RECHERCHE COOPÉRATIVE SUR PROGRAMME N° 25

J. ECALLE

Les champs de vecteurs locaux résonnants de $\mathbb{C}^\nu$: classification analytique

Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg - RCP25, 1983, tome 33
« Conférences de : M. Nagasawa, J.-E. Bjork, J. Ecalle, K. Gawedzki, G. Lebeau, A. Martin », , exp. n° 3, p. 63-92
<http://www.numdam.org/item?id=RCP25_1983__33__63_0>

LES CHAMPS DE VECTEURS LOCAUX RESONNANTS DE $\mathbb{C}^\nu$: CLASSIFICATION ANALYTIQUE

par J. Ecalle (Orsay)

Plan

---

§1. INTRODUCTION. INVARIANTS FORMELS ET INVARIANTS HOLOMORPHES.

Les fonctions résurgentes permettent entre autres de classer différentes catégories d'objets locaux. Pour illustrer la méthode, nous allons ici nous attacher à une catégorie particulière, celle des champs de vecteurs locaux de $\mathbb{C}^\nu$:

(1) $$X = \sum_{i=1}^{\nu} X_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

avec $$X_i(x) = \sum_{j=1}^{\nu} a_{ij}\, x_j + (\cdots) \in \mathbb{C}\{x_1,\ldots,x_\nu\}$$

Tout dépend en fait des multiplicateurs λ_i du champ, qui sont les valeurs propres de $[a_{ij}]$, et de leurs éventuelles propriétés de résonance ou de quasi-résonance. On dit qu'il y a résonance lorsque les λ_i satisfont à des relations du type :

(2) $$\lambda_j = \sum_{i=1}^{\nu} n_i \lambda_i \qquad \text{avec} \quad n_i \geqslant 0$$

et on dit qu'il y a quasi-résonance lorsque les combinaisons entières positives $\sum n_i \lambda_i \neq 0$ approchent 0 anormalement vite. Pour des critères précis, voir [2] et [4] . On dit aussi, dans ce dernier cas, que les λ_i sont liouvilliens (dans leur ensemble). Dans le cas contraire, qui est le cas normal, on dit qu'ils sont diophantiens (dans leur ensemble).

Le but est de caractériser les classes formelles (resp. analytiques) de champs de vecteurs locaux au moyen de familles complètes d'invariants formels (resp. analytiques) scalaires et, si possible, constructibles.

Parmi les invariants formels, on distingue les invariants discrets (dimension, degré de résonance, niveau p, etc...) et les invariants continus, auxquels on peut en fait imposer de dépendre rationnellement des coéfficients de Taylor de X .

Parmi les invariants analytiques, on distingue les invariants holomorphes, c'est-à-dire ceux qui sont fonction holomorphe de X (i.e. de ses coéfficients de Taylor) sur tout domaine de constance des invariants formels discrets (restriction indispensable et naturelle) et les invariants métaholomorphes, c'est-à-dire tous les autres.

Il se trouve que les invariants holomorphes ne proviennent que d'une seule source - la résonance des λ_i - et qu'on les obtient tous en étudiant les propriétés de résurgence de l'intégrale formelle du champ X . Les invariants métaholomorphes peuvent provenir de deux sources : des petits diviseurs, qui sont liés à l'existence d'intégrales premières du champ X, et des tout petits diviseurs, qui sont liés à la quasi-résonance. Ces deux sources, surtout la seconde, sont exceptionnelles, et les invariants métaholomorphes sont nettement pathologiques. Comme en outre ils ne sont pas constructibles (tout au moins si on veut les prendre sous forme scalaire), on s'attachera ici aux invariants formels et surtout aux invariants analytiques holomorphes, qui supposent de la résonance. Pour illustrer la méthode, on commencera par le cas le plus simple - un seul degré de résonance - puis on indiquera brièvement ce qui change quand on passe à plusieurs degrés de résonance. Nous ferons aussi le lien avec les travaux de Martinet-Ramis sur les champs résonnants en dimension 2.

§2. CHAMP A UN DEGRE DE RESONANCE. INTEGRALE FORMELLE.

Considérons donc les champs X dont les multiplicateurs λ_i ne présentent qu'un seul degré de résonance. Plus précisément, supposons, au prix d'une réindexation, que l'on ait :

(3) $\quad m_1\lambda_1 + \ldots m_u\lambda_u = 0$ avec des $n_i > 0$ et premiers entre eux

et que $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_u, \lambda_{u+1}, \ldots, \lambda_{\nu-1}, \lambda_\nu$ soient rationnellement indépendants.

Lemme 1 : (Niveau p et résidu ρ)

Il existe un seul entier $p \in [1, \infty]$ et (lorsque $p<\infty$) un seul complexe ρ tels que l'équation :

$$(4) \quad \begin{cases} X.\varphi = \dfrac{1}{p} \dfrac{\varphi^{p+1}}{1+\rho\,\varphi^{p}} & (\text{pour } p<\infty) \\ X.\varphi = 0 & (\text{pour } p=\infty) \end{cases}$$

admette une solution formelle $\varphi \in \mathbb{C}[[x_1, \ldots, x_\nu]]$ sans terme constant. Cette solution est du type $\varphi(x) = a\; x_1^{m_1} \ldots x_u^{m_u} + (\ldots)$ avec $a \neq 0$. L'entier p est dit niveau du champ résonnant X et le complexe ρ est dit résidu du champ X . Ce sont deux invariants formels du champ X .

Le cas $p = \infty$ est exceptionnel (cf. §7) et, pour $p < \infty$, les cas (p,ρ) se traitent tous de la même manière (cf. §7). Nous pouvons donc nous concentrer sur l'étude du cas-type $(\mu, \rho) = (1, 0)$.

<u>Lemme 2</u>. (<u>Forme préparée. Invariants formels</u>)

Dans le cas-type $(\mu, \rho) = (1, 0)$ on peut, au prix d'un changement de variables polynomial :

(5) $$x_i \longmapsto P_i(x)$$

mettre le champ X sous une forme dite <u>préparée</u> :

(6) $$\begin{cases} X = {}^{o}X + \mathcal{D} \\ \text{avec} \quad {}^{o}X = \sum_{i=1}^{\nu} (\lambda_i + \tau_i x^m)\, x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \qquad (x^m = x_1^{m_1} \dots x_u^{m_u}) \\ \text{et} \quad \mathcal{D} = \sum_{i=1}^{\nu} \Big(\sum_{\|n\| > 2\|m\|}^{(i)} a_n^i\, x^n \Big)\, x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \end{cases}$$

où les complexes τ_i vérifient :

(7) $$\langle m, \tau \rangle = m_1 \tau_1 + \dots m_u \tau_u = -1$$

et où la somme $\sum^{(i)}$ est étendue à tous les $n = (n_1, \dots, n_\nu)$ de somme $\sum n_j$ supérieure à $2 \sum m_j$ et de coordonnées n_j vérifiant :

(8) $$n_i \geqslant -1 \qquad \text{et} \qquad n_j \geqslant 0 \qquad \text{pour } j \neq i$$

Les multiplicateurs λ_i et les scalaires τ_i sont, dans le cas-type $(\mu, \rho) = (1, 0)$, les seuls invariants formels de X.

Mais ce ne sont pas les seuls invariants analytiques, tant s'en faut. Pour calculer ces derniers, nous allons utiliser l'intégrale formelle $\Phi(z, s) = (\Phi^1(z, s), \dots, \Phi^\nu(z, s))$ du champ X, c'est-à-dire la solution générale du système :

(9) $$\frac{\partial}{\partial z} \Phi^i = X_i (\Phi^1, \dots, \Phi^\nu) \qquad (i = 1, \dots, \nu)$$

solution générale qui est fonction du temps complexe z et de $\nu-1$ paramètres $s = (s_2, s_3, \ldots, s_\nu)$. Commençons par deux définitions.

Définition 1 (Ensembles Ω, ${}^c\Omega$, Ω^+)

On pose

$$\Omega = \lambda_1 \mathbb{Z} + \ldots + \lambda_\nu \mathbb{Z} \qquad (\text{"réseau"})$$

$${}^c\Omega = \lambda_1 \mathbb{Z} + \ldots + \lambda_u \mathbb{Z} \qquad (\text{"coeur du réseau"})$$

$$\Omega^+ = \left\{ \omega = -\lambda_i + \sum_{j=1}^{\nu} n_j \lambda_j \ ; \ i \leq \nu \ ; \ n_j \in \mathbb{N} \right\} \qquad (\text{"réseau semi-positif"})$$

Bien qu'on parle abusivement de "réseaux", Ω, ${}^c\Omega$, Ω^+ peuvent très bien être denses dans $\mathbb{C}$. De plus (sauf si $u = \nu$) le réseau semi-positif Ω^+ n'est ni un groupe ni un semi-groupe. En fait, Ω est le plus petit sur-groupe de Ω^+ et ${}^c\Omega$ est le plus grand sous-groupe de Ω^+. On utilise enfin sur Ω^+ une relation qu'on note $\ll$ bien qu'elle ne soit pas un ordre :

$$(10) \qquad \omega_1 \ll \omega_2 \iff \omega_2 - \omega_1 \in \Omega^+$$

Définition 2 (Les applications $\omega \mapsto \tau(\omega)$ et $\omega \mapsto s(\omega)$)

Pour tout $\omega \in \Omega^+$ on note $\tau(\omega)$ le nombre complexe tel que le nombre $\langle n, \tau \rangle = \sum n_i \tau_i$ parcourre l'ensemble $\tau(\omega) - \mathbb{N}$ lorsque $n = (n_1, \ldots, n_\nu)$ parcourt l'ensemble des multiindices tels que $\langle n, \lambda \rangle = \omega$ et tels que les n_i soient tous ≥ 0 sauf au plus un qui peut être ≥ -1 . Autrement dit :

$$(11) \qquad \tau(\omega) = \text{"sup"} \langle n, \tau \rangle \quad \text{pour } n \text{ semi-positif et } \langle n, \lambda \rangle = \omega$$

Posons d'autre part :

$$(12) \qquad \lambda_i^* = \lambda_i \frac{n_i}{n_1 \ldots n_u} \quad \text{si } 1 \leq i \leq u \quad \text{et} \quad \lambda_i^* = \lambda_i \quad \text{si } u < i \leq \nu$$

Tout $\omega \in \Omega^+$ s'écrit alors d'une manière unique

$$(13) \quad \omega = n_2 \lambda_2^* + n_3 \lambda_3^* + \dots n_\nu \lambda_\nu^* \qquad \text{avec } n_i \in \mathbb{Z}$$

et on pose

$$(14) \quad s(\omega) = (s_2)^{n_2} (s_3)^{n_3} \dots (s_\nu)^{n_\nu}$$

On a évidemment

$$(15) \quad \tau(\omega_1 + \omega_2) = \tau(\omega_1) + \tau(\omega_2) \pmod 1 \quad \text{et} \quad s(\omega_1 + \omega_2) = s(\omega_1)\, s(\omega_2)$$

Proposition 1 (Intégrale formelle : existence et unicité)

Le champ X donné en (6) possède une intégrale formelle $\Phi = (\Phi^i)$ de la forme :

$$(16) \quad \Phi^i(z, s) = \sum_{\omega \in \Omega^+} s(\omega) \cdot e^{\omega z} \cdot z^{\tau(\omega)} \cdot \Phi^i_\omega(z) \qquad (i = 1, 2, \dots, \nu)$$

où chaque $\Phi^i_\omega(z)$ est une série entière en z^{-1} (généralement divergente). Cette intégrale formelle Φ est unique à une translation $z \longmapsto z + c_1$ et à des dilatations $s_i \longmapsto c_i\, s_i$ près.

En effet, d'après [2], le champ X peut, après un changement de variables formel $x_i \longmapsto y_i$, se mettre sous forme "résonnante" :

$$(17) \quad X = \sum_{i=1}^{\nu} \left\{ \lambda_i + \tau_i\, y^m + \sum_{q=2}^{\infty} b_q^i\, y^{qm} \right\} y_i \frac{\partial}{\partial y_i}$$

avec bien sûr $y^{qm} = y_1^{qm_1} \dots y_u^{qm_u}$. Par rapport aux coordonnées y_i le système dynamique s'écrit

$$(18) \quad \left(\frac{\partial}{\partial z} y_i\right) / y_i = \lambda_i + \tau_i\, y^m + \sum_{q=2}^{\infty} b_q^i\, y^{qm}$$

Puisque $\langle m, \tau_i \rangle = -1$, cela implique :

(19) $$\left(\frac{\partial}{\partial_z} y^m\right) / y^m = -y^m + \sum_{q=2}^{\infty} \langle m, b_q \rangle \; y^{qm}$$

D'où une solution :

(20) $$y^m(z) = z^{-1} + \text{série entière en } z^{-1}$$

Portant (20) dans (18) on obtient après une simple quadrature :

(21) $$y_i(z) = s(\lambda_i) \cdot e^{\lambda_i z} \cdot z^{\tau_i} \cdot \Psi_i(z) \quad \text{avec } \Psi_i(z) \in \mathbb{C}[[z^{-1}]]$$

Effectuant alors le changement de variable inverse $y_i \longmapsto x_i = h_i(y)$ on trouve l'intégrale générale de X sous la forme

(22) $$\Phi^i(z, s) = h_i\left(s(\lambda_1) e^{\lambda_1 z} z^{\tau_1} \Psi(z), \dots, s(\lambda_\nu) e^{\lambda_\nu z} z^{\tau_\nu} \Psi_\nu(z)\right)$$

qui manifestement est du type (16).

Bien que généralement divergentes, les séries sont résurgentes, la résurgence en question étant la résurgence ordinaire lorsque le coeur du réseau est discret et une résurgence généralisée dans le cas contraire. Cette propriété de résurgence va nous permettre de calculer les invariants analytiques du champ . Mais avant d'aborder ce calcul, il convient d'introduire brièvement les fonctions résurgentes et leur maniement.

§3. RAPPEL SUR LES FONCTIONS RESURGENTES ET LES DERIVATIONS ETRANGERES.

Pour aller vite, nous donnerons ici des définitions assez restrictives, mais suffisantes pour les besoins du présent article.

Définition 3. (Fonctions résurgentes)

Une série dénombrable

(23) $$S(z) = \sum_{\sigma \in \mathbb{C}} a_\sigma z^\sigma$$

est dite "fonction résurgente" si sa transformée de Borel

(24) $$\hat{S}(\zeta) = \sum_{\sigma \in \mathbb{N}} a_\sigma \, \delta^{(\sigma)}(\zeta) + \sum_{\sigma \notin \mathbb{N}} a_\sigma \frac{\zeta^{-\sigma-1}}{\Gamma(-\sigma)} \qquad (*)$$

est telle...

(i) que la série $\sum_{\sigma \in \mathbb{N}} a_\sigma \, \delta^{(\sigma)}(\zeta)$ définisse une fonctionnelle analytique locale, ce qui suppose que $n \cdot |a_n|^{1/n} \to 0$ quand $n \to \infty$.

(ii) que la série $\sum_{\sigma \notin \mathbb{N}} a_\sigma \zeta^{-\sigma-1} / \Gamma(-\sigma)$ définisse un germe convergent au point 0 de $\mathbb{C}_\infty$ (surface de Riemann de $\log \zeta$)

(iii) que ce germe soit analytiquement prolongeable partout et sans coupures, c'est-à-dire sans autres singularités qu'isolées

(iiii) et enfin qu'au voisinage de chacune de ses singularités ζ_0, ce germe ainsi prolongé soit de la forme :

(25) $$\sum_{\tau \in \mathbb{C}} b_\tau \cdot (\zeta - \zeta_0)^\tau + \sum_{\tau \in \mathbb{N}} \gamma_\tau \cdot (\zeta - \zeta_0)^\tau \cdot \log(\zeta - \zeta_0) \quad \text{avec } b_\tau, \gamma_\tau \in \mathbb{C}$$

Proposition 2. (Algèbre de résurgence)

Les fonctions résurgentes qu'on vient d'introduire forment une algèbre pour la multiplication ordinaire.

Définition 4 (Opérateurs Δ_η)

Pour tout $\eta \in \mathbb{C}_\infty$ (surface de Riemann de log ζ) et toute fonction résurgente S, on note $\Delta_\eta S$ la fonction résurgente :

(*) Γ désigne la fonction gamma classique et $\delta^{(n)}$ la n-ième dérivée du dirac au point 0.

(26) $$\Delta_\eta S(z) = \sum_{\sigma \in \mathbb{C}} a_{\eta,\sigma}\, z^\sigma$$

telle que, pour tout ζ sur $[0,\eta]$ et proche de 0, on ait :

(27) $$(\Delta_\eta S)^\wedge(\zeta) = \sum_{\varepsilon_i = \pm} \varepsilon_n \cdot \frac{p_\varepsilon!\, q_\varepsilon!}{n!}\, \hat{S}_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n}(\zeta+\eta)$$

et que pour tout $\sigma \in \mathbb{N}$ on ait :

(28) $$a_{\eta,\sigma} = \left\{\frac{(-1)^\sigma}{2\pi i}\cdot \sigma!\right\} \times \left\{\text{résidu en } \zeta = 0 \text{ de } \sum_{\varepsilon_i=\pm} \frac{p_\varepsilon!\, q_\varepsilon!}{n!}\, \hat{S}_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{n-1},+}(\zeta+\eta)\right\}$$

- où n désigne le nombre de singularités $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-1}, \eta_n = \eta$ que l'on rencontre en prolongeant le germe $\hat{S}(\zeta)$ le long du segment $[0,\eta]$

- où p_ε (resp. q_ε) désigne le nombre de signes + (de signes -) dans la suite $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{n-2}, \varepsilon_{n-1}$.

- où $\hat{S}_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n}(\zeta+\eta)$ désigne la valeur au point $\zeta+\eta$ de la branche de $\hat{S}$ obtenue en partant de 0, en longeant le segment $[0, \eta+\zeta]$ sans jamais revenir en arrière, et en contournant le point η_i à droite si $\varepsilon_i = +$ et à gauche si $\varepsilon_i = -$.

<u>Proposition 3</u>. <u>(Dérivations étrangères)</u>

Pour tout $\eta \in \mathbb{C}_\infty$ et toute paire S_1, S_2 de fonctions résurgentes on a

(29) $$\Delta_\eta(S_1 \cdot S_2) = (\Delta_\eta S_1)\cdot S_2 + S_1 \cdot (\Delta_\eta S_2)$$

Les opérateurs Δ_η sont donc des dérivations sur l'algèbre des fonctions résurgentes. Elles sont dites <u>dérivations étrangères</u>. Elles ne sont sujettes à aucune contrainte a priori du type $[\Delta_{\eta_1}, \Delta_{\eta_2}] = 0$.

Remarque 1 : Une "fonction" résurgente $S(z)$ converge pour z assez grand si et seulement si $\Delta_\eta S \equiv 0$ pour tout η . Les fonctions résurgentes intéressantes correspondent donc à des séries (23) qui divergent à l'infini.

Remarque 2 : Lorsqu'on applique Δ_η à une fonction résurgente du type $\sum_{\sigma \in \mathbb{Z}} a_\sigma z^\sigma$ ou plus généralement du type $z^{\sigma_0} \sum_{\sigma \in \mathbb{Z}} a_\sigma z^\sigma$ avec $\sigma_0 \in \mathbb{C}$ on obtient un résultat qui ne dépend que de la projection ω de η sur $\mathbb{C}^*$. Dans ce cas, on indexe les dérivations étrangères non pas avec des $\eta \in \mathbb{C}_\infty$ mais avec des $\omega \in \mathbb{C}^*$. C'est ce que nous ferons souvent dans la suite.

Remarque 3 : Répétons que la véritable notion de fonction résurgente est plus générale et plus souple que celle qui vient d'être introduite, et que les bonnes définitions font intervenir la notion de germe qualifié (cf. [3]), cas particulier de la notion de microfonction. Les définitions ci-dessus suffisent toutefois pour les constructions que nous avons en vue.

§4. RESURGENCE DE L'INTEGRALE FORMELLE. INVARIANTS HOLOMORPHES.

Reprenons notre champ résonnant X donné sous forme préparée (6) et son intégrale formelle Φ donnée par (22). Il convient de distinguer deux cas :

- Premier cas : ${}^c\Omega$ est discret. C'est toujours le cas quand $\nu = 1$ (alors $\lambda_1 = 0$) et quand $\nu = 2$. C'est généralement le cas quand $\nu = 3$.

- Deuxième cas : ${}^c\Omega$ n'est pas discret. C'est exceptionnellement le cas quand $\nu = 3$ et c'est toujours le cas quand $\nu \geq 4$.

Notons que la dimension ν où l'on travaille n'a aucune incidence sur la densité de ${}^c\Omega$ et qu'elle peut être arbitrairement grande.

Proposition 4. (Résurgence de l'intégrale formelle pour ${}^c\Omega$ discret)

Chacune des séries $\Phi^i_\omega(z) \in \mathbb{C}[[z^{-1}]]$ entrant dans l'expression de l'intégrale formelle du champ X est <u>résurgente</u>. Plus précisément, les transformées de Borel $\hat{\Phi}^i_\omega(\zeta)$ convergent, se prolongent partout sans coupure, et ont toutes leurs singularités au-dessus de Ω. De plus, les seules dérivations étrangères Δ_ω susceptibles de ne pas annuler $\Phi^i_{\omega_0}$ correspondent aux ω de Ω^+ tels que $\omega \ll \omega_0$. Enfin, il existe des opérateurs différentiels A_ω de la forme :

$$(30) \qquad A_\omega = s(\omega) \cdot \left\{ A^1_\omega \frac{\partial}{\partial z} + A^2_\omega s_2 \frac{\partial}{\partial s_2} + \dots A^\nu_\omega s_\nu \frac{\partial}{\partial s_\nu} \right\} \quad (A^i_\omega \in \mathbb{C})$$

et tels que :

$$(31) \qquad \Delta_\omega \cdot \Phi \equiv e^{\omega z} A_\omega \cdot \Phi \qquad (\forall \omega \in \Omega^+)$$

c'est-à-dire sous forme développée :

$$(31\ \text{bis}) \quad \begin{cases} \Delta_\omega \Phi^i_{\omega_0} = z^{\tau(\omega_0-\omega)-\tau(\omega_0)} A^1_\omega \dfrac{\partial}{\partial z} \Phi^i_{\omega_0-\omega} \\ + z^{\tau(\omega_0-\omega)-\tau(\omega_0)} \cdot \left\{ A^1_\omega \cdot \tau(\omega_0-\omega) \cdot z^{-1} + (\omega_0-\omega) A^1_\omega + \sum\limits_{j=1}^{\nu} n_j A^j_\omega \right\} \Phi^i_{\omega_0-\omega} \end{cases}$$

si $\omega_0-\omega$ s'écrit $n_2 \lambda^*_2 + \dots n_\nu \lambda^*_\nu$.

<u>Principe de la démonstration</u>.

(i) On introduit un paramètre ε. Autrement dit, on plonge le champ $X = {}^\circ X + \mathcal{D}$ de (6) dans une famille de champs ${}^\varepsilon X = {}^\circ X + \varepsilon \mathcal{D}$.

(ii) On note ${}^\varepsilon\Phi$ l'intégrale formelle de ${}^\varepsilon X$, puis on la développe en puissances de ε :

$$(32) \qquad {}^\varepsilon \Phi = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \overset{n}{\Phi}$$

et on montre par récurrence sur que $\overset{n}{\Phi}(z, s)$ est une fonction résurgente de z.

(iii) Plus précisément, on montre que $\Delta_{\omega_1} \dots \Delta_{\omega_r} \overset{n}{\Phi} \equiv 0$ si $r > n$ et qu'il existe des opérateurs différentiels $\overset{n}{A}_\omega$ de la forme (30) et tels que l'on ait

$$(33) \quad \Delta_\omega \cdot \left(\sum_{n=0}^{r} \varepsilon^n \overset{n}{\Phi} \right) = \left(\sum_{n=1}^{r} \varepsilon^n \overset{n}{A}_\omega \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{r} \varepsilon^n \overset{n}{\Phi} \right) \quad \left(\mathrm{mod}\ \varepsilon^{r+1} \right)$$

pour tout $r \in \mathbb{N}$ et tout $\omega \in \Omega^+$

(iiii) On montre que, pour tout triplet (i, ω, ε), la série

$$(34) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \left(\overset{n}{\Phi}{}^i_\omega \right)^\wedge (\zeta)$$

converge en ζ uniformément sur tout compact d'une surface de Riemann $\mathcal{R}_\omega$ fixe.

(iiiii) Enfin, pout tout couple (ω, ε), on montre la convergence de la série d'opérateurs différentiels.

$$(35) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \cdot \overset{n}{A}_\omega$$

Lorsque ${}^c\Omega$ est dense mais diophantien, tous les points précédents restent en vigueur avec cette seule différence que les séries (34) ne convergent plus sur une surface de Riemann fixe. Au lieu de cela, on a convergence sur un ensemble K qui a un complémentaire de mesure nulle, mais partout dense. La somme obtenue, qui a des ramifications partout denses, est dite <u>fonction résurgente généralisée</u> (cf. [3] et [4]). Les fonctions résurgentes généralisées sont aux fonctions résurgentes ordinaires ce que les fonctions <u>monogènes</u> d'Emile Borel (cf. [1]) sont aux fonctions méromorphes. La dérivation étrangère des fonctions résurgentes généralisées est assez délicate, mais dans le cas présent, les opérateurs différentiels A_ω qui nous intéressent s'obtiennent sans difficulté, comme sommes des séries (35) pour $\varepsilon = 1$.

Lorsqu'au contraire ${}^c\Omega$ est fortement liouvillien, on n'a plus convergence ni dans (34) ni dans (35). Les démonstrations relatives au cas ${}^c\Omega$ dense seront esquissées au §5. Pour l'instant, contentons-nous d'énoncer :

Proposition 5. (Résurgence généralisée de l'intégrale formelle).

Lorsque ${}^c\Omega$ est diophantien, chacune des séries $\Phi^i_\omega(z) \in \mathbb{C}[[z^{-1}]]$ qui entrent dans l'expression de l'intégrale formelle du champ X est une fonction résurgente - ordinaire si ${}^c\Omega$ est discret, généralisée s'il ne l'est pas. De plus, il existe des opérateurs A_ω de la forme (30), calculables au moyen des séries (35) et tels que :

$$\Delta_\omega . \Phi \equiv e^{\omega z} . A_\omega . \Phi \quad (\forall \omega \in \Omega^+) \tag{36}$$

Proposition 6. (Le cas ${}^c\Omega$ diophantien : invariants holomorphes)

Les opérateurs différentiels A_ω, définis et calculables pourvu que ${}^c\Omega$ soit diophantien, sont des invariants analytiques et holomorphes(*) du champ X. La famille $\{A_\omega \; ; \; \omega \in \Omega^+\}$ constitue même un système complet d'invariants analytiques : deux champs X et X' de la forme (6) sont conjugués par un changement de variables analytique si et seulement si ils ont même famille d'invariants $\{A_\omega\}$.

Examinons maintenant le cas exceptionnel où les multiplicateurs λ_i sont non seulement résonnants, mais encore quasi-résonnants (ce qui ne peut se produire que pour $\nu \geqslant 3$).

Proposition 7. (Le cas Ω^+ liouvillien. Invariants holomorphes et métaholomorphes.

a) Lorsque Ω^+ est liouvillien mais que ${}^c\Omega$ est diophantien, la famille $\{A_\omega \; ; \; \omega \in \Omega\}$ demeure définie et constitue toujours un système complet d'invariants holomorphes, mais elle ne constitue plus un système complet d'invariants analytiques(*), car aux invariants holomorphes s'ajoutent des invariants métaholomorphes,

---

(*) Voir au §1 la distinction entre invariants analytiques et invariants holomorphes.

issus de la quasi-résonance et non constructibles.

b) Lorsque Ω^+ et ${}^c\Omega$ sont tous deux liouvilliens, il existe des invariants métaholomorphes (non constructibles) mais pas d'invariants holomorphes (scalaires).

Ainsi donc, lorsqu'à la résonance (phénomène courant) vient à se superposer de la quasi-résonance (phénomène hautement exceptionnel), celle-ci n'interfère pas avec celle-là, sauf lorsque les multiplicateurs qui quasi-résonnent sont ceux-là même qui résonnent(*). Dans ce cas et dans ce cas seulement, la quasi-résonance fait exploser la résurgence et anéantit les invariants holomorphes que porte la résurgence.

Proposition 8. (Invariants précaires)

Les opérateurs invariants $\mathbb{A}_\omega$ sont somme de deux blocs :

$$\mathbb{A}_\omega = \Delta(\omega) \cdot \left\{ A_\omega^1 \frac{\partial}{\partial z} \right\} + \Delta(\omega) \cdot \left\{ \sum_{i=2}^{\nu} A_\omega^i \, s_i \frac{\partial}{\partial s_i} \right\} \tag{37}$$

Le second bloc $\{\ldots\}$ est invariant non seulement par rapport aux changements de variables analytiques $x_i \mapsto y_i$ mais encore par rapport à la multiplication à gauche du champ X :

$$X \longmapsto \Psi \, . \, X \tag{38}$$

par un facteur analytique $\Psi(x) \in \mathbb{C}\{x_1, \ldots, x_\nu\}$ avec terme constant $\neq 0$ $(\Psi(0) \neq 0)$. Au contraire, le bloc $\left\{ A_\omega^1 \frac{\partial}{\partial z} \right\}$ n'est invariant que par rapport aux changements de variables analytiques. Pour cette raison, on le qualifie d'invariant précaire.

(*) Autrement dit, quand c'est ${}^c\Omega$ lui-même, et non seulement Ω^+, qui est liouvillien.

Proposition 9. (Invariants cruciaux)

Les $(\nu-u)$ invariants A_ω qui correspondent à des indices ω de la forme $\omega=-\lambda_i$ pour $u<i\leq\nu$ sont dits cruciaux car ils jouent un rôle très particulier. En effet, lorsqu'ils sont tous $\neq 0$, chacune des fonctions $\Phi^i_{\omega_0}(z)$ composantes de l'intégrale formelle Φ porte à elle seule toute l'information invariante. Au contraire, lorsqu'une partie (resp. la totalité) des invariants cruciaux sont nuls, il faut considérer une partie infinie (resp. la totalité) des $\Phi^i_{\omega_0}(z)$ pour obtenir toute l'information invariante.

§5. FORMULES EXPLICITES. LE CAS ${}^c\Omega$ DISCRET ET LE CAS ${}^c\Omega$ DENSE.

Nous allons dans cette section obtenir une formule explicite donnant les opérateurs invariants A_ω . Cette formule est particulièrement utile dans le cas où ${}^c\Omega$ est dense, car elle nous dispense de manier les fonctions résurgentes généralisées. Pour établir la formule que nous cherchons, il faut commencer par introduire des "monômes de résurgence", qui sont indexés par des $\binom{\omega}{\sigma}=\binom{\omega_1,\ldots,\omega_n}{\sigma_1,\ldots,\sigma_n}$ avec $\omega_i,\sigma_i\in\mathbb{C}$. On pose comme d'habitude $\|\omega\|=\sum\omega_i$, $\|\sigma\|=\sum\sigma_i$ et on note :

(39) $\theta(\omega)$ = nombre de fois que la suite $\{\omega_1,\omega_1+\omega_2,\ldots,\omega_1+\omega_2+\ldots\omega_n\}$ prend la valeur 0.

Définition 5. (Multiindices licites)

On dit que $\binom{\omega}{\sigma}=\binom{\omega_1,\ldots,\omega_n}{\sigma_1,\ldots,\sigma_n}$ est licite si pour aucune partie $\binom{\omega'}{\sigma'}=\binom{\omega_i,\ldots,\omega_j}{\sigma_i,\ldots,\sigma_j}$ de $\binom{\omega}{\sigma}$ on ne peut avoir simultanément :

(40) $\|\omega'\|=0$ et $\theta(\omega')+\|\sigma'\|\in\mathbb{N}$

Proposition 10. (Monômes de résurgence)

A tout multiindice licite $\binom{\omega}{\sigma}=\binom{\omega_1,\ldots,\omega_n}{\sigma_1,\ldots,\sigma_n}$ les formules de récurrence :

$$(41)\quad \begin{cases} \left(\omega_1 + \frac{\partial}{\partial z}\right) V^{\omega_1}_{\sigma_1}(z) \quad + z^{\sigma_1} \ = 0 \\ \left(\omega_1 + \dots + \omega_r + \frac{\partial}{\partial z}\right) V^{\omega_1,\dots,\omega_r}_{\sigma_1,\dots,\sigma_r}(z) + z^{\sigma_r}\, V^{\omega_1,\dots,\omega_{r-1}}_{\sigma_1,\dots,\sigma_{r-1}}(z) \ = 0 \\ \text{avec } V^{\omega}_{\sigma}(z) \ \in \ z^{\theta(\omega) + \|\sigma\|} . \ \mathbb{C}[[z^{-1}]] \end{cases}$$

associent une fonction résurgente $V^{\omega}_{\sigma}(z)$ bien déterminée. Les V^{ω}_{σ} sont dit <u>monômes de résurgence</u>. Ils vérifient la table de multiplication :

$$(42)\qquad V^{\omega^1}_{\sigma^1} \,.\, V^{\omega^2}_{\sigma^2} = \sum_{\binom{\omega}{\sigma} \sqsubset \binom{\omega^1}{\sigma^1}, \binom{\omega^2}{\sigma^2}} V^{\omega}_{\sigma}$$

où la notation $\binom{\omega}{\sigma} \sqsubset \binom{\omega^1}{\sigma^1}, \binom{\omega^2}{\sigma^2}$ signifie que le multiindice $\binom{\omega}{\sigma}$ s'obtient à partir des multiindices $\binom{\omega^1}{\sigma^1}$ et $\binom{\omega^2}{\sigma^2}$ par imbrication mais avec préservation de l'ordre interne ("shuffle" en anglais).(*)

Puisque, au facteur $z^{\theta(\omega) + \|\sigma\|}$ près, les monômes de résurgence V^{ω}_{σ} sont des séries entières en z^{-1} (divergentes à moins que $\omega_1 = \omega_2 = \dots \omega_r = 0$) on leur applique non pas les dérivations étrangères Δ_η indexées sur $\mathbb{C}_\infty$ (surface de Riemann de log z) mais les Δ_ω indexées sur $\mathbb{C}^*$. De plus :

<u>Proposition 11</u>. <u>(Dérivation étrangère des monômes de résurgence)</u>

Il existe une famille $\left\{ \mathrm{V}^{\omega}_{\sigma} \right\}$ de scalaires définis pour tout $\binom{\omega}{\sigma}$ licite et tels que pout tout $\omega_0 \in \mathbb{C}^*$ l'on ait :

$$(43)\qquad \Delta_{\omega_0} = \sum_{\begin{cases} \omega^1 \omega^2 = \omega \\ \sigma^1 \sigma^2 = \sigma \\ \|\omega^1\| = \omega_0 \end{cases}} \mathrm{V}^{\omega^1}_{\sigma^1} \,.\, V^{\omega^2}_{\sigma^2}$$

(*) Par exemple $V^{\omega_1}_{\sigma_1} . V^{\omega_2,\omega_3}_{\sigma_2,\sigma_3} = V^{\omega_1,\omega_2,\omega_3}_{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3} + V^{\omega_2,\omega_1,\omega_3}_{\sigma_2,\sigma_1,\sigma_3} + V^{\omega_2,\omega_3,\omega_1}_{\sigma_2,\sigma_3,\sigma_1}$

c'est-à-dire plus explicitement :

(43 bis) $$\Delta_{\omega_0} \mathcal{V}^{\omega_1,\ldots,\omega_n}_{\sigma_1,\ldots,\sigma_n} = \sum_{\omega_1+\ldots\omega_j=\omega_0} V^{\omega_1,\ldots,\omega_j}_{\sigma_1,\ldots,\sigma_j} \mathcal{V}^{\omega_{j+1},\ldots,\omega_n}_{\sigma_{j+1},\ldots,\sigma_n}$$

De plus, les scalaires vérifient la propriété d'alternance

(44) $$\sum_{\binom{\omega}{\sigma} \sqsubset \binom{\omega^1}{\sigma^1},\binom{\omega^2}{\sigma^2}} V^{\omega}_{\sigma} = 0 \qquad \left(\text{pour tous } \binom{\omega^1}{\sigma^1},\binom{\omega^2}{\sigma^2} \text{ licites}\right)$$

où $\sqsubset$ désigne le "shuffle" tout comme en (42).

Forts de ces définitions, nous pouvons aborder la construction qui nous intéresse. Prenons le champ résonnant $X = {}^{o}X + \mathcal{D}$ sous sa forme préparée (6) et efectuons le changement de variable $(x_1,\ldots,x_\nu) \longmapsto (z, s_2,\ldots,s_\nu)$ avec :

(45) $$x_i = s(\lambda_i) \cdot e^{\lambda_i z} \cdot z^{\tau(\lambda_i)} \qquad (i = 1,\ldots,\nu)$$

pour les $s(\omega)$ et $\tau(\omega)$ de la définition 2 . Par rapport aux nouvelles variables on a

(46) $${}^{o}X = \frac{\partial}{\partial z}$$

(47) $$\mathcal{D} = \sum_{\omega \in \Omega^+} e^{\omega z} \sum_{\sigma \in \tau(\omega)-\mathbb{N}} z^{\sigma} \, \mathbb{D}^{\sigma}_{\omega}$$

avec

(47 bis) $$\mathbb{D}^{\sigma}_{\omega} = s(\omega) \cdot \left\{ \left(\mathbb{D}^{\sigma}_{\omega}\right)^{1} \frac{\partial}{\partial z} + \sum_{i=2}^{\nu} \left(\mathbb{D}^{\sigma}_{\omega}\right)^{i} s_i \frac{\partial}{\partial s_i} \right\}$$

et des $\left(\mathbb{D}^{\sigma}_{\omega}\right)^{i}$ scalaires.

Passons du champ $\mathcal{D}$ à un champ $\mathcal{B}$ au moyen des formules involutives :

(48) $$\mathcal{B} = -(1+\mathcal{D}.z)^{-1}.\,\mathcal{D} \quad ; \quad \mathcal{D} = -(1+\mathcal{B}.z)^{-1}.\,\mathcal{B}.$$

Tout comme le champ $\mathcal{D}$, le champ $\mathcal{B}$ s'écrit

(49) $$\mathcal{B} = \sum_{\omega \in \Omega^+} e^{\omega z} \sum_{\sigma \in \tau(\omega)-\mathbb{N}} z^{\sigma}\, \mathbb{B}_{\omega}^{\sigma}$$

avec

(49 bis) $$\mathbb{B}_{\omega}^{\sigma} = s(\omega) \cdot \left\{ \left(\mathbb{B}_{\omega}^{\sigma}\right)^{1} \frac{\partial}{\partial z} + \sum_{i=2}^{\nu} \left(\mathbb{B}_{\omega}^{\sigma}\right)^{i} s_i \frac{\partial}{\partial s_i} \right\}$$

et des $\left(\mathbb{B}_{\omega}^{\sigma}\right)^{i}$ scalaires.

Introduisons maintenant l'opérateur formel :

(50) $$\Theta = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{\omega_i \\ \sigma_i}} (-1)^{n} e^{(\omega_1 + \dots \omega_n) z} \cdot \mathcal{V}_{\sigma_1, \dots, \sigma_n}^{\omega_1, \dots, \omega_n}(z) \cdot \mathbb{B}_{\omega_n}^{\sigma_n} \dots \mathbb{B}_{\omega_2}^{\sigma_2} \mathbb{B}_{\omega_1}^{\sigma_1}$$

où ω_i parcourt Ω^+ et σ_i parcourt $\tau(\omega_i) - \mathbb{N}$. On vérifie que (50) ne fait intervenir que des multiindices $\binom{\omega}{\sigma}$ licites. On vérifie aussi que, comme série formelle en z^{-1} et les s_i , Θ ne présente aucune difficulté d'interprétation : pour tout n et tout ω , seul un nombre fini de termes, au second membre de (50), contribuent au monôme $z^{\tau(\omega)-n} . s(\omega) . e^{\omega z}$. On vérifie enfin, à partir de la table de multiplication (42) des monômes de résurgence, que Θ est un automorphisme formel. Autrement dit, pour toute paire $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{C}[[z^{-1}]]$ ou $\in z^{\sigma}\mathbb{C}[[z^{-1}]]$ on a :

(51) $$\Theta(\varphi_1 . \varphi_2) = (\Theta \varphi_1).(\Theta \varphi_2) \quad \text{et} \quad \Theta^{-1}(\varphi_1 . \varphi_2) = (\Theta^{-1} \varphi_1).(\Theta^{-1} \varphi_2)$$

D'autre part, à l'aide des formules (41), on montre que :

(52) $$\frac{\partial}{\partial z} \cdot \Theta = \Theta \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial z} + \mathcal{B} \right\}$$

(53) $$\frac{\partial}{\partial z} \cdot \Theta^{-1} = \Theta^{-1} \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial z} + \mathcal{D} \right\}$$

De même, à l'aide de (43) on montre que pour tout $\omega_0 \in \Omega^+$:

$$(54) \quad \left[e^{-\omega_0 z} \Delta_{\omega_0} , \Theta \right] = - \Theta . A_{\omega_0}$$

$$(55) \quad \left[e^{-\omega_0 z} \Delta_{\omega_0} , \Theta^{-1} \right] = + A_{\omega_0} . \Theta^{-1}$$

pour des opérateurs différentiels A_{ω_0} de la forme (30) et définis par

$$(56) \quad A_{\omega_0} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{\omega_1 + \dots \omega_n = \omega_0 \\ \sigma_i \in \tau(\omega_i) - \mathbb{N}}} V^{\omega_1, \dots, \omega_n}_{\sigma_1, \dots, \sigma_n} B^{\sigma_1}_{\omega_1} \dots B^{\sigma_n}_{\omega_n} \quad (*)$$

sous réserve de convergence du second membre. Notons que, du fait des relations d'alternance (44), cette formule équivaut à la suivante :

$$(57) \quad A_{\omega_0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{\substack{\omega_1 + \dots \omega_n = \omega_0 \\ \sigma_i \in \tau(\omega_i) - \mathbb{N}}} V^{\omega_1, \dots, \omega_n}_{\sigma_1, \dots, \sigma_n} \left[\left[B^{\sigma_1}_{\omega_1} , B^{\sigma_2}_{\omega_2} \right] \dots \right] B^{\sigma_n}_{\omega_n} \Big] \quad (*)$$

Posons maintenant pour $i = 1, 2, \dots, \nu$:

$$(58) \quad \overset{i}{\Phi}(z, s) = \Theta^{-1} . x_i(z, s) = \Theta^{-1} . \left\{ s(\lambda_i) e^{\lambda_i z} z^{\tau(\lambda_i)} \right\}$$

Il vient alors :

$$(59) \begin{cases} \frac{\partial}{\partial z} \overset{i}{\Phi}(z, s) & = \frac{\partial}{\partial z} . \Theta^{-1} . x_i(z, s) \qquad (\text{d'après } (58)) \\ & = \Theta^{-1} . \left(\frac{\partial}{\partial z} + \mathcal{D} \right) . x_i(z, s) \quad (\text{d'après } (53)) \\ & = \Theta^{-1} . X_i(x_1(z, s), \dots, x_\nu(z, s)) \quad (\text{d'après } (6) + (46)) \end{cases}$$

(*) On observe que dans (56) et (57) l'ordre des $B^{\sigma_i}_{\omega_i}$ est inverse de ce qu'il est dans (50).

$$(\bullet\bullet\bullet) \qquad = X_i\left(\Phi^1_{(z,s)},\ldots,\Phi^\nu_{(z,s)}\right) \quad \left(\text{d'après } (51)\right)$$

Soit finalement

(60) $$\frac{\partial}{\partial z}\Phi^i = X_i \circ \Phi \qquad (i=1,2,\ldots,\nu)$$

ce qui montre que les Φ^i de la formule (59) sont bien les composantes de l'intégrale formelle du champ . Appliquons maintenant les dérivations étrangères à cette intégrale formelle :

(61) $$\begin{cases} e^{-\omega_0 z}\Delta_{\omega_0}\Phi^i_{(z,s)} & = e^{-\omega_0 z}\Delta_{\omega_0}\Theta^{-1}.x_i(z,s) \quad \left(\text{d'après } (58)\right) \\ & = A_{\omega_0}.\Theta^{-1}.x_i(z,s) \quad \left(\text{d'après } (55)\right) \\ & = A_{\omega_0}.\Phi^i_{(z,s)} \quad \left(\text{d'après } (58)\right) \end{cases}$$

Soit finalement :

(62) $$\Delta_{\omega_0}\Phi = e^{\omega_0 z} A_{\omega_0}\Phi$$

Se reportant à la proposition 4, formule (31), on voit que les opérateurs différentiels définis par (56)-(57) sont bien les invariants holomorphes du champ X.

Il ne reste donc plus qu'à discuter la convergence du second membre de (56) en s'aidant des majorations des scalaires V^ω_σ qui sont établies dans [4] et qui sont grosso modo du type

(63) $$\left|V^{\omega_1,\ldots,\omega_n}_{\sigma_1,\ldots,\sigma_n}\right| \leqslant \prod_j \left|\log|\omega_1+\ldots\omega_j|\right|.\left|\log|\omega_j+\ldots\omega_n|\right| \Big/ \left|\Gamma(-\|\sigma\|-\theta(\omega))\right|$$

où Γ désigne la fonction gamma classique.

- Dans le cas où Ω est discret (ce qui suppose $\mu \leqslant 3$ mais ne restreint pas la dimension ν) on démontre sans aucune peine la convergence de (56).

- Dans le cas où ${}^c\Omega$ est dense mais diophantien, (56) converge encore et les séries formelles $\Phi^i_{\omega_0}(z)$ sont encore résurgentes, quoiqu'au sens généralisé (ou "monogène"). Cela tient à ce que, pour ω_0 fixé dans Ω^+, on ne peut pas avoir une décomposition

$$(64) \qquad \omega_0 = \omega_1 + \omega_2 + \dots \omega_n \qquad\qquad (\omega_i \in \Omega^+)$$

avec certains $(\omega_1 + \dots \omega_j)$ ou certains $(\omega_j + \dots \omega_n)$ très petits sans avoir en même temps une somme $\tau(\omega_1) + \dots \tau(\omega_n)$ de partie réelle négative et très grande. En se reportant à (56) et compte tenu du caractère diophantien de ${}^c\Omega$, on voit donc apparaître dans (63) des termes $|\Gamma(\dots)|$ très grands en dénominateur, qui compensent largement les grands $|\log|\dots||$ qui peuvent figurer au numérateur.

- Dans le cas enfin où ${}^c\Omega$ est dense et fortement liouvillien, le second membre de (56) ne converge plus et les séries formelles $\Phi^i_{\omega_0}(z)$ ne sont plus résurgentes, ni au sens ordinaire, ni au sens généralisé.

Ceci parachève la démonstration des propositions 6 et 7 et nous permet en outre d'énoncer :

Proposition 12. (Calcul des invariants holomorphes)

Chaque fois qu'ils sont définis, c'est-à-dire chaque fois que le groupe ${}^c\Omega$ est diophantien, les invariants analytiques A_{ω_0} sont, pour tout $\omega_0 \in \Omega^+$, explicitement donnés par la formule (56) ou par la formule équivalente (57).

Comme les opérateurs $B^{\sigma_i}_{\omega_i}$, via les opérateurs $D^{\sigma_i}_{\omega_i}$, s'expriment élémentairement en fonction des coefficients de Taylor du champ X, cela résoud complètement notre problème. Notons que la formule (57) présente sur la formule (56) un triple avantage : elle montre d'abord que les opérateurs A_{ω_0} sont bien différentiels d'ordre un, alors que dans (56) ils semblent différentiels d'ordre infini; elle montre ensuite que les A_{ω_0} ne peuvent être différents de 0 que pour $\omega_0 \in \Omega^+$, alors que dans (56) ils semblent pouvoir l'être pour tout $\omega_0 \in \Omega$; enfin elle comporte en son second membre moins de termes distincts, du fait des relations universelles entre multicrochets de Lie.

§6. CROISSANCE DES INVARIANTS HOLOMORPHES.

Les opérateurs invariants A_ω attachés au champ X sont de la forme (30). Pour évaluer leur croissance en ω, introduisons la norme

$$|A_\omega| = |\Delta(\omega)| \cdot \sum_{i=1}^{\nu} |A_\omega^i| \tag{65}$$

On montre alors que les A_ω attachés à X vérifient une condition de croissance

$$|A_\omega| < K_1 \, e^{K_2 |\omega| |\log|\omega||} \quad (K_1, K_2 \text{ constantes fonction de } X) \tag{66}$$

mais que l'inverse n'est pas vrai : (66) ne garantit pas qu'une famille $\{A_\omega\}$ soit bien la famille d'invariants d'un champ X. En fait, ce n'est pas directement sur les A_ω, mais sur des opérateurs $A_\omega^{(\theta_2,\theta_1)}$ associés, qu'on peut commodément caractériser les familles d'invariants. Pour tous θ_1, θ_2 réels tels que $0 \leqslant \theta_2 - \theta_1 < \pi$, posons :

$$\left\{\begin{array}{l} R_{(\theta_2,\theta_1)}^{\omega_1,\dots,\omega_r} = 0 \quad \text{si l'on n'a pas } \theta_1 \leqslant \operatorname{Arg}\omega_1 \leqslant \operatorname{Arg}\omega_2 \leqslant \dots \operatorname{Arg}\omega_r \leqslant \theta_2 \\ R_{(\theta_2,\theta_1)}^{\omega_1,\dots,\omega_r} = \dfrac{1}{r_1! \dots r_s!} \quad \text{si } \theta_1 \leqslant \operatorname{Arg}\omega_1 \leqslant \operatorname{Arg}\omega_2 \leqslant \dots \operatorname{Arg}\omega_r \leqslant \theta_2 \\ \text{et si la suite } \{\operatorname{Arg}\omega_i\} \text{ prend } r_1 \text{ fois sa plus petite valeur, } r_2 \text{ fois} \\ \text{la valeur suivante, ..., et } r_s \text{ fois sa plus grande valeur.} \end{array}\right. \tag{67}$$

<u>Proposition 13</u>. (<u>Caractérisation des familles d'invariants</u>)

Une famille $\left\{ A_\omega \; ; \; \omega \in \Omega^+ \right\}$ d'opérateurs différentiels de la forme (30) est la famille d'invariants d'un champ X à un degré de résonance si et seulement si, pour toutes directions θ_1 , θ_2 d'angle $0 \leqslant \theta_2 - \theta_1 < \pi$, l'opérateur suivant(*) :

$$(68) \quad A^{(\theta_2,\theta_1)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\omega_i} R^{\omega_1,\dots,\omega_n}_{(\theta_2,\theta_1)} \cdot e^{-(\omega_1+\dots\omega_n)t} \cdot A_{\omega_n} \dots A_{\omega_2} A_{\omega_1}$$

converge pour $\operatorname{Arg} t = -\frac{\theta_1+\theta_2}{2}$ et t assez grand.

Cela revient à dire que, munis d'une norme naturelle, les opérateurs

$$(69) \quad A^{(\theta_2,\theta_1)}_{\omega_0} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\omega_1+\dots\omega_n=\omega_0} R^{\omega_1,\dots,\omega_n}_{(\theta_2,\theta_1)} \cdot A_{\omega_n} \dots A_{\omega_2} A_{\omega_1}$$

ont une croissance

$$(70) \quad \left| A^{(\theta_2,\theta_1)}_{\omega} \right| < K_3 \, e^{K_4 \cdot |\omega|}$$

plus faible que celle des A_ω .

D'où le problème de la <u>synthèse</u> : connaissant une famille $\left\{ A_\omega \, ; \omega \in \Omega^+ \right\}$ donnant lieu à (70), constuire un champ X dont elle soit la famille d'invariants. Il s'agit d'inverser la formule (56) qui fait passer des A_ω aux B^σ_ω , mais en contrôlant la croissance des B^σ_ω , qui doivent être $< K_5 \, e^{K_6 \cdot |\omega|}$. Voir à ce sujet [4].

(*) qui n'est pas une dérivation mais un opérateur différentiel d'ordre infini et même, en fait, un automorphisme formel.

§7. NIVEAU p QUELCONQUE. LIEN AVEC LES TRAVAUX DE MARTINET-RAMIS.

Gardant l'hypothèse (3), examinons les champs à un degré de résonance, mais de niveau p quelconque.

Lorsque $p < \infty$ et $\rho = 0$, on a une forme préparée $X = {}^{o}X + \mathcal{D}$ analogue à (6) mais avec une partie principale ${}^{o}X$ un peu plus compliquée et portant davantage d'invariants formels (quoique toujours en nombre fini). Pour le reste, il n'y a pas grand chose à changer, si ce n'est...

- que les composantes $\Phi^{i}_{\omega}(z)$ de l'intégrale formelle $\Phi(z)$ sont des séries entières de $z^{-1/p}$ et non plus de z^{-1}.

- qu'au lieu du facteur $\Delta(\omega)\cdot z^{\tau(\omega)}\cdot \exp(\omega z)$, elles sont précédées d'un facteur $\Delta(\omega)\cdot z^{\tau(\omega)}\cdot \exp(\omega z + P_{\omega}(z))$ où $P_{\omega}(z)$ est polynomial de degré $p\text{-}1$ en $z^{1/p}$ et additif en ω.

- enfin, qu'il faut indexer les dérivations étrangères Δ_{ω} et les opérateurs invariants A_{ω} non plus par $\omega \in \mathbb{C}^{*}$ mais par $\eta \in \mathbb{C}_{p}$ (surface de Riemann de $z^{1/p}$)

Lorsque $p < \infty$ et $\rho \neq 0$, tout ce passe comme précédemment avec cette seule différence que $z^{-1/p}$ est remplacé par $\mathfrak{z}^{-1/p}$ où $\mathfrak{z}$ est l'unique solution de l'équation

$$\mathfrak{z} + \rho \log \mathfrak{z} = z \tag{71}$$

qui soit de la forme $\mathfrak{z} = z + z\,Q$ avec Q série formelle en z^{-1} et $z^{-1}\log z$ (sans terme constant).

Lien avec les travaux de Martinet-Ramis

Dans [5] et [7] J. Martinet et J.-P. Ramis ont, par des méthodes géométriques, classé les formes différentielles du type

(72) $$x^{k+1}\,dy - y\,dx + (\dots)$$

ou du type

(73) $$m_1\, x\,dy + m_2\, y\,dx + (\dots) \quad \text{avec } m_1, m_2 > 0 \text{ et premiers entre eux.}$$

Ils ont en outre mis les classes analytiques des formes (73) (resp. (72)) en correspondance biunivoque avec les classes analytiques de difféos locaux de $\mathbb{C}$ tangents à l'identité :

(74) $$f \; : \quad x \longmapsto x + a_1 x^2 + a_2 x^3 + \dots$$

(resp. avec des classes spéciales de tels difféos)

Interprétons ces résultats. Classer les formes (72) ou (73) revient à classer les champs de vecteur locaux de $\mathbb{C}^2$ qui ont pour multiplicateurs, respectivement :

(75) $$(\lambda_1 , \lambda_2) = (0,1) \quad \Longrightarrow \quad \Omega^+ = \mathbb{N} \cup \{-1\}$$

(76) $$(\lambda_1 , \lambda_2) = (m_2, -m_1) \quad \Longrightarrow \quad \Omega^+ = \mathbb{Z}$$

Plaçons-nous en niveau $k = 1$ pour simplifier. D'après la proposition 6 les classes analytiques de tels champs sont paramétrées par des familles d'invariants

(77) $$\{A_\omega \,;\, \omega \in \Omega^+\} \quad \text{avec} \quad A_\omega = s(\omega) \cdot \left\{ A^1_\omega \cdot \frac{\partial}{\partial z} + A^2_\omega \; s_2 \frac{\partial}{\partial s_2} \right\}$$

où le bloc $A^1_\omega \frac{\partial}{\partial z}$ est "précaire" et le bloc $A^2_\omega\, s_2 \frac{\partial}{\partial s_2}$ fortement invariant, c'est-à-dire invariant tant pour les changements de variables analytiques que pour la multiplication à gauche par un facteur analytique. Relativement à cette notion d'invariance forte qu'adoptent Martinet-Ramis, on trouve donc des classes analytiques caractérisées chacune par une famille d'invariants $\left\{ A^{l}_{n-1}(\Delta_l)^n \frac{\partial}{\partial \Delta_l} \right\}$ avec A^{l}_{n-1} scalaire et n parcourant $\mathbb{Z}$ dans le cas (76) et $\mathbb{N}$ dans le cas (75). Mais les classes générales (resp. sesquilaterales) de difféos locaux (74) sont précisément caractérisées par de telles familles d'invariants, avec exactement les mêmes conditions de croissance.(cf. [3]). D'ailleurs, ces correspondances entre classes analytiques d'objets locaux de différentes sortes (par exemple difféos et champs de vecteurs) sont un phénomène très général et qui s'observe en toute dimension (cf. [4])

Cas $p = \infty$ (niveau infini)

Tout dépend alors de Ω^+. Lorsque Ω^+ est discret, il y a une infinité d'invariants formels aisément calculables, et pas d'invariants holomorphes ni métaholomorphes. Lorsque Ω^+ n'est pas discret, il y a encore une infinité d'invariants formels, mais il apparaît aussi des invariants analytiques provenant des petits diviseurs. Les petits diviseurs sont des expressions de la forme :

$$\sum_{i=1}^{\nu} m_i \lambda_i + \Psi(x_1, \ldots, x_\nu) \quad \text{avec} \quad \Psi(0) = 0 \tag{78}$$

qui figurent en dénominateur dans l'intégrale formelle et où le terme scalaire $\sum m_i \lambda_i$ peut être arbitrairement petit sans que la série $\Psi(x_1, \ldots, x_\nu)$ le soit nécessairement. Les invariants analytiques issus des petits diviseurs sont très probablement non constructibles. En tout cas, J.-P. Françoise a montré dans [5] qu'il ne saurait, dans ce cas, exister de paramétrage complet des classes analytiques au moyen d'invariants (scalaires) holomorphes. Notons que les petits diviseurs sont liés à l'existence d'une intégrale première(*), indépendamment de toute hypothèse sur la diophantianité des multiplicateurs λ_i. Ils n'ont donc rigoureusement rien à voir avec les tout petits diviseurs (cf.§1) bien qu'on ait souvent tendance à les fourrer dans le même sac.

(*) c'est-à-dire d'une série $S \in \mathbb{C}[[x_1, \ldots, x_\nu]]$ telle que $X.S = 0$ $(S \neq \text{cste})$

§8. CHAMPS A PLUSIEURS DEGRES DE RESONANCE.

Passons brièvement en revue le cas le plus général - celui où le degré de résonance et le degré de fausse résonance sont quelconques. La fausse résonance n'a bien sûr rien à voir avec la quasi-résonance (cf.§1). Donnons-en une définition précise :

Définition 6: (degré de résonance et degré de fausse résonance)

Le degré de résonance, noté ρ , est la dimension du sous-espace $\mathcal{R}^+$ de $\mathbb{Q}^\nu$ engendré par les résonnateurs positifs, c'est-à-dire par les $m=(m_1,\ldots,m_\nu)$ orthogonaux à $\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_\nu)$ et de coordonnées $m_i \in \mathbb{N}$.

Le degré de fausse résonance, noté ρ' , est la dimension du quotient $\mathcal{R}/\mathcal{R}^+$, où $\mathcal{R}$ est le sous-espace de $\mathbb{Q}^\nu$ engendré par tous les résonateurs, c'est-à-dire par tous les m orthogonaux à λ et de coordonnées $m_i \in \mathbb{Z}$.

Ecartons d'abord les effets parasitaires dûs aux petits ou tout petits diviseurs. On a alors un résultat d'une stupéfiante simplicité :

(i) le système dynamique associé au champ X possède un nombre fini d'intégrales formelles Φ (une si $\rho \leq 1$, une ou plusieurs si $\rho \geq 2$) qui sont fonction :

- du temps complexe z , qui figure par ses puissances négatives (et des exponentielles)
- de $\rho-1$ paramètres t_i associés à la résonance
- de ρ' paramètres t'_i associés à la fausse résonance
- de $\rho''=\nu-\rho-\rho'$ paramètres associés à la dimension ρ'' de Ω^+ .

(ii) chacune de ces intégrales formelles est résurgente par rapport au temps complexe z et vérifie des équations de résurgence

$$e^{-\omega z}\,\Delta_\omega\,\Phi = A_\omega\,\Phi \qquad (\forall \omega \in \Omega^+) \tag{79}$$

pour des opérateurs différentiels A_ω de la forme :

$$(80)\quad A_\omega = s(\omega)\cdot\left\{ A^1_\omega \frac{\partial}{\partial z} + \sum_{i=1}^{\ell-1} A^{i+1}_\omega \frac{\partial}{\partial t_i} + \sum_{i=1}^{\ell'} A^{i+\ell} \frac{\partial}{\partial t'_i} + \sum_{i=1}^{\ell''} A^{i+\ell+\ell'}_\omega \, s_i \frac{\partial}{\partial s_i} \right\}$$

avec des A^i_ω non plus scalaires mais éléments de $\mathbb{C}[[t_1,\dots,t_{\ell-1}, t'_1,\dots,t'_{\ell'}]]$

(iii) les opérateurs A_ω sont des invariants holomorphes du champ X et, tous ensemble, ils constituent un système complet d'invariants holomorphes sauf lorsque...

(iiii) ... les directeurs $\bar\lambda_0, \bar\lambda_1, \dots, \bar\lambda_{\ell-1}$, qui sont définis lorsque $\ell > 1$ et qui sont des espèces de "multiplicateurs de seconde génération" (voir [4]), sont eux-mêmes en résonance de degré ℓ . Le processus peut d'ailleurs continuer et on peut (très exceptionnellement) voir apparaître des multiplicateurs $\bar{\bar\lambda}_i$, $\bar{\bar{\bar\lambda}}_i$, etc... de troisième, quatrième... génération, mais on s'arrête forcément au bout de ν générations et les invariants holomorphes issus de cette résonance en cascade sont toujours calculables par le même procédé : fonctions résurgentes, intégrales formelles et relations (79). C'est la méthode dite de l'arborescence (cf. [4]).

Si maintenant de la <u>quasi-résonance</u> (multiplicateurs liouvilliens) vient se greffer sur la résonance, c'est là une source d'invariants métaholomorphes qui viennent s'ajouter aux (resp. qui viennent détruire les) invariants holomorphes si ${}^c\Omega$ est diophantien (resp. si ${}^c\Omega$ est lui-même liouvillien). Si enfin on a des <u>petits diviseurs</u> (provenant d'intégrales premières), on a là une autre source d'invariants métaholomorphes (à moins que Ω^+ ne soit discret). Si toutefois le nombre d'intégrales premières indépendantes est strictement inférieur au degré ℓ de résonance, il subsiste de la résurgence, qui est porteuse d'invariants holomorphes et avec laquelle les petits diviseurs n'interfèrent pas.

Une dernière remarque. Les <u>tout petits diviseurs</u> sont évidemment parfaitement exceptionnels : pour avoir de la quasi-résonance, il faut "le faire exprès". Autre est le cas des <u>petits diviseurs</u>. Pour un champ résonnant quelconque (libre de toute contrainte a priori) le phénomène est évidemment superlativement exceptionnel. Mais il devient générique pour certains champs particuliers, notamment les champs <u>isochores</u>, qui annulent la forme $dx_1 \wedge dx_2 \ldots \wedge dx_\nu$ et les champs <u>hamiltoniens</u>, qui annulent la forme $\sum_{i=1}^{2\nu} dx_i \wedge dx_{i+\nu}$. Dans ces deux derniers cas, c'est au contraire la résurgence qui fait figure d'exception : elle ne fait son apparition que si les multiplicateurs vérifient des relations de résonance $\sum m_i \lambda_i = 0$ <u>extrinsèques</u>, c'est-à-dire indépendantes des relations de <u>résonance intrinsèques</u>, à savoir :

$$\begin{cases} \lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_\nu = 0 & \text{dans le cas isochore} \\ \lambda_i + \lambda_{i+\nu} = 0 \quad (i=1,2,\ldots,\nu) & \text{dans le cas hamiltonien} \end{cases}$$

§9. <u>TABLEAU RECAPITULATIF</u>.

ϱ = degré de résonance

ϱ' = degré de fausse résonance

quasi-résonance $\Longleftrightarrow$ multiplicateurs λ_i liouvilliens dans leur ensemble

INVARIANTS FORMELS
- * <u>discrets</u> : en particulier les niveaux et les degrés de résonance
- * <u>rationnels</u> } résidus, multiplicateurs, directeurs etc...
- * <u>algébriques</u> }

INVARIANTS HOLOMORPHES
- * <u>Invariants stricto sensu</u>
  i.e. pour tous les changements de variables.
- * <u>Invariants lato sensu</u>
  i.e. pour les changements de variables suffisamment tangents à l'identité.

} Ces invariants sont issus de la <u>résonance</u>, portés par la <u>résurgence</u> et constructibles au moyen du <u>calcul étranger</u>.

INVARIANTS METAHOLO-MORPHES	* provenant des tout petits diviseurs et issus de la quasi-résonance * provenant des petits diviseurs et et issus d'intégrales premières formelles, notamment dans les cas isochores et hamiltoniens.	Les invariants métaholomorphes scalaires sont non seulement non holomorphes, mais sans doute aussi non constructibles.

§10. REFERENCES

[1] BOREL E., "Leçons sur les Fonctions Monogènes", Gauthier-Villars, 1914

[2] BRJUNO A.D., "Analytical forms of differential equations", Trans. Moscow Math. Soc. 25, 1971, pp 131-288.

[3] ECALLE J., "Les Fonctions Résurgentes"; Tomes I et II parus en 1981 aux Pub. Math. d'Orsay; Tome III à paraître ibidem.

[4] ECALLE J., "Sept Problèmes de Classification Analytique" (A paraître; disponible chez l'auteur, 200 pages).

[5] FRANCOISE J.-P., "Invariants des germes de champs de vecteurs de $\mathbb{C}^n,0$", Preprint IHES/M.83/50 (10 pages; traite du cas des petits diviseurs).

[6] MARTINET J. et RAMIS J.-P., "Problèmes de Modules pour des Equations Différentielles non linéaires du premier ordre", Publ. Math. I.H.E.S., vol. 55, 1982, p. 63-164.

[7] MARTINET J. et RAMIS J.-P., "Classification analytique des Equations Différentielles non linéaires résonnantes du premier ordre", Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., t. 16, 1983, p. 571-621.