RECHERCHE COOPÉRATIVE SUR PROGRAMME Nº 25

PIERRE LELONG

# Les objets souples de l'analyse complexe ; application à des problèmes de prolongement et à des notions capacitaires

*Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg - RCP25*, 1983, tome 32
« Conférences de : V. Guillemin, A. Douady, P. Lelong et F. Pham », , exp. nº 3, p. 40-58
<http://www.numdam.org/item?id=RCP25_1983__32__40_0>

# LES OBJETS SOUPLES DE L'ANALYSE COMPLEXE ; APPLICATION A DES PROBLEMES DE PROLONGEMENT ET A DES NOTIONS CAPACITAIRES

par Pierre LELONG

1. Introduction. J'exposerai ici brièvement quelques résultats en cours de publication ; ils concernent :-1°/ la représentation des ensembles analytiques complexes comme ensembles de densité de certaines mesures positives [6,d] -2°/ des théorèmes de prolongement pour les courants positifs fermés , donnant des énoncés "correspondants" pour le prolongement des ensembles analytiques [5] -3°/ la définition d'une notion "capacitaire" adaptée à l'analyse complexe en dimension $n > 1$, cf.[2] . Il s'agit dans ces trois directions de l'étude d'objets analytiques , c'est-à-dire de classes de notions invariantes par les isomorphismes analytiques. L'adjectif analytique signifiera toujours analytique complexe ; les crochets renvoient à la bibliographie en fin de cet exposé.

Je ne sais si, aujourd'hui, l'analyticité des lois importe aux physiciens autant qu'autrefois; il semble que les systèmes qui se prêtent le moins mal à l'approximation analytique soient ceux qui sont suffisamment isolés et où la matière est assez complaisante pour se concentrer en quelques points de grande densité... A ce point de vue le début de cet exposé donne une analogie sans doute purement formelle : les ensembles analytiques peuvent être représentés comme ensembles de densité (pour une définition convenable de celle-ci) de certaines mesures positives. On étudiera 1°/ une telle représentation "à croissance", et 2°/ elle interviendra pour faciliter l'utilisation des méthodes de la géométrie différentielle (avec utilisation des formalismes des distributions et des courants) et donner des théorèmes de prolongement d'ensembles analytiques, c'est-à-dire de lois analytiques, à travers des singularités.

2. Les objets analytiques [1] . On désignera par $W$ une variété analytique de dimension complexe $n$ , réunion dénombrable de cartes relativement compactes qui définissent sur $W$ des coordonnées complexes locales. Un objet analytique $\mathcal{C}$ est alors une classe de notions mathématiques (fonctions, groupes, ensembles, opérateurs etc...) avec les propriétés suivantes :

1°/ -La classe $\mathcal{C}(W)$ , objet $\mathcal{C}$ sur $W$ , est définie pour toute variété analytique $W$ .

2°/ -Les isomorphismes analytiques $W \to W'$ transforment $\mathcal{C}(W')$ en $\mathcal{C}(W)$ , c'est-à-dire conservent l'objet $\mathcal{C}$.

3°/ -Les applications $\varphi : W \to W'$ telles que $\varphi$ et $\varphi^{-1}$ conservant $\mathcal{C}$ sont des isomorphismes analytiques à une symétrie près.

La condition 3°/ exprime que l'objet $\mathcal{C}$ n'appartient pas à une structure moins fine. Les fonctions analytiques, et les sous-ensembles analytiques sont des objets analytiques, je les appellerai les objets classiques. Ils ne sont pas les seuls objets analytiques. Par exemple, pour $n = 1$ , la classe des fonctions harmoniques $f$ sur $W$ , définies par $\Delta f = 4 \frac{\partial^2 f}{\partial z\, \partial \bar{z}} = 0$ par rapport aux coordonnées locales vérifie 1°/ et 2°/ et elle vérifie 3°/ à la symétrie près $z \to \bar{z}$ dans $\mathbb{C}$ . Il en est de même des fonctions sousharmoniques $f$ dans $R^2 = \mathbb{C}$ , définies par : a)- $f \in L^1_{loc}$ , b)- $\Delta f \geq 0$ , c)- $f(z) = f_m(z)$ où $f_m(z)$ est le maximum de $f$ au point $z$ , en négligeant les valeurs prises par $f$ sur des ensembles de mesure nulle; notons que c) associé à b) entraîne que $f$ soit semi-continue supérieurement.

Pour $n > 1$ , la classe des fonctions $R^{2n}$-sousharmoniques (où $R^{2n}$ est l'espace réel sous-jacent à $C^n$ ) n'est pas un objet analytique, mais la classe PSH(W) des fonctions plurisousharmoniques l'est. Elle est définie sur $W$ par rapport aux coordonnées locales par les conditions a),c) et par $b_1$) :
$L(f,\lambda) = \Sigma \frac{\partial^2 f}{\partial z_p\, \partial \bar{z}_q} \lambda_p \bar{\lambda}_q \geq 0$ pour tout $\lambda \in C^n$ ; ainsi $L(f, \lambda)$ est une mesure positive. Je dirai que l'objet PSH ,(introduit en 1942, et devenu

(1) La situation décrite dans ce paragraphe concerne la catégorie analytique (W) ; toutefois l'exposé est fait sans référence au langage des catégories.

très vite utile), est un objet souple, en précisant de la manière suivante :

DÉFINITION. - Un objet analytique $\mathcal{C}_s$ est dit souple s'il existe un objet classique $\mathcal{C}_c$ tel que pour toute variété analytique $W$, on ait une application $\psi : \mathcal{C}_c(W) \to \mathcal{C}_s(W)$ qui envoie l'objet classique dans l'objet souple.

En général $\psi$ ne sera pas surjective ; on cherche au contraire à disposer, en un certain sens, d'un objet plus étendu que l'objet classique ; en fait on créera ainsi des classes fermées pour certaines opérations de l'analyse (opérations longtemps appelées "de l'analyse réelle" justement parce que leur emploi en analyse complexe exigeait d'abord l'extension de celle-ci à des objets souples). Ainsi PSH est un objet souple, $\psi$ étant défini par $F \to \log|F|$, application de l'algèbre $H(W)$ des fonctions analytiques (dont on exclut $F \equiv 0$) dans $PSH(W)$ ; $\psi$ est injective si on identifie dans $H(W)$ les fonctions $F$ et $\alpha F$ pour $\alpha \in \mathbb{C}$ $|\alpha| = 1$ ; $\psi$ est continue si $H(W)-\{0\}$ est muni de la convergence compacte et $PSH(W)$ de $L^1_{loc}(W)$. L'objet PSH a l'avantage d'être fermé pour des opérations simples telles $(f_1,f_2) \to \sup(f_1,f_2)$, ou $(f_1,f_2) \to c_1f_1 + c_2f_2$, $c_j > 0$ et, ce qui est plus important les bornés de $PSH \cap L^1_{loc}$ sont relativement compacts : si $f_n \in PSH(W)$ est de Cauchy pour $L^1_{loc}$, il existe $f \in PSH(W)$, qui en est la limite ; en particulier si $f_t$ est un ensemble localement majoré, et si l'on pose $g = \sup_t f_t$, on obtient commodément $g^* \in PSH(W)$ par la construction $g^*(z) = \limsup_{y \to z} g(y)$, et l'on a $g(z) = g^*(z)$ presque partout (au § 5 on verra qu'il existe une propriété capacitaire plus précise pour l'ensemble $g < g^*$ ). Ces considérations sur l'utilité de la classe PSH étaient déjà perçues dans l'introduction du mémoire [6a] en 1945.

A la classe PSH, on associera celle des ensembles pluripolaires : $A$ est dit pluripolaire sur $W$ si l'on a $A \subset A'$ $[z \in W \; ; \; f(z) = -\infty, \; f \in PSH(W)]$ et $A$ sera dit pluripolaire complet dans $W$ si l'on a $A = A'$. Les ensembles analytiques (objet classique) sont des ensembles fermés qui sont localement pluripolaires complets.

Un autre objet souple a été introduit à l'occasion de la construction de l'opérateur d'intégration $[X]$ $(\varphi)$ d'une forme différentielle $\varphi$ sur un ensemble analytique $X$ (on notera $M^p$ la classe des $X$ qui sont de la même dimension complexe $p$ , $0 \leqslant p \leqslant n-1$ , en tous leurs points). On notera $T_+^p(W)$ la classe des courants positifs sur $W$ , et $T_{+,f}^p(W)$ ceux qui sont fermés. Ces derniers sont des objets analytiques et ce sont des objets souples ; par $X \to [X]$ on définit une application de $M^p(W)$ , objet classique, dans $T_{+,f}^p(W)$ . Pour la suite quelques rappels sont ici nécessaires. Un courant (au sens de G.de RHAM) est un opérateur linéaire sur l'espace $\mathcal{D}$ des formes différentielles $\mathcal{C}^\infty$ à support compact, muni de sa topologie classique ; on notera $\mathcal{D}_{p,q}(W)$ celles qui sont homogènes de type $(p,q)$ des $dz_i, d\bar{z}_j$ . On note $\mathcal{C}_{o,p,q}(W)$ celles de type $(p,q)$ dont les coefficients sont continus à support compact dans $W$ . Les définitions étant locales, précisons-les quand $W$ est un domaine de $C^n$ . On définit $t \in T_+^p(W)$ si $t$ est (un opérateur linéaire) continu sur $\mathcal{D}_{s,t}(W)$ , nul sauf si $s = t = p$ ; de plus pour tout système $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ de formes $(1,0)$ à coefficients constants et toute fonction $f \in \mathcal{D}(W)$ vérifiant $f \geqslant 0$ , on exige :

$T(0,\alpha)(f) = t\,[f\,\alpha, \wedge\, i\,\bar{\alpha}_1 \wedge \ldots\, i\alpha_p \wedge \bar{\alpha}_p] \geqslant 0$ .

Dans la suite on note $\partial$ (et $\bar{\partial}$ ) les différentielles relatives aux seuls $z_i$ , (ou $\bar{z}_i$ ) . On a $d = \partial + \bar{\partial}$ . On pose aussi $d^c = i(\bar{\partial} - \partial)$ et on a $dd^c = 2i\,\partial\bar{\partial}$ . Un courant $t \in T_+^p$ est représenté par une forme différentielle qu'on notera

$\sum_{I,J} t_{I,\bar{J}}\, dz_I \wedge d\bar{z}_J$ , $(I = i_1 < i_2 \ldots < i_{n-p})$ homogène de type $(n-p, n-p)$ ; il a la continuité d'ordre zéro et s'étend aux formes $\mathcal{C}_{o,p,p}$ ; ses coefficients $t_{I,J}$ sont des densités-mesures ; si l'on pose $\beta = \frac{i}{2} \Sigma\, dz_k \wedge d\bar{z}_k = \frac{i}{2}\,\partial\bar{\partial}\,\|z\|^2$ et définit par $\beta_n = \frac{1}{n!}\,\beta^n$ la forme fondamentale de $C^n$ , les courants $t_{I,J}\,\beta_n$ sont des mesures complexes. Un théorème de multiplication énonce : soient $t \in T_+^p$ et $T' \in T_+^q$ , alors si $t$ ou $t'$ est une forme à coefficients continus et si $\min(p,q) = 1$ , le produit $t \wedge t'$ est défini et appartient à $T_+^{p+q}$ . Les formes positives du type $(1,1)$ forment donc un système multiplicatif ; $\beta = \frac{i}{2}\,\partial\bar{\partial}|z|^2$ est une forme positive ; si l'on a $f \in PSH$ , le courant $i\,\partial\bar{\partial}\,f$

appartient à $T^1_+$ , la positivité étant dans ce cas équivalente à la condition $b_1$) plus haut. D'où un formalisme pour écrire certaines mesures . Soit $t \leq T^p_+$ , alors $\sigma = t \wedge \beta_p$ où $\beta_p = \frac{1}{p!}\beta^p$ , est une mesure positive (dite la <u>trace</u> de $t$ ). Elle domine $t$ en ce sens que pour une forme $\varphi \in \mathcal{E}_{p,p}$ , de coefficients $\varphi_{I,J}(x)$ , si l'on pose $|\varphi|(x) = \sup_{I,J} |\varphi_{I,J}(x)|$ , on a $|t(\varphi)| \leq C_{n,p}\, \sigma(|\varphi|)$ où $C_{n,p}$ ne dépend que des dimensions.

Si $t$ , de dimension $p$ , est de plus fermé, c'est-à-dire si l'on a $t(d\varphi) = 0$ sur les formes $\varphi \in \mathcal{D}$, on a pour $\sigma$ une <u>propriété de régularité</u>. Si $\sigma(x,r)$ est la masse de $\sigma$ portée par la boule compacte $B(x,r)$ de centre $x$ , de rayon $r$ , le quotient

(1) $$\nu(x,r) = (\tau_{2p}\, r^{2p})^{-1}\, \sigma(x,r)$$

par le volume de la boule unité de $C^p$ est fonction croissante de $r$ ; il en résulte l'existence de

$$\nu_t(x) = \lim_{r=0} \nu(x,r)$$

qui vérifie donc $\nu_t(x) \geq 0$ et est une fonction semi-continue supérieurement de $x$ . D'une manière équivalente, la mesure positive $t \wedge (\frac{i}{2\pi}\, \partial\bar{\partial} \log \|z\|^2)^p$ se prolonge en $x$ par une mesure ponctuelle de valeur $\nu_t(x)$ au point $x$ .
Le nombre $\nu_t(x)$ (nombre de Lelong dans les travaux américains) est un invariant des isomorphismes analytiques et est donc défini sur les variétés $W$ .
L'intégration $[X]\,(\varphi) = \int_X \varphi$ sur un ensemble $X \in M^p(W)$ est un courant positif fermé et l'application $\psi$ de $M^p(W)$ , objet classique , dans $T^p_{+,f}(W)$ donnée par $X \to [X]$ montre que <u>la classe des courants positifs fermés est un objet analytique souple</u> ; on a $X = \operatorname{supp}[X]$ et $\psi$ est une bijection $M^p(W)$ sur une partie de $T^p_{+,f}(W)$ . Ceci permet de définir commodément des topologies sur $M^p(W)$ ; on les obtient par tranfert par $\psi$ des topologies définies sur l'objet souple $T^p_{+,f}(W)$.

3. Représentation des ensembles analytiques comme ensembles de densité . Il est important pour la suite de caractériser l'image par $\psi$ de $M^p(W)$ dans $T^p_{+,f}(W)$ Une suite de travaux [9] et [4] a d'abord établi que pour $t = [X]$ , le nombre $\nu_t(x)$ est un entier égal à la multiplicité de $x$ sur $X$ . Réciproquement, si $t \in T^+_{+,f}(W)$ possède un nombre $\nu_t(x)$ qui est un entier $\sigma$-presque partout, alors supp $t$ est un ensemble analytique. Plus précis est le résultat suivant obtenu ensuite [7] : l'ensemble $E(c,t) = [x \in W \; ; \; \nu_t(x) \geqslant c, \; c > 0]$ est un ensemble analytique sur $W$ , et ses composantes sont de dimension au plus $p = \dim t$ , $0 \leqslant p \leqslant n-1$. Un résultat récent [6,c] montre que dans les domaines pseudo-convexes de $C^n$ et plus généralement sur les variétés de Stein $W$, si l'on se donne $t \in T^p_{+,f}(W)$ , il existe une fonction plurisousharmonique $f \in PSH(W)$ pour laquelle le courant $\Theta = \frac{i}{\pi} \partial\bar\partial f \in T^1_{+,f}(W)$ vérifie en tout point $x \in W$ l'égalité $\nu_\Theta(x) = \nu_t(x)$ . Or pour un tel courant $\Theta$ , on a par le théorème de Gauss

$$\sigma = \frac{1}{2\pi} \Delta f \quad \text{et} \quad \nu_\Theta(x) = \lim_{r=o} \frac{\partial}{\partial \log r} \lambda(f,x,r) = \lim_{r=o} (\log r)^{-1} \lambda(f,x,r), \quad 0 < r < 1 \; .$$

en notant $\lambda(f,x,r)$ la moyenne de $f$ sur la sphère $S(x,r)$ . D'autre part sur une variété de Stein $W$ , un ensemble analytique $X$ admet une représentation globale $X = \{F_j = 0\}$ , $F_j \in H(W)$ , $1 \leqslant j \leqslant n+1$ .

En posant $f = \frac{1}{2} \log \Sigma |F_j|^2 \in PSH(W)$ et $\Theta = \frac{i}{\pi} \partial\bar\partial f$ , on a $\nu_\Theta(x) \geqslant 1$ en tout point $x \in X$ . Ainsi : dans les domaines pseudo-convexes de $C^n$ et plus généralement sur une variété de Stein $W$ , la classe des sous-ensembles analytiques coïncide avec celle des ensembles de densité $E(c, \Theta)$ où $\Theta = \frac{i}{\pi} \partial\bar\partial f$ est le courant associé à une fonction $f \in PSH(W)$ . Pour abréger, nous noterons $E(c,f)$ cet ensemble qui est l'ensemble de densité $\geqslant c$, $c > 0$ , de la mesure positive $\frac{1}{2\pi} \Delta f$ , calculée en dimension (réelle) $2n-2$ .

La représentation globale ainsi obtenue pose des problèmes de contrôle de croissance, Il suffit de les étudier pour $W = C^n$ ; en effet une variété de Stein $W$ admet un plongement propre $h$ dans $C^m$ , pour $m \geqslant 2n-1$ ; il induit une application $t \to h_* t$ de $T^p_{+,f}(W)$ dans $T^p_{+,f}(C^n)$ qui conserve le nombre $\nu(x,t)$ et l'on étudiera alors les croissances sur la suite de compacts $K(r) \cap W$, $K(r) = h^{-1} [B(0,r)]$, obtenus à partir des boules $B(0,r)$ dans $C^n$ pour $r \to +\infty$ .

Ceci permet une étude à croissance sur $W$ en transportant les résultats de $C^n$ à $W$ . Donnons ici quelques résultats récents (cf. [6, d] ) :

a) - Un premier problème est : si l'on se donne une majoration de la croissance de $V \in PSH(C^n)$, caractérisée par l'indicatrice $M_V(r) = \sup_{\|z\| \leq r} f(z)$ dans $C^n$ , existe-t-il un contrôle de croissance de la composante $E^k(c,f)$ de la dimension $k$ ( $0 \leq k \leq n-1$ ) de $E(c,f)$ ? Il en est ainsi pour $k = n-1$ . Plus généralement si l'on se donne $t \in T^p_{+,f}(C^n)$ , la composante de $E(c,t)$ <u>de dimension maxima</u> , soit $E^p(c,t)$ <u>a une aire</u> $\sigma_p$ <u>contrôlée par la trace</u> $\sigma$ <u>de</u> $t$ . On a $\sigma_p(c,r) \leq c^{-1} \sigma(0,r)$ , où $\sigma_p(c,r)$ est l'aire de $E^p(c,t) \cap B(0,r)$ . De plus à chaque cycle $Z^p \subset E^p(c,t)$ on peut associer une valence $N(Z^p)$ relative à $t$ , définie par

$$N(Z^p) = \inf_{x \in Z^p} \nu(x,t) .$$

On a alors $\nu(x,t) = N(Z^p)$ pour tout $x \in Z^p$ sauf pour $x$ appartenant à un sous-ensemble analytique strict $Z' \subset Z$ , pour lequel on a $\dim Z' < p$ . Le courant $S^p = \Sigma N(Z^p) [Z^p]$ étendu à tous les cycles $Z^p$ de $C^n$ converge , est positif fermé, et le courant "résiduel" $t - S^p$ est positif fermé et n'a plus de cycles de densité de dimension $p$ . La trace $\sigma$ de $t$ majore celle de $S^p$ , ce qui donne un contrôle de croissance de celle-ci dans $C^n$ .

b) - Un tel résultat est exclu pour les cycles $Z^q$ de dimension $q < p$ . En particulier pour les cycles de codimension $\geq 2$ de $E(c,f)$ pour $f \in PSH(C^n)$ : l'existence d'un tel contrôle contredirait d'ailleurs l'exemple donné dans [4] d'un système de deux fonctions entières $F_1, F_2 \in H(C^2)$ n'ayant que des zéros communs isolés, mais dont le nombre $n(r)$ dans $B(0,r)$ croit arbitrairement vite, pour une majoration donnée de $M_f(r)$ , $f = \frac{1}{2} \log (|F_1|^2 + |F_2|^2)$ .

Des exemples montrent que les ensembles $E'(c_0,t) = [x \in C^n ; \nu(x,t) > c_0, c > 0]$ ne sont pas analytiques, une suite infinie de cycles $Z^p_s$ dont la valence $c_s > c_0$ tend en décroissant vers $c_0$ pouvant être absorbée par un cycle de dimension $q' > q$ de valence $c_0$ quand $c$ décroit et traverse la valeur $c_0$ , et ceci sur un compact de $C^n$ . Toutefois $E(c,t)$ possède sur un compact $\bar{D}$ une stabilité à gauche : pour tout $c > 0$ , il existe $\gamma = \gamma(c,\bar{D}) > 0$ , tel qu'on ait $E(c,t) \cap D = E(c',t) \cap D$ pour tout $c'$ vérifiant $c-\gamma<c' \leqslant c$ .

c) - Un second résultat de l'étude [6,d] est pour les ensembles $E(c,f)$ , $f \in PSH(\mathbb{C}^n)$ , l'existence d'une hypersurface $Y_c = F^{-1}(0)$ , $F \in H(\mathbb{C}^n)$ , qui contient tout l'ensemble $E(c,f)$ , et ceci avec un contrôle pour $M_F(r) = \sup\limits_{\|z\| \leqslant r} \log |F(z)|$ de la forme suivante : pour tous $\varepsilon > 0$, $\varepsilon' > 0$ , on a

$$(2) \qquad M_F(r) \leqslant \frac{n}{c} M_V(r + \varepsilon') + (n + \varepsilon)\log(i+r) + C(n,\varepsilon') .$$

Ce résultat appelle quelques remarques : 1°/ le contrôle obtenu pour $Y_c$ , c'est-à-dire le contrôle de croissance pour $[Y_c]$ n'est qu'asymptotique, car de (1) on déduit seulement une majoration pour l'aire $\sigma(r)$ de $Y_c \cap B(0,r)$ qui est du type

$$\nu(r) = (\tau_{2n-2} r^{2n-2})^{-1} \sigma(r) \leqslant M_F(kr) + C(F) \quad , \quad k > 1 .$$

L'existence d'un contrôle propre est un problème ouvert ; 2°/ contrairement au résultat a) le résultat c) fait intervenir la dimension $n$ ; 3°/ la démonstration utilise essentiellement les estimées $L^2$ de HÖRMANDER sous la forme suivante .

Soit $f \in PSH(\mathbb{C}^n)$ et $x_o \in \mathbb{C}^n$ au voisinage duquel $e^{-f}$ est sommable. Pour $\varepsilon > 0$, on pose $g(x) = f(x) + (n+\varepsilon)\log(1 + \|z\|^2)$ .

Alors il existe $F \in H(\mathbb{C}^n)$ qui vérifie $F(x_o) = 1$ et

$$(3) \qquad \|F\|_g^2 = \int_{\mathbb{C}^n} |F(x)|^2 e^{-g(x)} dv(x) < \infty .$$

Ce théorème fait passer avec contrôle de croissance de l'objet PSH à l'objet H (sous la forme (3), il améliore dans [8a] des résultats antérieurs).

d) -Le résultat sur $Y_c$ est valable plus généralement pour les courants $t \in T^p_{+,f}(\mathbb{C}^n)$ . On construit (cf.[6,c]) $\theta = \frac{i}{\pi} \partial\bar{\partial} f$ , et $f \in PSH(\mathbb{C}^n)$ vérifiant $\nu(x,\theta) = \nu(x,t)$ en conservant un contrôle de croissance. Si $t$ a son indicatrice bornée, ou si $f \in PSH(\mathbb{C}^n)$ est de la classe de croissance minimale $M_f(r) = O(\log r)$ , les ensembles de densité sont algébriques. D'où limitation des degrés et l'on retrouve pour $Y_c$ un résultat donné dans [3] en vue d'un problème de théorie des nombres. Dans le cas général où l'on a $t \in T^p_{+,f}(C^n)$, $p < n-1$, le problème semble ouvert de savoir si l'on peut substituer à $Y_c$ un ensemble analytique $Y'_c$ de dimension pure $p$, avec contrôle de croissance.

4. Indiquons maintenant quelques uns des résultats obtenus dans [5] pour le prolongement des ensembles analytiques en traitant des problèmes correspondants sur l'objet souple qui est la classe des courants positifs fermés. On se place dans $C^n$, les problèmes étant locaux. Le passage des uns aux autres utilisera :

PROPOSITION. - Soit $G$ un domaine de $C^n$ et $A \subset G$ un ensemble fermé ; on suppose $\mathring{A} = \phi$ et $G \setminus A$ connexe. Alors si tout courant positif fermé $t$ admet un prolongement $t'$ positif fermé à $G$, tout ensemble analytique $X$ défini dans $G \setminus A$ a un prolongement $X'$ à $G$. De plus si $t' = \tilde{t}$, extension simple de $t$ (c'est-à-dire sans charger $A$) alors on peut choisir $X' = \bar{X}$ adhérence de $X$ dans $G$.

Même énoncé en remplaçant "courant positif fermé" par "courant positif fermé de masse finie au voisinage de $A$" et $X$ d'aire finie au voisinage de $A$.

En effet en désignant par $T^p_{+,f}(G)$ la classe des courants positifs dans $G$ et supposant $X$ de dimension pure $p$, on a $[X] = t \in T^p_{+,f}(G \setminus A)$ et $X = E(1,t)$. Alors $E(1,t') = X'$ est un ensemble analytique dans $G$ ; on a $X \subset X'$, d'après $t = t'$ dans $G \setminus A$. On a alors $X \subset \bar{X} \subset X'$ dans $G$. De plus si la restriction $1_A\, t'$ de $t$ à $A$ est nulle, supp. $t'$ appartient à l'adhérence dans $G$ de supp. $t$. D'où $X' = E(1,t') \subset$ supp $t' \subset \bar{X}$, d'où $X' = \bar{X}$.

L'extension $\tilde{t}$ qui vérifie $1_A\, \tilde{t} = 0$, dite extension simple, existe si et seulement si $t$ est de masse finie au voisinage des points de l'obstacle $A$ ; elle est alors un courant positif.

a/ Ceci posé, un premier résultat énonce : si $A \subset G$ est fermé et localement pluripolaire complet dans $G$, alors tout courant positif fermé donné dans $G \setminus A$ et de masse finie au voisinage des points de $A$ a pour extension simple $\tilde{t}$ un courant positif fermé dans $G$.

D'après ce qui précède, on a seulement à établir que $\tilde{t}$ est fermé, ce qui revient à établir une propriété de géométrie différentielle à partir de majorations de mesures, en utilisant la positivité. L'ensemble $A$ peut être défini localement par $A = [z \in G \ ; \ u(z) = -\infty]$ où $u$ plurisousharmonique peut être prise continue et $\mathcal{C}^\infty$ en dehors de $A$. On utilisera le fait que le graphe de $t \to \varphi(t) = [\log(-t)]^\alpha$, $\alpha > 0$, est croissant convexe pour $-\infty < t < -e$. Il en résulte que $v(z) = \varphi \circ u\,(z)$ est plurisousharmonique dans l'ouvert $K(r) = [z \in G \ ; \ u(z) < -1 + \log r]$ pour $r < 1$. Or on a :

$$dd^c v = \varphi' \, dd^c u + \varphi'' \, du \wedge d^c u$$

où les deux termes à droite sont des formes positives ; si l'on convient d'écrire $t_1 \geq t_2$ quand $t_1 - t_2$ est un courant positif, on aura d'après le théorème de multiplication pour $t \in T^p_{+,f}(G)$ :

$$(4) \qquad t \wedge dd^c v \geq \varphi'' \, t \wedge du \wedge d^c u$$

et (4) donne une majoration de $du \wedge d^c u$. Choisissant $\varphi(t)$ comme plus haut, on obtient le lemme suivant essentiel dans [5] : si $A = [z \in G \ ; \ u(z) = -\infty]$ est un ensemble fermé pluripolaire complet déterminé par $u \in PSH(G)$ et si $t \in T^p_{+,f}(G \setminus A)$ y est de masse localement finie au voisinage de $A$, alors on a pour tout $\alpha > 0$ et tout compact $K \subset G$ :

$$(5) \qquad \int_{K \setminus A} t \wedge du \wedge d^c u \ \frac{\beta^{p-1}}{u^2[\log(-u)]^\alpha} < +\infty \ .$$

On va encore utiliser la positivité en remarquant que si une forme hermitienne $az\bar{z} + bz + \bar{b}\bar{z} + c$ est semi-définie positive, ou a pour tout $\varepsilon > 0$, $|b| \leq \varepsilon a + c\varepsilon^{-1}$. Il s'agit d'établir $d\tilde{t} = 0$ pour l'extension simple $\tilde{t}$ de $t$. Soit $\chi(v)$ une fonction croissante $C^\infty$, vérifiant $\chi(v) = 0$ pour $v \leq e^{-2}$ et $\chi(v) = 1$ pour $v < e^{-1}$ ; posons

$$\chi_r(z) = \chi\left(\frac{e^{u(z)}}{r}\right) \ , \qquad r < 1 \ ,$$

on a $\tilde{t} = \lim_{r=0} (\chi_r \, t)$, $d\tilde{t} = \lim_{r=0} d(\chi_r \, t)$.

On traite d'abord le cas $p = 1$, où le calcul est plus simple car on a à calculer $t(d\varphi)$ pour des $\varphi$ du type $(0,1)$ ou $(1,0)$.

En supposant $\varphi$ de type $(0,1)$ on a

$$<d(\chi_r\ t)\ ,\ \varphi> \ = \ <t\ ,\ d\chi_r \wedge \varphi> \ = \int t \wedge X'(\frac{e^u}{r})\ \frac{e^u}{r}\ \partial u \wedge \varphi\ .$$

D'où en posant $C = \sup_v |v\ \chi'(v)|$ , une majoration

$$(6)\qquad |<d(\chi_r\ t)\ ,\ \varphi>| \leq \varepsilon_r \int_{K(r)} t \wedge i\ \partial u \wedge \bar\partial u \ + \ \frac{C}{\varepsilon_r}\int_{K(r)} t \wedge i\ \bar\varphi \wedge \varphi$$

où $K(r) = K \cap [z \in G\ ;\ -1 + \log r \leqslant u(z) < \log r]$ est une "couronne" autour de $K \cap A$ . On utilise $\int_{K \setminus A} t \wedge i\ \varphi \wedge \bar\varphi < \infty$ et la majoration (5) avec $\alpha = \frac{1}{2}$ . On établit que pour $r_m = \exp(-p_m)$ , $\varepsilon_m = p_m^{-1}(\log p_m)^{-3/4}$ où l'on prend pour

$p_m$ une suite d'entiers croissants, vérifiant $\lim p_m = +\infty$, (6) donne $\lim |<d(\chi_{r_m}\ \tilde t), \varphi>| = 0$ . D'où $<d\tilde t, \varphi> = 0$ , les courants $\tilde t$ et $t$ coïncidant sur $\mathrm{supp}\ d\chi_{r_m}$ . On traite de même le cas où $\varphi$ est de type $(1,0)$ . Si $t$ est de dimension $p > 1$ , et $\varphi$ de type $(p-1, p)$, on se ramène au cas précédent en décomposant $\varphi = \sum_{j=1}^{N} W_j \wedge g_j$ , où $g_j$ est de type $(0,1)$ et $W_j = i^{p-1}\ \alpha_1 \wedge \bar\alpha_1 \ldots \alpha_{p-1} \wedge \bar\alpha_{p-1}$ les $\alpha_k$ étant du type $(1,0)$ à coefficients constants . On remarque que le courant $t \wedge W_j$ positif fermé, de dimension 1 , est de masse finie au voisinage de $A$ .

L'énoncé ainsi établi a un caractère quasi définitif. Il "coiffe" une longue suite de travaux et répond à une question posée au Congrès d'Helsinki en 1978 ; il contient d'après la proposition du début de ce paragraphe l'énoncé : tout ensemble analytique $X$ défini dans $G \setminus A$ d'aire finie, où $A$ est fermé et localement pluripolaire complet, a pour adhérence $\bar X$ dans $G$ un ensemble analytique qui prolonge $G$ . Il contient aussi le cas où l'obstacle $A$ est un ensemble analytique et où l'on prolonge $t \in T^p_{+,f}(G \setminus A)$ , cas qui avait pu être résolu peu auparavant dans [8,b] . Ainsi il englobe les différentes situations où l'on remplace l'un des deux objets souples par l'objet classique.

Le corollaire suivant concerne la classe $P_c(W)$ des ensembles fermés <u>localement pluripolaires complets</u> sur une variété analytique $W$ : soit $A \in P_c(W)$ et $t \in T^p_{+,f}(W)$ , alors la restriction $1_A\ t$ de $t$ à $A$ appartient encore à $T^p_{+,f}(W)$ et est donc encore un <u>courant fermé</u>.

En effet soit $t' = 1_{W \setminus A}\ t$ ; on a $t - t' = 1_A\ t$ et on a $t' \in T^p_{+,f}(W)$ d'après le théorème ; il en résulte que $1_A\ t$ est fermé également, donc qu'on a $1_A\ t \in T^p_{+,f}(W)$ .

Le contre-exemple suivant montre que le théorème est en défaut si $A$ , fermé et pluripolaire, n'est pas localement complet. Soit $W = C^n$ , et $A = [z \in C^n\ ,\ \frac{1}{2} \leq |z_1| \leq 1\ ,\ z_j = 0\ ,$ pour $j \neq 1\ ]$ . Soit d'autre part $t$ le courant d'intégration sur $X = [z \in C^n\ ; |z_1| > 1\ ,\ z_j = 0$ pour $j \neq 1\ ]$. Le courant $t = [X]$ est positif fermé dans $C^n \setminus A$ , de masse (l'aire de $X$ ) localement finie. S'il existe un prolongement $t'$ de $t$ à $C^n$ , l'ensemble de densité $E(1,t') \subset C^n$ est un ensemble analytique qui contient $X$ ; il contient donc tout l'axe des $z_1$ , donc l'origine $0$ . On a donc $\nu(t',0) \geq 1$ . Or $t' = t = 0$ au voisinage de $0$ . D'où contradiction montrant qu'aucun prolongement n'est possible pour $t = [X]$ , même si on envisage d'autres procédés que l'extension simple.

Peut-on s'affranchir de la condition : $t$ est de masse finie au voisinage de $A$ ? Le problème est ici analogue au problème classique du prolongement des fonctions holomorphes ou des fonctions plurisousharmoniques : on peut éliminer l'hypothèse de finitude au moyen d'une hypothèse plus précise sur le fermé $A$ . Dans [5] on trouvera l'énoncé suivant :

Soit $A$ un sous-ensemble fermé d'une variété réelle $M$ de classe $\mathcal{C}^2$ plongée dans une variété analytique $W$ ; on note $H_z(M)$ en $z$ le plus grand sous-espace complexe contenu dans l'espace tangent en $z$ à $M$ . Soit $t \in T^p_{+,f}(W \setminus A)$ . Supposons $\dim_C H_z(M) < p-1$ pour tout $z \in M$ . Alors $t$ a un prolongement unique comme courant positif fermé dans $W$ . Là encore la difficulté est de montrer que l'extension simple $\tilde{t}$ qui donne le prolongement est un courant fermé. La démonstration demande un travail technique nettement plus élaboré que l'énoncé précédent ; un point essentiel est le lemme suivant :

Soit $G$ un domaine de $C^n$ et $A = [z \in G\ ;\ u(z) = 0]$ , et $u \in PSH(G)$ . S'il existe $\eta \geq \frac{2}{3}$ tel qu'on ait au sens des courants, pour $n-k$ indices $j_1, \dots j_{n-k}$ :

$$i\,\partial\bar\partial u \geq u^{-\eta} \sum_{s=1}^{n-k} i\,dz_{j_s} \wedge d\bar z_{j_s}$$

et $t \in T^{p}_{+,f}(G \smallsetminus A)$ , avec $p > k+1$ , alors $t$ est de masse finie au voisinage de $A$ et l'extension simple $\tilde{t}$ prolonge $t$ à travers $A$ en $\tilde{t} \in T^{+}_{p,f}(G)$ .

Les ensembles $A$ fermés qui vérifient la condition précédente avec l'hypothèse moins stricte $p \geq k+1$ ne peuvent être chargés par $t \in T^{+}_{p,f}(G)$ .

La méthode s'applique aux sous-variété totalement réelles $M$ de classe $\mathcal{C}^2$ (en particulier au sous-espace réel $R^n$ lequel n'est pas pluripolaire dans $C^n$ ) . Les hypothèses sur $A$ et $M$ de nature géométrique montrent l'importance de la dimension de $H_z(M) \in T_z\, M$ qui constitue la barrière au prolongement. La technique de démonstration utilise des majorations du produit $t \wedge \omega$, où $\omega$ est une forme (2.2) , ce qui complique les calculs. L'exemple suivant montre que l'inégalité stricte sur les dimensions est nécessaire pour obtenir l'existence du prolongement. En considérant dans $C^2$ le cas $t = [X]$ , où $X = [z_2 = 0 \, , \, |z_1| > 1]$ et où $M = [z_2 = 0 \; ; \; |z_1| = 1]$ , on voit qu'il n'existe aucun prolongement $t'$ de $t$ à $C^2$ qui soit positif fermé. En effet on aurait $\nu(t',0) = 0$ à l'origine . D'autre part l'ensemble de densité $E(1, t') \supset X$ étant analytique dans $C^2$ contiendrait l'origine, d'où contradiction. Comme le précédent le théorème de prolongement obtenu coiffe un bon nombre de théorèmes obtenus précédemment .

5. La recherche d'une capacité pour l'analyse complexe. A mesure que s'est développée l'étude des objets souples, celle des fonctions plurisousharmoniques en particulier, des problèmes sont apparus dont certains sont formellement analogues à ceux de la théorie du potentiel (rappelons que pour $n = 1$ , $PSH(\mathbb{C})$ s'identifie à la classe $R^2$-sousharmonique). Existe-t-il alors une fonction d'ensemble $c(A) \geq 0$, définie au minimum sur le clan borélien, telle que l'on ait $c(A) = 0$ sur les fermés si et seulement si $A$ est pluripolaire ? Sous cette forme le problème a beaucoup de solutions. Celle $c(E,G)$ qui est définie dans [2] , relativement à un domaine $G$ à partir des compacts $K = E$ , est une capacité de Choquet, invariante par les isomorphismes analytiques de $G$ . Elle utilise l'opérateur non linéaire complexe $f \to (dd^c f)^n$ de Monge-Ampère (appliqué à une sous-classe de $PSH$ ) ; elle s'appuie sur le théorème de multiplication pour construire des mesures capacitaires

et pour retrouver des énoncés qui pour $n = 1$ utilisaient l'opérateur laplacien $f \to \Delta f$, qui est la trace de l'opérateur $f \to 2i\partial\bar{\partial} f = dd^c f$.

Indiquons les principaux résultats de [2], le problème préliminaire étant de définir $M_n(f) = (dd^c f)^n$ pour une sous-classe suffisamment étendue dans PSH(G). On a $(dd^c f)^n = c_n \left[\frac{\partial^2 f}{\partial z_p \partial \bar{z}_q}\right]_{p,q} d\lambda$ où $d\lambda$ est l'élément de volume de $\mathbb{C}^n$. Pour $f \in PSH(G) \cap \mathcal{E}^\infty(G)$, $(dd^c f)^n$ est une mesure positive. En général pour une suite $f_j \in PSH(G) \cap \mathcal{E}^\infty(G)$, décroissante vers $f \in PSH(G)$ la mesure positive $(dd^c f_j)^n$ augmente indéfiniment. Aussi le point de départ de [2] est-il l'étude de cette convergence dans $L^\infty(G)$. Un énoncé de Chern-Levine-Nirenberg [10] donne : si $v^1,\dots,v^n$ sont $n$ fonctions plurisousharmoniques $v^k \in L^\infty(G)$ (on pose $\|v\|_K = \sup |v(z)|$), alors pour tout compact $K \subset G$, il existe $a = a(K)$ tel que l'on ait

$$\left| \int dd^c v^1 \wedge \dots \wedge dd^c v^k \wedge \beta_{n-k}\right|_K \leq a \|v^1\|_K \dots \|v^k\|_K$$

ce qui montre que les produits de formes $dd^c v^k$ peuvent être définis pour des $v_j^k \in L^\infty_{loc}(G)$ ( s'il existe, alors, d'après le théorème de multiplication, le produit est une forme positive) ; en particulier $(dd^c v)^n$ définira une mesure positive finie).

On montre que pour des suites $v_j^1,\dots,v_j^k$ monotones (d'indice $j$), convergentes dans $L^\infty_{loc}$, le produit $dd^c v_j^1 \wedge \dots \wedge dd^c v_j^k$ a une limite (pour la topologie faible des courants). On travaille sur l'espace $L^\infty_{loc}(G) \cap PSH(G)$, où l'on peut supposer $G = [z \in \mathbb{C}^n ; \rho(z) < 0]$, $\rho$ étant $\mathcal{E}^\infty$ et $G$ strictement pseudo-convexe dans $\mathbb{C}^n$. Pour se ramener à des domaines relativement compacts dans $G$ on opère ainsi : soient $\omega_1 \subset\subset \omega_2 \subset\subset G$ : on peut trouver $A$ et $B$, $A > 0$ assez grand pour qu'on ait $A_\rho(z) + B \geq v(z)$ dans $G \setminus \omega_2$ et $A_\rho(z) + B < v(z)$ dans $\omega_1$. Alors $\tilde{v} = \sup [v(z), A_\rho(z) + B]$ coïncide avec $v$ dans $\omega_1$ et vaut $A_\rho + B$ dans $G \setminus \omega_2$.

On définit alors une capacité des compacts $K \subset G$ :

$$c(K,G) = c(K) = \sup \int_K (dd^c u)^n \quad , \quad u \in PSH(G) \cap L^\infty_{loc}(G) \ , \quad 0 < u < 1$$

d'où une capacité intérieure $c(E,G)$ des ensembles $E \subset G$ :

$$c(E,G) = \sup [c(K) \quad , \quad K \text{ compact dans } G \text{ et } K \subset E]$$

qui a les propriétés a) $E_1 \subset E_2 \rightarrow c(E_1,G) \leq c(E_2,G)$

b) $E \subset G_1 \subset G_2 \rightarrow c(E,G_1) \geq c(E,G_2)$

c) $c[\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j, G] \leq \sum_{j=1}^{\infty} c(E_j,G)$

d) Si $E_q \subset E_{q+1}$ est une suite croissante d'ensembles boréliens dans $G$, on a $c(\bigcup E_q) = \lim_{q=\infty} c(E_q)$.

On peut alors s'inspirer de la théorie classique des potentiels, convolutions de mesures positives avec un noyau.

Une fonction $f \in PSH(G)$, $G$ borné dans $\mathbb{C}^n$, est continue si on retire de $G$ un ouvert $\omega$ de capacité $c(\omega,G) < \varepsilon$ arbitrairement petite, ce qui donne par exemple : si $u_j \searrow \omega$, $u$ et $u_j$ de la forme "rectifiée" $\Lambda_\rho(z) + B$ près de $bG$, alors $\lim_{j=\infty} c[z \in G ; u_j(z) > u(z) + \delta] = 0$ pour tout $\delta > 0$. De même on obtient des théorèmes de comparaison "analogues" à ceux de la théorie du potentiel, la mesure $(dd^c v)^n$ remplaçant le laplacien $\Delta$ : soient $G$ domaine borné de $\mathbb{C}^n$ et $u, v \in PSH(G) \cap L^\infty(G)$ ; si $\liminf_{z \to bG} [u(z) - v(z)] \geq 0$, on a $\int_{u<v} (dd^c v)^n \leq \int_{u<v} (dd^c u)^n$.

Cette capacité relative à $G$, étudiée dans [2] permet de résoudre deux problèmes qui étaient ouverts : appelons négligeable dans $G$ tout ensemble $A \subset A' = [z \in G ; v(z) < v^*(z)]$, où $v(z) : \sup_n u_n(z)$ est la limite d'une suite croissante $u_n \in PSH(G)$ localement bornée supérieurement, et où $v^*(z)$ est la régularisée supérieure de $v$, définie par $v^*(z) = \limsup_{y_n \to z} v(y_n)$ ; on a $v^* \in PSH(G)$. Avec la capacité $c(A,G)$ définie plus haut on a : pour tout ensemble négligeable $A \subset G$, on a $c(A,G) = 0$, c'est-à-dire les compacts $K \subset A$ vérifient $c(K,G) = 0$.

De plus si $K$ est un compact dans $G$ et $u_K(z) = \sup[u(z), u \in PSH(G), u \leq -1$ sur $K$, $u < 0$ sur $G]$, la régularisée supérieure $u_K^*$ joue le rôle joué par le potentiel capacitaire dans le cas $n = 1$ ; on l'appellera la fonction extrémale de $K \subset G$. On a

(a) - $(dd^c u_K^*)^n = 0$ dans $G \setminus K$

(b) - $c(K,G) = \int_G (dd^c u_K^*)^n = \int_K (dd^c u_K^*)^n$

(c) - Si l'on a $u_K^*(x) > -1$ pour tout $x \in K$, on a $c(K, G) = 0$.

D'autres problèmes concernent les <u>ensembles pluripolaires</u>. Un ensemble localement pluripolaire sur une variété $W$ l'est-il globalement ? Peut-on, comme en théorie du potentiel, les caractériser avec l'aide de la capacité ? Le premier problème avait été résolu peu auparavant : dans $\mathbb{C}^n$ et sur les variétés de Stein, la réponse est oui. On retrouve ce résultat aussi en résolvant le second problème qui identifie les pluripolaires aux ensembles de capacité nulle. Tout d'abord on définira la capacité <u>extérieure</u> $c^*(E)$ . Pour un ouvert $\mathcal{O} \subset\subset G$ , on a
$c(\mathcal{O}, G) = \int (dd^c u_{\mathcal{O}})^n = \sup_K c(K,G)$ pour $K \subset \mathcal{O}$. On définit $\overset{*}{c}(\mathcal{O}, G) = c(\mathcal{O}, G)$
et pour $E \subset\subset G$ , on définit

$$c^*(E) \equiv c^*(E,G) = \inf_{\mathcal{O}} [\, c(\mathcal{O}, G) \; ; \; E \subset \mathcal{O} \subset\subset G] .$$

Pour un ouvert on a $u^*_{\mathcal{O}} = \lim\nearrow u^*_{K_j}$ , pour $K_j$ compacts $\nearrow \mathcal{O}$.
La capacité $c^*(E)$ vérifie $c^*(E_1) \leq c^*(E_2)$ si on a $E_1 \subset E_2 \subset G$ ,
$c^*(E,G_1) \geq c^*(E,G_2)$ si $E \subset G_1 \subset G_2$ et $c^*(\bigcup_j E_j, G) \leq \sum_j c^*(E_j,G)$ ,
et on a les propriétés suivantes des fonctions extrémales : $u^*_1 \geq u^*_2$ , si $E_1 \subset E_2 \subset G$ ;
$u^*_E(z,G_1) \geq u^*_E(z,G_2)$ si $E \subset G_1 \subset G_2$ et $u^*_{E_j} = 0$ entraîne pour $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$
l'égalité $u^*_E = 0$ . De plus si $G$ est strictement pseudo-convexe, on a
$u^*_E(z) \to 0$ quand $z \to bG$ .

On a $u^*_E \equiv 0$ dans $G$ si et seulement s'il existe $v \in PSH(G)$ telle qu'on ait $E \subset [z \in G \,; v(z) = -\infty]$ , c'est-à-dire que les pluripolaires sont de capacité nulle. De plus, si $K_j \searrow K = \bigcap_j K_j$ , où les $K_j$ sont compacts dans $G$ (supposé toujours borné strictement pseudo-convexe), on a les propriétés suivantes :

a) - $(\lim u^*_{K_j})^* = u^*_K$ , b) - $\lim c(K_j) = c(K)$ , c) - $c^*(K) = c(K)$

capacité extérieure = capacité intérieure pour les compacts .

d) - pour $E \subset\subset G \subset\subset \mathbb{C}^n$ on a $c\,(E,G) = \int_G (dd^c u^*_E)^n$ . En particulier on a toujours $u^*_E = u^*_F$ où $F$ est un ensemble du type $G_\delta \supset E$ , (intersection dénombrable d'ouverts) et $c^*(E) = 0$ équivaut à $u^*_E = 0$ . Finalement : 1) $c(E)$ est une capacité de Choquet, ce qui aura pour conséquence que tous les ensembles boréliens $E$ vérifient $c(E) = c^*(E)$ , c'est-à-dire <u>sont capacitables</u>; 2) pour que $E$ soit pluripolaire, il faut et il suffit qu'il soit contenu dans un $G_\delta$ de capacité nulle pour cette capacité $c$ . De là on déduit une nouvelle démonstration du théorème $E \subset G \subset \mathbb{C}^n$ est pluripolaire si et seulement si il existe $u \in PSH(\mathbb{C}^n)$ telle que l'on ait $E \subset [z \in \mathbb{C}^n \; ; \; u(z) = -\infty]$ et un ensemble $E$ est pluripolaire (dans $G$ pseudo-convexe) si et seulement si $c^*(E,G) = 0$ . Il en résulte encore : les ensembles négligeables sont pluripolaires et les pluripolaires sont négligeables. En conséquence, si $u_t(z)$ est une famille bornée localement, $u_t \in PSH(G)$ , $G \subset \mathbb{C}^n$ , alors pour $v(z) = \sup_t u_t(z)$ l'ensemble $[z \in G \; ; \; v(z) < v^*(z)]$ est pluripolaire dans $\mathbb{C}^n$ .

Puisque $c$ est une capacité de Choquet on a si $E$ est de classe "K-analytique" l'égalité $c^*(E) = \sup c(K)$ , $K \subset E \subset\subset G$ , $K$ compact, cette classe contenant les boréliens. La capacité introduite dans [2] liée à l'objet souple $dd^c u$ permet donc de résoudre des problèmes laissés en suspens en analyse complexe. On notera qu'elle se rattache à l'étude de l'opérateur de Monge-Ampère complexe $(dd^c u)^n$ , opérateur non linéaire pour $n > 1$. Tandis que le support de $dd^c u$ pour $u \in PSH(G)$ n'est jamais compact, on retrouve des mesures à support compact pour $(dd^c u)^n$. On notera que $c(E,G)$ est invariant par les morphismes analytiques.

Pour terminer demandons nous les limites de la méthode exposée ici dans les § 3 et 4 . On a utilisé des énoncés sur les objets souples pour revenir à des énoncés portant sur les objets classiques . S'il s'agit, par exemple, d'un théorème de prolongement, du fait qu'il est valable pour la classe $\mathcal{C}_s(w)$ souple et que cette classe est strictement plus étendue que l'image de l'objet classique $\mathcal{C}_c(w)$ dans $\mathcal{C}_s(w)$ , on peut s'interroger sur l'existence d'énoncés plus précis propres à $\mathcal{C}_c(w)$ . Ces énoncés existeront en général. On renvoie le lecteur à une étude qui concerne la dimension 1 ; L.Ahlfors et A.Beurling cf. [1] , y étudient divers problèmes de prolongement à $G \subset \mathbb{C}$ d'une fonction holomorphe définie dans $G \setminus A$ ; ils définissent pour chaque problème une classe de "null sets" laquelle contient celle des fermés de capacité nulle et parfois s'y réduit. L'utilisation des objets analytiques souples ne donne donc pas toujours le critère le plus précis pour un problème particulier, mais est une méthode d'investigation procédant au départ par un assouplissement et une relaxation des hypothèses. Les trois travaux qu'on a résumés ici apportent par cette méthode des notions nouvelles et un éclairage nouveau sur des problèmes classiques : l'usage d'une représentation globale des ensembles analytiques dans le premier cas - le rôle des ensembles pluripolaires fermés localement complets dans le second - enfin dans le troisième une notion de capacité des sous-ensembles d'un domaine G , capacité relative à G , invariante par les isomorphismes analytiques, et pour laquelle "capacité nulle" localement caractérise deux classes importantes d'ensembles exceptionnels.

## BIBLIOGRAPHIE

[1] L.AHLFORS et A.BEURLING. - Conformal invariants and function theoretic null sets. Acta Math., t. 83, p. 101-129, 1950.

[2] E.BEDFORD et B.A.TAYLOR. - A new capacity for plurisubharmonic functions. Acta Math., t. 149, p. 1-40, 1983.

[3] E.BOMBIERI. - Algebraic values of meromorphic maps. Inv. Math., t. 10, p. 267-287, 1970 et t. 11, p. 163-166.

[4] M.CORNALBA et B.SCHIFFMAN. - A counter example to the transcendental Bezout problem. Ann. of Math., t. 96, p. 402-406, 1972.

[5] H.EL MIR. - Sur le prolongement des courants positifs fermés. Thèse Paris VI, 1982 et Notes aux C.R.A.S., t. 294, p. 181-185 et t. 295, p. 419-422, 1982.

[6] P.LELONG. - a/ Les fonctions plurisousharmoniques . Ann. E.N.S., t. 62, 1945, p. 301-338. b/ Intégration sur un ensemble analytique complexe. Bull. S.M.F., t. 85, 1957, p. 239-262. c/ Sur la structure des courants positifs fermés. Lecture Notes Springer, n° 578, p. 136-156, 1976. d/ Ensembles analytiques complexes définis comme ensembles de densité. Inv. Math., 1983.

[7] Y.T.SIU. - Analyticity of sets associated to Lelong numbers. Inv. Math., t. 27, p. 53-156, 1974.

[8] H.SKODA. - a/ Estimations $L^2$ pour l'opérateur $\bar{\partial}$ et applications arithmétiques. Lecture Notes Springer, n° 578, p. 314-323, 1976.
b/ Prolongement des courants positifs fermés de masse finie. Inv. Math t. 66, p. 361-376, 1982.

[9] P.THIE. - The Lelong number in a point of a complex analytic set. Math. Ann., t. 172, p. 269-312, 1967.

[10] S.CHERN, H.LEVINE, L.NIRENBERG. - Intrinsic norms on a complex manifold. Global Analysis, papers in honor of K.Kodaïra, p. 119-139, Univ. Tokyo Press, 1969).

Université de Paris VI
Département de Mathématiques
4, place Jussieur
75005 PARIS