105, 1977), P. KREE (CRAS 278, 1974, p. 153 ; Séminaire P. LELONG, Lect. Notes 473 , 1975, p. 16-47). Les articles suivants sont postérieurs au << calcul >>

- M. et P. KREE. Continuité de la divergence dans les espaces de Sobolev relatifs à l'espace de Wiener. CRAS 296, 1983, p. 833.

- J. DIEBOLT. Divergence sur l'espace de Wiener et relèvement d'opérateurs différentiels. Même CRAS, p. 837.

On pourrait d'ailleurs citer bien d'autres travaux sur l'analyse de Wiener et les espaces de Sobolev en dimension infinie : KREE, GAVEAU, B. LASCAR ... Le lecteur intéressé se servira avec profit de l'index de Math. Reviews : il s'agit de résultats écrits dans un langage assez difficile pour les probabilistes.

P.S.. Toujours dans l'ordre d'idées de l'analyse de Wiener, j'ai entendu dire que Shigekawa a étudié le complexe de de Rham sur l'espace de Wiener (son travail n'existe pour l'instant qu'en Japonais).

On trouvera dans les Proceedings of the IFIP-ISI conference, Bangalore 1982, Lect. Notes in Control and Information n°49, plusieurs conférences sur l'analyse de Wiener. D'abord, dans la ligne << pré-calcul de Malliavin >> les conférences de HIDA et KUO. Dans la ligne << post-calcul >>

S. WATANABE. Malliavin's calculus in terms of generalized Wiener functionals qui esquisse une théorie des distributions sur l'espace de Wiener, et

P.A. MEYER . Quelques résultats analytiques sur le processus d'O-U en dimension infinie (version améliorée parue dans Sém. Prob. XVIII, Lect. Notes 1059)

5. Nous changeons de direction en abordant la méthode de Bismut, qui s'écarte de l'analyse de Wiener. Citons pour mémoire les divers articles dans le Lecture Note in M. 851, où l'on trouvera la présentation de WILLIAMS, un

exposé de HOLLEY-STROOCK, un de STROOCK, et la première présentation de la méthode de BISMUT : c'est un peu un point central pour comparer les méthodes avant qu'elles ne divergent... Ce volume reste irremplaçable aussi en raison du travail définitif de KUNITA sur les flots stochastiques

- On the decomposition of solutions of stochastic differential equations. p. 213-255 (voir aussi pour les semimartingales directrices discontinues MEYER, Sém. Prob. XV, LN 850, p.103-117 ; UPPMAN , Sém. Prob. XVI, LN 920, p. 268 ; un article de LEANDRE à paraître dans Sém. Prob XIX...)

Revenons à la méthode de Bismut : l'article relatif au théorème de Hörmander est :

- Martingales, the Malliavin calculus and hypoellipticity under general Hörmander conditions. ZW 56, 1981, p. 469-506.

les articles suivants ne concernent plus directement l'espace de Wiener

- Calcul des variations stochastique et processus de sauts. ZW 63, 1983
- The calculus of boundary processes. Annales ENS, 1984
- An introduction to the stochastic calculus of variations. Stochastic differential systems. Lecture Notes in Control Inf. 43, p. 33-72.
- Jump processes and boundary processes. Proceedings Katata Conf. 1982.
- Large deviations and the Malliavin Calculus. Progress in M. Birkhauser 1984
- The Atiyah-Singer theorem : a probabilistic approach. J. Funct. Anal. 57 1984, p. 56-99, p. 329-348.
- Last exit decompositions and regularity at the boundary of transition probabilities.

Pour mémoire, citons un travail sur les flots lié aux préliminaires du << calcul >> : ZW 55, 1981, p. 331-330.

Citons encore :

BISMUT-MICHEL. Diffusions conditionnelles : hypoellipticité partielle. J. Funct. Anal. 44, 1981, p.174-211 et 45, 1982, p. 274-292.

D. MICHEL. Régularité des lois conditionnelles en théorie du filtrage non linéaire et calcul des variations stochastique. J. Funct. An. 41, 1981, p. 8-36

D. MICHEL. Conditional laws and Hörmander's conditions. Proc. Katata Conference 1982.

R. LEANDRE. Régularité de processus de sauts dégénérés. A paraître, Ann IHP.

KICHTLER-FONKEN. A simple version of the Malliavin calculus in dimension 1. Martingale theory and harmonic analysis, LN 939, 1982

BICHTLER-FONKEN. A simple version of the Malliavin calculus in dimension N Seminar on stochastic processes 1982. Birkhauser.

D. FONKEN. A simple version of the Malliavin calculus with applications to the filtering equation. A paraître.

- BICHTELER-JACOD. Calcul de Malliavin pour les diffusions avec sauts. Existence d'une densité dans le cas unidimensionnel. Sém. Prob. XVII. LN 986
- BICHTELER-JACOD. Malliavin calculus for processes with jumps. A paraître.
- BASS-CRANSTON. The Malliavin calculus for pure jump processes and applications to local time. A paraître, ZW.

6. Les articles suivants sont de nature diverse, et présentés sans classement. Les uns utilisent le calcul de Malliavin, d'autres en étudient tel ou tel point particulier...

- R.F. BASS. Occupation times of d-dimensional semimartingales. Seminar on stochastic processes 1982, p. 51-96. Birkhauser.
- R.F. BASS. Local times for a class of purely discontinuous martingales.

- M. ZAKAI. The Malliavin calculus. (preprint : Technion, Haifa).
- M. ZAKAI. Malliavin derivatives and derivatives of functionals of the Wiener process with respect to a scale parameter.

BEN AROUS, KUSUOKA, STROOCK. The Poisson kernel for certain degenerate elliptic operators. J. Funct. Anal. 56, 1984, p. 171-209.

NUALART-SANZ. Malliavin calculus for two parameter Wiener functionals

Yu. DALETSKII. Stochastic differential geometry. Uspekhi Mat. Nauk 38, 1983.

Cette liste n'est certainement pas complète (certains articles cités dans le texte, tels que l'article de NORRIS au Sém. Prob. XIX, n'y sont pas repris, et j'ai omis volontairement beaucoup de notes aux CR, et quelques << à paraître >> sans références - sans parler des oublis). Elle donne tout de même une idée de l'étendue de la littérature concernant le << calcul >> .

I.R.M.A.

7 rue René Descartes

F-67084 Strasbourg-Cedex.