Ph. Combe
R. Rodriguez
M. Sirugue
M. Sirugue-Collin

Définition de l'intégrale de Feynman et processus à sauts

Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg - RCP25, 1982, tome 30
« Conférences de : P. Moussa, J. Fröhlich, J.L. Koszul, P.A. Meyer, M. Sirugue », , exp. n° 6, p. 134-178
<http://www.numdam.org/item?id=RCP25_1982__30__134_0>

DEFINITION DE L'INTEGRALE DE FEYNMAN
ET PROCESSUS A SAUTS

Ph. Combe *

M. Sirugue **

R. Rodriguez *

M. Sirugue-Collin ***

* Université d'Aix-Marseille II et C.P.T. Cnrs Marseille

** C.P.T. Cnrs Marseille

*** Université de Provence et C.P.T. Cnrs Marseille

Adresse Postale : Centre de Physique Théorique, C.n.r.s.,
Centre de Luminy, Case 907 - Route Léon Lachamp
13288 Marseille Cedex 9.

-oO(*)Oo-

§ 1 - Introduction :

La formule de Feynman [1], [2], exprime l'amplitude de transition $(y,t \mid x,o)$ d'une particule non relativiste entre les points x au temps zéro et y au temps t:

(1.1) $$(y,t \mid x,o) = N \int_{\substack{\gamma(o) = x \\ \gamma(t) = y}} \exp \{\frac{i}{\hbar} S_0(\gamma) + \frac{i}{\hbar} S_I(\gamma)\} \prod_{\tau \in [o,t]} d\gamma(\tau)$$

comme une "intégrale" sur les chemins γ qui partent de x au temps O et arrivent en y au temps t, de l'exponentielle imaginaire de l'action classique $S_o(\gamma) + S_I(\gamma)$ associée au chemin γ, divisée par $\hbar$ la constante de Planck. N est un facteur de normalisation. Cette formule présente du point de vue de la physique un très grand intérêt.

On ne citera que deux raisons :

i - la valeur très petite de la constante de Planck $\hbar$ permet d'envisager l'"intégrale" précédente comme une intégrale oscillante qui privilégie les trajectoires qui satisfont les équations d'Euler-Lagrange. En ce sens la formule (1.1) nous permet d'espérer une bonne compréhension des liens entre la mécanique classique et la mécanique quantique.

ij - La formule (1.1) ou mieux les extensions naturelles fournissent une prescription de quantification qui permet de traiter des systèmes plus généraux pour lesquels le formalisme canonique ne s'applique pas. Cette dernière idée était déjà présente dans les travaux ori--ginaux de Feynman, mais ne s'est trouvé réalisée que récemment.

Malgré cela l'utilisation, en dehors de raisonnements qualitatifs, de l'intégrale de Feynman ne s'est pas développée pendant de nombreuses années par le fait même que l'expression (1.1) est très mal définie. Il a été très vite reconnu que l'existence d'une partie imaginaire dans l'exposant de l'exponentielle de la formule (1.1) empêchait de définir une mesure σ-additive sur un espace raisonnable de chemins (cf. par exemple [3]) Ce qui se traduit par exemple pratiquement dans la difficulté qu'il y a à calculer le facteur de normalisation N dans la formule (1.1) lorsqu'on veut définir le membre de droite comme une limite d'intégrales sur des espaces de dimension finie. Il est très connu que ceci est lié à la non existence d'une mesure de Haar sur un espace de Hilbert.

Les raisons physiques évoquées ont suscité de nombreuses approches quant à la définition de l'intégrale de Feynman. Nous ne citerons que les plus populaires :

j - Les méthodes de cylindrification qui consistent à définir l'intégrale de Feynman comme la limite, quand elle existe, d'intégrales sur des espaces de dimension finie. Il est clair que dans cette approche on ne peut contrôler la nature de la limite et l'on perd ainsi tout le support probabiliste qui est si suggestif dans l'approche originale de Feynman.

ij - Les méthodes euclidiennes qui ont été si fructueuses ces dernières années (cf. [4] et les références citées) et que l'on peut caricaturer ainsi : dans le remplacement t $\longrightarrow$ it, le facteur exponentiel de (1.1) devient une exponentielle réelle qui contient un facteur quadratique. L'intégrale devient alors une intégrale gaussienne que l'on peut définir précisément. D'une manière plus générale on exploite l'analogie qui existe alors avec la mécanique statistique.

Un inconvénient de ces méthodes est que l'idée originale de Feynman quant à la connextion entre mécanique classique et mécanique quantique est un peu perdue .

iij - La méthode des intégrales de Fresnel [5] , qui permet de définir (1.1) par dualité, est mieux adaptée à ce problème et en particulier à la limite classique. Effectivement ceci permet de regarder le comportement en $\hbar \rightarrow o$ (Cf. [6]).

Ces méthodes ont un inconvénient qui est que l'intégrale de Fresnel n'est pas définie comme une intégrale de probabilité mais comme une forme linéaire continue sur un certain espace de Banach.

jv - Les méthodes liées aux processus de Poisson qui dérivent d'une remarque originale de Maslov et Chebotarev, (cf. [7] à [11]) sont l'objet du présent exposé. A nouveau caricaturons ces méthodes : la méthode euclidienne consistait essentiellement à incorporer $\exp\{\frac{i}{\hbar} S_0(\gamma)\}$ et $N \prod_{\tau \in [ot]} d\gamma(\tau)$ pour en faire, après le remplacement t $\longrightarrow$ it, une mesure et c'est la philosophie de la formule de Feynman-Kac. La philosophie de cette approche est d'incorporer $\exp\{\frac{i}{\hbar} S_I(\gamma)\}$ à $N \prod_{\tau \in [ot]} d\gamma(\tau)$ pour en faire une mesure, ce qui permettra de dériver une formule à la

Feynman-Kac, où les rôles de l'énergie cinétique et du potentiel sont inversés. Ceci permet de comprendre le rôle joué par la représentation d'impulsion dans la remarque originale de Maslov et Chebotarev.

Cet exposé est, sauf pour quelques points, basé sur une série d'articles, [12] à [16] , où les preuves sont plus détaillées. Il est surtout destiné à fournir les idées de base de l'utilisation des processus à sauts en physique et c'est pourquoi beaucoup de détails techniques n'ont pas été abordés.

§ 2 - Le parallèle entre l'équation de la chaleur et une équation de Schrödinger dans l'espace des impulsions.

Dans ce paragraphe, nous rappellerons les faits essentiels relatifs à la solution de l'équation de la chaleur, et en particulier la représentation intégrale de chemin de la solution de cette équation. En parallèle nous donnerons une équation qui peut s'interpréter comme une équation de Schrödinger dans l'espace des impulsions et qui a une représentation "intégrale de chemin" évidente, la mesure correspondante étant tout à fait différente de la mesure de Wiener.

Nous décrirons alors une réalisation de l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ qui est naturelle pour les physiciens, ainsi que les processus associés qui sont des généralisations naturelles des processus de Poisson. Dans le dernier paragraphe nous donnerons une construction équivalente plus abstraite de ces mêmes processus.

Soit donc l'équation de la chaleur à N dimensions

(2.1) $$\frac{\partial}{\partial t} F(t,x) = \frac{\sigma}{2} \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} F(t,x) \qquad x \in R^N,\ t>0$$

ainsi que la condition initiale :

(2.2) $$\lim_{t \to 0} F(t,x) = f(x)$$

où f est une fonction suffisamment régulière. Il est bien connu que (2.1) est l'équation de Schrödinger libre, où le temps a été pris imaginaire pur.

Les équations (2.1) et (2.2) s'intègrent immédiatement grâce au noyau $P_w^t(x, y)$:

(2.3) $$p_w^t(x,y) = (2\pi\sigma t)^{-N/2} \exp\{\frac{-1}{2\sigma t} \sum_{i=1}^{N} (x_i-y_i)^2\}$$

par la formule :

(2.3) $$F(t,x) = \int_{R^N} dy\, p_w^t(x,y)\, f(y)$$

Cette dernière expression a la forme d'une intégrale de chemin : (*)

* pour un exposé général voir par exemple [17].

(2.4) $$F(t,x) = \int_{\Omega} P_{xt}\ (d\omega)\ f(\omega)$$

comme on le rappellera brièvement en décrivant l'espace probabilisé des chemins $(\Omega, \mathcal{F}, P_{xt})$.

Soit $T > o$, on envisage l'intervalle $[o, T]$. De plus on considère $\dot{R}^N$ le compactifié à un point de R^N. Ω est l'espace des fonctions de $[o, T]$ dans $\dot{R}^N$:

(2.5) $$\Omega = \{\omega : [0,T] \to \dot{R}^N\} \quad .$$

De par la définition précédente :

(2.6) $$\Omega = \{\dot{R}^N\}^{[0,T]} \quad .$$

Par le théorème de Tychonov c'est un espace compact pour la topologie produit.

Soit alors $\mathcal{C}(\Omega)$ l'espace des fonctions continues sur Ω .

Soit $\mathcal{C}_c(\Omega)$ l'espace des fonctions cylindriques sur Ω . Une fonction $F : \Omega \to \mathbb{C}$ appartient à $\mathcal{C}_c(\Omega)$ s'il existe $k > o$, une fonction continue de $(\mathbb{R}^N)^k \to \mathbb{C}$ et $\{t_i\}_{i \leq k}$, $t_i \in [o, T]$ tels que :

(2.7) $$F(\omega) = f\ (\omega(t_1), \ldots\ldots, \omega(t_k)), \quad \forall \omega \in \Omega \ .$$

On remarque que f n'est pas univoquement définie.

Les fonctions cylindriques forment une sous-* - algèbre de l'algèbre $\mathcal{C}(\Omega)$, et comme évidemment elles séparent les points de Ω, elles sont denses dans $\mathcal{C}(\Omega)$ pour la topologie uniforme.

Soit alors une fonction de transition $p^t(x, dy)$ telle que :

(2.8) j - $p^t(x, dy)$ est une mesure de probabilité

(2.9) ij - $p^t(x, dy)$ satisfait à l'équation de Chapman-Kolmogorov

$$\int p^t(x,dy)\ p^s(y,dz) = p^{t+s}(x,dz)$$

Ces deux propriétés sont satisfaites par :

(2.10) $$p_w^t(x,dy) = p_w^t(x,y)dy\ .$$

Il est alors possible de définir une forme linéaire l_x sur $\mathcal{C}_c(\Omega)$:

(2.11) $$l_x(F) = \int \dots \int p^{t_1}(x,dx_1)\ p^{t_1-t_2}(x_1,dx_2)\dots .$$
$$p^{t_{N-1}-t_N}(x_{N-1},dx_N)\ f\ (x_1,\ \dots\dots,\ x_N)\ ,$$

où f est une fonction associée à F i.e.

(2.12) $$F(\omega) = f\,(\omega(t_1),\dots \omega(t_N)),\ \forall\, \omega\varepsilon\Omega\ .$$

Cette forme est linéaire et bornée sur $\mathcal{C}_c(\Omega)$:

(2.13) $$|l_x(F)| \leq \sup_{\omega\,\varepsilon\,\Omega} |\ F(\omega)\ |\ ,\ F\ \varepsilon\ \mathcal{C}_c(\Omega)$$

et par conséquent elle s'étend en une forme linéaire $\bar{l}_x$ de même norme sur $\mathcal{C}(\Omega)$. Enfin $\bar{l}_x$ définit sur Ω une mesure $P_x(d\omega)$.

(2.14) $$\bar{l}_x(F) = \int_\Omega P_x(d\omega)F(\omega)$$

Associé à cette construction, il y a un processus ξ_τ , $\tau\ \varepsilon\ [0,T]$ défini par

$$\xi_\tau\ (\omega) = \omega(\tau)\qquad ,\quad \omega\varepsilon\Omega$$

Grâce aux formules précédentes on peut calculer la fonction caractéristique du processus :

$$E\ [\exp\{i\lambda\xi_\tau\}] = \int_\Omega P_x(d\omega)\ \exp\{i\lambda\xi_\tau(\omega)\}\ .$$

$\omega \to \exp\ \{i\lambda\xi_\tau\}$ est une fonctionnelle cylindrique sur Ω et par conséquent

(2.15) $$E\ [\exp\{i\lambda\xi_\tau\}] = \int_{R^N} p^\tau(x,dy)\ \exp\ \{i\lambda\ y\}$$

Dans l'exemple précédent on a bien sûr, pour toute fonction f raisonnable

(2.16) $$E\ [\,f(\xi_\tau)\,] = \int_{R^N} p^\tau\ (x,dy)\ f(y)$$

C'est une représentation intégrale (de chemin) de la solution de l'équation de la chaleur telle que :

(2.17) $$\lim_{\tau \downarrow o} E\,[f(\xi_\tau)] = f(x)$$

On peut cependant envisager d'autres fonctions de transition et en particulier si $t < T$:

(2.18) $$p^t_{px_o}(x,A) = \exp\{-(T-t)\lambda\} \sum_{n \geq 0} \frac{\lambda^n}{n!} (T-t)^n \chi_A(x-nx_o)$$

où λ est un paramètre positif, et χ_A est la fonction caractéristique de A, $A \subset R$. $p^t_p(x,dy)$ vérifie les conditions j et ij des fonctions de transition et définit sur Ω une mesure P^p_x par la méthode précédente.

Cette fonction de transition est la fonction de Green d'une équation qu'il est très facile de déterminer. En effet soit l'équation

(2.19) $$\frac{\partial F}{\partial t}(t,x) = -\lambda\, F(t,x-x_o), \quad 0 < t < T \ , \quad \lambda > 0$$

avec la condition initiale :

(2.20) $$\lim_{t \to T} F(t,x) = f(x).$$

f étant une fonction bornée.

La solution des équations précédentes s'écrit immédiatement :

(2.21) $$F(t,x) = \sum_{n \geq 0} \frac{\lambda^n}{n!} (T-t)^n f(x-nx_o)$$

ou encore en utilisant (2.18)

(2.22) $$F(t,x) = \exp\{(T-t)\lambda\} \int p^t_p(x,dy)\, f(y) \ ,$$

soit encore :

(2.23) $$F(t,x) = e^{(T-t)\lambda}\, E\,[f(\xi_t)]$$

L'équation (2.19) est un modèle pour l'équation de Schrödinger. Soit en effet cette équation dans l'espace des impulsions et pour le temps t purement imaginaire :

(2.24) $$\frac{\partial \Psi}{\partial t}(t,p) = -\frac{1}{2M}\left(\sum_{i=1}^{N} p_i^2\right) \Psi(t,p) + \int \tilde{V}(p-p')\,\Psi(t,p')dp'$$

où l'on a supposé que $\tilde{V}$ est la transformée de Fourier du potentiel V. Intuitivement (2.19) correspond à (2.24) dans la limite où la masse M de la particule est infinie et la transformée de Fourier du Potentiel est λ fois une masse de Dirac au point p_o.

A nouveau on ne semble pouvoir étudier que les équations de Schrodinger avec le temps purement imaginaire, cependant l'équation :

(2.25) $$\frac{\partial}{\partial t} G(t,x) = i\,\lambda\, G(t,x-x_o)\ , \qquad \lambda>o$$

avec pour condition initiale :

(2.26) $$\lim_{t\to T} G(t,x) = f(x)$$

a pour solution

(2.27) $$G(t,x) = \sum_{n\geqslant 0} i^n \frac{[\lambda(T-t)]^n}{n!} f(x-nx_0).$$

Cette solution a une expression en terme d'intégrale de chemin:

(2.28) $$G(t,x) = \exp\{(T-t)\lambda\}\ \ E\left[\exp\left\{\frac{i\pi}{2}\ \xi_t\right\} f(x-x_0\xi_t)\right]$$

Nous reviendrons sur ce point, mais alors que la mesure de Wiener perd son caractère de mesure [3] lorsque le paramètre (ou le temps) devient imaginaire, la mesure de Poisson se transforme en une mesure absolument continue par rapport à la mesure de Poisson dans ce même remplacement. Ceci est lié au fait que la solution de (2.19) est une fonction entière de λ.

Signalons un dernier point qui sera développé plus tard : L'équation (2.25) est, comme nous l'avons dit, le modèle d'une équation de Schrödinger dans le cas où la masse de la particule est infinie. Mais c'est aussi un modèle pour l'équation de Schrödinger dans le schéma d'interaction et dans la représentation d'impulsion . Soit en effet l'équation :

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Psi(t,p) = \varepsilon(p) \; \Psi(t,p) + \int \tilde{V}(p-p') \; \Psi(t,p') \, dp' \tag{2.29}$$

où bien sûr $\varepsilon(p) = (2M)^{-1} \sum_{i=1}^{n} p_i^2$, mais ce pourrait être une fonction plus générale. On cherche la solution sous la forme :

$$\Psi(t,p) = \exp\{-it\,\varepsilon(p)\} \, \Phi(t,p) \tag{2.30}$$

ce qui n'entraîne aucune restriction sur les propriétés de $\varepsilon(p)$.

De même la condition initiale (pour $t = o$) n'est pas changée. Alors Φ satisfait à l'équation

$$\frac{i\,\partial}{\partial\, t} \Phi(t,p) = \int dp' \, \exp\{it(\varepsilon(p)-\varepsilon(p'))\} \, \tilde{V}(p-p') \Phi(t,p') \tag{2.31}$$

Bien sûr dans ce cas le noyau dans le membre de droite dépend explicitement du temps, mais dans les paragraphes suivants nous montrerons que le schéma général peut être poursuivi en utilisant une formule du type Feynman-Kac.

Comme il est bien connu, étant donnée une fonction de transition, le support de la mesure associée sur Ω est en général plus petit que Ω. Pour la mesure de Wiener on peut le caractériser complètement comme étant l'ensemble des fonctions continues de $[0,T]$ dans R^N satisfaisant une condition de Lipschitz (cf. par exemple [18]). De même pour le processus de Poisson, on peut caractériser ce support comme étant l'ensemble des fonctions de $[0,T] \to R^N$ constantes excepté pour un nombre fini de points. Nous allons plutôt décrire un espace probabilisé (Ω, F, P) et un processus ξ , $t \in [0,T]$ sur Ω qui redonne la fonction caractéristique du processus de Poisson. Cette réalisation a quelques avantages du point de vue physique.

Dans ce qui suit $\mathfrak{X}$ est le groupe R^{2N}, mais éventuellement la construction peut se faire avec un espace plus général

$\Omega = \Omega(\mathfrak{X}, [0,T]), T > 0$, est l'union disjointe des espaces $\Omega_n = \Omega_n(\mathfrak{X}, [0,T])$:

(2.32) $$\Omega = \bigsqcup_{n \geq o} \Omega_n$$

où

(2.33) $$\Omega_o = \{\omega_o\}, \qquad \Omega_o \text{ est réduit à un point,}$$

et pour $n > o$

(2.34) $$\Omega_n = \{\omega = (n, t_i, x_i) \; ; \; o < t_1 < \cdots\cdots < t_n < T, \; x_i \varepsilon \mathcal{X}\}$$

C'est l'espace des n-uples $\{t_i\}_{i = 1\ldots n}$, ordonnés, les "temps", et des n-uples d'éléments de $\mathcal{X}$.

Sur Ω on définit les ouverts fondamentaux

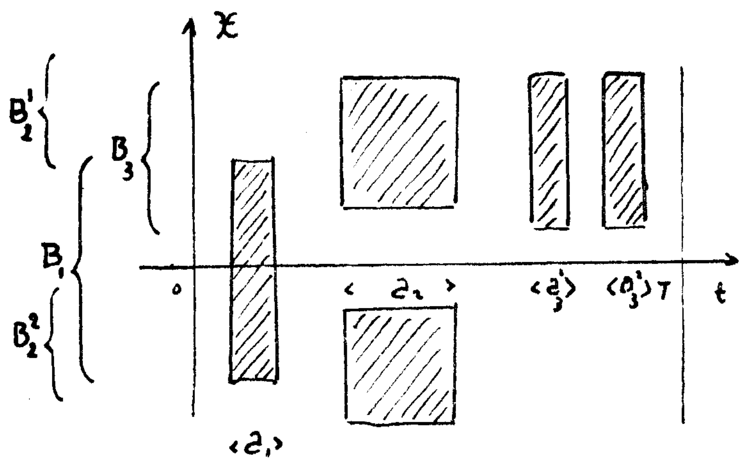
(2.35) $$\mathcal{V}^{(o)} = \{\omega_o\}$$

(2.36) $$\mathcal{V}^{(n)}_{a_i B_i} = \{\omega = (n, t_i, x_i) \; ; \; t_i \; \varepsilon \; a_i, \; x_i \; \varepsilon \; B_i\}$$

où les a_i sont des sous ensembles disjoints, ordonnés, Lebesgue mesurables de $[o, T]$ ie :

(2.37) $$i < j, \; t_i \; \varepsilon \; a_i, \; t_j \; \varepsilon \; a_j \; \rightarrow \; t_i < t_j$$

et où les B_i sont des Boréliens de $\mathcal{X}$.



F est la σ-algèbre de Borel engendrée par ces ouverts.

On doit remarquer que Ω n'est pas un espace de trajectoires au sens intuitif du terme. En effet si $\mathcal{X} = R$, les points suivants de Ω sont distincts :

Exemple de $\mathcal{V}^{(3)}_{a_1 a_2 a_3 \; B_1 B_2 B_3}$

$B_2 = B_2^1 \cup B_2^2$

$a_3 = a_3^1 \cup a_3^2$

$$\omega_1 = (3,\ t_1,\ t_2,\ t_3,\ x_1,\ x_2,\ x_3)$$

$$\omega_2 = (4,\ t_1,\ t_2,\ t_2^1,\ t_3,\ x_1,\ x_2,\ 0,\ x_3)$$

et ceci est important si la mesure que l'on considère sur $\mathfrak{X}$ a des masses.

Soit ν une mesure positive bornée sur $\mathfrak{X}$. On peut définir une fonction positive P_ν sur le clan engendré par les $\vartheta^{(n)}_{a_i B_i}$:

(2.38) $$P_\nu \ (\vartheta^{(o)}) = 1$$

(2.39) $$P_\nu \ (\vartheta^{(n)}_{a_i B_i}) = \prod_{i=1}^{n} |a_i| \quad \nu(B_i)$$

Un résultat essentiel est que cette fonction s'étend (de manière unique) en une mesure positive bornée que nous noterons avec le même symbole.

On vérifie aisément, par exemple sur les fonctions caractéristiques de $\vartheta^{(n)}_{a_i B_i}$, que dans cette réalisation l'intégrale par rapport à la mesure P_ν a une expression particulièrement simple. Plus précisément si F est une fonction intégrable sur Ω

(2.40) $$\int_\Omega P_\nu(d\omega)\ F(\omega) = \sum_{n \geq o} \int_o^T dt_n \int_o^{t_n} dt_{n-1} \dots \int_o^{t_2} dt_1 \int d\nu(x_n) \dots \int d\nu(x_1)$$

$$.\ F(\omega = (n,\ t_i, x_i)).$$

Cette formule va nous permettre de faire le lien avec ce qui a été dit précédemment.

On définit en effet le processus de Poisson X_τ, $\tau \in [0,T]$ explicitement par :

(2.41) $$X_\tau(\omega = (n,\ t_i\ x_i)) = \sum_{i=1}^{n} \Theta\ (t_i - \tau)$$

où

$$\Theta\ (t) = \begin{cases} o \text{ si } t < o \\ 1 \text{ si } t \geqslant o \end{cases}$$

C'est bien un processus à valeur dans les entiers et on peut calculer explicitement à l'aide de (2.40) sa fonction caractéristique

(2.42) $$\int_\Omega P_\nu(d\omega)\, e^{i\lambda X_t(\omega)} = \exp\{(T-t)(e^{i\lambda}-1)\,\nu(\mathfrak{X})\}$$

Ce qui est exactement la transformée de Fourier de (2.18).

Plus généralement nous envisagerons les processus :

(2.43) $$X_\tau^f\,(\omega = (n, t_i, x_i)) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i - \tau\ ;\ x_i)\ \Theta\,(t_i - \tau)$$

qui ont pour fonction caractéristique

(2.45) $$\int_\Omega P_\nu(d\omega)\ \exp\{i\lambda\ X_\tau^f\ (\omega)\}$$
$$= \exp\{-T\nu(\mathfrak{X}) + \int_0^T d\tau \int d\nu(x)\ \exp\{i\lambda f\ (\tau - t\ ;\ x)\}\}$$

Par conséquent en choisissant f, les trajectoires de X^f ie

(2.46) $$\omega(t) = X_t^f\ (\omega)$$

peuvent être continues.

L'espace Ω est aussi muni d'une famille décroissante $\mathcal{F}_\sigma$, $\sigma \in [o, T]$, de σ-algèbres qui sont définies comme suit :

(2.47) $$\mathcal{W}^{(n)}_{a_i B_i} = \bigcup_{p \geq o}\ \bigcup_{a_i' \in [o,\sigma]}\ \bigcup_{B_i' \subset \mathfrak{X}} \mathcal{V}^{(n+p)}_{a_i',\ a_i, B_i', B_i}$$

$\mathcal{F}_\sigma$ est la σ-algèbre de Borel engendrée par les $\mathcal{W}^{\sigma(n)}_{a_i B_i}$

(2.48) $$\mathcal{F}_{\sigma} \subset \mathcal{F}_{\sigma'} \quad \text{si} \quad \sigma' < \sigma$$

(2.49) $$\mathcal{F}_T = \{\emptyset, \Omega\}$$

(2.50) $$\mathcal{F}_o = \mathcal{F}$$

On peut explicitement montrer que les espérances conditionnelles s'écrivent alors dans cette réalisation :

$E[F \mid \mathcal{F}\sigma](\omega = (k+n,\ u_1, \dots, u_k,\ t_1 \dots t_n,\ y_1 \dots Y_k,\ x_1 \dots x_n)$

$= \exp\{-\sigma\nu(\mathfrak{X})\} \sum_{p \geqslant 0} \int_o^T dv_p \dots \int_o^{v_2} dv_1 \int_{\mathfrak{X}} d\nu(z_1) \dots \int_{\mathfrak{X}} d\nu(z_p)$

$F(p+n,\ v_1 \dots v_p, t_1 \dots t_n, \qquad z_1 \dots z_p,\ x_1 \dots x_n)$

ou $u_k < \sigma < t_1$.

On peut vérifier explicitement sur ces formules les propriétés de martingales de certains X_t^f.

§ 3 - Quantification à la Weyl et intégrale de Feynman.

Un de nos buts est de montrer que les processus à saut permettent une définition de l'intégrale de Feynman mais aussi, suivant la philosophie originale de Feynman, que cette intégrale permet une formulation équivalente de la quantification.

Dans ce paragraphe on décrit une généralisation de la quantification usuelle. On donnera plus tard les différents cas particuliers qui peuvent être envisagés. On décrira ensuite une généralisation naturelle de la représentation de Schrödinger et enfin on montrera la connection entre la formule de Feynman et la quantification, ceci tant pour la mécanique quantique non relativiste usuelle que pour des systèmes qui ne sont pas généralement considérés sous ce rapport.

Dans ce paragraphe G est un groupe localement compact. Ce groupe est celui de l'espace des phases dans la mécanique quantique usuelle.

Il est bien connu que le problème de l'existence d'extensions centrales de G par le tore S_1 est équivalent au problème de l'existence de multiplicateur sur G ie de fonction $\xi : G \times G \to S_1$ satisfaisant

(3.1) $$\xi(g_1, g_2)\ \xi(g_1 g_2, g_3) = \xi(g_1, g_2 g_3)\ \xi(g_2, g_3)$$

$\forall\ g_1, g_2, g_3 \in G$ (cf. par exemple [19]). Donnons quelques exemples :

1 - $G \equiv R^{2N}$

(3.2) $$\xi(x, y) = \exp\{\frac{i}{2}\ \sigma(x, y)\}$$

où σ est une forme bilinéaire antisymétrique, par exemple

(3.3) $$\sigma(x, y) = \sum_{i=1}^{N} \{x_i\ y_{i+N} - x_{i+N}\ y_i\}$$

2 - $G = G_1 \times G_2$, G_1 est un groupe localement compact abélien et G_2 un sous groupe de son dual $\hat{G}_1$, [20] .

(3.4) $$\xi((g_1, \hat{g}_2)\ (g_1', \hat{g}_2')) = (g_1 | \hat{g}_2')\ \overline{(g_1' | \hat{g}_2)}$$

$g_1, g_1' \in G_1$, $g_2, g_2' \in G_2$. et $(|)$ dénote la dualité entre G_1 et $\hat{G}_1$.

Ce cas recouvre le précédent.

3 - $G \equiv \mathfrak{F}(\Lambda) \times \mathfrak{F}(\Lambda)$, $\mathfrak{F}(\Lambda)$ désigne le groupe (abélien) des parties finies d'un ensemble Λ , au plus dénombrable. La loi de groupe est définie comme la différence symétrique :

$X_1 \Delta X_2 \Delta \dots \Delta X_n = \{x$ qui appartiennent à un nombre impair de $X_i\}$

(3.5) $$\xi((X, Y), (X', Y')) = (-)^{|X'||Y| + |X' \cap \Theta(X)| + |Y' \cap \Theta(Y)|}$$

où Θ désigne l'unique homomorphisme de $\mathfrak{F}(\Lambda)$ tel que :

(3.6) $$\Theta(\{x_i\}) = \{x_1, x_2, \dots, x_{i-1}\} \qquad \Lambda = \{x_i\}_{i \in Z}$$

et $|X|$ la cardinalité de X, [21].

On supposera dans ce qui suit que

(3.7) $$\xi\,(e,\,e) = \xi\,(g,\,g^{-1}) = 1,\ \forall g\ \varepsilon\ G$$

Cette hypothèse simplifie les formules, mais n'est pas nécessaire pour ce qui suit (cf. exemple 3).

Un système de Weyl U^{ξ} est une application de G dans le groupe unitaire d'un espace de Hilbert H telle que

(3.8) $$U_g^{\xi}\, U_{g'}^{\xi} = \xi\,(g,g')U_{gg'}^{\xi}$$

$$U_g^{\xi *} = U_{g^{-1}}^{\xi} \qquad \forall g,g'\ \varepsilon\, G$$

C'est une représentation unitaire projective de G, mais c'est aussi une représentation unitaire de l'extension centrale de G par S_1 définie par ξ .

En effet si ξ est un multiplicateur sur G, alors GXS_1 muni des lois :

(3.9) $$(g,\alpha)(g',\alpha') = (gg',\ \xi(g,g')\alpha\alpha')$$

(3.10) $$(g,\alpha)^{-1} = (g^{-1},\bar{\alpha}),\ \forall g,g'\ \varepsilon\ G,\quad \alpha,\alpha'\varepsilon S_1$$

est un groupe que nous noterons $G \underset{\xi}{\otimes} S_1$. On a la suite exacte :

(3.11) $$1 \to S_1 \to G\underset{\xi}{\otimes} S_1 \rightleftarrows G \to 1$$

Il est bien connu que deux extensions centrales de G correspondant à deux multiplicateurs ξ et ζ équivalents dans le sens qu'il existe une fonction λ de G dans S_1 avec la propriété

(3.12) $$\zeta\,(g,g') = \lambda(g)\,\lambda\,(g')\ \lambda(gg')\,\xi\,(g.g') \qquad \forall g,g'\,\varepsilon\ G,$$

sont isomorphes.

Cette équivalence a une traduction dans le cadre de la quantification. C'est le problème de l'"ordering" sur lequel nous reviendrons plus tard.

Nous pouvons considérer maintenant des systèmes de Weyl qui sont bien connus et qui correspondent aux différents multiplicateurs que nous avons donnés.

1. Correspondant à l'exemple 1, et sous des hypothèses évidentes,

(3.13) $$U_x^\xi = \exp\{ i \sum_{i=1}^{N} \{x_i P_i - x_{N+i} Q_i\}\}, \quad x \in R^{2N}$$

où les opérateurs self-adjoints P_i et Q_i sont les opérateurs impulsion et position de la mécanique quantique non relativiste.

2. Correspondant à l'exemple 2, dans le cas particulier où $G_1 = G_2 = \mathcal{P}(\Lambda)$, Λ au plus dénombrable, et dans le cas où la dualité est donnée par :

(3.14) $$(X|Y) = (-)^{|X\cap Y|} \qquad \forall X,Y \in \mathcal{P}(\Lambda)$$

$|Z|$ dénote la cardinalité de $Z \in \mathcal{P}(\Lambda)$

(3.15) $$U^\xi(X,Y) = C(X,Y) \bigotimes_{i\in X} \sigma_i^1 \bigotimes_{j\in Y} \sigma_j^2 .$$

σ^1 et σ^2 sont les matrices de Pauli usuelles $C(X,Y)$ est un facteur de module 1.

3. Correspondant au troisième exemple

(3.16) $$U^\xi(X,Y) = C'(X,Y)\; b(e_{i_1})\dots b(e_{i_m})\; b(f_{j_1})\dots b(f_{j_n})$$

où $X = \{x_{i_1} \dots x_{i_m}\}$ $Y = \{x_{j_1} \dots x_{j_n}\}$, $C'(X,Y)$ est un facteur de module 1 et les $b(e_{i_k})$ (resp. $b(f_{j_\ell})$) sont des opérateurs de champs correspondants aux éléments e_{i_k} (resp. f_{j_ℓ}) d'une base orthonormée e_i, f_i de l'espace à une particule.

Jusqu'à présent, nous n'avons pas précisé le type de continuité requis pour l'application $g \to U_g^\xi$, ce sera fait explicitement ou implicitement dans chaque cas. En particulier si U^ξ est un système de Weyl tel que $g \to U_g^\xi$ est mesurable, alors pour toute mesure bornée ν sur G on peut définir un opérateur borné

(3.17) $$Q^\xi(\tilde{\nu}) = \int_G d\nu(g)\; U_g^\xi$$

Dans l'exemple 2 et plus précisément dans le cas où $G_2 = \hat{G}_1$, si f est une fonction sur $G_1 \times \hat{G}_1$ (espace des phases), telle que sa transformée de Fourier

(3.18) $$(Ff)(g_1,g_2) = \int_{G_1 X G_2} \xi((g_1,g_2),(g'_1,g'_2)) f(g'_1,g'_2) dg'_1\, dg'_2$$

où dg_1 (resp. dg_2) dénote la mesure de Haar sur G_1 (resp. sur G_2), définisse une mesure bornée sur $G_1 \times G_2$, alors :

(3.19) $$Q^{\xi}(f) = \int_{G_1 X G_2} dg_1 dg_2 (Ff)(g_1,g_2)\, U^{\xi}_{g_1 g_2}$$

définit le quantifié à la Weyl de la fonction classique f. En particulier les $U^{\xi}_{g_1 g_2}$ sont les quantifiés à la Weyl des caractères de $G_1 \times G_2$.

Le choix de ξ dans sa classe d'équivalence définit un "ordering".

Dans chaque cas particulier on peut étendre la définition des quantifiés à une classe plus large de fonctions.

L'étape suivante consiste à décrire une classe de systèmes de Weyl, représentations unitaires projectives de G, qui sont des généralisations naturelles de la représentation de Schrödinger.

Dans le cas où l'on demande la continuité de $g \to U^{\xi}_g$, si le groupe G est abelien et si le bicaractère b_{ξ} associé à ξ :

(3.20) $$b_{\xi}(g,g') = \xi(g,g')\, \xi\overline{(g',g)}$$

assure une bijection de G sur G alors toutes les représentations U^{ξ} sont quasiéquivalentes (théorème de Mackey-von Neumann. [20]). Ceci discrimine ce que l'on peut appeler la mécanique quantique généralisée de la théorie des champs.

Considérons alors un espace $\mathfrak{X}$ où le groupe G agit, ie. il existe une application $G X \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$ telle que

(3.21) $$e, x \to x \quad \forall x \in \mathfrak{X} \quad \text{où e est l'identité de G.}$$

(3.22) $$g(g'x) = gg'x \quad \forall x \in \mathfrak{X}, \quad g,g' \in G$$

On suppose qu'il existe sur $\mathfrak{X}$ une mesure μ positive et quasi invariante pour l'action de G.

On suppose qu'il existe une fonction Z de $G \times \mathfrak{X}$ dans S_1 telle que :

(3.23) $$Z(g,x)\, Z(g',gx) = \xi(g,g')\, Z(gg',x)$$

Alors la relation, pour tout $f \in L_2(\mathfrak{X},d\mu)$:

(3.24) $$(U_g f)(x) = \sqrt{\frac{d\mu(xg)}{d\mu(x)}}\; Z(x,g)\, f(xg) \ ,$$

définit une représentation unitaire projective de G de multiplicateur ξ .

On peut remarquer que la relation (3.23) peut s'interpréter comme suit : $G \underset{\xi}{\otimes} S_1$ agit sur $\mathfrak{X}$ en posant

(3.25) $$(g,\alpha),\ x \to gx \qquad \forall g \in G,\ \alpha \in S_1,\ x \in \mathfrak{X}$$

De même on peut définir à partir de Z, une fonction $\tilde{Z}$ sur $G \underset{\xi}{\otimes} S_1 \times \mathfrak{X}$ par la relation :

(3.26) $$\tilde{Z}((g,\alpha),x) = \alpha Z(x,g) \qquad \forall g \in G,\ \alpha \in S_1\ x \in \mathfrak{X}.$$

Mais alors $\tilde{Z}$ vérifie à partir de (3.23) une relation qui exprime que c'est un homomorphisme du groupoïde déduit de l'action de $G \underset{\xi}{\otimes} S_1$ sur $\mathfrak{X}$, dans S_1 . Cette remarque permet de résoudre la partie algébrique du problème de l'existence de Z [13] .

Reprenons l'exemple 2. On peut choisir pour $\mathfrak{X}$ G_1 lui-même avec pour action

$$(g_1,\hat{g}_2)\ h = g_1 h$$

On peut prendre pour μ la mesure de Haar et pour Z

(3.27) $$Z((g_1\hat{g}_2),h) = (h,\hat{g}_2)$$

Dans le cas particulier où $G_1 = R^N$ ceci donne la représentation "x" ou "p" en échangeant les roles de G_1 et $\hat{G}_1$.

Dans l'exemple 3 en prenant $\Lambda = \{x\}$ on obtient une représentation des matrices de Pauli où soit σ^1 soit σ^2 sont diagonales. On peut aussi en choisissant une autre action, sur la diagonale de $\mathfrak{P}(\Lambda)\times\mathfrak{P}(\Lambda)$, obtenir la représentation où σ^3 est diagonale.

Le problème à résoudre est le suivant : Soit une équation du type de celle de Schrödinger :

(3.28) $$-i\frac{\partial}{\partial t}\psi(t,x) = \varepsilon(x)\,\psi(t,x) + \int_G d\nu(g)(U_g^\xi\,\psi)\,(t,x)$$

avec la condition initiale:

(3.29) $$\lim_{t\to o}\psi(t,x) = \psi(x)\ ,$$

où $x\to\varepsilon(x)$ est une fonction continue sur $\mathfrak{X}$, ν est une mesure bornée sur G.

On cherche des solutions $\psi(t,.)\in L_2(\mathfrak{X}, d\mu)$.

Le premier point est de définir le module de la mesure ν comme la plus petite mesure positive $|\nu|$ qui majore ν :

(3.30) $$|(\nu f)| \leq (|\nu|\ ,\ |f|) \qquad \forall\ f$$

et sa phase ϕ :

(3.31) $$d\,\nu(g) = \exp\{i\,\phi(g)\}\,d|\nu|\,(g)\ .$$

La solution des équations (3.28) et (3.29) est donnée par:

(3.32) $$\psi\,(t,x) = \int_\Omega P_{|\nu|}(d\omega)\,\exp\{i\,\Phi(\omega)\}\exp\{iS_o(\omega)\}\,\psi(G_o(\omega)^{-1}x)$$

où évidemment $\Omega\equiv\Omega\,(G,\,[0,t\,]\,)$,

(3.33) $$\exp\{i\,\Phi(\omega = n,t_i,g_i))\} = \exp\{\frac{in\pi}{2} + \sum_{i=1}^{n}\phi\,(g_i)\}$$

(3.34) $$\exp\{i\,S_o(\omega = (n,t_i,g_i))\} = \exp\{i\int_o^t\varepsilon\,(G_\tau(\omega)x)d\tau\}$$

$$.\ \xi(g_n,\ g_n^{-1}g_{n-1})\ldots\ \xi(g_n\ldots g_k,\ g_k^{-1}g_{k-1})\ldots\ \xi(g_n\ldots g_2,g_2^{-1}g_1)\ .$$

$$Z\ (G_o^{-1}(\omega)x)\sqrt{\frac{d\mu\,(G_o^{-1}x)}{d\mu\ \ (x)}}\ ,$$

et

$$(3.35)\quad G_\tau(\omega = (n,t_i,g_i)) = g_k^{-1} g_{k+1}^{-1} \cdots g_n^{-1} \quad \text{si } \tau \in \left] t_{k-1}, t_k \right]$$

$$G_\tau(\omega = (n,t_i,g_i)) = e \quad \text{si } \tau \in \left] t_n, t \right]$$

$$G_\tau(\omega = (n,t_i,g_i)) = g_1^{-1} g_2^{-1} \cdots g_n^{-1} \quad \text{si } \tau \in [0,t_1]$$

On peut donner plusieurs preuves de la formule (3.32) :

j - On peut remarquer, grâce à la formule (2.40), que (3.32) est équivalente à la formule de Dyson qui converge avec les hypothèses que nous avons faites.

ij - On peut aussi calculer la dérivée par rapport au temps de (3.32) et utiliser des propriétés bien connues des processus de Poisson à savoir :

a - la probabilité de n sauts dans un intervalle Δt est proportionnelle à $(\Delta t)^n$

b - la probabilité pour, qu'étant donné un saut, son amplitude soit en dehors d'un compact K est proportionnelle à $1-|\nu|(K)$.

c - c'est un processus de Markov (cf. par exemple [9]).

iij - Ou encore, mais cette méthode est très voisine de la précédente, reconnaître que l'équation (3.28) est l'équation de Kolmogorov d'un processus de Markov, dont on peut écrire les équations différentielles stochastiques.

jv - Dans le cas où le temps est imaginaire, et la mesure ν positive, on peut utiliser le théorème de Trotter-Kato, comme nous l'indiquerons à la fin de ce paragraphe.

Avant cela nous donnerons des applications :

Dans le cas de la mécanique quantique non relativiste usuelle, l'équation de Schrödinger dans la représentation d'impulsion s'écrit :

$$(3.36)\quad i\frac{\partial}{\partial t}\,\psi(t,p) = \varepsilon(p)\,\psi(t,p) + \int_{R^{2N}} d\nu(x',p')\, e^{i\frac{p'x'}{2}}\, e^{ipx}\,\psi(t,p+p')$$

(3.37) $$\psi\ (t = o,p) = \psi(p)\ ,$$

ce qui correspond à un potentiel dépendant possiblement des vitesses.

La solution des équations (3.36) et (3.37) s'écrit alors :

(3.38) $$\psi(t,p) = \int_{\Omega} P_{|\nu|}\ (d\omega)\exp\{i\Phi(\omega) + iS_o(\omega)\}\ \psi(p+P_o(\omega))$$

où l'on a maintenant deux processus :

(3.39) $$X_\tau(\omega = (n,t_i x_i p_i)) = \sum_{i=1}^{n} x_i\ \Theta\ (t_i - \tau)$$

(3.40) $$P_\tau(\omega = (n,t_i\ x_i\ p_i)) = \sum_{i=1}^{n} p_i\ \Theta\ (t_i - \tau)$$

(3.41) $$\Phi\ (\omega = (n,t_i\ x_i p_i)) = -\frac{n\pi}{2} + \sum_{i=1}^{n} \{\phi\,(x_i,p_i) + \frac{x_i p_i}{2}\}$$

(3.42) $$S_O(X,P) = -\int_o^t \varepsilon\,(p+P_\tau)d\tau - \int_o^t P_\tau\ dX_\tau - pX_o\ .$$

La solution des équations (3.36) et (3.37) a bien la forme d'une intégrale fonctionnelle par rapport à une mesure bornée mais non positive en général :

(3.43) $$\exp\ \{i\Phi(\omega)\}\ P_{|\nu|}\ (d\omega)$$

D'autre part c'est bien l'action classique du système qui intervient dans cette formule soit :

(3.44) $$\exp\{-i\ (\int_o^t \varepsilon\,(p+P_\tau)d\tau - \int_o^t P_\tau dX_\tau - pX_o)\}$$

Enfin le changement d'"ordering" revient à remplacer la mesure $\exp\{i\ \Phi\ (\omega)\}\ P_{|\nu|}(d\omega)$ par une mesure équivalente.

On doit remarquer que l'intégrale de Feynman donnée par la formule (3. 38) est une intégrale de Feynman sur l'espace des phases. Ce qui avait été envisagé dans de nombreux travaux (cf. par exemple [22]). Elle se réduit à une expression plus simple dans le cas où le potentiel ne dépend pas des vitesses.

On peut aussi appliquer la formule (3. 32) aux cas suivants que nous n'avons pas la place de développer :

A. Correspondant au groupe $\mathfrak{A}(\Lambda)\times\mathfrak{p}(\Lambda)$ défini précédemment on peut envisager :

j - des modèles de spin quantiques sur réseau où l'on perturbe un hamiltonien libre du type :

(3. 45) $$H_o = \sum_{X \subset \Lambda} J(X)\, \sigma_X^z$$

où $\sigma_X^z = \bigotimes_{i \in X} \sigma_i^z$.

ij - des modèles de champs de Fermions non relativistes.

B - Correspondant au groupe $\mathbb{Z} \times S_1$ on peut envisager des perturbations de Hamiltoniens à spectre purement discret.

C - De la même façon on peut traiter certains problèmes liés au Laplacien discrétisé

(3.46) $$\frac{1}{2}\,(\Delta^d f)(n) = \frac{1}{2}(f(n+1) + f(n-1)) + Nf(n)$$

$f \in L_2(Z^N)$. Ceci a été envisagé déjà dans [23].

Enfin on peut traiter certains modèles de théorie des champs de Bosons. Ces modèles nécessitent cependant trop de régularisations dans ce cadre et dans le paragraphe suivant nous donnerons une méthode un peu différente qui permet d'étendre les résultats précédents et sera mieux adapté à la théorie des champs.

Il est peut être intéressant de remarquer que l'on peut démontrer la formule (3.38) en utilisant le théorème de Trotter-Kato, comme cela se fait pour la formule de Feynman-Kac (cf. par exemple [18]).

Soit en effet l'équation de Schrödinger pour le temps imaginaire

$$(3.47)\quad \frac{\partial}{\partial t}\,\psi(t,x) = \frac{1}{2M}\,\Delta\psi\,(t,x) + V(x)\,\psi(t,x)$$

$$\lim_{t\to o}\ \psi(t,x) = \psi(x)$$

Pour des raisons de simplicité on suppose que V est la transformée de Fourier d'une mesure bornée positive μ

$$(3.48)\qquad V(x) = \int d\mu(p)\ \exp\{-ipx\}$$

On peut utiliser la formule de Trotter-Kato

$$(3.49)\qquad \exp\{t(H_o+V)\} = \lim_{N\to\infty}\left(\exp\{\frac{t}{N}\ H_o\}\ \exp\{\frac{t}{N}V\}\right)^N$$

et ceci dans l'espace des impulsions où :

$$(3.50)\qquad \exp\,(\frac{t}{N}\,H_o)(p) = \exp\{\frac{t}{N}\,\varepsilon(p)\}$$

tandis que

$$(3.51)\qquad (\exp\{\frac{t}{N}\ V\}\phi)\ (p) = \sum_{n\geqslant o}\left(\frac{t}{N}\right)^n \int\ldots\int d\mu(p_n)\ldots$$

$$d\mu\,(p_1)\ \phi\,(p+p_1+\ldots+p_n)\ .$$

La remarque essentielle est que

$$(3.52)\qquad p^t(p_1,p_2) = \exp\,(-tV(o))\ \widetilde{\exp\,\{tV\}}\ (p_1,\ p_2)$$

définit une fonction de transition.

Par conséquent l'approximation d'ordre N de la solution de l'équation (3.36) donnée par le théorème de Trotter-Kato

$$(3.53)\qquad \psi(T,p) = e^{TV(o)} \underbrace{\int\ldots\int}_{N} \exp\{\frac{T}{N}\,\varepsilon(p_n) + \frac{T}{N}\,\varepsilon(p_n + p_{n-1})\ldots\}$$

$$\widetilde{\exp\,\{\frac{-T}{N}\ V(0) + \frac{T}{N}\ V\}}\,(p_n,\ p_{n-1})\ldots\qquad \psi\,(p+p_n\ldots+p_1)\ dp_n\ \ldots\ dp_1$$

n'est rien d'autre que l'approximation cylindrique de la formule (3.38) pour $t_k = \frac{kT}{N}$, $k = 1,\ \ldots,\ N$.

§ 4 - Intégrale de Feynman. Théorie des champs relativistes de Boson. Modèles trigonométriques.

Dans ce paragraphe nous étendrons ce qui a été fait pour des perturbations du Hamiltonien non relativiste $P^2/2M$ à des perturbations du Hamiltonien $P^2/2M + \omega^2/2\ Q^2$, qui est celui d'un oscillateur harmonique. Ce sera un modèle simplifié pour certaines perturbations du Hamiltonien relativiste

$$H_o = \int dx :\{\dot{\phi}_x^2 + (\nabla\phi_x)^2 + M^2\ \phi_x^2\}:$$

En particulier cela permettra d'écrire une formule à la Feynman-Kac pour les éléments de matrice de l'opérateur

$$\exp\{iH_o T\}\exp\{-i\{H_o + V\}T\} \quad ,$$

V étant une perturbation relativement gentille, définissant un modèle trigonométrique de théorie des champs.

Le cadre est le même que précédemment. C'est-à-dire que l'on considère un groupe G et un multiplicateur ζ de G. Mais on considérera également des "évolutions libres" du système de Weyl correspondant :

Soit $t \to \alpha_t$ un groupe à un paramètre d'automorphismes de G qui laissent invariant le multiplicateur ζ i.e.

(4.1.) $$\zeta(\alpha_t(g),\ \alpha_t(g')) = \zeta(g,g') \quad \forall t \in R, \quad \forall g,g' \in G.$$

Une "évolution libre" est un groupe de transformation α_t du système de Weyl U^ζ tel que :

(4.2) $$\alpha_t(U_g^\zeta) = \lambda(t,g)\ U^\zeta_{\alpha_t(g)} \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall g,\ g' \in G.$$

où λ : $R \times G \to S_1$ est une fonction telle que :

(4.3) $$\lambda(s,g)\ \lambda(t,\ \alpha_s(g)) = \lambda(s+t,g) \quad \forall s,t \in R,\ g \in G.$$

Un exemple non trivial de λ est donné par, $G = R^{2N}$,

(4.4) $$\alpha_t(q,p) = (q+tp,p) \qquad q,p \in R^N$$

(4.5) $$\lambda\ (t,(q,p)) = \exp\{ia\ (p\frac{t^2}{2} - qt)\} \qquad a \in R\ .$$

Néanmoins pour simplifier les formules nous supposerons que $\lambda \equiv 1$.

En dehors de l'exemple (4.4) nous pouvons donner d'autres exemples d'évolution "libres".

Dans le cas de R^{2N}, on peut considérer l'évolution correspondant à un oscillateur harmonique isotrope :

(4.6) $$\alpha_t(q,p) = (q_t,p_t)$$

(4.7) $$q_t = \cos\ (\omega t)q + \frac{1}{\omega} \sin\ (\omega t)p$$

(4.8) $$p_t = - \omega \sin(\omega t)q + \cos(\omega t)p$$

En fait on peut envisager toutes les évolutions correspondant à des hamiltoniens au plus bilinéaires.

On considère alors un système de Weyl sur un espace de Hilbert H où α_t est unitairement implementé. Ceci est automatique dans le cas de la mécanique quantique usuelle. Soit $\{U_t\}$ le groupe d'unitaires correspondant. On supposera de plus que ce groupe est faiblement continu, ie:

(4.9) $$U_t = \exp\ \{\ i\ H_o t\ \}$$

On envisage alors une perturbation de H_o de la forme

(4.10) $$V = \int_G d\nu\ (g)\ U_g^\zeta$$

où ν est une mesure bornée sur G, et le groupe $\exp\{it(H_o+V)\}$ engendré par $H_o + V$.

Soient deux vecteurs ψ et ψ' de l'espace de Hilbert H. On envisage la fonction :

(4.11) $$t \to F(t,g,\ \psi\ ,\ \psi')$$

$$= (\psi|\exp\{it\ H_o\}\ \exp\ \{-it\ (H_o+V)\ \}\ U_g^\zeta\ \ \psi')$$

Cette fonction satisfait aux équations :

(4.12) $$\frac{\partial F}{\partial t}(t,g,\psi,\psi') = -i\int_G d\nu(g')\zeta(\alpha_t(g'),g)F(t,\alpha_t(g')g,\psi,\psi')$$

(4.13) $$F(0,g,\psi,\psi') = (\psi|U_g^\zeta\ \psi').$$

$F(0,g,\psi,\psi')$ est une fonction bornée de g.

Reprenons alors le même espace de probabilité que précédemment, $\Omega = \Omega(G,[o,t])$, mais un autre processus :

(4.14) $$G_\tau\ (\omega = (n,t_i,g_i)) = \alpha_{\tau-t_k}(g_k^{-1})\dots\ \alpha_{\tau-t_n}(g_n^{-1}),\ \tau\in\,]t_{k-1},\ t_k]$$

$$= \alpha_{\tau-t_1}(g_1^{-1})\dots\alpha_{\tau-t_n}(g_n^{-1})\ ,\quad \tau\in[0,t_1]$$

$$= e\ ,\qquad \tau\in\,]t_n,\ t]$$

ainsi que la fonctionnelle Ξ^ζ sur Ω :

(4.15) $$\Xi^\zeta(\omega = (n,\ t_i,\ g_i))$$

$$= \zeta(\alpha_{t_2}(g_2),\ \alpha_{t_1}(g_1))\,\zeta(\alpha_{t_3}(g_3),\ \alpha_{t_2}(g_2)\ \alpha_{t_1}(g_1))$$

$$\dots\dots\ \zeta(\alpha_{t_n}(g_n),\ \alpha_{t_{n-1}}(g_{n-1})\dots\ \alpha_{t_1}(g_1)).$$

En utilisant ces définitions on peut donner une représentation intégrale de la solution des équations (4.12) et (4.13) :

(4.16) $$F(t,g,\psi,\psi')$$

$$= \int_\Omega P_{|\nu|}(d\omega)\ \exp\{i\Phi(\omega)\}\ \Xi^\zeta(\omega)\ \zeta(G_o(\omega),\ g)$$

$$.\ (\psi|U^\zeta_{G_o(\omega)g}\ \psi')\ ,$$

où Φ est la fonction définie par :

(4.17) $$\Phi(\omega = (n,t_i,g_i)) = \frac{-n\pi}{2} + \sum_{i=1}^{n}\ \phi(g_i)$$

ϕ étant la phase de ν définie en (3. 31) .

La fonction $F(t,g,\psi,\psi')$ définie par (4.16) est une fonction bornée sur G.

Nous ferons deux remarques évidentes dont la première est relative au problème de l'"ordering".

Soient ξ et ζ deux multiplicateurs sur G, équivalents c'est-à-dire satisfaisant la relation

(4.18) $$\xi(g,g') = \lambda(g)\lambda(g')\overline{\lambda(gg')}\zeta(g,g')$$

pour une certaine fonction λ de G dans le tore S_1.

Alors :

(4.19) $$\Xi^{\xi}(\omega=(n,t_i,g_i)) = \Xi^{\zeta}(\omega=(nt_i\,g_i)) \prod_{i=1}^{n} \lambda(\alpha_{t_i}(g_i))\overline{\lambda(\alpha_{t_1}(g_1)\ldots\alpha_{t_n}(g_n))}$$

et par conséquent

(4.20) $$\Xi^{\xi}(\omega=(n,t_i g_i))\,\xi(G_o(\omega),\ g)$$
$$= \Xi^{\zeta}(\omega=(n,t_i g_i))\,\zeta(G_o(\omega),g) \prod_{i=1}^{n} \lambda(\alpha_{t_i}(g_i))\,\overline{\lambda(G_o(\omega)g)}\,\lambda(g)$$

La structure de (4.16) reste la même.

Si maintenant ζ est un bicaractère de G

(4.21) ie. $\zeta(g,g_1g_2) = \zeta(g,g_1)\,\zeta(g,g_2) \qquad g,\ g_1,\ g_2 \in G$

(la relation symétrique est automatiquement vérifiée) alors :

(4.22) $$\Xi^{\zeta}(\omega=(n,t_i\ g_i)) = \prod_{i<j} \zeta(g_i,\ \alpha_{t_j-t_i}(g_j))$$

On doit remarquer que dans le cas où $G = R^{2N}$ avec le multiplicateur habituel, et dans le cas où α_t est défini par (4.4), on retrouve une expression identique à celle donnée par (3.32) avec $\varepsilon(p) = p^2$.

Nous allons maintenant nous restreindre au cas où $G = R^{2N}$ et où la mesure associée au potentiel est de la forme :

(4.23) $$d\nu(q,\ p) = \delta_o \otimes d\rho\ (p)$$

ce qui fait que le potentiel ne dépend pas des vitesses.

Il est facile de se convaincre que :

(4.24) $$d\,|\nu|\,(q,p) = \delta_o \otimes d|\rho|\,(p)$$

et qu'il y a un isomorphisme entre $(\Omega\ ,\mathcal{F},\ P_{|\nu|})$ et $(\Omega',\mathcal{F}',P_{|\rho|})$ où

$$\Omega' = \Omega'\ (R^N,\ [o,t]\ )$$

ce qui permet de réécrire la formule (4.16)

(4.25) $$F\ (t,(q,p),\ \psi\ ,\ \psi')$$
$$= \int_{\Omega'} P_{|\rho|}\,(d\omega')\ \exp\{i\Phi(\omega')\}\,\Xi^{\zeta}(\omega')\,\zeta(G_o(\omega'),(q,p))$$
$$(\ \psi|\ U^{\zeta}_{G_o}(\omega')\ +\ (q,p)\ \ \psi').$$

où $\omega' = (n,t_i,p_i)$ et

(4.26) $$G_\tau(\omega' = (n,t_i,p_i)) = (\ \sum_{i=1}^{n} \theta(\tau-t_i)\ \frac{p_i}{\omega}\ \sin\ (\omega(\tau-t_i))\ ,$$
$$\sum_{i=1}^{n}\ \theta\,(\tau-t_i)p_i\ \cos\ (\ \omega(\tau-t_i))\ \ ),$$

tandis que

(4.27) $$\Xi^{\zeta}(\omega' = (n,t_i,p_i)) = \exp\{\ \frac{i}{2}\ \ \sum_{i<j}\ \frac{p_i p_j}{\omega}\ \sin\ (\omega(t_i-t_j))\}\ .$$

L'exemple précédent est un modèle de théorie des champs. Plus précisément nous nous intéressons à une théorie de champ de Bosons relativiste et nous nous proposons d'étudier les éléments de matrice de l'opérateur d'onde correspondant à un modèle trigonométrique.

Auparavant nous décrirons brièvement la quantification du champ de Bosons relativiste (cf. [24]).

G, espace des phases, est le groupe additif $S_R(R^s) X\ S_R(R^s)$ où $S_R(R^s)$ dénote l'espace des fonctions réelles de R^s, indéfiniment différentiables et à décroissance rapide. C'est, pour un champ de Bosons relativiste à s+1 dimensions d'espace-temps, l'espace des conditions initiales c'est-à-dire des valeurs du champ et de sa dérivée temporelle au temps 0. Les fonctions sont choisies réelles pour décrire un champ neutre.

On dispose sur G d'un multiplicateur

(4.28) $$\zeta((f,g),(f',g')) = \exp\{\frac{i\hbar}{2} \int_{R^s} dx\ \{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)\}\}$$

qui correspond aux relations de commutation canoniques du champs et de sa dérivée temporelle au temps zéro.

L'évolution libre est donnée par l'équation de Klein-Gordon. Il lui correspond un groupe de transformations $t \to \alpha_t$ de $S_R(R^s) X\ S_R(R^s)$ qui laisse ζ invariant.

$$\alpha_t : (f,g) \epsilon S_R(R^s) X S_R(R^s) \longrightarrow (f_t,g_t) \epsilon\ S_R(R^s) X S_R(R^s)$$

où f_t et g_t sont définis par leurs transformées de Fourier :

(4.29) $$(F f)(p) = (2\pi)^{-s/2} \int_{R^s} e^{-ipx}\ f(x)\ dx$$

comme

(4.30) $$(F f_t)(p) = \cos(\omega(p)t)(Ff)(p) + \omega(p)^{-1}\sin(\omega(p)t)(Fg)(p)$$

(4.31) $$(Fg_t)(p) = -\omega(p)\sin(\omega(p)t)\ (Ff)(p) + \cos(\omega(p)t)(Fg)(p)$$

où $\omega(p)^2 = p^2 + m^2$, $m > 0$.

Une représentation unitaire projective W^ζ de $G = S_R(R^s) X S_R(R^s)$ et telle que les fonctions :

$$\lambda \in R \to W^\zeta_{f,\lambda g}, \qquad \mu \in R \to W^\zeta_{\mu g,f}$$

soient continues, peut s'écrire :

(4.32) $$W^\zeta_{fg} = \exp\{ i(\langle f\ \pi\rangle - \langle g \phi\rangle)\}$$

où les opérateurs (à valeur distribution) Φ et π satisfont les relations

(4.33) $$\Phi(f)\ \pi(g) - \pi(g)\ \Phi(f) \subset i(f,g)\mathbb{1}$$

Nous allons maintenant définir les modèles trigonométriques (cf. par exemple [25]).

Soit χ une fonction réelle symétrique, indéfiniment dérivable et à support compact dans le cube de côté 1

(4.34) $$\chi(x) = o \quad \text{si} \quad |x_i| > 1/2 .$$

On définit χ_k , $k > 0$ par

(4.35) $$\chi_k(x) = k^s \chi(kx)$$

C'est une fonction de coupure ultra violette. Soit alors χ_k^x définie par :

(4.36) $$\chi_k^x(y) = \chi_k(x-y)$$

et le champ correspondant $\Phi(\chi_k^x)$.

L'interaction trigonométrique est définie par :

(4.37) $$H^{k\Lambda} = \int_\Lambda dx \int d\nu(\alpha) \,:\exp\{-i\alpha\,\Phi(\chi_k^x)\}:_\mu$$

où Λ est un cube de R^s de coté $|\Lambda|$,

(4.38) $$\Lambda = \{ x \in R^s ; |x_i| \leqslant |\Lambda|/2 \} ,$$

ν est une mesure bornée sur la droite R. On demande que $\overline{\nu(\alpha)} = \nu(-\alpha)$ de façon à ce que l'interaction soit self-adjointe . $::_\mu$ désigne l'ordre de Wick pour la masse μ .

Un cas particulier est celui du modèle de Sine-Gordon où ν est la mesure de Bernoulli

(4.39) $$\nu = \frac{\lambda}{2}(\delta_{\alpha_o} + \delta_{-\alpha_o}) = \frac{\lambda}{2}\sum_{\varepsilon=\pm 1}\delta_{\varepsilon\alpha_o} \qquad \lambda \in R$$

et c'est celui que nous allons considérer. Ce modèle a déjà été étudié dans la région euclidienne (cf. [26]) mais nous traiterons ici le modèle dans la région du temps réel. Il est facile de voir à partir des résultats précédents que l'on peut démontrer la proposition suivante :

<u>Proposition</u> : Soit ψ_o le vecteur de vide de la représentation de Fock, soit $\psi_{fg} = W^{\zeta}_{fg} \; \psi_o \quad f,g \in S_R(R^s)$, soit H_o le Hamiltonien libre de la représentation de Fock .

On a la représentation "intégrale du chemin" :

(4.40)
$$(\psi_{fg} | \exp\{iH_o T\} \exp\{i(H_o + H^{k\Lambda})T\} \; \psi_{fg})$$
$$= \int_{\Omega} P_{\Lambda|\lambda|} \; (d\omega) \; F_{km}(\omega)$$

où $\Omega = \Omega(\Lambda X Z_2 \; , \; [0,T])$.

F_{km} a la structure suivante :

(4.41)
$$F_{km}(\omega) = F_1(\omega) \; F_{2fg}(\omega) \; F_{3km}(\omega)$$

avec

(4.42)
$$F_1(\omega = (n, \; t_i \; x_i \; \epsilon_i)) = (- \frac{i\lambda}{|\lambda|})^n$$

(4.43)
$$F_{2fg}(\omega = (n, t_i x_i \epsilon_i))$$
$$= \exp\{ i \alpha_o \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i \iint d\xi d\zeta \; \chi_k(\xi) \; \Delta^m_R(x_i - \xi - \zeta, t_i) g(\zeta) \}$$
$$\exp\{ -i \alpha_o \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i \iint d\xi d\zeta \; \chi_k(\xi) \; \partial_o \Delta^m_R \; (x_1 - \xi - \zeta, t_i) \; f(\zeta) \}$$

(4.44)
$$F_{3km} \; (\omega = (n, t_i x_i \epsilon_i))$$
$$= \exp\{ \frac{n\alpha_o^2}{4} \int |\tilde{\chi}_k(k)|^2 \; (\frac{1}{\sqrt{k^2 + \mu^2}} - \frac{1}{\sqrt{k^2 + m^2}}) \; dk \}$$
$$\exp\{ - \frac{\alpha_o^2}{4} \sum_{i \neq j} \epsilon_i \epsilon_j \iint d\xi d\zeta \; \chi_k(x_i - \xi) \; \Delta^m_F(\xi - \zeta; t_i - t_j) \; \chi_k(x_j - \zeta) \} \; .$$

Dans ces formules Δ^m_R et Δ^m_F sont les distributions invariantes :

(4.45)
$$\Delta^m_R(x,t) = (2\pi)^{-s/2} \int \frac{dk}{\omega(k)} e^{ikx} \; \sin\,(\omega(k)t) \; \theta\,(t)$$

(4.46) $$\Delta_F^m(x,t) = (2\pi)^{-s/2} \int \frac{dk}{\omega(k)} e^{ikx-i|t|\omega(k)} \quad .$$

De plus $P_{\Lambda\,|\lambda|}$ est définie par

(4.47) $$P_{\Lambda\,|\lambda|}\,(V^{(n)}_{a_i B_i \eta_i}) = \prod_{i=1}^{n} |a_i|\,|B_i|$$

$|B_i|$ étant le volume de $B_i \subset \Lambda$.

Lorsque $k \to \infty$, i.e. lorsque le cut-off ultraviolet est rejeté à l'infini, F_{3km} devient singulière mais néanmoins si s=1, m=0 et $|\alpha_o| < 2\pi$ on peut contrôler la singularité. Plus précisément on a le résultat suivant :

(4.48) <u>Proposition.</u> Pour $s = 1$, $\alpha_o^2 < 2\pi$ la limite suivante existe :

$$\lim_{k\to\infty} \lim_{m\to o} (\psi_o | \exp\{-i\, T(H_o + H^{k\Lambda})\, \psi_o) = \int_\Omega P_{\Lambda\,|\lambda'|}(d\omega)\; F(\omega)$$

où

(4.49) $$F(\omega=(n,t_i x_i \varepsilon_i)) = \left(-\frac{i\lambda'}{|\lambda'|}\right)^n \exp\left\{-\frac{\alpha_o^2}{4\pi} \sum_{i\neq j} \varepsilon_i\, \varepsilon_j\, C_F(x_i-x_j\ ,\ t_i-t_j)\right\}$$

si $\Sigma\, \varepsilon_i = 0$ et zéro autrement.

(4.50) $$C_F(x,t) = \frac{1}{2}\ln(t^2-x^2) + \frac{i\pi}{2} \quad \text{si} \quad 0 < |x| < |t|$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2-t^2) \qquad \text{si} \quad 0 < |t| < |x|$$

$\lambda' = \lambda\,\left(\frac{2}{\mu C}\right)^{g^2/4\pi}$ et $C = \exp(\gamma)$, γ étant la constante d'Euler.

Nous signalerons encore une autre application de la théorie des processus à sauts. Elle concerne l'existence de dynamiques relativistes non triviales [16].

L'idée est la suivante : Soit G un groupe abélien et ξ un multiplicateur de G. On peut construire des représentations isométriques projectives de G sur l'espace de Banach des fonctions bornées sur G comme suit :

(4.51) $$(R_g^{\xi}F)\ (h) = \xi(h,g)\ F(hg)$$

(4.52) $$(L_g^{\xi}F)\ (h) = \xi(g^{-1},h)\ F(g^{-1}h)$$

Ces deux représentations commutent.

Soient W^{ξ} un système de Weyl et ϕ , ψ deux vecteurs de l'espace de représentation, alors :

(4.53) $$F_{\phi\psi}\ (h) = (\phi | W_h^{\xi}\psi)$$

est une fonction bornée sur G et l'on vérifie immédiatement que :

(4.54) $$R_g^{\xi}F_{\phi\psi} = F_{\phi\ ,W_g^{\xi}\ \psi}$$

et

(4.55) $$L_g^{\xi}F_{\phi\psi} = F_{W_g^{\xi}\ \phi,\ \psi}$$

De même si $t \to e^{iH_o t}$ est un groupe à un paramètre d'unitaires qui implementent une évolution libre $t \to \alpha_t^o$

(4.56) $$(U_t^o F)\ (h) = F(\alpha_{-t}^o\ (h))$$

est un groupe à un paramètre d'isométries de l'espace de Banach des fonctions bornées sur G.

Soit alors un modèle trigonométrique de théorie des champs, il est facile de comprendre que l'on peut exprimer les fonctions

(4.57) $$t \to (\phi | e^{i(H_o+V)t}\ W_g^{\xi}\ e^{-i(H_o+V)t}\ \psi)$$

comme espérance par rapport à un processus de Poisson. Cette représentation intégrale s'étend à des fonctionnelles qui ne sont pas nécessairement des éléments de matrice d'un système de Weyl.

On peut alors utiliser cette expression pour montrer que sur certaines fonctions bornées sur le groupe G on peut éliminer les régularisations dans le cas des modèles trigonométriques. On montre ainsi l'existence d'un flot relativiste.

§ 5 - Relation avec la théorie des Equations différentielles stochastiques.

Ce paragraphe est destiné à faire le lien entre la théorie des équations différentielles stochastiques et les résultats précédents.

Pour cela nous devons introduire la notion de mesure de Poisson aléatoire. $\mathfrak{X}$ est un espace R^{2N} mais on pourrait aisément généraliser à d'autres espaces. T est un nombre positif. On envisage alors l'application ν telle que

- $\forall\ t \in [0,T]$, B fixé, Borélien de $\mathfrak{X}$, $\nu(t, B)$ est un processus de Poisson i.e.

(5.1) $$E(\exp\{i\lambda\nu(t,B)\}) = \exp\{t(e^{i\lambda}-1)|\mu|(B)\}$$

où $|\mu|$ est une mesure bornée sur $\mathfrak{X}$.

- $\forall\ t \in [0,T]$ et B_1 et B_2 des Boréliens disjoints de $\mathfrak{X}$, $\nu(t,B_1)$ et $\nu(t,B_2)$ sont indépendants.

Ces mesures de Poisson aléatoires permettent de décrire des processus à sauts solutions d'équations différentielles stochastiques du type :

(5.2) $$\xi_{xt}(s) = x + \int_t^s A(\tau, \xi_{xt}(\tau))d\tau + \int_t^s \int_{\mathfrak{X}} C(\tau, \xi_{xt}(\tau),u)\nu(d\tau,du)$$

Des hypothèses que nous ne détaillerons pas (cf. [27] [28]) sur les coefficients A et C assurent l'existence et l'unicité des solutions des équations (5.2).

En particulier, il est facile de voir que sous certaines conditions larges sur la fonction K, le processus :

(5.3) $$\xi^K(t) = \int_{R^N} K(u)\ \nu(t,du)$$

a pour fonction caractéristique

(5.4) $$E\,[\,\exp\{i\lambda\xi^K(t)\}\,] = \exp\,\{t\int_{R^N}\{\exp\, i\lambda K(u) \;-\; 1\}\, d|\mu|(u)\}$$

Plus généralement on peut donner comme pour les processus de diffusion une équation de Kolmogorov satisfaite par l'espérance de fonctions du processus (5.2), [28] .

L'équation de Schrödinger non relativiste dans l'espace des impulsions est une équation de ce type. Pour montrer le même fait pour l'équation de Schrödinger dans le schéma d'interaction d'un oscillateur harmonique perturbé, nous avons besoin d'une extension de ces résultats (cf. aussi [28]).

On considère le système d'équations différentielles stochastiques suivant :

(5.5) $$\xi_{xt}(s) = x + \int_t^s d\tau\; A(\tau,\, \xi_{xt}(\tau)) + \int_t^s \int_{R^N} C(\tau,\, \xi_{xt}(\tau),u)\,\tilde{\nu}(d\tau,du)$$

(5.6) $$\eta_{yt}(s) = y + \int_t^s d\tau\; A'(\tau,\, \xi_{xt}(\tau)) + \int_t^s \int_{R^N} C'(\tau,\, \xi_{xt}(\tau),u)\,\tilde{\nu}(d\tau,du)$$

où $\tilde{\nu}$ désigne la mesure de Poisson aléatoire centrée

(5.7) $$\tilde{\nu}(t,B) = \nu(t,B) - t|\mu|(B).$$

On doit supposer que les différentes fonctions A,A', C et C' satisfont des conditions qui assurent l'existence et l'unicité des solutions de (5.5) et (5.6), que l'on peut trouver dans [19], et que l'on peut vérifier dans chacun des cas.

On considère alors une fonction $F : R^N \times R^M \to \mathbb{C}$ qui est deux fois continuement différentiable et avec des dérivées partielles d'ordre un et deux bornées, alors :

(5.8) $$V(t,x,y) = E[\,F(\,\xi_{xt}(T),\; \eta_{yt}(T))\,]$$

satisfait une équation de Kolmogorov inverse:

(5.9) $$\frac{\partial}{\partial t} V + \sum_{i=1}^{N} A_i(t,x) \frac{\partial V}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{M} A_j'(t,x) \frac{\partial V}{\partial y_j}$$

$$+ \int \{V(t,x + C(t,x,u),\ y + C'(t,x,u)) - V(t,x,y)$$

$$- \sum_i C_i(t,x,u) \frac{\partial}{\partial x_i} V - \sum_j C_j'(t,x,u) \frac{\partial}{\partial y_j} V\} \, d|\mu|(u) = 0$$

Nous allons montrer dans le cas d'un oscillateur harmonique perturbé par une interaction du type trigonométrique, que l'équation de Schrödinger dans le schéma d'interaction est en fait l'équation de Kolmogorov inverse pour un système d'équations différentielles stochastiques du type précédent. Nous nous limiterons au cas de N degrés de liberté mais il est évident que ceci fournit un modèle de théorie relativiste d'un champ de Bosons.

$a \in R^{2N} \to W_a$ est un système de Weyl qui satisfait comme précédemment :

$$W_a W_{a'} = \exp\left(\frac{i}{2} \sigma(a,a')\right) W_{a+a'}$$

$$W_a^* = W_{-a}$$

avec, si $a = (q,p) \quad q,p \in R^N$

$$\sigma(a,a') = \sum_{i=1}^{N} \{q_i' p_i - q_i p_i'\}$$

α_t est un groupe à un paramètre d'$*$-automorphismes de l'algèbre engendrée qui satisfont

(5.10) $$\hat{\alpha}_t(W_a) = \exp(iB(t,a)) W_{\alpha_t(a)}$$

où α_t est une transformation linéaire symplectique de R^{2N}

B(t,a) est linéaire en a et satisfait une relation de cocycle en t. Il en existe de non triviaux pour certains α_t comme le montre l'exemple (4.5).

Comme on considère le cas d'un nombre fini de degrés de liberté, α_t est unitairement implémenté dans n'importe quelle représentation de Weyl. De plus on fait l'hypothèse que le groupe d'unitaire qui implemente α_t est continu, ce qui permet de définir un générateur infinitésimal H_o :

(5.11) $$\hat{\alpha}_t(W_a) = \exp\{iH_o t\}\, W_a\, \exp\{-i\, H_o t\} .$$

Soit alors μ une mesure bornée sur l'espace des phases et

(5.12) $$d\mu(a) = \exp\{\, i\phi(a)\}\quad d|\mu|(a) ,$$

la décomposition polaire de μ .

On considère l'opérateur borné V défini par l'intégrale de Bochner

(5.13) $$V = \int_{R^{2N}} d\mu\,(a)\; W_a$$

Notre but est alors d'étudier la dépendance en temps des quantités:

(5.14) $$F(t,a,\Phi,\psi)$$

$$= (\Phi| W_a\; \exp\{iH_o(T-t)\}\exp\{-i(H_o+V)(T-t)\}\;\psi)$$

où Φ et Ψ sont deux vecteurs de l'espace de Hilbert de la représentation de Weyl des W_a.

Il est très facile d'écrire l'équation différentielle satisfaite par la quantité F :

(5.15) $$\frac{\partial F}{\partial t}\,(t,a,\Phi,\psi)$$

$$= -i\int_{R^{2N}} d|\mu|(b)\; \exp\{i(\phi(b) + B(t,b) + \sigma(a,\, \alpha_t(b)))\}$$

$$F(t,a + \alpha_t(b),\, \Phi,\, \psi)$$

(5.16) avec évidemment la condition

$$F(t = T,\; a,\phi,\psi) = (\phi|W_a\;\psi)$$

qui est une fonction continue bornée de a.

C'est cette dernière équation que l'on veut interpréter comme une équation de Kolmogorov. Pour cela on envisage la fonction :

(5.17) $$G(t,a,\lambda,\phi,\psi) = F(t,a,\phi,\psi)\, e^{i\lambda}, \quad \lambda \in R$$

qui satisfait :

(5.18) $$G(t,a,o,\phi,\psi) = F(t,a,\phi,\psi)$$

Si on choisit alors la fonction C : $[0,T] \times R^{2N} \times R^{2N} \to R^{2N}$

(5.19) $$C(t,x,u) = \alpha_t(u) \quad \forall t \in [0,T]\ ,\ x \in R^{2N},\ u \in R^{2N}$$

et la fonction C' :

(5.20) $$C'(t,x,u) = \frac{\pi}{2} + \phi(u) + B(t,u) + \sigma(x, \alpha_t(u))$$

en imposant l'existence des intégrales :

$\int_{R^{2N}} u\, d|\mu|(u)$ ainsi que $\int_{R^{2N}} \phi(u)\, d|\mu|(u)$, C et C' satisfont aux conditions qui assurent l'existence et l'unicité des solutions des équations différentielles stochastiques. De plus on choisit :

(5.21) $$A(t,x) = \int_{R^{2N}} \alpha_t(u)\, d|\mu|(u)$$

Tandis que :

(5.22) $$A'(t,x) =$$

$$= \frac{\pi}{2} |\mu|(R^{2N}) + \int_{R^{2N}} \phi(u) d|\mu|(u) + \int_{R^{2N}} \sigma(x, \alpha_t(u)) d|\mu|(u)$$

$$+ \int_{R^{2N}} B(t,u)\, d|\mu|(u)\ .$$

Dans ces conditions si l'on considère la fonction :

(5.23) $$V(t,x,o) = E\,[\,f(\xi_{xt}) \exp\{i\,\eta_{ot}\}\,]$$

elle satisfait l'équation de Kolmogorov :

(5.24) $$\frac{\partial V}{\partial t}(t,x,o) = -i \int V(t,x + \alpha_t(u))\,.$$

$$.\ \exp\{i(\phi(u) + \sigma(a,\alpha_t(u)) + B(t,u))\}\ d|\mu|(u)$$

$$+\ |\mu|\,(R^{2N})\ V(t,x,o)$$

Le dernier terme disparaît en écrivant :

(5.25) $$F(t,a,\phi,\psi) = \exp\{+|\mu|(R^{2N})t\}\, V(t,a,o)$$

avec la condition

(5.26) $$\lim_{t \to T} V(t,a,o) = f(a) = \langle \phi W_a \psi \rangle\, e^{-|\mu|(R^{2N})T}$$

[1] Feynman R.P. - Rev. Mod. Phys. 20, 367-387 (1948).

[2] Feynman R.P., Hibbs A.R. - Quantum Mechanics and Path Integrals Mc-Graw-Hill - New York (1965).

[3] Cameron R.H. - J. Math. and Phys., 39, 126-140 (1960).

[4] Glimm J. , Jaffe A. - Quantum Physics. A functional Integral Point of view - Springer Verlag (1981).

[5] Albeverio S. , Hoegh-Krohn R. - Mathematical Theory of Feynman Path Integral - Lecture notes in Mathematics, vol. 535, Berlin - New York, Springer (1976).

[6] Albeverio S., Blanchard P., Hoegh-Krohn R. - Commun. Math. Phys. 83, 49-76 (1982).

[7] Maslov V.P. , Chebotarev A.M. - Dok. Acad. Nauk, 229, 37-38 (1976) (en russe).

[8] Maslov V.P. , Chebotarev A.M. - Theor. and Math. Phys., 28, 793-805 (1977).

[9] Maslov V.P. , Chebotarev A.M. - Itogi Nauki i tekniki, 15, 5-78 (1978) (en russe).

[10] Maslov V.P. , Chebotarev A.M. - Processus de Sauts et leurs applications dans la mécanique quantique

in

Feynman Path Integral - Lectures notes in Physics n° 106, Springer Verlag (1979) p. 58-72.

[11] Maslov V.P. - Chaînes de Markov Complexes et Intégrales de Feynman-Nauka (1976) (en russe).

[12] Combe P. , Hoegh - Krohn R. , Rodriguez R. , Sirugue M. , Sirugue-Collin M. - Commun. Math. Phys., 77, 269-288 (1980).

[13] Combe P. , Hoegh-Krohn R., Rodriguez R. , Sirugue M. , Sirugue-Collin M. - in Functional Integration and applications - Plemum Pub. (1981) - p. 53-64.

[14] Combe P. , Hoegh-Krohn R., Rodriguez R., Sirugue M., Sirugue-Collin M. - J.M.P. 23, 405-411 (1982).

[15] Combe P. , Hoegh-Krohn R. , Rodriguez R. , Sirugue M., Sirugue-Collin M. - Zero-mass two dimensional real time sine Gordon model without U.V. cut-offs. - Prepint Bielefeld (1981).

[16] Albeverio S. , Blanchard P. , Combe P. , Hoegh-Krohn R., Sirugue M. - Local relativistic invariant flows for quantum fields - Prepint Marseille (1981).

[17] Ginibre J. - in Mécanique Statistique et Théorie des champs - Gordon and Breach (1971) p. 327-427.

[18] Nelson E. - J.M.P. 5 332-343 (1964).

[19] Weyl H. - Gruppentheorie and Quantum mechanik 2nd ed. Leipzig (1931).

[20] Mackey G. - Duke Math. J. 16 , 313-326 (1949).

[21] Combe P. , Rodriguez R. , Sirugue M. , Sirugue-Collin M. - Commun. Math. Phys. 63 , 219-235 (1978).

[22] Fadeev L. - in Méthodes en théorie des champs - North Holland Pub. (1976) p. 3-39.

[23] Fukushima M. - Osaka J. Math. 11 , 73-85 (1974).

[24] Araki H. - J.M.P., 1, 492-504 (1960).

[25] Hoegh-Krohn R. - Commun. Math. Phys. 21, 244-255 (1971).

[26] Fröhlich J. - Commun. Math. Phys. 47, 233-268 (1976).

[27] Gihman I.I. , Skorohod A.V. - Stochastic Differential Equations Springer Verlag (1972).

[28] Gihman I.I. , Skorohod A.V. - The Theory of Stochastic processes III - Springer Verlag (1979).