

# RECHERCHE COOPÉRATIVE SUR PROGRAMME N° 25

C. DE CALAN

## Les grands ordres de la perturbation dans le modèle $\Phi_4^4$

*Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg - RCP25*, 1981, tome 29  
« Conférences de : J. Ginibre, W. Krieger, M.Jaekel-J.M. Maillard, A. Lichnerowicz et C.  
de Calan », , exp. n° 5, p. 147-170

[http://www.numdam.org/item?id=RCP25\\_1981\\_\\_29\\_\\_147\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RCP25_1981__29__147_0)

© Université Louis Pasteur (Strasbourg), 1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Recherche Coopérative sur Programme n° 25 » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

LES GRANDS ORDRES DE LA PERTURBATION  
DANS LE MODELE  $\Phi_4^4$

C. de CALAN

Centre de Physique Théorique de l'Ecole Polytechnique  
Plateau de Palaiseau - 91128 Palaiseau - Cedex - France

(Conférence présentée à la réunion de Mai 1981  
de la R.C.P. n° 25 à Strasbourg)



## A - RESULTATS

Nous résumons et discutons un travail fait en collaboration avec V. Rivasseau [1], où sont prouvées des bornes rigoureuses sur les grands ordres de la perturbation.

Le modèle étudié, avec la métrique euclidienne, en dimension  $D = 4$ , est celui d'un champ scalaire  $\varphi$  auto-couplé par une densité lagrangienne d'interaction :

$$\mathcal{L}_I = \frac{\lambda}{4!} \varphi^4 \quad (1)$$

La définition perturbative des fonctions de Schwinger (ou fonctions de corrélation) est rappelée dans la section B. Ce modèle a été choisi comme le prototype le plus simple d'une théorie des champs renormalisable, mais non super-renormalisable. Le point crucial est la nécessité d'une série infinie de renormalisations, avec les conséquences suivantes :

- 1) Les arguments formels (à partir du Lagrangien, de la fonctionnelle génératrice des fonctions de Schwinger, etc...), ou les arguments semi-classiques (méthode du col [2]) ne peuvent être considérés comme rigoureux.
- 2) Non seulement la renormalisation est source de difficultés techniques, mais elle engendre des amplitudes qui croissent rapidement avec l'ordre  $n$  de perturbation.

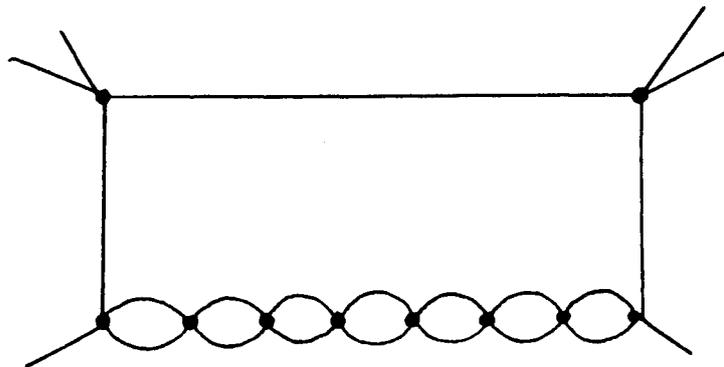


Fig. 1

Ainsi les amplitudes liées aux graphes  $G$  de la figure 1 pourraient être bornées par :

$$|A_G(D)| < K^n \quad (2)$$

pour une dimension  $D < 4$  ( $K$  est une constante, et  $n$  le nombre de vertex). Au contraire, pour  $D = 4$ , on trouve :

$$A_G(4) \sim K^n n! \quad (3)$$

Malgré ces difficultés, nous avons pu prouver rigoureusement le théorème suivant : soit  $A(\lambda)$  une fonction de Schwinger, définie par la série formelle

$$A(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n A_n \quad (4)$$

où nous avons omis la dépendance dans le nombre  $N$  de points et (en transformée de Fourier) leurs impulsions  $p_1, \dots, p_N$ . On a alors

Théorème III : Il existe une constante  $K$ , dépendant seulement de  $N$  et des  $p_j$ , telle que :

$$|A_n| < K^n n! \quad (5)$$

Le théorème III implique évidemment que la série transformée de Borel :

$$B(t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \frac{A_n}{n!} \quad (6)$$

défini une fonction analytique pour  $|t| < \frac{1}{K}$  (fig. 2)

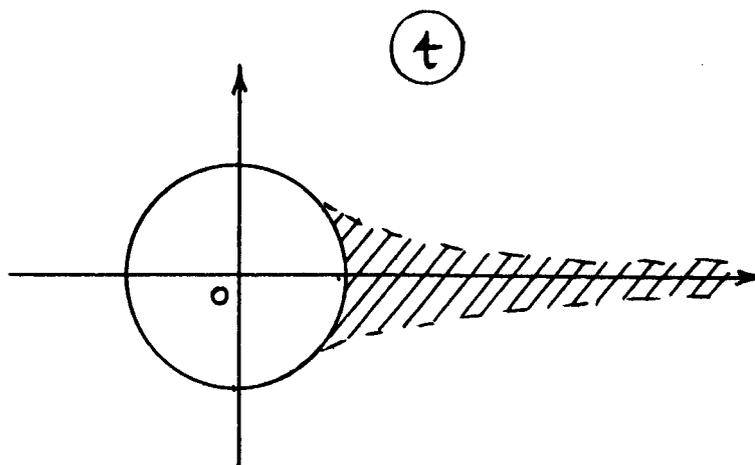


Fig. 2

Ceci est bien sûr insuffisant pour définir  $A(\lambda)$  par une transformée de Borel inverse de  $B(t)$ . Il faudrait aussi que  $B(t)$  soit analytique au voisinage de l'axe réel positif (zone hachurée de la fig. 2) et ne croisse pas plus vite qu'exponentiellement pour  $t \rightarrow +\infty$ . Nous reviendrons sur ces points dans la section D.

Les différents termes du développement de  $A$  sont donnés par :

$$A_n = \frac{1}{n!} \delta^{(4)}\left(\sum_{j=1}^N p_j\right) \sum_{G_{(n)}} A_G^R \quad (7)$$

où la somme porte sur tous les graphes à  $n$  vertex (vertex "distingués" ou "étiquetés"), et  $A_G^R$  est l'amplitude renormalisée attachée à chaque graphe  $G$ . Dans tout le domaine super-renormalisable ( $D < 4$ ), on aurait [3] :

$$|A_G^R| < K_1^n \quad (8)$$

Par ailleurs le nombre de graphes à  $n$  vertex est borné par :

$$\text{nombre de } G_{(n)} < K_2^n (n!)^2 \quad (9)$$

Les relations (7), (8) et (9) impliquent immédiatement le théorème III. Malheureusement la borne (8) est certainement violée à  $D = 4$ , comme le montre l'exemple de la fig. 1.

Notre idée est de tenir compte de la structure de renormalisation. Pour chaque graphe  $G$ , nous appelons

$n$  le nombre de ses vertex

$f$  le nombre de soustractions que la renormalisation opère sur  $A_G$  (voir à la fin de la section C la définition précise de  $f$ ).

Nous avons pu alors montrer :

Théorème I :

$$\forall G_{(n,f)}, \quad |A_G^R| < K_1^n f! \quad (10)$$

Remarque : on a toujours  $f \leq n$ , mais  $f$  peut atteindre  $n$  (voir à nouveau l'exemple de la fig. 1)

Théorème II :

$$\text{nombre de } G_{(n,f)} < K_2^n \frac{(n!)^2}{f!} \quad (11)$$

on voit que par cette décomposition, (7), (10) et (11) redonnent immédiatement le théorème III.

B - RAPPELS

B.1 Amplitudes de Feynman non renormalisées

Le modèle est défini par la densité lagrangienne  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I$ ,  
avec :

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi + \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 \quad (12)$$

$$\mathcal{L}_I = \frac{\lambda}{4!} \varphi^4 \quad (13)$$

Les fonctions de Schwinger sont définies formellement par l'algorithme fonctionnel :

$$\tilde{A}(x_1, \dots, x_N) = \int \mathcal{D}\varphi \varphi(x_1) \dots \varphi(x_N) e^{-\int \mathcal{L}(x) d^4x} \quad (14)$$

et leur développement perturbatif est :

$$\tilde{A}(x_1, \dots, x_N) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^n}{n!} \int \mathcal{D}\varphi \varphi(x_1) \dots \varphi(x_N) \left[ \frac{\lambda}{4!} \int d^4x \varphi^4(x) \right]^n e^{-\int \mathcal{L}_0(x) d^4x} \quad (15)$$

L'espace des  $\varphi$  et la mesure  $\mathcal{D}\varphi$  ne sont pas clairement définis! La formule (15) n'est qu'un moyen mnémotechnique, dont le sens conventionnel est le suivant : le résultat de l'intégration est défini par la règle habituelle donnant l'intégrale d'un polynôme avec une mesure gaussienne (ici  $e^{-\int \mathcal{L}_0}$ ). D'où la définition perturbative des fonctions de Schwinger :

$$\tilde{A}(x_1, \dots, x_N) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^n}{n!} \sum_{G_{(n)}} \tilde{A}_G \quad (16)$$

La somme  $\sum_G$  porte sur les graphes, c'est-à-dire les ensembles complets d'appariements deux à deux des  $4n + N$  champs  $\varphi(x), \varphi(x_1), \dots, \varphi(x_N)$ . A chaque paire  $\varphi(x), \varphi(x')$  correspond un facteur  $c(x-x')$  égal à la covariance de la mesure  $e^{-\int \mathcal{L}_0}$ , et représenté par une ligne joignant les points  $x$  et  $x'$ .

Les graphes d'ordre  $n$  contribuant à la fonction à  $N$  points contiennent donc :

$N$  points ("externes") d'où part une ligne "externe" 

$n$  points (vertex) d'où partent 4 lignes 

La transformée de Fourier de la covariance  $(-\partial_\mu \partial^\mu + m^2)^{-1}$  est  $(q^2 + m^2)^{-1}$ , ce qui donne pour la transformée de Fourier de l'amplitude liée à un graphe :

$$\delta^{(4)}\left(\sum_j p_j\right) A_G(p_1, \dots, p_N) = \int \prod_{i=1}^{\ell} \frac{d^4 q_i}{q_i^2 + m^2} \prod_{\nu=1}^n \delta^{(4)}(\sum_{\nu} \dots) \quad (17)$$

où l'indice  $i$  distingue les  $\ell$  lignes internes du graphe, et  $\sum_{\nu}$  est la somme des impulsions (internes  $q_i$  ou externes  $p_j$ ) associées aux lignes qui partent du vertex  $\nu$ .

Les distributions  $\delta^{(4)}(\sum_{\nu} \dots)$  expriment la conservation de la quadri-impulsion à chaque vertex, et traduisent en transformée de Fourier l'invariance par translation des fonctions de Schwinger. Pour chaque graphe connexe, on peut isoler une distribution  $\delta^{(4)}(\sum p_j)$  portant sur les seules quadri-impulsions externes, et intégrer sur  $n-1$  quadri-impulsions internes à l'aide des autres  $\delta^{(4)}$ . Il reste  $L = \ell - n + 1$  quadri-intégrations ( $L$  est appelé "nombre de boucles indépendantes du graphe").

On se limitera dans la suite à l'étude des graphes connexes, et l'on a finalement :

$$A_G(p_1, \dots, p_N) = \int \prod_{m=1}^L d^4 k_m \prod_{i=1}^{\ell} \frac{1}{q_i^2 + m^2} \quad (18)$$

où les  $q_i$  sont maintenant fonctions linéaires des impulsions externes  $p_j$  et des impulsions internes indépendantes  $k_m$ .

B.2 Représentation paramétrique des intégrales de Feynman

Il est commode de transformer les intégrales de Feynman (18) en introduisant une représentation intégrale du propagateur de chaque ligne :

$$\frac{1}{q_i^2 + m^2} = \int_0^\infty d\alpha_i e^{-\alpha_i (q_i^2 + m^2)} \quad (19)$$

Après diagonalisation de la forme quadratique  $\sum_i \alpha_i q_i^2$ , les intégrales sur les impulsions  $k_m$  peuvent être effectuées explicitement et l'on trouve [4] :

$$A_G = \int_0^\infty \prod_{i=1}^l d\alpha_i e^{-m^2 \sum_i \alpha_i} U^{-2}(\alpha) e^{-\frac{V(p, \alpha)}{U(\alpha)}} \quad (20)$$

où  $U$  et  $V$  sont les "polynômes de Symanzik". Notamment :

$$U = \sum_T \prod_{i \notin T} \alpha_i \quad (21)$$

où la somme porte sur les arbres  $T$  de  $G$  (sous-graphes connexes, sans boucle, passant par tous les vertex de  $G$ ).

Il est important pour la suite de bien noter les propriétés d'annulation de  $U$  : comme il faut enlever  $L$  lignes à un graphe pour en faire un arbre,  $U$  est homogène de degré  $L$  dans l'ensemble des  $\alpha$ .

De plus, si l'on considère un sous-graphe connexe  $F$  quelconque de  $G$ , ayant  $L(F)$  boucles indépendantes, la restriction à  $F$  d'un arbre  $T$  de  $G$  a une ou plusieurs composantes connexes. En distinguant ces deux cas (fig. 3), on a donc :

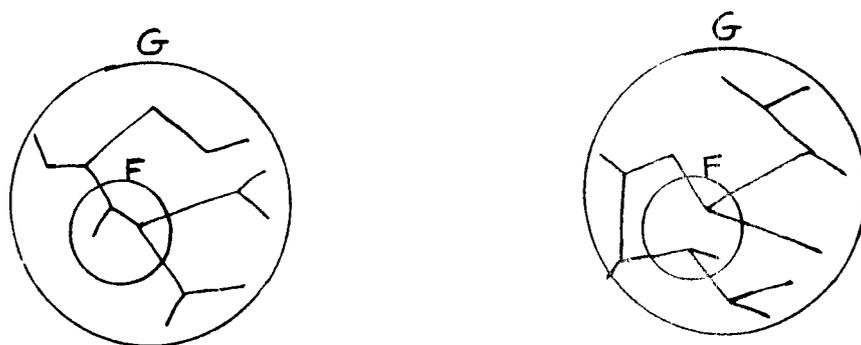


Fig. 3

$$U = U_F + U_{\bar{F}} \quad (22)$$

où  $U_F$  est obtenu en restreignant la somme aux arbres dont la restriction à  $F$  est connexe.  $U_F$  est donc aussi homogène de degré  $L(F)$  dans le sous-ensemble des  $\alpha_i$ ,  $i \in F$ .  $U_{\bar{F}}$  est une somme de monômes de degré  $\geq L(F)+1$  dans le sous-ensemble des  $\alpha_i$ ,  $i \in F$ .

### B.3 Renormalisation

Les champs  $\varphi$  sont des distributions, dont les produits ne sont en général pas définis quand les arguments coïncident. Ce fait se traduit, en transformée de Fourier, par la divergence à l'infini ("ultra-violette") des intégrales de Feynman (18), ou encore par la divergence vers les  $\alpha$  nuls dans la représentation (20). Mais les divergences peuvent être entièrement éliminées par une modification du Lagrangien, consistant à multiplier les constantes qui y figurent par des facteurs (infinis !) bien choisis. Cette procédure respecte, au sens des séries formelles, les propriétés souhaitées pour la théorie (quand on passe à la métrique minkovskienne) : invariance de Lorentz, causalité et unitarité de la matrice  $S$  qui se déduit des fonctions de Green ainsi renormalisées (voir Epstein et Glaser [5]).

Il reste un certain degré d'arbitraire dans cette renormalisation : essentiellement la "partie finie" des facteurs infinis. Dans la classe des différents modèles  $\varphi^4$  ainsi possibles, nous choisissons celui qui correspond à une renormalisation particulière, la "renormalisation intermédiaire" de Bogoliubov, dont nous allons maintenant rappeler brièvement la définition.

Soit  $F$  un sous-graphe propre de  $G$  (propre = connexe et une ligne irréductible, c'est-à-dire qui ne peut pas être coupé en 2 composantes connexes en enlevant une seule ligne). La sous-intégration sur les variables indépendantes de  $F$  dans (18), ou encore sur les  $\alpha_i$ ,  $i \in F$  dans (20), diverge évidemment si son "degré superficiel de convergence"

$$\omega_F = l(F) - 2L(F) \quad (23)$$

est négatif ou nul.

Si par exemple  $\omega_F = 0$ ,  $F$  ayant  $N(F)$  lignes externes, on introduit dans le Lagrangien d'interaction un "contre-terme" (infini !) en  $c_F \varphi^{N(F)}$ , avec :

$$c_F = -A_F(q) \Big|_{q=0} \quad (24)$$

Le choix du point particulier  $q=0$  constitue le choix de notre renormalisation particulière. En regroupant les graphes  $G$  contenant  $F$  et les graphes "réduits"  $G/F$  contenant un vertex "nouveau" en  $c_F \varphi^{N(F)}$  (figure 4), la divergence superficielle de la sous-intégration sur  $F$  disparaît.

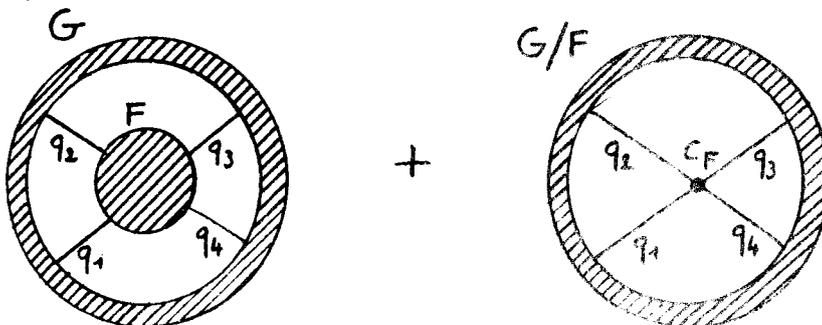


Fig. 4

Plus généralement, si  $\omega_F \leq 0$ , on prend

$$c_F = - \mathcal{Z}_F A_F \quad (25)$$

où  $\mathcal{Z}_F A_F$  est la somme, jusqu'à l'ordre  $-\omega_F$ , des premiers termes du développement de Taylor de  $A_F(q)$  dans les impulsions externes  $q$  du sous-graphe  $F$  (ce qui correspond à un contre-terme polynomial dans le champ  $\varphi$  et ses dérivées).

On pourrait éviter l'emploi formel de constantes infinies en introduisant une régularisation quelconque, qu'on enlève à la fin. Mais ce n'est pas nécessaire ici, puisque l'addition du contre-terme, avec le regroupement indiqué, se traduit par une soustraction dans l'intégrand. Dans la représentation paramétrique (20), cette soustraction prend la forme :

$$A_G + c_F A_{G/F} = \int \prod_{i=1}^l d\alpha_i e^{-m^2 \sum_i \alpha_i} (1 - \mathcal{Z}_F) \left[ U^{-2} e^{-\frac{V}{U}} \right] \quad (26)$$

où  $\mathcal{Z}_F f(\alpha)$  est le début du développement de Taylor de  $f(\alpha)$  dans les  $\alpha_i$ ,  $i \in F$ .

Reste à organiser l'ensemble des soustractions à faire pour tous les graphes divergents. Si un graphe  $F'$  diverge et contient lui-même des sous-graphes  $F$  divergents, il faut tenir compte des contre-termes  $c_F$  avant de définir le contre-terme  $c_{F'}$ . L'ensemble des contre-termes est donc donné par un procédé récursif ("récurrence de Bogoliubov") : supposons que l'on ait défini les contre-termes  $c_F$  pour tous les graphes  $F$  jusqu'à l'ordre  $n-1$ . Alors pour un graphe  $G$  à  $n$  vertex on pose :

$$c_G = - \mathcal{Z}_G \left[ A_G + \sum_{\{F\}} \left( \prod_{F \in \{F\}} c_F \right) A_{G/\{F\}} \right] \quad (27)$$

où la somme porte sur toutes les familles non-vides  $\{F\}$  de sous-graphes  $F$  de  $G$ , divergents, propres, disjoints les uns des autres, et  $G/\{F\}$  est le graphe réduit obtenu en réduisant à un point chacun des sous-graphes de la famille.

Il est facile de voir que la solution explicite de cette récurrence donne finalement pour les amplitudes ainsi renormalisées [6] [7] :

$$A_G^R = \int \prod_{i=1}^{\ell} d\alpha_i e^{-m^2 \sum_i \alpha_i} \mathcal{R} \left[ U^{-2} e^{-\frac{V}{U}} \right] \quad (28)$$

avec

$$\mathcal{R} = \sum_{\mathcal{F}} \prod_{F \in \mathcal{F}} (-\mathcal{T}_F) \quad (29)$$

Dans la formule (29), la somme porte sur toutes les forêts  $\mathcal{F}$  (y compris la forêt vide) de sous-graphes  $F$  divergents propres ( $G$  lui-même pouvant être considéré comme sous-graphe). Une forêt  $\mathcal{F}$  est un ensemble de sous-graphes  $F$ , tel que deux quelconques d'entre eux sont soit disjoints, soit contenus l'un dans l'autre (et dans ces deux cas, les opérateurs de Taylor  $\mathcal{T}_F$  commutent).

L'opération  $\mathcal{R}$  fait disparaître toutes les divergences "superficielles". Un théorème non trivial affirme que ceci est suffisant : à cause des propriétés particulières du polynôme  $U$  (propriété "FINE" [8]), les intégrales (28) sont des intégrales convergentes.

Dans le cas particulier du modèle  $\varphi^4$  en dimension  $D = 4$ , on vérifie aisément que les seuls graphes  $G$  divergents sont :

- les graphes "de vide" ( $N(G) = 0$ ), que l'on omet simplement, ce qui correspond à normaliser la mesure gaussienne  $e^{-\int \mathcal{L}_0}$ .
- les graphes à 2 lignes externes ("bipèdes"  $N(G) = 2$ ,  $\omega_G = -1$ ) auxquels correspondent des contre-termes en  $\varphi^2$  et  $\partial_r \varphi \partial^r \varphi$ .
- les graphes à 4 lignes externes ("quadripèdes"  $N(G) = 4$ ,  $\omega_G = 0$ ) auxquels correspondent des contre-termes en  $\varphi^4$ .

B.4 Secteurs de Hepp

Il sera utile dans la suite, comme pour l'étude de la convergence ultra-violette [9], de découper le domaine d'intégration de chaque intégrale de Feynman en  $l!$  secteurs. A toute permutation des lignes  $\sigma = \{i_1, i_2, \dots, i_l\}$  on fait correspondre le secteur :

$$h_\sigma = \left\{ \alpha \mid 0 \leq \alpha_{i_1} \leq \alpha_{i_2} \leq \dots \leq \alpha_{i_l} \right\} \quad (30)$$

alors

$$A_G^R = \sum_{\sigma} A_{G\sigma}^R \quad (31)$$

$$A_{G\sigma}^R = \int_{h_\sigma} \prod_{i=1}^l d\alpha_i e^{-m^2 \sum_i \alpha_i} \mathcal{R} \left[ U^{-2} e^{-\frac{V}{U}} \right] \quad (32)$$

L'intérêt de cette décomposition est qu'il existe dans chaque secteur un éclatement universel (valable pour tous les graphes) qui désingularise l'intégrand. Et les cartes locales correspondantes se raccordent trivialement d'un secteur à l'autre. On pose en effet dans chaque secteur :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{i_l} = \beta_l \\ \alpha_{i_{l-1}} = \beta_l \beta_{l-1} \\ \dots \dots \dots \\ \alpha_{i_1} = \beta_l \beta_{l-1} \dots \beta_2 \beta_1 \end{array} \right. \quad (33)$$

où les  $\beta_i$  ( $i \neq l$ ) varient de 0 à 1 à cause des inégalités (30) et l'on trouve :

$$\forall \sigma, \quad \prod d\alpha_i U^{-2}(\alpha) \longrightarrow \prod d\beta_i \beta_i^{\omega_i - 1} (1 + P(\beta))^{-2} \quad (34)$$

où  $P$  est un polynôme à coefficients positifs sans terme constant. La formule (34) exprime la propriété "FINE" de  $U$  mentionnée précédemment.

L'existence de divergences se traduit par le fait que certains  $\omega_i$  sont  $\leq 0$ .

Notons que, dans un secteur donné, il n'apparaît en général qu'une partie des divergences du graphe non renormalisé. Par exemple pour 2 variables, dans le secteur hachuré (fig. 5)

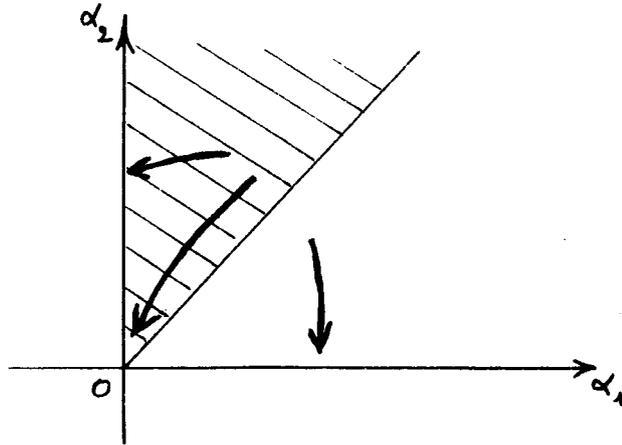


Fig. 5

on voit les divergences éventuelles pour  $\alpha_2 \rightarrow 0$ , ou pour  $\alpha_1$  et  $\alpha_2 \rightarrow 0$ , mais pas celles pour  $\alpha_1 \rightarrow 0$ . Nous retrouverons cette remarque à la fin du paragraphe C.2.

\*  
\* \*

## C - ETAPES DE LA PREUVE

### C.1 Introduction

Nous ne donnons pas ici la preuve du théorème II, qui se déduit d'une simple étude combinatoire (voir appendice C de la réf. [1]). La preuve du théorème I est plus difficile, et nous allons en donner les principales étapes. Afin d'alléger les notations et de dégager les lignes essentielles, nous faisons deux simplifications :

- nous considérons seulement les graphes ne contenant pas de bipèdes. Alors les seuls sous-graphes divergents  $F$  sont des quadrupèdes ( $\omega_F = 0$ ) et les opérations de Taylor  $\mathcal{Z}_F$  isolent simplement le terme constant du développement de Taylor.
- nous nous plaçons à impulsions externes nulles  $p_i = 0$ . Alors  $V = 0$  et les intégrands à soustraire sont simplement de la forme  $U^{-2}$ .

Pour le traitement du cas le plus général, nous renvoyons à nouveau à la réf. [1].

### C.2 Classification des forêts

Cette classification est notre outil principal. Etant donné un secteur  $h_\sigma$  et une forêt  $\mathcal{F}$ , nous définissons d'abord le "squelette" de  $\mathcal{F}$ . (Dans tout ce paragraphe, les concepts introduits dépendent du secteur, quoique nous omettions cette dépendance dans nos notations).

Pour chaque sous-graphe  $F \in \mathcal{F}$ , nous considérons deux sortes de lignes (fig. 6) :

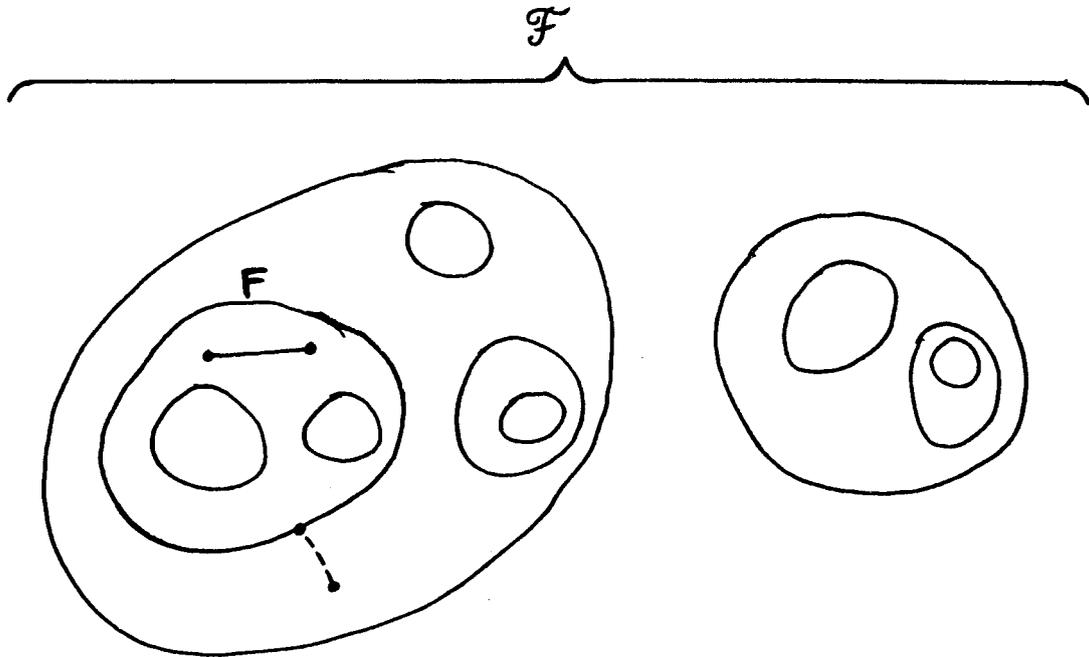


Fig. 6

- les lignes  $\bullet\text{---}\bullet$ , lignes internes de  $F$ , mais n'appartenant pas à ses "enfants" dans  $\mathcal{F}$  (plus grands sous-graphes appartenant à  $\mathcal{F}$  et contenus dans  $F$ ).

- les lignes  $\bullet\text{---}\text{---}\bullet$ , lignes externes de  $F$ , internes dans son "père" dans  $\mathcal{F}$  (plus petit sous-graphe appartenant au squelette de  $\mathcal{F}$ , et contenant  $F$ ; s'il n'y a pas de tel sous-graphe, le père de  $F$  est défini comme étant le graphe complet  $G$  lui-même).

Nous définissons alors deux entiers :

$$x(F, \mathcal{F}) = \text{Sup} [\text{rang dans } \sigma \text{ des lignes } \bullet\text{---}\bullet] \quad (35)$$

$$y(F, \mathcal{F}) = \text{Inf} [\text{rang dans } \sigma \text{ des lignes } \bullet\text{---}\text{---}\bullet] \quad (36)$$

et nous posons :

$$\text{squelette de } \mathcal{F} = \{F \in \mathcal{F} \mid x(F, \mathcal{F}) > y(F, \mathcal{F})\} \quad (37)$$

Remarque : la définition (37) n'est pas un cercle vicieux, quoique la définition des lignes  $\dashrightarrow$  (et donc de  $\mathcal{Y}$ ) dépende du squelette. C'est en fait une définition inductive, en partant des plus grands sous-graphes de  $\mathcal{F}$ , avec la convention :

$$G \notin \text{squelette de } \mathcal{F}$$

Une forêt  $\mathcal{S}$  est dite "forêt-squelette" si elle est égale à son propre squelette :

$$\text{squelette de } \mathcal{S} = \mathcal{S}$$

Prendre le squelette est une projection : le squelette de toute forêt est bien une forêt-squelette.

Nous classons alors les forêts selon leur squelette. On peut montrer que la classe des forêts, ayant comme squelette une forêt-squelette donnée  $\mathcal{S}$ , possède une forêt maximale  $\mathcal{S} \cup \mathcal{H}(\mathcal{S})$ , et l'on a l'équivalence suivante :

$$\left[ \text{squelette de } \mathcal{F} = \mathcal{S} \right] \iff \left[ \mathcal{S} \subseteq \mathcal{F} \subseteq \mathcal{S} \cup \mathcal{H}(\mathcal{S}) \right] \quad (38)$$

En regroupant par classes l'ensemble de toutes les forêts dans l'opération de renormalisation  $\mathcal{R}$  définie en (29), la formule (32) devient (à impulsions nulles,  $V = 0$ ) :

$$A_{G\sigma}^R = \sum_{\mathcal{S}} A_{G\sigma}^{\mathcal{S}} \quad (39)$$

avec

$$A_{G\sigma}^{\mathcal{S}} = \int_{h_\sigma} \prod d\alpha \ e^{-m^2 \sum \alpha} \mathcal{R}_{\mathcal{S}} U^{-2} \quad (40)$$

et à cause de l'équivalence (38), on voit :

$$\mathcal{R}_{\mathcal{S}} = \prod_{S \in \mathcal{S}} (-\tau_S) \prod_{H \in \mathcal{H}(\mathcal{S})} (1 - \tau_H) \quad (41)$$

Il est remarquable que chacune des intégrales  $A_{G\sigma}^g$  est :

- a) convergente, ce qui n'est pas évident puisque une partie seulement des soustractions, celles correspondant aux sous-graphes  $H$ , est effectuée par l'opération  $\mathcal{R}_g$  ; mais dans le secteur considéré, ce sont justement les seules soustractions nécessaires (voir la remarque accompagnant la fig. 5).
- b) facile à borner, comme on va le voir dans le paragraphe suivant.

### C.3 Bornes des intégrales

Pour évaluer les intégrales (40) nous écrivons explicitement l'action des opérateurs de Taylor :

$$\mathcal{Z}_S U^{-2} = U_S^{-2} \quad (42)$$

où  $U_S$  a été défini en (22) :

$$U_S = \sum_{T \cap S \text{ connexe}} \prod_{i \notin T} \alpha_i \quad (43)$$

De même :

$$(1 - \mathcal{Z}_H) U^{-2} = U^{-2} - U_H^{-2} = \int_0^1 d\chi_H \frac{-2 U_H^{-2}}{(U_H + \chi_H U_H)^3} \quad (44)$$

avec :

$$U_H = \sum_{T \cap H \text{ non connexe}} \prod_{i \notin T} \alpha_i \quad (45)$$

Si la sous-forêt  $\mathcal{H}(g)$  contient  $k$  éléments, on a donc :

$$\prod_{H \in \mathcal{H}} (1 - \mathcal{Z}_H) U^{-2} = (-1)^k (k+1)! \int_0^1 \prod_{H \in \mathcal{H}} d\chi_H \frac{W}{U(\alpha, \chi)^{2+k}} \quad (46)$$

où le numérateur  $W$  est une somme de produits de  $U_H$ , et croît quand le nombre de soustractions augmente. Certes la puissance du dénominateur croît également avec  $k$ , mais on ne peut pas borner (uniformément dans tout le domaine des  $\alpha$ ) les monômes des  $U_H$  par ceux des  $U_H$ . Par contre une telle borne existe dans chaque secteur, grâce aux propriétés des classes de forêts. En effet, on peut faire correspondre à tout arbre contribuant à  $U_H$  un arbre contribuant à  $U_H$  (fig. 7), en enlevant des lignes  $\bullet \dashrightarrow$  et en rajoutant des lignes  $\bullet \text{---} \bullet$ .

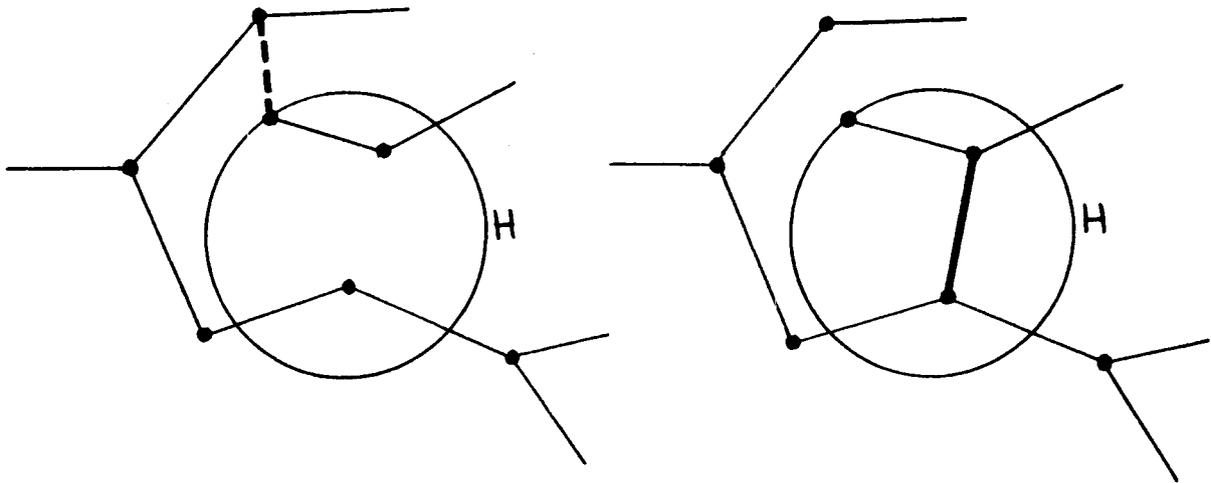


Fig. 7

Par la définition de  $\mathcal{H}(g)$  ( $y(H) > x(H)$ ) et la définition (22) de  $U$ , on remplace ainsi certains  $\alpha$  par d'autres de rang supérieur dans le secteur, ce qui augmente le monôme correspondant à cause des inégalités (30) du secteur. On utilise systématiquement ce mécanisme sur l'expression (45), pour majorer chaque facteur de  $W$  par une puissance du dénominateur, tout en gardant au numérateur (dans les variables  $\beta$  définies en (33)) les puissances des  $\beta$  juste nécessaires à la convergence.

Il reste alors :

- a) à borner les intégrales sur les  $\chi_H$ , ce qu'on fait trivialement en majorant l'intégrand par sa valeur à  $\chi_H = 0$ .

- b) à borner les intégrales sur les  $\beta$  : on utilise la formule (34) pour écrire :

$$\int_0^1 \prod_i d\beta_i \prod_i \beta_i^{\omega_i^R - 1} (1 + P(\beta))^{-2} < \prod_i \frac{1}{\omega_i^R} \quad (47)$$

Contrairement aux  $\omega_i$  de l'équation (34), les  $\omega_i^R$  sont maintenant tous strictement positifs (les puissances des  $\beta$  qu'on a pu factoriser dans  $W$  viennent de la renormalisation effectuée).

- c) à sommer les bornes obtenues sur les secteurs  $\sigma$ , ce qui est un problème combinatoire assez difficile (voir [1]).
- d) à sommer sur les squelettes  $\mathcal{S}$ , ce qui se fait très simplement en remarquant que le nombre total de forêts d'un graphe à  $n$  vertex est borné par  $8^n$  (voir appendice A de la réf. [1]).

Le résultat final, en incluant le traitement analogue des bipèdes, est le suivant : si l'on définit  $q(\mathcal{F})$  et  $b(\mathcal{F})$  comme les nombres de quadrupèdes et de bipèdes dans chaque forêt  $\mathcal{F}$ , on pose

$$f(\mathcal{F}) = q(\mathcal{F}) + 2b(\mathcal{F}) \quad (48)$$

$$f = \sup_{\text{forêts } \mathcal{F} \text{ de } G} f(\mathcal{F}) \quad (49)$$

et l'on trouve

$$|A_G^R| < K_1^n f! \quad (50)$$

ce qui est le théorème I.

D - DISCUSSION

Il faut d'abord bien noter l'effet de balance entre les théorèmes I et II. A un ordre  $n$  donné, certains types de graphes dominant, ceux pour lesquels  $f$  est maximal. Mais ce sont apparemment les moins nombreux (pour autant que nos bornes soient saturées). On est donc dans la situation - redoutablement démocratique ! - où les petits comptent autant que les gros : il n'est pas possible de faire de bonnes approximations en retenant seulement les graphes dominants. Il est aussi très difficile d'exclure de miraculeux effets de compensation, dus aux différences de signe entre graphes plus ou moins renormalisés.

Exemple 1 : Ainsi les graphes de la figure 1 ont des amplitudes se comportant comme :

$$(-1)^n (-\lambda)^n K^n n! \tag{51}$$

où le facteur  $(-1)^n$  est dû à la renormalisation. Si l'on isole la sous-série correspondant à ces seuls graphes, et si on prend sa transformée de Borel [10], on trouve :

$$B_1(t) \simeq \sum_{n=0}^{\infty} t^n K^n$$

qui a une singularité à  $t = 1/K$  sur l'axe réel positif ("renormalon"). Une telle singularité interdit la sommabilité de Borel ordinaire. Mais à cause de notre première remarque, il est très difficile d'exclure des compensations "tuant" cette singularité, (malgré le caractère dominant des graphes considérés), si l'on prend en compte tous les autres graphes.

Exemple 2 : Pour les graphes de la figure 8, à impulsions externes nulles, nous avons pu montrer [1] :

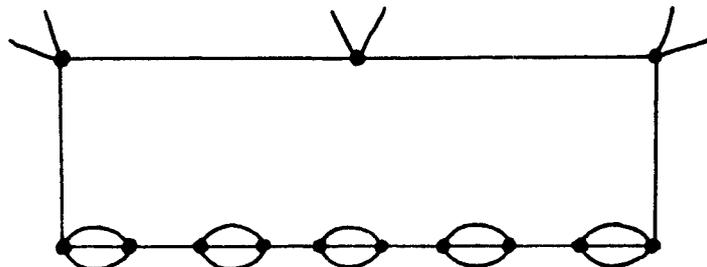


Fig. 8

$$K^n \sqrt{n!} < A_G^R < K'^n \sqrt{n!} \quad (52)$$

où  $K$  et  $K'$  sont deux constantes positives. Comme ces graphes ont un nombre impair de vertex, leur sous-série a une transformée de Borel :

$$B_2(t) \simeq \sum_{p=1}^{\infty} t^{2p+1} \frac{K^{2p+1}}{p!} \quad (53)$$

Cette fonction est entière, mais se comporte à l'infini comme  $e^{t^2}$ , ce qui interdit aussi la sommabilité de Borel ("renormalon à l'infini"). Là encore, il est très difficile de dire si un tel comportement subsiste quand on prend tous les graphes en compte.

Plus généralement, le problème de la continuation analytique de  $B(t)$  (équation (6)), hors du disque d'analyticité dont nous avons prouvé l'existence, est un problème très ouvert. Pour le résoudre, il faudrait sans doute regrouper les graphes pour obtenir des sommes partielles dont on puisse suivre le signe, et qu'on puisse borner inférieurement (voir un exemple très simple de ce genre de technique dans la réf. [11]).

En supposant qu'on y parvienne, et que l'on puisse définir les  $A(\lambda)$  par une transformation de Borel inverse modifiée (contournant les éventuelles singularités), quel serait alors le lien entre cette théorie et celle obtenue à partir de la théorie des champs sur réseau ? Cette dernière en effet, d'après les travaux en cours de M. Aizenman, J. Fröhlich ou A. Sokal, semble conduire nécessairement à une théorie triviale (matrice  $S$  égale à l'unité, ou encore constante de couplage renormalisée nulle). Ou bien les deux théories seront différentes, ce qui serait assez surprenant, ou bien elles coïncideront : il faudrait alors comprendre par quel miracle la transformée de Borel inverse modifiée redonne exactement une théorie triviale à partir d'un développement en puissances de  $\lambda$  non trivial !

Pour revenir à des questions moins utopiques, qu'en est-il des autres théories de champs renormalisables (couplage de Yukawa, électrodynamique, champs de Yang-Mills, chromodynamique,...) ? Quoique

nous ne l'ayons pas expressément démontré, nous sommes persuadés que notre théorème III subsiste. Les deux ingrédients principaux sont en effet :

- a) le nombre fini des types de vertex, ce qui correspond au choix du couplage,
- b) le nombre fini des types de graphes divergents, ce qui correspond à la renormalisabilité.

Mais le problème de la continuation analytique dans le plan de Borel peut se présenter de façons très différentes selon les modèles. On peut par exemple imaginer que la plupart des modèles conduisent soit à une absence de théorie, soit à une théorie triviale. On n'obtiendrait une théorie non triviale que pour les modèles dans lesquels une symétrie assez forte accomplirait les miracles suffisants pour "tuer" les renormalons. Il existe d'ailleurs des arguments pour dire que l'absence de renormalons serait liée au caractère de "liberté asymptotique" de la théorie [12]. Quoique ces arguments utilisent des approximations s'appuyant plus ou moins sur la considération de "graphes dominants" (et donc soulèvent les objections ci-dessus), il serait peut être possible de les rendre rigoureux en utilisant conjointement nos techniques et les équations du "groupe de renormalisation".

\*  
\*  
\*

REFERENCES

- [1] C. de Calan, V. Rivasseau, Local existence of the Borel transform in euclidean  $\Phi_4^4$ , Preprint C.P.T., Ecole Polytechnique, 1981 (à paraître aux Commun. Math. Phys.).
- [2] E. Brézin, J.C. Le Guillou, J. Zinn-Justin, Phys. Rev. D15, n° 6, 1544 (1977).
- [3] V. Rivasseau, E. Speer, Commun. Math. Phys. 72, 293 (1980).
- [4] N. Nakanishi, Graph Theory and Feynman Integrals, Gordon and Breach, New-York (1971).
- [5] H. Epstein, V. Glaser, Prépublications de la R.C.P. n° 25, Strasbourg (1970).
- [6] W. Zimmermann, Commun. Math. Phys., 15, 208 (1969).
- [7] M.C. Bergère, Y.M.P. Lam, Journ. Math. Phys. 17, 1546 (1976).
- [8] M.C. Bergère, C. de Calan, A.P.C. Malbouisson, Commun. Math. Phys. 62, 137 (1978).
- [9] K. Hepp, Commun. Math. Phys. 2, 301 (1966).
- [10] G. 't Hooft, Ecole d'été Ettore Majorana, Erice, Sicily (Juillet 1977).
- [11] C. de Calan, V. Rivasseau, The perturbation series for  $\Phi_3^4$  field theory is divergent, Preprint C.P.T, Ecole Polytechnique (1981).
- [12] G. Parisi, Physics Reports 49 n° 2, 215 (1979).  
E. Brézin, Communication privée.

