

# RECHERCHE COOPÉRATIVE SUR PROGRAMME N° 25

B. SOUILLARD

## **Spectre d'opérateurs auto-adjoints aléatoires et théorie de la localisation dans les systèmes désordonnés**

*Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg - RCP25*, 1983, tome 31  
« Conférences de : B. Malgrange, B. Souillard, M. Duneau, C.-E. Pfister », , exp. n° 2,  
p. 27-40

[http://www.numdam.org/item?id=RCP25\\_1983\\_\\_31\\_\\_27\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RCP25_1983__31__27_0)

© Université Louis Pasteur (Strasbourg), 1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Recherche Coopérative sur Programme n° 25 » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

**SPECTRE D'OPERATEURS AUTO-ADJOINTS ALEATOIRES ET  
THEORIE DE LA LOCALISATION DANS LES SYSTEMES DESORDONNES  
( Problèmes mathématiques posés à la théorie des opérateurs par la  
propagation d'ondes en milieu aléatoire )\***

**B. SOUILLARD**

**Centre de Physique Théorique - Ecole Polytechnique**

\* Conférence présentée à la Rencontre entre Physiciens et Mathématiciens de la RCP 25 en Novembre 1981 à Strasbourg et au Colloquium du Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique.

25 Février 1982

Nous voulons présenter ici les problèmes mathématiques posés par la théorie de la localisation. Il s'agit d'étudier une question qui se pose a priori pour toute propagation linéaire d'onde en milieu inhomogène. Cependant la théorie est apparue et s'est développée principalement en physique de la matière condensée à propos de la conduction électrique dans les solides et les liquides, et ceci autant pour des raisons historiques que parce que les conséquences actuellement les plus spectaculaires de la théorie se manifestent dans ce domaine. Nous décrirons donc la théorie de ce point de vue, mais indiquerons cependant quelques autres équations d'onde pour lesquelles la théorie peut s'appliquer aussi.

Rappelons tout d'abord que la théorie classique de la conduction électrique est basée sur l'étude de la propagation d'électrons dans un cristal parfait : les ions qui diffusent les électrons sont situés aux sommets d'un réseau régulier, et chacun d'eux crée un potentiel  $\varphi(\cdot)$ . Les électrons sont alors soumis à un potentiel

$$V(X) = \sum_i \varphi(X-X_i)$$

où la somme porte sur tous les diffuseurs et  $X_i$  représente la position du  $i^{\text{ème}}$  diffuseur. Ce potentiel  $V(X)$  est alors un potentiel périodique en raison de l'arrangement régulier des diffuseurs  $X_i$ .

Cependant la matière condensée n'est certainement pas un cristal parfait : il y a du désordre. Tout d'abord il y a l'agitation thermique : les diffuseurs ne sont pas situés exactement aux sommets d'un réseau régulier mais oscillent en fonction du temps autour de cette

position d'équilibre. D'autre part nous avons des impuretés : certains atomes sont remplacés par des atomes différents et le potentiel créé par chaque diffuseur dépendra alors de l'atome occupant le site ; d'ailleurs ces impuretés sont souvent délibérément mises dans le cristal afin d'en modifier les propriétés, on parle alors de dopage. Par ailleurs de nombreux alliages présentent une structure cristalline, mais les atomes des divers composants occupent au hasard les sites du réseau. Enfin il existe des systèmes dont les propriétés électriques sont intéressantes, par exemple les métaux liquides et les solides amorphes et dont la théorie ne peut pas postuler l'existence d'un ordre cristallin à longue portée.

On est alors conduit à étudier le mouvement d'électrons soumis à un potentiel

$$V(X,t) = \sum_i \varphi_i(X-X_i(t))$$

où la somme porte de nouveau sur tous les diffuseurs, mais ceux-ci occupent maintenant la position  $X_i(t)$  à l'instant  $t$ , et le  $i^{\text{ème}}$  diffuseur crée un potentiel  $\varphi_i(\cdot)$ .

On fait alors deux approximations, classiques en physique de la matière condensée :

- approximation de désordre statique : on se placera à température nulle (en pratique en-dessous de quelques degrés Kelvin), les diffuseurs ont alors une position fixe.

- approximation des électrons indépendants : on oublie les interactions coulombiennes entre électrons.

Dès lors on est amené à l'étude du "problème à une particule" dans lequel la fonction d'onde,  $\Psi_t$  de l'électron, à l'instant  $t$ , qui appartient à  $L^2(\mathbb{R}^d)$ , est gouvernée par une équation de Schrödinger

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Psi_t = H \Psi_t$$

où l'Hamiltonien  $H$  est égal à  $-\Delta + V$ ,  $-\Delta$  représentant le Laplacien et  $V$  l'opérateur de multiplication associé à la fonction potentiel ; Nos opérateurs  $H$  seront toujours auto-adjoints et l'évolution

$\Psi_t = \exp \{-it H\} \Psi_0$  est alors bien définie. Afin de modéliser la complexité

de notre milieu et son désordre, nous supposerons que  $V$  est un potentiel aléatoire, en un sens à préciser plus loin. On réintroduira éventuellement par la suite les interactions coulombiennes, et la température, par des techniques de perturbation lorsque l'on aura compris le problème à un électron.

Pour des raisons qu'il n'est pas nécessaire de développer ici, on est aussi conduit en physique de la matière condensée à introduire l'approximation de "liaison forte" dans laquelle l'espace devient un réseau discret, par exemple  $\mathbb{Z}^d$ . L'électron est alors représenté à l'instant  $t$  par une fonction d'onde  $\Psi_t$  de  $\ell_2(\mathbb{Z}^d)$  satisfaisant l'équation

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Psi_t = H \Psi_t$$

dans laquelle l'Hamiltonien  $H$  est encore de la forme  $-\Delta + V$  mais où  $-\Delta$  et  $V$  sont les analogues aux différences finies des opérateurs précédents.

Afin d'avoir un modèle bien défini, il ne nous reste plus qu'à préciser le potentiel aléatoire. Un choix classique consiste dans le cas discrétisé à prendre les valeurs de  $\{V(X)\}_{X \in \mathbb{Z}^d}$  comme des variables aléatoires indépendantes et de même loi, que nous supposerons de densité  $r(\cdot)$ . Le modèle le plus courant consiste à prendre pour  $r(\cdot)$  une distribution rectangulaire de largeur  $W$ ; c'est le modèle d'Anderson. Dans le cas continu on peut choisir par exemple pour  $V$  une somme de mesures de Dirac en des sites aléatoires et avec des poids aléatoires. De nombreux autres choix sont bien sûr possibles.

Notons cependant qu'il y a de bonnes raisons de penser que les résultats qualitatifs ne dépendront pas du caractère continu ou discret de l'équation de Schrödinger considérée, ni des détails du choix du potentiel aléatoire. Par simplicité nous nous restreindrons dans ce qui suit au cas discrétisé, avec des variables aléatoires indépendantes de même densité  $r(\cdot)$ .

Ayant maintenant des modèles bien définis, nous voulons essayer de répondre aux quatre questions essentielles qui se posent, c'est-à-dire déterminer pour un  $V$  typique :

- ① le spectre de H
- ② la nature de ce spectre
- ③ les propriétés de transport associées à H .
- ④ le comportement au voisinage des transitions (s'il y en a)

qui correspondent aux quatre parties de l'exposé ci-dessous.

## I - LE SPECTRE

Le spectre de l'opérateur auto-adjoint H est d'intérêt physique : il est le support de la densité d'états. Le comportement de la densité d'états vers les bords du spectre pose des problèmes mathématiques intéressants, reliés à la théorie des grandes déviations pour les processus de Markov, de Donsker et Varadhan. Cependant nous nous restreindrons ici à mentionner un résultat concernant le spectre qui nous sera utile dans la suite de cet exposé.

Théorème [9] : Pour presque tout potentiel, le spectre de H est :

$$\text{Sp } H = \text{Sp}\{-\Delta\} + \text{Supp } r(\cdot)$$

Le spectre de H consiste donc en l'ensemble des points  $\lambda = \alpha + \beta$  où  $\alpha$  appartient au spectre du Laplacien, qui est l'intervalle  $[0, 4d]$  si notre réseau est  $\mathbb{Z}^d$ , et où  $\beta$  est dans le support de la densité  $r(\cdot)$  de la distribution du potentiel en chaque site du réseau.

Conséquence : Le résultat ci-dessus implique, clairement, que pour presque tout potentiel, l'opérateur H n'a pas de valeur propre isolée.

## II - NATURE DU SPECTRE

Nous cherchons à discuter qualitativement la nature des solutions d'une équation de Schrödinger, continue ou discrétisée, avec un potentiel aléatoire. Du point de vue mathématique, deux descriptions sont possibles et naturelles, l'une statique, l'autre dynamique. Dans la première, on étudie la nature du spectre de l'opérateur auto-adjoint H et l'on cherche à décider si par exemple il est purement ponctuel ou continu. Dans la seconde on étudie l'évolution dans le temps d'une

solution et en particulier la probabilité de trouver la particule associée dans une région finie de l'espace. Il est connu que ces deux approches sont en fait équivalentes [16,1], le spectre continu correspondant à des solutions qui diffusent à l'infini, le spectre purement ponctuel à des solutions restant essentiellement dans une région finie de l'espace au cours de l'évolution. Dans la littérature physique, on parle généralement d'états étendus ou localisés, faisant allusion au fait que les deux situations opposées sont aussi associées à des différences du comportement asymptotique des pseudo-fonctions propres de  $H$  (c'est-à-dire des solutions de l'équation  $H\Psi = \lambda\Psi$  qui ne croissent pas exponentiellement à l'infini): dans un cas celles-ci ne sont pas de carré intégrable et alors souvent ne tendent même pas vers zéro, alors que dans l'autre cas elles sont de carré intégrable et souvent même à décroissance exponentielle.

Quelque soit la terminologie, nous sommes donc confrontés à un problème mathématique bien posé : déterminer la nature du spectre de l'opérateur auto-adjoint  $H$ , du moins pour presque tout  $V$ .

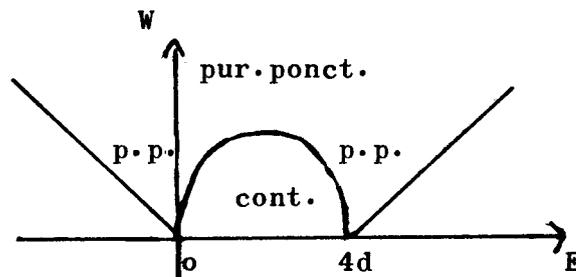
A ce stade, il faut remarquer que l'on sait bien traiter les opérateurs de la forme  $-\Delta + V$  dans les cas où  $V$  tend assez vite vers zéro à l'infini ; le spectre alors consiste en un spectre discret de valeurs propres isolées et en un spectre absolument continu. On sait aussi traiter le cas où  $V$  est périodique ; le spectre est alors absolument continu. Malheureusement aucune des techniques usuelles ne s'applique au cas d'un potentiel aléatoire, tout est donc à inventer, et l'on verra que les quelques résultats connus font apparaître des situations totalement différentes des cas habituels.

Mais présentons tout d'abord les conjectures qui découlent des travaux des théoriciens dans les vingt dernières années.

### L'image physique :

La conception physique traditionnelle pensait le désordre comme une perturbation du cas ordonné et conduisait systématiquement à des états étendus. Un article de P.W. Anderson s'inscrit en 1958 en complète opposition à cette vision, prédisant qu'en cas de grand désordre, c'est-à-dire en cas de fluctuations importantes des variables

aléatoires  $V(X)$ , tous les états devraient être exponentiellement localisés ! Ceci correspondrait à un spectre purement ponctuel avec des fonctions propres exponentiellement décroissantes. Cette image fut complétée par Mott en 1968 en ce qui concerne la situation à petit désordre : il prédisait qu'alors les états aux bords du spectre devraient être localisés et ceux en milieu du spectre étendus ; de plus les régions d'états localisés et d'états étendus devraient être strictement séparées dans le spectre, les séparations étant baptisées seuils de mobilité. Si l'on considère le cas particulier du modèle d'Anderson décrit précédemment, on aboutit dans le cas tridimensionnel au diagramme de phase ci-dessous dans lequel, à désordre fixé (c'est-à-dire  $W$  fixé) le spectre de l'opérateur  $H$  est presque sûrement le segment horizontal compris entre les deux droites à  $45^\circ$  en vertu du théorème de la section I .



Les physiciens ont de plus réalisé rapidement qu'il devrait y avoir une influence importante de la dimension sur la théorie, et dès 1961 Mott et Twose prédisaient que tous les états seraient exponentiellement localisés pour des systèmes unidimensionnels et ceci pour un désordre arbitrairement petit ! Quant aux systèmes bidimensionnels, longtemps considérés comme analogues aux systèmes tridimensionnels, la majorité des physiciens les pensent maintenant exponentiellement localisés pour tout désordre à la suite d'un travail de 1979 de Abrahams, Anderson, Licciardello et Ramakrishnan.

Notons enfin que le cas des systèmes désordonnés en champ magnétique est particulièrement compliqué et l'image physique en est beaucoup moins clarifiée.

Le caractère profondément novateur des travaux théoriques de Mott et Anderson et leur influence importante en physique du solide leur a valu de recevoir le prix Nobel en 1977.

Discussion qualitative :

Est-il possible d'avoir une compréhension qualitative simple des phénomènes décrits ci-dessus ? Malheureusement la seule chose simple à comprendre dans ce domaine c'est...qu'il s'agit d'un problème très compliqué : en effet la propagation d'une particule quantique décrite par une équation de Schrödinger continue ou discrétisée est une propagation d'onde. Cela implique les deux faits suivants : une particule de faible énergie rencontrant une grande barrière de potentiel est partiellement réfléchiée mais aussi, contrairement à une particule classique, partiellement transmise, c'est l'effet tunnel ; d'autre part une particule de grande énergie rencontrant une faible barrière de potentiel est partiellement transmise mais aussi, contrairement à une particule classique, partiellement réfléchiée !

Le premier fait montre la difficulté à prouver l'existence de spectre purement ponctuel, d'états localisés. Le second montre la difficulté à prouver l'existence de spectre continu, d'états étendus. La transition de Mott-Anderson n'est pas un phénomène local mais un phénomène global : il s'agit de prendre en compte les interférences constructives et destructives de l'onde avec elle-même.

Les résultats :

Devant la difficulté du problème le travail s'est d'abord largement porté sur les systèmes unidimensionnels. Sous des hypothèses variées et selon diverses approches, les résultats suivants ont été obtenus :

Théorème : Pour presque tout  $V$ , en dimension 1, le spectre de  $H$  a les propriétés suivantes :

- a) il n'y a pas de spectre absolument continu. [4] [14]
- b) le spectre est purement ponctuel avec des fonctions propres exponentiellement décroissantes ; [7] [13] [9] [15] [3] [12] [5] ce résultat persiste si l'on ajoute un potentiel constant arbitraire au potentiel aléatoire. [5]
- c) le taux de la décroissance exponentielle est au moins égal à

l'indice de Lyapunov.\* [3]

d) en présence d'un champ électrique\*\* arbitrairement petit, le spectre redevient purement absolument continu. [2]

Dans le cadre des systèmes unidimensionnels, je signalerai encore deux aspects reliés. D'abord les systèmes "quasi-unidimensionnels" : il s'agit des systèmes qui sans être strictement unidimensionnels ne sont infinis que dans une direction, par exemple une bande parallèle à un des axes d'un réseau  $\mathbb{Z}^2$ . Pour ces systèmes quasi-unidimensionnels il est prouvé que le coefficient de transmission décroît exponentiellement avec le plus petit indice de Lyapunov pour taux de décroissance [17] et il a été annoncé que le spectre de H est encore presque sûrement purement ponctuel. [6]

D'autre part nous avons mentionné dans l'introduction que la question de la localisation se pose en principe pour toute équation d'onde en milieu aléatoire. Et il est en effet possible d'étudier en dimension un l'équation de Helmholtz de propagation lumineuse, ou diverses équations de propagations d'électrons ou de phonons. Là encore il est prouvé [12] [5] que ces équations d'ondes ont tous leurs modes propres exponentiellement localisés pour un désordre arbitrairement petit. Cependant, en contraste avec le cas de l'équation de Schrödinger, le taux de décroissance exponentielle tend en général vers 0 au bord du spectre.

---

\* L'indice de Lyapunov est défini comme la limite presque sûre de  $\frac{1}{n} \log \left\| \prod_{i=1}^n M(n) \right\|$  où la matrice aléatoire M(n) est la matrice 2x2 :

$$M(n) = \begin{pmatrix} V(n)-E, -1 \\ 1, 0 \end{pmatrix} \text{ qui apparaît naturellement si l'on étudie les}$$

solutions de l'équation  $H \Psi = E \Psi$  pour  $(H\Psi)(n) = -\Psi(n+1) - \Psi(n-1) + V(n)\Psi(n)$ .

\*\* Considérer un champ électrique E revient à ajouter à l'Hamiltonien H un terme E.X où X est l'opérateur de position. Ce problème n'a de sens physique que si H est l'opérateur de Schrödinger continu, et le résultat annoncé s'applique bien à ce cas, de même qu'un résultat précédent [8] obtenu par une autre méthode mais pour lequel les conditions d'analyticité imposées au potentiel interdisent de savoir actuellement si le spectre est bien purement ponctuel lorsque  $E = 0$ .

Pour des raisons multiples, la situation la plus simple après la situation unidimensionnelle c'est celle de dimension infinie, ou du moins ce qui en tient lieu, c'est-à-dire le problème sur l'arbre de Bethe. Il s'agit de considérer l'opérateur de Schrödinger discrétisé avec un potentiel aléatoire associé à un arbre de Cayley - c'est-à-dire un graphe connexe, sans boucle et avec un nombre constant de lignes arrivant à chaque nœud - souvent rebaptisé arbre de Bethe par les physiciens. Ce réseau correspond à la dimension infinie dans le sens où il est la limite de réseaux de nombre de coordination constant lorsque la dimension tend vers l'infini.

Le modèle sur l'arbre de Bethe est particulièrement intéressant : d'une part c'est le modèle le plus simple-bien que parfaitement non trivial - pour lequel on puisse espérer étudier la transition de Mott-Anderson, d'autre part de nombreuses quantités physiques importantes en dimension trois peuvent être calculées grâce à des théories de perturbation à partir des quantités en dimension infinie et il est donc important de résoudre aussi complètement que possible le modèle sur l'arbre. Il a été étudié, non rigoureusement, en 1973 par Abou-Chacra, Anderson et Thouless qui purent seulement y établir un domaine de stabilité des états localisés. Il est maintenant possible de prouver les résultats suivants :

Théorème : [10] Pour presque tout  $V$  , le spectre de  $H$  est

- a) purement ponctuel à grand désordre.
- b) purement ponctuel aux bords du spectre et purement absolument continu au centre du spectre, à petit désordre.
- c) il y a au plus un nombre fini de seuils de mobilité à désordre fixé.

Au vu de ce théorème, l'équation de Schrödinger discrétisée sur l'arbre de Bethe, avec potentiel aléatoire est le premier modèle connu qui présente rigoureusement la transition de Mott-Anderson. Comme nous le verrons plus loin, il est aussi possible de prouver certains résultats concernant le comportement du système au voisinage des seuils de mobilité.

Malgré plusieurs annonces, aucun résultat exact n'est actuellement connu concernant la nature du spectre d'opérateurs de Schrödinger aléatoires en dimension deux ou trois.

Terminons cette section sur la nature du spectre par la remarque suivante : nous avons vu dans la section I que le spectre de  $H$  n'a presque sûrement pas de point isolé. Lorsque le spectre est purement ponctuel, nous avons donc un ensemble dénombrable dense de valeurs propres!

### III - LES PROPRIETES DE TRANSPORT

Les propriétés physiques des systèmes désordonnés sont étudiées expérimentalement à travers les propriétés de transport du système : il s'agit selon les cas de la conductivité électrique, de la conductivité thermique, du coefficient de transmission. Il est donc important d'établir des liens entre la nature du spectre de nos opérateurs aléatoires et les propriétés de transport qui vont dépendre de l'interprétation associée au modèle.

Le cas le plus important est certainement celui de la conductivité électrique et l'on pense que la transition de Mott-Anderson correspond à une transition conducteur-isolant. Plus précisément si le niveau de Fermi  $E_F$  - qui est l'énergie maximale des électrons du système à température nulle - est dans une région d'états localisés, la conductivité électrique statique devrait être nulle, alors qu'elle serait non nulle si ce niveau de Fermi est au contraire dans la région des états étendus.

Dans cette direction on peut prouver [9,10] que la conductivité statique est effectivement nulle en dimension 1 et sur l'arbre de Bethe lorsque le niveau de Fermi est dans la région des états localisés. En fait on peut établir un lien assez général entre localisation et annulation de la conductivité. Par contre il n'existe pas de résultat exact précisant les conditions sous lesquelles l'existence de spectre absolument continu assurerait une conductivité statique non nulle.

### IV - LE VOISINAGE DES SEUILS DE MOBILITE

La position des seuils de mobilité dépend sans doute beaucoup du modèle choisi, discret ou continu, de la distribution du désordre...

On a de bonnes raisons de penser par contre que le comportement du système au voisinage des seuils de mobilité est indépendant du modèle choisi, du moins à l'intérieur de certaines classes d'universalité. Afin d'étudier ce problème on définit un certain nombre d'exposants critiques que l'on cherchera à calculer. Deux des plus importants sont les suivants :

a) Exposant  $\nu$  de la longueur de localisation : Soit  $\xi(E)$  la longueur de localisation à l'énergie  $E$ , c'est-à-dire l'inverse du coefficient de la décroissance exponentielle de la fonction propre  $\Psi_E(X)$  associée à l'énergie  $E$ . On fait l'hypothèse que  $\xi(E)$  se comporte au voisinage du seuil de mobilité  $E_c$  selon  $\xi(E) \sim (E-E_c)^{-\nu}$

b) Exposant  $s$  de la conductivité : on fait l'hypothèse que la conductivité électrique statique  $\sigma(E_F)$  se comporte en fonction du niveau de Fermi  $E_F$  au voisinage du seuil de mobilité  $E_c$  comme  $\sigma(E_F) \sim (E_F-E_c)^s$ .

La théorie de Mott (1968) prédit que  $s=0$  en toute dimension, et que la conductivité fait un saut en  $E_c$ . Par contre des théories plus récentes (Wegner) conduisent à la relation  $s = (d-2)\nu$ , où  $d$  est la dimension, ce qui impliquerait que la conductivité s'annule continuellement au seuil de mobilité, au moins en dimension  $d = 3$ . Il s'agit là d'un problème important dont les enjeux théoriques sont multiples.

Du point de vue des résultats exacts, on est loin de pouvoir répondre à de telles questions. On peut cependant déjà démontrer [10] pour des classes de systèmes sur l'arbre de Bethe que l'exposant  $\nu$  est égal à 1.

## CONCLUSIONS

Les problèmes de la propagation d'ondes en milieu aléatoire recèlent un vaste domaine de recherches mathématiques, riche d'applications multiples, et à peine abordé ; il réservera encore bien des surprises. Il doit pouvoir intéresser autant la théorie des probabilités que la théorie des opérateurs et l'analyse fonctionnelle ; il devrait avoir aussi des conséquences sur divers problèmes non linéaires, et très directement

sur les équations complètement intégrables du type Korteweg de Vries. Il faut ajouter que de nombreuses questions sont aussi ouvertes du point de vue de la physique, malgré de très nombreux travaux théoriques, et que les physiciens seraient très intéressés à des théorèmes clarifiant ces questions.

REFERENCES :

- [1] W.O. Amrein et V. Georgescu : *Helv. Phys. Acta* 46, 635 (1973)
- [2] F. Bentosela, R. Carmona, P. Duclos, B. Simon, B. Souillard et R. Weder : Schrödinger operators with electric field and random or deterministic potential. Preprint.
- [3] R. Carmona : *Duke Math. Journal* 49, 191 (1982)
- [4] A. Casher et J.L. Lebowitz : *J. Math. Phys. N.Y.* 12, 1701 (1971).
- [5] F. Delyon, H. Kunz et B. Souillard : "One dimensional wave equations in disordered media", à paraître in *J. Phys. A*.
- [6] I.Ya. Golds'heid : *Doklad. Akad. Nauk USSR*, 255, 273 (1980).
- [7] I.Ya. Golds'heid, S.A. Molchanov et L.A. Pastur : *Funkts. Anal. Prilozhen* 11, 1 (1977).
- [8] I. Herbst et J. Howland : *Commun. Math. Phys.* 80, 23 (1981).
- [9] H. Kunz et B. Souillard : *Commun. Math. Phys.* 78, 201 (1980).
- [10] H. Kunz et B. Souillard : "The mobility edge on a Bethe lattice".
- [11] H. Kunz et B. Souillard : "Localization : theory and experiments, a review".
- [12] J. Lacroix : in *Marches aléatoires*, Nancy 1981, *Lecture Notes in Mathematics*, Springer-Verlag.
- [13] S.A. Molchanov : *Math USSR Izvestija* 42 (1978) Trad. 12, 69 (1978).

- [14] L.A. Pastur : Spectrum of random Jacobi matrices and Schrödinger equations with random potentials in the whole axis, (1974) non publié, et Commun. Math. Phys. 75, 179 (1980).
  
- [15] G. Royer : Bull. Soc. Math. France 110, 27 (1982).
  
- [16] D. Ruelle : Nuovo Cimento A.61, 655 (1969).
  
- [17] T. Verheggen : Applied Scientific Research, 37, 163 (1981).

\*  
\*  
\*