Recherche Coopérative sur
Programme n° 25

M. Duneau

A. Katz

Quelques propriétés génériques des énergies potentielles

Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg - RCP25, 1983, tome 31
« Conférences de : B. Malgrange, B. Souillard, M. Duneau, C.-E. Pfister », , exp. n° 3,
p. 41-67

<http://www.numdam.org/item?id=RCP25_1983__31__41_0>

QUELQUES PROPRIETES GENERIQUES DES ENERGIES POTENTIELLES

M. DUNEAU

A. KATZ

Centre de Physique Théorique de l'Ecole Polytechnique
Plateau de Palaiseau - 91128 Palaiseau - Cedex - France

"Groupe de Recherche du C.N.R.S. n° 48"

A509.0782 Juillet 1982

"Si après tout, des symétries existent dans la nature c'est qu'en dépit de leur apparente instabilité, le processus qui leur donne naissance est structurellement stable".

R. THOM

0. INTRODUCTION

Le problème initial de la théorie classique du cristal est de montrer l'existence des cristaux, autrement dit de prouver qu'un ensemble dénombrable de particules classiques identiques en interaction est susceptible de fournir des configurations d'énergie minimale présentant de la symétrie.

La méthode employée jusqu'à présent consiste à choisir une interaction à la fois réaliste et suffisamment simple pour qu'une étude directe des fondamentaux puisse conclure à l'existence de propriétés de symétrie non triviales.

Si des résultats positifs ont été obtenus pour des systèmes en dimension un, le problème de la dépendance vis à vis de l'interaction choisie n'a pas été abordé dans tous les cas.

Le but de cet exposé est de présenter une méthode nouvelle pour aborder la théorie classique du cristal, consistant essentiellement à montrer que la propriété pour une interaction de fournir des équilibres présentant de la symétrie, est stable vis à vis de perturbations quelconques de cette interaction.

On considère un système classique de n particules dans l'espace euclidien $E = \mathbb{R}^3$ dont l'énergie potentielle $\varphi^{(n)}$ est la somme sur toutes les paires $1 \leq i < j \leq n$ d'une interaction à deux corps fonction de la distance :

$$\varphi^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i<j} \varphi(\|x_i - x_j\|) \qquad (1)$$

Nous supposerons que $\varphi \in C^{\infty}(]0,\infty[)$, de sorte que $\varphi^{(n)} \in C^{\infty}(X^{(n)})$ où $X^{(n)}$ est l'ouvert dense de $\mathbb{R}^{3n}$ des configurations non coplanaires et dont tous les points sont distincts.

Les configurations d'énergie minimale et plus généralement, les configurations d'équilibre du système correspondent aux points critiques de $\varphi^{(n)}$, i.e. aux solutions de $d\varphi^{(n)}(x) = 0$.

Les énergies potentielles sont invariantes sous l'action naturelle sur $X^{(n)}$ du groupe $\mathcal{I}$ des isométries affines de $\mathbb{R}^3$.

La propriété de Morse, au sens des fonctions $\mathcal{I}$- invariantes, i.e. la non dégénérescence des points critiques en un sens que nous préciserons, est générique dans l'espace $C^{\infty}_{\mathcal{I}}(X^{(n)})$ des fonctions $\mathcal{I}$- invariantes sur $X^{(n)}$ muni de la topologie faible, c'est à dire qu'elle est satisfaite sur un ensemble résiduel et par conséquent dense.

Cependant, la structure même des énergies potentielles $\varphi^{(n)}$ qui ne dépendent que d'une interaction $\varphi \in C^{\infty}(]0,\infty[)$ a pour conséquence que leur ensemble est un fermé d'intérieur vide dans $C^{\infty}_{\mathcal{I}}(X^{(n)})$, et par conséquent la généricité de la propriété de Morse ne découle pas directement des théorèmes généraux.

Nous présenterons une démonstration spécifique, adaptée à cette situation, dont la conclusion sera que l'ensemble des φ qui engendrent pour tout n des fonctions $\varphi^{(n)}$ de Morse sur $X^{(n)}$, est résiduel dans $C^{\infty}(]0,\infty[)$.

On peut alors suivre le déplacement d'un point critique non dégénéré, associé à une variation petite mais arbitraire de l'interaction qui lui donne naissance.

Une étude plus détaillée montre alors que la propriété pour une interaction de fournir une configuration d'équilibre dans $X^{(n)}$ présentant de la symétrie - invariance globale par un sous-groupe fini des isométries - est une propriété ouverte et non vide dans $C^{\infty}(]0,\infty[)$.

Autrement dit, si $\varphi^{(n)}$ admet un point critique non dégénéré correspondant à un groupe de symétrie non trivial, il en sera de même pour tous les points critiques voisins associés à des variations petites mais arbitraires de φ , conclusion que l'on doit interpréter en relation avec la théorie du cristal évoquée ci-dessus.

I - ESPACE DE CONFIGURATION, ENERGIES POTENTIELLES ET CONFIGURATIONS D'EQUILIBRE

Nous définissons l'espace de configuration $X^{(n)}$ de n particules dans $\mathbb{R}^3$ comme l'ensemble des configurations $x=(x_1,\dots,x_n)$ de $\mathbb{R}^{3n}$, non coplanaires et dont tous les points sont distincts :

$$X^{(n)} = \{ x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^{3n} \mid x \text{ non copl. et } i \neq j \Rightarrow x_i \neq x_j \} \tag{2}$$

Alors $X^{(n)}$ est un ouvert dense de $\mathbb{R}^{3n}$. Si $\varphi \in C^\infty(]0,\infty[)$ les configurations d'équilibre sont les points critiques de $\varphi^{(n)}$.

On pose $$x_{ij} = x_i - x_j$$

et $$d\,\|x_{ij}\| = \|x_{ij}\|^{-1}\,\varepsilon_{ij}(x) \tag{3}$$

où $\varepsilon_{ij}(x)$ est la forme linéaire sur $\mathbb{R}^{3n}$ définie par

$$\varepsilon_{ij}(x)\cdot\xi = (x_{ij}\mid\xi_{ij}) \tag{4}$$

avec $\xi=(\xi_1,\dots,\xi_n)$, $\xi_{ij}=\xi_i-\xi_j$ et où $(\cdot\mid\cdot)$ est le produit scalaire euclidien de $\mathbb{R}^3$. Dans ces conditions, la différentielle de $\varphi^{(n)}$ s'écrit :

$$d\varphi^{(n)}(x) = \sum_{i<j} \varphi'(\|x_{ij}\|)\,\|x_{ij}\|^{-1}\,\varepsilon_{ij}(x) \tag{5}$$

Si x est un point critique de $\varphi^{(n)}$, la dégénérescence et la stabilité de l'équilibre sont déterminées par le hessien $H_x \varphi^{(n)}$ de $\varphi^{(n)}$ en x, qui est la forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^{3n}$ donnée par

$$H_x\varphi^{(n)} = \sum_{i<j} \left\{ \varphi''(\|x_{ij}\|) - \varphi'(\|x_{ij}\|)\, \|x_{ij}\|^{-1} \right\} \|x_{ij}\|^{-2}\, \varepsilon_{ij}(x) \otimes \varepsilon_{ij}(x)$$

$$+ \sum_{i<j} \varphi'(\|x_{ij}\|)\, \|x_{ij}\|^{-1}\, \varepsilon_{ij}$$

où $\varepsilon_{ij}(\xi, \zeta) = (\xi_{ij} \mid \zeta_{ij})$ avec $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n)$ et $\xi_{ij} = \xi_i - \xi_j$, $\zeta_{ij} = \zeta_i - \zeta_j$

II - INVARIANCE PAR LES ISOMETRIES

Soit $I = \mathbb{R}^3 \times O(3)$ le groupe des isométries de $\mathbb{R}^3$, produit direct des translations par les rotations.

Si $(\tau, \rho) \in I$, l'action naturelle $(\tau, \rho)^{(n)}$ sur $X^{(n)}$ est donnée par

$$(\tau,\rho)^{(n)} x = \left((\tau,\rho) x_1, \dots, (\tau,\rho) x_n \right) \tag{8}$$

où $(\tau, \rho)\, x_i = \tau + \rho\, x_i$

Soit $I(x)$ l'orbite de $x \in X^{(n)}$ pour cette action
Un théorème de géométrie élémentaire [BE] permet de montrer que

$$I(x) = \left\{ y \in X^{(n)} \mid \forall i<j,\ \|x_{ij}\| = \|y_{ij}\| \right\}$$

Pour tout $x \in X^{(n)}$, $\mathcal{I}(x)$ est une sous-variété de dimension 6 dont l'espace tangent en x est

$$\mathcal{J}(x) = \{ \xi \in \mathbb{R}^{3n} \mid \forall i<j \ , \ (x_{ij} \mid \xi_{ij}) = 0 \} \tag{9}$$

L'ensemble des formes linéaires qui s'annulent sur $\mathcal{J}(x)$ est un sous espace vectoriel de $T_x^* X^{(n)} \simeq \mathbb{R}^{3n*}$

$$\mathcal{J}(x)^{\perp} = \{ \theta = \sum_{i<j} a_{ij}\ \varepsilon_{ij}(x) \setminus \{a_{ij}\} \in \mathbb{R}^{\frac{n(n-1)}{2}} \} \tag{10}$$

où $\varepsilon_{ij}(x)$ est la forme linéaire donnée par (4).

L'invariance euclidienne de $\varphi^{(n)}$ entraine les propriétés suivantes pour $d\varphi^{(n)}(x)$, et $H_x\,\varphi^{(n)}$ si x est un point critique :

1) $d\varphi^{(n)}(x) \in \mathcal{J}(x)^{\perp}$ pour tout $x \in X^{(n)}$

2) Si $d\varphi^{(n)}(x) = 0$, le hessien $H_x\,\varphi^{(n)}$ considéré comme un homomorphisme de $\mathbb{R}^{3n}$ dans $\mathbb{R}^{3n*}$ satisfait

$$\mathcal{J}(x) \subset \operatorname{Ker} H_x\,\varphi^{(n)} \quad \text{et} \quad \operatorname{Im} H_x\,\varphi^{(n)} \subset \mathcal{J}(x)^{\perp} \tag{11}$$

La propriété des configurations de $X^{(n)}$ d'être non coplanaires implique que leur groupe d'isotropie pour l'action (8) est réduit à l'identité, de sorte que l'espace réduit $X^{(n)}/I$ a une structure de variété C^{∞}.

Dans ces conditions les énergies potentielles passent au quotient et on peut énnoncer la

Définition : Un point critique x de $\varphi^{(n)}$ est "non dégénéré" (resp. $\varphi^{(n)}$ est une "fonction de Morse" sur $X^{(n)}$) si le point critique $\tilde{x}$ correspondant de la projection $\widetilde{\varphi^{(n)}}$ de $\varphi^{(n)}$ sur $X^{(n)}/I$ est non dégénéré (resp. si $\widetilde{\varphi^{(n)}}$ est une fonction de Morse sur $X^{(n)}/I$).

On vérifie que le relèvement dans $X^{(n)}$ de la non-dégénérescence est donné par les trois propriétés équivalentes suivantes :

i) $\mathcal{J}(x) = \operatorname{Ker} H_x \varphi^{(n)}$

ii) $\mathcal{J}(x)^{\perp} = \operatorname{Im} H_x \varphi^{(n)}$ (12)

iii) $\operatorname{rang} H_x \varphi^{(n)} = 3n-6$

III - PROPRIETE DE MORSE ET STRATIFICATION PAR LES DISTANCES

L'espace $C^{\infty}_{I}(X^{(n)})$ des fonctions I-invariantes sur $X^{(n)}$ est homéomorphe pour la topologie faible à $C^{\infty}(X^{(n)}/I)$ Un théorème classique de topologie différentielle permet de conclure que la "propriété de Morse" dans $C^{\infty}_{I}(X^{(n)})$, au sens précédant est générique.

L'ensemble des énergies potentielles étant un fermé d'intérieur vide dans $C^{\infty}_{I}(X^{(n)})$, nous devons présenter une démonstration adaptée à la structure spécifique des $\varphi^{(n)}$.

Propriété de Morse dans $C^{\infty}(\mathbb{R}^{m})$

Soit F : $C^{\infty}(\mathbb{R}^{m}) \longrightarrow C^{\infty}(\mathbb{R}^{m}, \mathbb{R}^{m} \times \mathbb{R}^{m*} \times L^{2}_{S}(\mathbb{R}^{m}))$
l'application définie par

$$F_{\phi}(x) = ev\, F(\phi, x) = (x, d\phi(x), H_x \phi)$$

où $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$, $d\phi(x)$ est la différentielle en x et $H_x \phi$ la matrice des dérivées secondes.

Soit $W = \{(x,o,h) \mid \det h = o\} \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m*} \times L^2_s(\mathbb{R}^m)$

W est une sous variété algébrique qui correspond exactement aux points critiques dégénérés.

Il est clair que ϕ est une fonction de Morse si et seulement si $F_\phi(\mathbb{R}^m)$ n'intersecte pas W .

La généricité de la propriété de Morse s'obtient en utilisant la théorie de la transversalité de Thom.

Dans le cas présent, la non intersection de $F_\phi(\mathbb{R}^m)$ avec W est équivalente, pour des raisons de dimension, à la transversalité de F_ϕ à W .

En effet si $F_\phi(x) \in W$, la condition de transversalité s'écrit

$$Im\ T_x F_\phi + T_{F_\phi(x)} W = T_{F_\phi(x)} (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m*} \times L^2_s(\mathbb{R}^m))$$

Elle est impossible à réaliser car $\dim (Im\ T_x F_\phi) = m$ et $\operatorname{codim} W = m+1$.

Les théorèmes originaux de la théorie de la transversalité ont été étendus à des situations plus générales par Abraham-Robbin [A-R], puis par Robinson [R], l'idée directrice étant d'utiliser une extension de F_ϕ à un espace $B \times X$ suffisamment grand pour que la transversalité soit assurée, et d'en conclure que pour presque tout $b \in B$ les applications partielles sont transverses.

Nous rappelons quelques définitions entrant dans l'énnoncé du théorème de Robinson que nous utiliserons dans la suite.

Représentation : Soit A, X, Y des variétés C^r et $F : A \longrightarrow C^r(X, Y)$ une application. On pose

$$ev F : A \times X \longrightarrow Y \qquad \text{defini par}$$

$$ev F\,(a, x) = F_a(x)$$

On dit que F est une représentation de classe C^r si $ev F$ est une application de classe C^r de $A \times X$ dans Y .

Pseudo-représentation : Soit A un espace topologique , X, Y deux variétés C^r et $F : A \longrightarrow C^r(X, Y)$ une application.

Pour tout $k \leq r$ on définit

$$F^{(k)} : A \longrightarrow C^{r-k}(T^k X, T^k Y)$$

par $ev\, F^{(k)}(a, \xi) = T^k(F_a)(\xi)$

où $\xi \in T^k X = T(T(\cdots(TX)\cdots))$ et $T^{(k)}(F_a)$ est la $k^{\text{ème}}$ itérée de l'application tangente.

On dit que F est une pseudo-représentation de classe C^r si $ev\, F^{(k)}$ est une application de classe C^0 pour tout $0 \leq k \leq r$.

Nous pouvons maintenant énnoncer le théorème de Robinson.

Théorème [R] : Soit A un espace de Baire, X, Y deux variétés C^r (r assez grand) et $F : A \longrightarrow C^r(X, Y)$ une pseudo-représentation de classe C^1 .

Soit W une sous variété de Y et $\mathcal{B}$ un espace de Banach.

On suppose qu'il existe un recouvrement de X par une famille dénombrable de compacts telle que pour tout tel compact K , on ait les propriétés suivantes :

i) $\forall a \in A$, il existe une application continue ψ_a de B dans A telle que $\psi_a(o) = a$.

ii) $\forall a \in A$, $F \circ \psi_a : B \longrightarrow C^r(X, Y)$ est une représentation de classe C^r .

iii) $\forall a \in A$, $ev(F \circ \psi_a) : B \times X \longrightarrow Y$ a une restriction à $B \times K$ qui est transverse à W .

Alors il existe un ensemble résiduel A_W tel que pour tout $a \in A_W$, $F_a : X \longrightarrow Y$ soit transverse à W .

Remarquons que la situation est optimale lorsque $ev(F \circ \psi_a)$ est une submersion. C'est précisément le cas de l'application du théorème à la propriété de Morse dans $C^\infty(\mathbb{R}^m)$ si l'on prend pour B l'espace des polynomes de degrés 2 sur $\mathbb{R}^m$.

Dans notre situation, les égalités de distance éventuelles du type $\|x_{ij}\| = \|x_{kl}\|$ ont pour conséquence que les différentielles $d\varphi^{(n)}(x)$ n'engendrent pas $\mathcal{J}(x)^\perp$, de même que les hessiens $H_x \varphi^{(n)}$ sont soumis à des contraintes non triviales.

La démonstration que nous présentons maintenant est légèrement différente de notre démonstration originale [K-D] et s'inspire d'une remarque de M. Chaperon [C].

<u>Stratification par les distances</u>

Soit R une relation d'équivalence entre les couples (i,j) , $1 \leq i < j \leq n$. On pose alors

$$X_R = \{ x \in X^{(n)} \mid (i,j) \sim_R (k,\ell) \Leftrightarrow \|x_{ij}\| = \|x_{k\ell}\| \} \tag{13}$$

$$Y_R = \{ \alpha \in \mathbb{R}^{\frac{n(n-1)}{2}} \mid (i,j) \sim_R (k,\ell) \Rightarrow \alpha_{ij} = \alpha_{k\ell} \}$$

Considérons maintenant les applications suivantes :

1) $\delta_R : X_R \times Y_R \longrightarrow \mathbb{R}^{3n^*}$

$$\delta_R(x,\alpha) = \sum_{i<j} \alpha_{ij} \, \|x_{ij}\|^{-1} \, \varepsilon_{ij}(x)$$

Alors pour tout $x \in X_R$

$$\mathcal{D}(x) = \mathrm{Im}\, \delta_R(x,\cdot) = \delta_R(x, Y_R) \tag{14}$$

est engendré par les différentielles $d\varphi^{(n)}(x)$ lorsque φ parcourt $C^\infty(]0,\infty[)$.

2) $h_R : X_R \times Y_R^2 \longrightarrow \mathbb{R}^{3n^*} \otimes \mathbb{R}^{3n^*}$

$$h_R(x,\alpha,\beta) = \sum_{i<j} \left\{ \beta_{ij} - \alpha_{ij} \|x_{ij}\|^{-1} \right\} \|x_{ij}\|^{-2} \, \varepsilon_{ij}(x) \otimes \varepsilon_{ij}(x) + \sum_{i<j} \alpha_{ij} \, \|x_{ij}\|^{-1} \, \varepsilon_{ij} \tag{15}$$

Alors $\mathcal{H}(x)$, l'ensemble des hessiens en x, est inclus dans $\mathrm{Im}\, h_R(x,\cdot,\cdot)$.

Les applications δ_R et h_R permettent de reconstruire les différentielles $d\varphi^{(n)}(x)$ et les hessiens $H_x \varphi^{(n)}$ en fonction des paramètres $\alpha_{ij} = \varphi'(\|x_{ij}\|)$, $\beta_{ij} = \varphi''(\|x_{ij}\|)$

Les points critiques dégénérés correspondent en termes des paramètres α et β à l'ensemble

$$W_R = \left\{ (x,\alpha,\beta) \mid \delta_R(x,\alpha) = 0 ,\ \mathrm{rang}\, h_R(x,\alpha,\beta) < 3n-6 \right\} \tag{16}$$

Il est clair que X_R et W_R sont des variétés semi-algébriques et algébriques de $X^{(n)}$ et $X^{(n)} \times \mathbb{R}^{\frac{n(n-1)}{2}} \times \mathbb{R}^{\frac{n(n-1)}{2}}$ respectivement.

Un théorème classique de Whitney [W] permet d'affirmer que l'on peut présenter W_R comme une union finie de sous variétés W_λ

C^∞ dont les projections X_λ sur X_R sont des sous-variétés connexes et I-invariantes. On peut également imposer que la projection $W_\lambda \to X_\lambda$ soit une fibration.

Pour toute partie lisse W_λ de W_R, la fibre $W_\lambda(x)$ au dessus de x est certainement contenue dans

$$W_R(x) = \{ (\alpha,\beta) \in Y_R^2 \mid \delta_R(x,\alpha) = 0 \ , \ \text{rang}\, h_R(x,\alpha,\beta) < 3n-6 \}$$

La condition sur le rang du hessien étant non triviale, on en déduit que

$$\dim W_\lambda(x) \leq \dim \operatorname{Ker} \delta_R(x,\cdot) + \dim Y_R - 1 \tag{17}$$

Par ailleurs on a le

Lemme 1 : Pour tout $x \in X_\lambda$,

$$\mathcal{J}(x)^\perp = \mathcal{D}(x) + (T_x X_\lambda)^\perp \tag{18}$$

Preuve : Soit $\theta = \sum_{i<j} \alpha_{ij}\, \varepsilon_{ij}(x)$ un élément quelconque de $\mathcal{J}(x)^\perp$.

Posons $\bar\theta = \sum_{i<j} \bar\alpha_{ij}\, \varepsilon_{ij}(x)$ où $\bar\alpha_{ij}$ est obtenu en faisant la moyenne de $\alpha_{k\ell}$ pour $(k,\ell) \sim_R (i,j)$. Dans ces conditions $\bar\alpha = \{\bar\alpha_{ij}\} \in Y_R$ et $\bar\theta \in \mathcal{D}(x)$.

On vérifie alors aisément que $\theta - \bar\theta$ s'annulle sur $T_x X_\lambda$ ce qui achève la preuve. Q.E.D.

On a donc $\dim \mathcal{D}(x) \geq \dim X_\lambda - 6$ et comme $\mathcal{D}(x) = \operatorname{Im} \delta_R(x)$, (17) a pour conséquence $\dim \operatorname{Ker} \delta_R^*(x) \leq \dim Y_R - \dim X_\lambda + 6$ et finalement

$$\dim W_\lambda(x) \leq 2 \dim Y_R - \dim X_\lambda + 6 - 1 \qquad (18)$$

Nous pouvons maintenant appliquer le théorème de Robinson dans la formulation suivante.

Soit $F_\lambda : A = C^\infty(]0,\infty[) \longrightarrow C^\infty(X_\lambda, X_\lambda \times Y_R^2)$
défini par

$$ev\, F_\lambda(\varphi, x) = (x, \{\varphi'(\|x_{ij}\|)\}, \{\varphi''(\|x_{ij}\|)\}) \qquad (19)$$

Alors F_λ est manifestement une pseudo-représentation de classe C^r pour tout $r \geq 0$.

Soit $\mathcal{B} = P^m(\mathbb{R})$ l'espace de Banach des polynomes de degré m sur $\mathbb{R}$, m étant choisi assez grand.

Si $\varphi \in A$ on pose $\psi_\varphi : \mathcal{B} \longrightarrow A$ avec
$\psi_\varphi(b) = \varphi + b$

On a alors le

<u>Lemme 2</u> : Pour tout $\varphi \in A$, l'application
$ev(F_\lambda \circ \psi_\varphi) : \mathcal{B} \times X_\lambda \longrightarrow X_\lambda \times Y_R^2$ est une submersion.

Preuve : On a

$$ev(F_\lambda \circ \psi_\varphi)(b, x) = (x, \{\varphi'(\|x_{ij}\|) + b'(\|x_{ij}\|)\}, \{\varphi''(\|x_{ij}\|) + b''(\|x_{ij}\|)\})$$

Il est clair que pour tout $(b, x) \in \mathcal{B} \times X_\lambda$ l'application tangente est une surjection pourvu que le degré m soit assez élevé. Q.E.D.

Une submersion étant transverse à n'importe quelle sous variété, on a le corollaire

Corollaire 1 : Pour tout $\varphi \in A$, l'application $ev(F_\lambda \circ \Psi_\varphi) : B \times X_\lambda \longrightarrow X_\lambda \times Y_R^2$ est transverse à la sous variété W_λ , partie lisse de W_R se projetant sur X_λ .

La conclusion du théorème de Robinson est la suivante :

L'ensemble $A_\lambda = \{\varphi \in A \mid F_\lambda(\varphi) \pitchfork W_\lambda\}$ des interactions φ telles que $F_\lambda(\varphi)$ soit transverse à W_λ est résiduel et par conséquent dense dans A.

Il nous reste maintenant à interpréter cette propriété de transversalité comme la propriété de Morse pour $\varphi^{(n)}$ sur X_λ .

Théorème 2 : Pour tout $\varphi \in A_\lambda$, défini ci-dessus, $\varphi^{(n)}$ est une fonction de Morse sur X_λ , au sens des fonctions I- invariantes i.e. si $x \in X_\lambda$ est un point critique de $\varphi^{(n)}$, alors le rang du hessien $H_x\varphi^{(n)}$ est $3n-6$.

Preuve : Compte tenu de la définition (16) de W_R , nous devons montrer que la transversalité de $F_\lambda(\varphi)$ à W_λ implique la non-intersection de $F_\lambda(\varphi)(X_\lambda)$ avec W_λ . Il s'agit donc, comme dans le cas de $C^\infty(\mathbb{R}^m)$ d'un calcul de dimension.

En cas d'intersection $F_\lambda(\varphi)(x) \in W_\lambda$, la condition de transversalité s'écrit

$$\operatorname{Im} T_x F_\lambda(\varphi) + T_{F_\lambda(\varphi)(x)} W_\lambda = T_x X_\lambda \times Y_R^2 \tag{20}$$

où nous avons identifié Y_R à son espace tangent.

L'invariance par les isométries implique que

$$\operatorname{Im} T_x F_\lambda(\varphi) \cap T_{F_\lambda(\varphi)(x)} W_\lambda \supset \mathcal{J}(x) \times \{0\} \times \{0\}$$

Par conséquent la dimension du membre de gauche de (20) est majorée par $\dim X_\lambda + 2 \dim Y_R - 1$

On en déduit que l'intersection transverse est impossible donc que $F_\lambda(\varphi)(X_\lambda) \cap W_\lambda$ est vide pour tout $\varphi \in A_\lambda$, autrement dit que $\varphi^{(n)}$ est une fonction de Morse sur X_λ . Q.E.D.

La résidualité étant conservée par intersection dénombrable on a le

Corollaire 2 : L'ensemble des $\varphi \in A$ tels que pout tout n , $\varphi^{(n)}$ soit une fonction de Morse sur $X^{(n)}$ est résiduel, autrement dit la propriété de Morse pour les énergies potentielles est générique.

Les théorèmes d'ouverture locale de la transversalité impliquent dans le cas présent que pour tout n et pour tout compact K de $X^{(n)}$, l'ensemble A_K des φ tels que $\varphi^{(n)}$ soit de Morse sur K est un ouvert dense de $C^\infty(]0,\infty[)$ pour la topologie faible.

On a un résultat analogue pour la topologie forte de $C^\infty(]0,\infty[)$ ou topologie de Whitney : A_K est manifestement un ouvert fort. On peut s'assurer qu'il est dense en remarquant que la condition d'être de Morse sur K ne fait intervenir φ que sur un compact de $]0,\infty[$ et non son comportement à l'infini.

$C^\infty(]0,\infty[)$ étant un espace de Baire pour la topologie forte, on a également la généricité, et la densité de la propriété de Morse pour cette topologie.

IV - STRATIFICATION PAR LES SYMETRIES ET LEUR STABILITE

Si $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ admet un point critique non dégénéré x , on a la propriété classique de stabilité : toute fonction ϕ' assez voisine de ϕ admet également un point critique x' voisin de x et localement unique. Autrement dit, à un chemin de $C^\infty(\mathbb{R}^m)$ partant de ϕ est associée un chemin de points critiques dans $\mathbb{R}^m$ partant de x , ne présentant aucune bifurcation tant qu'il n'y a pas dégénérescence.

Dans le cas des énergies potentielles, une telle situation n'est possible que dans l'espace réduit $X^{(n)}/I$, puisqu'à chaque point critique x de $\varphi^{(n)}$ est associé une orbite $I(x)$ de points critiques.

Dans cette partie nous montrons que si un point critique non dégénéré de $\varphi^{(n)}$ présente de la symétrie, les points critiques voisins obtenus en perturbant φ présentent la même symétrie, sous réserve de non dégénérescence.

Les propriétés de symétrie des configurations de apparaissent naturellement si l'on considère le produit direct $I \times \Sigma^{(n)}$ des isométries par le groupe des permutations de n éléments, et son action définie par

$$(\tau, \rho, \sigma)^{(n)} x = y \quad , \quad y_i \doteq \tau + \rho\, x_{\sigma^{-1}(i)} \tag{21}$$

Le groupe de symétrie d'une configuration est alors défini comme son groupe d'isotropie pour cette action :

$$G_x = \left\{ (\tau, \rho, \sigma) \in I \times \Sigma^{(n)} \mid \forall i \ , \ x_i = \tau + \rho\, x_{\sigma^{-1}(i)} \right\} \tag{22}$$

Les configurations étant non coplanaires, il y a bijection entre les permutations σ et les isométries (τ, ρ) associées dans les éléments de G_x . En outre, G_x est isomorphe à chacune de ses projections I_x sur I et Σ_x sur $\Sigma^{(n)}$.

I_x est le sous-groupe d'isométries dont l'effet sur x est de permuter les points.

On a également

$$\Sigma_x = \left\{ \sigma \in \Sigma^{(n)} \mid \forall i<j \ , \ \|x_{ij}\| = \|x_{\sigma(i)\,\sigma(j)}\| \right\} \tag{22'}$$

Dans la suite, nous considérons les différentes parties de $X^{(n)}$ dans lesquelles les groupes de symétrie des points sont constants, à une conjugaison près. Dans cette perspective nous rappelons le théorème suivant

Théorème 3 [BR] : Soit G un groupe de Lie compact agissant sur une variété X et H un sous groupe de G. On pose

$$S^H = \{ x \in X \mid G_x \text{ conjugué à } H \text{ dans } G \} \tag{23}$$

où G_x est le groupe d'isotropie de x.

Alors S^H est une sous variété de X dont le bord topologique est l'union des S^K pour K contenant strictement H.

Dans le cas de l'action de $I \times \Sigma^{(n)}$ sur $X^{(n)}$, les translations peuvent être prises en compte séparément, par exemple en centrant les configurations, et on déduit du théorème précédent le résultat suivant :

Pour tout $x \in X^{(n)}$, on pose

$$S_x = \{ y \in X^{(n)} \mid \Sigma_x = \Sigma_y \text{ et } I_x \text{ conjugué à } I_y \text{ dans } I \} \tag{24}$$

Alors S_x est une sous-variété de $X^{(n)}$ et des arguments de finitude montrent que la stratification de $X^{(n)}$ ainsi obtenue est finie.

On considère également

$$S_x^o = \{ y \in X^{(n)} \mid G_x = G_y \} \tag{25}$$

On vérifie que S_x est l'orbite de S_x^o sous l'action des isométries et que S_x^o est un ouvert dense d'un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^{3n}$.

Définitions : Pour tout $x \in X^{(n)}$ on pose

$$\mathcal{S}^o(x) = \{ \xi \in \mathbb{R}^{3n} \mid \forall (z,\rho,\sigma) \in G_x \ , \ (\rho,\sigma)^{(n)} \xi = \xi \} \tag{26}$$

$$\mathcal{S}'(x) = \{ \xi \in \mathbb{R}^{3n} \mid \sum_{G_x} (\rho,\sigma)^{(n)} \xi = 0 \} \tag{27}$$

$$\mathcal{S}(x) = \{ \xi \in \mathbb{R}^{3n} \mid \forall \sigma \in \Sigma_x, (x_{ij} \mid \xi_{ij}) = (x_{\sigma(i)\sigma(j)} \mid \xi_{\sigma(i)\sigma(j)}) \} \tag{28}$$

On a alors

<u>Lemme 3</u> : Pour tout $x \in X^{(n)}$ les relations suivantes sont vérifiées :

i) $\mathbb{R}^{3n} = \mathcal{V}^0(x) \oplus \mathcal{V}^1(x)$ (29)

ii) $\mathcal{V}^0(x) = T_x S_x^0$ (30)

iii) $\mathcal{V}(x) = T_x S_x$ (31)

Preuve : $\mathcal{V}^0(x)$ et $\mathcal{V}^1(x)$ sont respectivement l'image et le noyau du projecteur de $\mathbb{R}^{3n}$ $|G_x|^{-1} \sum_{G_x} (\rho, \sigma)^{(n)}$, d'où la propriété i).

On obtient ii) en explicitant le sous espace vectoriel fermeture de S_x^0 dans $\mathbb{R}^{3n}$.

Enfin on remarque que $T_x S_x = \mathcal{V}^0(x) + \mathcal{J}(x)$. Il suffit donct de montrer que $\mathcal{V}(x) = \mathcal{V}^0(x) + \mathcal{J}(x)$

1) Il est clair que $\mathcal{J}(x) \subset \mathcal{V}(x)$

Si $\xi \in \mathcal{V}^0(x)$ alors $\forall (z, \rho, \sigma) \in G_x$, on a $(\rho, \sigma)^{(n)} \xi = \xi$, i.e. $\rho\, \xi_{ij} = \xi_{\sigma(i)\sigma(j)}$ et également $\rho\, x_{ij} = x_{\sigma(i)\sigma(j)}$, d'où l'on peut conclure que $\mathcal{V}^0(x) \subset \mathcal{V}(x)$.

2) Réciproquement si $\xi \in \mathcal{V}(x)$ alors $\bar{\xi} = |G_x|^{-1} \sum_{G_x} (\rho, \sigma)^{(n)} \xi \in \mathcal{V}^0(x)$ et on vérifie que $\xi - \bar{\xi} \in \mathcal{J}(x)$. Q.E.D.

Nous examinons maintenant les propriétés de symétrie des différentielles et de hessiens, en relation avec les groupes de symétrie des points.

Par analogie avec les définitions (26) et (27), on pose

$$\mathcal{S}^{o*}(x) = \{ \theta \in \mathcal{J}(x)^{\perp} \mid \forall (\tau,\rho,\sigma) \in G_x\,,\ \theta \circ (\rho,\sigma)^{(n)} = \theta \} \qquad (32)$$

$$\mathcal{S}'^{*}(x) = \{ \theta \in \mathcal{J}(x)^{\perp} \mid \theta \circ \sum_{G_x} (\rho,\sigma)^{(n)} = 0 \} \qquad (33)$$

On a alors

<u>Lemme 4</u> : Pour tout $x \in X^{(n)}$, les propriétés suivantes sont vérifiées :

i) $\mathcal{J}(x)^{\perp} = \mathcal{S}^{o*}(x) \oplus \mathcal{S}'^{*}(x)$ (34)

ii) $\mathcal{D}(x) \subset \mathcal{S}^{o*}(x)$, $\mathcal{D}(x)$ étant l'espace engendré (35) par les différentielles $d\varphi^{(n)}(x)$.

iii) Pour tout hessien h en x , considéré comme un homomorphisme de $\mathbb{R}^{3n}$ dans $\mathbb{R}^{3n*}$,

$$\begin{aligned} h(\mathcal{S}^{o}(x)) &\subset \mathcal{S}^{o*}(x) \\ h(\mathcal{S}'(x)) &\subset \mathcal{S}'^{*}(x) \end{aligned} \qquad (36)$$

iv) Pour tout hessien h en x de rang 3n-6

$$\begin{aligned} h(\mathcal{S}^{o}(x)) &= \mathcal{S}^{o*}(x) \\ h(\mathcal{S}'(x)) &= \mathcal{S}'^{*}(x) \end{aligned} \qquad (37)$$

Preuve : L'application $\theta \longrightarrow |G_x|^{-1}\, \theta \circ \sum_{G_x} (\rho,\sigma)^{(n)}$ est un projecteur de $\mathcal{J}(x)^{\perp}$ dont $\mathcal{S}^{o*}(x)$ et $\mathcal{S}'^{*}(x)$ sont respectivement l'image et le noyau. On a donc la somme directe i).

Soit $\theta = \sum_{i<j} \alpha_{ij}\, \varepsilon_{ij}(x)$ avec $\|x_{ij}\| = \|x_{k\ell}\| \Rightarrow \alpha_{ij} = \alpha_{k\ell}$ un élément quelconque de $\mathcal{D}(x)$. Pour tout $(\tau,\rho,\sigma) \in G_x$ et $\xi \in \mathbb{R}^{3n}$ on a

$$\theta \cdot (\rho,\sigma)^{(n)}\xi = \sum_{i<j} \alpha_{ij} \, (x_{ij} \mid \rho\, \xi_{\sigma^{-1}(i)\sigma^{-1}(j)})$$

$$= \sum_{i<j} \alpha_{ij} \, (\rho^{-1} x_{ij} \mid \xi_{\sigma^{-1}(i)\sigma^{-1}(j)})$$

$$= \sum_{i<j} \alpha_{ij} \, (x_{\sigma^{-1}(i)\sigma^{-1}(j)} \mid \xi_{\sigma^{-1}(i)\sigma^{-1}(j)})$$

Comme $\alpha_{ij} = \alpha_{\sigma^{-1}(i)\sigma^{-1}(j)}$ pour tout $\sigma \in \Sigma_x$, $\theta \cdot (\rho,\sigma)^{(n)}\xi = \theta . \xi$ et $\theta \in \mathcal{Y}^{o*}(x)$

On montre de la même façon que si h est un hessien en x , on a pour tout $(z,\rho,\sigma) \in G_x$, $\xi , \zeta \in \mathbb{R}^{3n}$

$$h((\rho,\sigma)^{(n)}\xi \, , (\rho,\sigma)^{(n)}\zeta) = h(\xi,\zeta)$$

On en déduit directement iii).

Enfin si h est de rang maximum, nous avons vu que $\operatorname{Im} h = \mathcal{J}(x)^{\perp} = \mathcal{Y}^{o*}(x) \oplus \mathcal{Y}'^{*}(x)$ d'où la propriété iv). Q.E.D.

La propriété iv) implique en particulier que si h est non dégénéré, sa restriction à $\mathcal{Y}(x)$ est de rang maximum. Autrement dit si x est un point critique non dégénéré de $\varphi^{(n)}$, c'est un point critique non dégénéré de la restriction de $\varphi^{(n)}$ à la strate S_x .

La propriété ii) implique que pour tout $\varphi \in C^{\infty}(]0,\infty[)$ $d\varphi^{(n)}(x)$ est complètement déterminé par sa restriction à $\mathcal{Y}(x)$ En effet pour tout $\xi \in \mathbb{R}^{3n}$

$$d\varphi^{(n)}(x).\xi = d\varphi^{(n)}(x).\bar{\xi} \qquad \text{où}$$

$$\bar{\xi} = |G_x|^{-1} \sum_{G_x} (\rho,\sigma)^{(n)}\xi \in \mathcal{Y}^{o}(x)$$

Nous pouvons maintenant démontrer la stabilité des symétries dans le sens suivant :

Théorème 4 : Soit $\varphi \in C^\infty(]0,\infty[)$ et $x \in X^{(n)}$ un point critique non dégénéré de $\varphi^{(n)}$.

Il existe alors un voisinage faible $\mathcal{V}$ de φ tel que $\forall \psi \in \mathcal{V}$, $\psi^{(n)}$ ait également un point critique non dégénéré dans la strate S_x.

Preuve : Si x est un point critique non dégénéré de $\varphi^{(n)}$, sa projection $\tilde{x}$ dans l'espace réduit $X^{(n)}/I$ est non dégénérée au sens stricte pour $\widetilde{\varphi^{(n)}}$.

L'application qui associe $\widetilde{\varphi^{(n)}}$ à φ est continue pour la topologie faible. Il existe donc un voisinage $\mathcal{V}_0$ de φ tel que $\forall \psi \in \mathcal{V}_0$, $\widetilde{\psi^{(n)}}$ est de Morse dans un voisinage de $\tilde{x}$.

Le lemme 4 implique que $\tilde{x}$ est également un point critique non dégénéré pour la restriction de $\widetilde{\varphi^{(n)}}$ à S_x/I. Il existe donc par stabilité, un voisinage $\mathcal{V}_1$ de φ tel que $\forall \psi \in \mathcal{V}_1$, la restriction de $\widetilde{\psi^{(n)}}$ à S_x/I a un point critique voisin de $\tilde{x}$ (également critique pour $\widetilde{\psi^{(n)}}$). On en déduit la propriété annoncée pour tout $\psi \in \mathcal{V} = \mathcal{V}_0 \cap \mathcal{V}_1$ Q.E.D.

Nous terminons cette partie en montrant que les strates de la symétrie n'admettent pas de partie stable plus petite, à l'exception possible d'un nombre fini de sous variétés de codimension non nulle. Autrement dit, si x est un point critique non dégénéré de $\varphi^{(n)}$, les variations de φ entrainent des déplacements de x qui couvrent localement la strate S_x.

Examinons d'abord la relation entre la stratification par les distances et la stratification par les symétries.

<u>Lemme 5</u> : Soit $x \in X^{(n)}$ et X_λ la partie lisse de la variété algébrique X_R à laquelle il appartient. Alors X_λ est inclus dans la strate S_x .

Preuve : Soit R la relation d'équivalence associée à x . R entraîne certainement les égalités de distance $\|x_{ij}\| = \|x_{\sigma(i)\sigma(j)}\|$, dues au groupe de symétrie G_x .

Donc $\forall y \in X_\lambda \ , \ \Sigma_y \supset \Sigma_x$

Par ailleurs, on vérifie aisément que pour tout $x \in X^{(n)}$ il existe un voisinage $V \ni x$ tel que $\forall y \in V \, , \ \Sigma_y \subset \Sigma_x$.

On en déduit par connexité que $\Sigma_y = \Sigma_x$ pour tout $y \in X_\lambda$, et par conséquent que $X_\lambda \subset S_x$. Q.E.D.

La stratification par les distances étant finie, il existe un ouvert dense de S_x , complémentaire de sous-variétés de codimension non nulle, telle que $\dim X_\lambda = \dim S_x$. On a alors

<u>Théorème 5</u> : Soit X_λ une strate de la distance ouverte dans S_x ou x est un point critique non dégénéré de $\varphi^{(n)}$. Alors les perturbations de x associées à des variations petites mais arbitraires de φ couvrent localement la strate S_x .

Preuve : Soit $\tilde{x}$ le point critique de $\tilde{\varphi}^{(n)}$, projection de x dans $X^{(n)}/I$. Il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de o dans $C^\infty(]0,\infty[)$ tel que pour tout $\lambda \in [0,1]$ et tout $\psi \in \mathcal{V}$, $\widetilde{(\varphi+\lambda\psi)}^{(n)}$ ait un point critique $\tilde{x}_\lambda$ dans S_x/I , voisin de $\tilde{x}$.

La trajectoire $\lambda \longrightarrow \tilde{x}_\lambda$ est solution du système

$$\begin{cases} H_{\tilde{x}_\lambda}\widetilde{(\varphi+\lambda\psi)}^{(n)}(\tilde{\xi}_\lambda) + d\tilde{\psi}^{(n)}(\tilde{x}_\lambda) = 0 \\ \tilde{\xi}_\lambda = \dfrac{d\tilde{x}_\lambda}{d\lambda} \end{cases}$$

La trajectoire est tangente en $\tilde{x}$ à $\tilde{\xi}_o$ tel que

$$H_{\tilde{x}}\, \widetilde{\varphi^{(n)}}(\tilde{\xi}_o) + d\widetilde{\varphi^{(n)}}(\tilde{x}) = 0$$

Cette équation se relève en

$$H_x\, \varphi^{(n)}(\xi) + d\varphi^{(n)}(x) = 0 \qquad (38)$$

Il suffit donc de montrer que lorsque φ varie dans $\mathcal{V}$, l'ensemble des ξ solution de (38) coincide avec $\mathcal{Y}(x)$, i.e. pour tout hessien h non dégénéré en x, $h(\mathcal{Y}(x)) = \mathcal{D}(x)$

Soit $h_o = \sum_{i<j} \varepsilon_{ij}(x) \otimes \varepsilon_{ij}(x)$ qui est un hessien de rang 3n-6. On a alors

1) $h_o(T_x X_\lambda) \subset \mathcal{D}(x)$

2) $T_x X_\lambda = \mathcal{Y}(x)$ car X_λ est ouvert dans S_x

3) $\mathcal{D}(x) \subset \mathcal{Y}^{o*}(x) = h_o(\mathcal{Y}^o(x))$ par non-dégénérescence.

Autrement dit, $\mathcal{D}(x) = \mathcal{Y}^{o*}(x) = h_o(\mathcal{Y}(x))$. Il est clair qu'on peut alors étendre cette égalité à tous les hessiens non dégénérés, ce qui achève la preuve. Q.E.D.

V - CONSEQUENCES PHYSIQUES

Dans les parties précédentes nous avons vu d'une part, que pour presque toute interaction (au sens de Baire), les énergies potentielles à n particules, sont simultanément des fonctions de Morse et d'autre part que les symétries éventuelles des points critiques sont stables.

Cependant, pour tout n , la strate associée au groupe trivial (qui est l'ensemble des configurations ne présentant aucune symétrie) est un ouvert dense de $X^{(n)}$. On peut donc se demander si la classe des potentiels donnant lieu à des symétries non triviales est non vide, et si oui, si cette classe est assez grande pour contenir des interactions réalistes.

On peut voir assez facilement que n'importe quel point $x \in X^{(n)}$ constitue un point critique, stable au sens mécanique, pour une certaine interaction $\varphi \in C^{\infty}(]0,\infty[)$. L'ensemble des interactions réalisant cette condition est même dense pour la topologie C^{0} faible. Il existe donc certainement des interactions donnant lieu à des symétries non triviales pour tout n fixé. Ce résultat est cependant insuffisant dans la perspective d'une théorie classique du cristal.

Considérons alors la classe suivante d'interactions

$$\mathscr{C} = \{ \varphi \in C^{\infty}(]0,\infty[) \mid \lim_{t\to 0} \varphi(t) = +\infty , \exists r>0 : t \geq r \Rightarrow \varphi'(t)>0 \} \quad (39)$$

$\mathscr{C}$ est un ouvert pour la topologie de Whitney, qui consiste en l'ensemble des interactions divergentes à l'origine et attractives à grande distance.

Un argument élémentaire de géométrie euclidienne implique que pour tout $\varphi \in \mathscr{C}$, les points critiques de $\varphi^{(n)}$ satisfont $\|x_{ij}\| < (n-1)\,r$ pour tout i,j. En outre, pour toute strate $S \subset X^{(n)}$ de la stratification par les symétries, la borne inférieure de $\varphi^{(n)}$ dans S est atteinte dans S^{*} où

$$S^{*} = \{ x \in \overline{S} \mid i \neq j \Rightarrow x_i \neq x_j \} \quad (40)$$

et où la fermeture $\overline{S}$ est prise dans $\mathbb{R}^{3n}$.

Il est clair que les points de $S^* \setminus S$, ou bien appartiennent à des strates S' associées à des groupes de symétrie strictement plus grands, ou correspondent à des configurations planaires dans $\mathbb{R}^{3n} \setminus X^{(n)}$.

En d'autres termes, pour tout groupe de symétrie G , on a pour les strates correspondantes, ou $S^* \subset X^{(n)}$ pour tout n (avec éventuellement $S = \phi$), ou S^* contient des configurations planaires pour un certain n.

On vérifie aisément que le groupe trivial, les groupes cycliques et diédraux sont dans la seconde classe et que cette classe est caractérisée par l'existence d'un plan P de $\mathbb{R}^3$ invariant par G qui n'est pas un plan de symétrie.

Une analyse détaillée montre que la première classe de groupes de symétrie (tels que tout plan invariant est un plan de symétrie) contient les groupes suivants, dans les notations de Hermann-Manguin [P] :

- m m m (système orthorhombique)
- 4/m et 4/m m m (système tetragonal)
- $\overline{6}$, 6/m , $\overline{6}$ 2m et 6/m m m (système hexagonal)
- m3 et m3m (système cubique)
- les deux groupes de l'icosaèdre.

Pour chacun de ces groupes et selon n, l'une des trois propriétés suivantes est réalisée :

i) $S = \phi$: la symétrie correspondante n'est pas réalisée dans $X^{(n)}$.

ii) $S^* = S \neq \phi$: aucun groupe strictement plus grand que G n'est réalisé dans $X^{(n)}$.

iii) $S^* \setminus S \neq \phi$: la symétrie correspondante n'est pas maximale dans $X^{(n)}$.

On a alors le

<u>Théorème 6</u> : Soit G et n tels que la strate correspondante S vérifie la propriété ii) ci-dessus. Alors pour tout $\varphi \in \mathcal{C}$, $\varphi^{(n)}$ admet au moins un point critique dans S avec le groupe de symétrie G .

Preuve : elle découle directement des remarques précédentes et du lemme 4. Nous avons vu en effet que tout point critique de la restriction de $\varphi^{(n)}$ à une strate de la symétrie est un point critique de $\varphi^{(n)}$ dans $X^{(n)}$. Il suffit donc de considérer le point de S où $\varphi^{(n)}$ atteint son minimum. Q.E.D.

Remarquons que les configurations d'équilibre obtenues ainsi sont mécaniquement stables à l'intérieur de leur strate, mais que rien ne peut être affirmer a priori sur la stabilité mécanique dans $X^{(n)}$.

Enfin, si n est assez grand, il existe plusieurs groupes vérifiant la condition ii) et par conséquent $\varphi^{(n)}$ présente plusieurs configurations d'équilibre dans $X^{(n)}$. On en déduit que pour tout $\varphi \in \mathcal{C}$, $\varphi^{(n)}$ ne peut être une fonction convexe sur $X^{(n)}$ contrairement au cas unidimensionnel.

REFERENCES

[A-R] : R. Abraham, J. Robbin, Transversal mappings and flows. Benjamin, New York (1967).

[BE] : M. Berger, Géométrie, tome 2. Nathan, Paris (1979).

[BR] : G.E. Bredon. Introduction to compact transformation groups. Academic Press (1972).

[C] : M. Chaperon, communication.

[K-D] : A. Katz, M. Duneau. Stability of symmetries for equilibrium configurations of N particles in 3 dimensions. J. Stat. Phys. 29, #3 (1982).

[P] : F.C. Phillips, An introduction to crystallography. Wiley (1963).

[R] : C. Robinson, A global approximation theorem for hamiltonian systems, in Global Analysis, Proc. Symp. Pure Math. 14 p. 233-243 (1970) A.M.S.

[W] : H. Whitney, Ann. of Math., 66, 545 (1957).