RECHERCHE COOPÉRATIVE SUR
PROGRAMME N° 25

ANDRÉ LICHNEROWICZ

Déformations d'algèbres associées à une variété symplectique et rapport avec la quantification

Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg - RCP25, 1981, tome 29
« Conférences de : J. Ginibre, W. Krieger, M.Jaeckel-J.M. Maillard, A. Lichnerowicz et C. de Calan », , exp. n° 4, p. 115-146
<http://www.numdam.org/item?id=RCP25_1981__29__115_0>

DEFORMATIONS D'ALGEBRES ASSOCIEES A UNE VARIETE SYMPLECTIQUE ET RAPPORT AVEC LA QUANTIFICATION

André LICHNEROWICZ

COLLEGE DE FRANCE
Place Marcelin Berthelot
75231 PARIS CEDEX 05

DEFORMATIONS D'ALGEBRES ASSOCIEES A UNE VARIETE SYMPLECTIQUE ET RAPPORT AVEC LA QUANTIFICATION

André Lichnerowicz (Strasbourg mai 1981)

On sait qu'on peut donner une description complète de la mécanique classique en termes de géométrie symplectique et de crochet de Poisson ; c'est là l'essentiel du formalisme hamiltonien. Depuis 1973, dans un programme commun avec M. Flato, C. Fronsdal et J. Vey auxquels se sont joints d'autres savants, nous avons étudié les propriétés et les applications des déformations de l'algèbre associative triviale et de l'algèbre de Lie de Poisson attachées à une variété symplectique. De telles déformations fournissent une nouvelle approche invariante de la mécanique quantique qui a commencé à être développée. Les exposés sont consacrés à l'état actuel de la théorie des déformations associatives considérées ou $*$-produits. La quantification d'un système décrit par une variété symplectique est donnée par le choix, pour cette variété, d'un tel $*$-produit. Je considérerai seulement ici des systèmes à un nombre fini de degrés de liberté, mais l'approche et une part des résultats peuvent être étendues à des champs physiques.

1 - Dynamique classique et géométrie symplectique.

a) Soit (W, F) une variété symplectique connexe, paracompacte, de classe C^∞, dimension $2n$ et 2-forme fondamentale F ; F est fermée et partout de rang $2n$. Nous notons $b_k(W)$ les nombres de Betti de W pour la cohomologie à supports non restreints. Considérons l'isomorphisme de fibrés vectoriels : $TW \to T^*W$ défini par $\mu(X) = -i(X)F$ (où $i(.)$ est le produit intérieur ; cet isomorphisme s'étend naturellement aux tenseurs. Nous désignons par Λ (2-tenseur de structure) le 2-tenseur contravariant antisymétrique $\mu^{-1}(F)$. Nous posons $N = C^\infty(W ; \mathbb{R})$.

Un champ de vecteurs symplectique est un champ X tel que $\mathcal{L}(X)F = 0$ (où $\mathcal{L}$ est la dérivée de Lie) donc définissant un automorphisme infinitésimal de (W, F) ; il est équivalent de dire que $\mu(X)$ est une 1-forme fermée. Les champs de vecteurs symplectiques définissent une algèbre de Lie L de dimension infinie.

Si $X, Y \in L$, on a :

$$\mu([X,Y]) = d\, i(\Lambda)\,(\mu(X) \wedge \mu(Y)) \tag{1-1}$$

Soit L^* le sous-groupe de L défini par les images inverses des 1-formes exactes $(X_u = \mu^{-1}(du)\ ;\ u \in N)$ un élément de L^* est un champ de vecteurs hamiltonien. Considérons l'idéal dérivé $[L, L]$ de L ; on sait (Arnold, moi-même) que $[L, L] = L^*$ et $\dim L/L^* = b_1(W)$; (1-1) conduit à introduire le crochet de Poisson :

$$\{u, v\} = i(\Lambda)(du \wedge dv) = \mathcal{L}(X_u)\, v = P(u, v) \tag{1-2}$$

où l'opérateur de Poisson P est un opérateur bidifférentiel d'ordre 1 en chaque argument, nul sur les constantes ; P définit sur N une structure d'algèbre de Lie et (N, P) est l'algèbre de Lie de Poisson de la variété et l'on a un homorphisme naturel de (N, P) sur L^* puisque $X_{\{u,\ v\}} = [X_u, X_v]$.

b) Considérons un système dynamique à liaisons indépendantes du temps et n degrés de liberté. L'espace de configuration correspondant est une variété différentiable M arbitraire de dimension n. On sait que le fibré cotangent T^*M admet une structure symplectique naturelle définie par la 2-forme de Poincaré qui s'écrit localement en termes de variables classiques $F = \sum dp_\alpha \wedge dq^\alpha$ $(\alpha = 1,\dots,n)$. Pour le formalisme hamiltonien, un état dynamique du système n'est autre qu'un point de $W = T^*M$ qui est l'espace de phase usuel. L'analyse des équations de la mécanique a montré depuis longtemps qu'il est essentiel de pouvoir introduire des changements des variables (q^α, p_α) qui ne respectent pas la structure cotangente de W. Nous sommes conduits à prendre comme espace de phase une variété symplectique (W, F) de dimension 2n.

Sur cette variété, la dynamique est donnée par une fonction $H \in N$, l'hamiltonien classique, qui détermine un champ hamiltonien X_H. Un mouvement du système dynamique est donné, par définition, par une courbe intégrale $c(t)$ de X_H, le paramètre t étant le temps. Telle est la signification géoémtrique des équations d'Hamilton.

c) Nous pouvons adopter un autre point de vue. L'espace N admet deux structures algébriques :

1) une structure d'algèbre associative donnée par le produit usuel des fonctions (qui est ici commutatif)

2) une structure d'algèbre de Lie donnée par le crochet de Poisson.

Le crochet de Poisson définit des dérivations du produit. Considérons une famille u_t d'éléments de N satisfaisant l'équation différentielle :

$$du_t/dt = \{H, u_t\} \tag{1-3}$$

et prenant la valeur u_o pour $t = o$. On voit que l'évolution dans le temps de u_t procède du flot de X_H qui apparait dans le premier point de vue ; (1-3) peut être considérée comme l'équation intrinsèque de la dynamique classique.

Celle-ci ayant été complètement décrite en termes des deux lois de composition définies sur N, il est naturel de se demander s'il est possible de déformer ces deux lois, en un sens convenable, de façon à obtenir un modèle isomorphe à la mécanique quantique usuelle. La réponse est affirmative.

2 - Cohomologies de Hochschild et de Chevalley.

a) Dérivations et déformations d'une algèbre associative procèdent d'une même cohomologie, la cohomologie dite de Hochschild. Soit W une variété différentiable arbitraire et $(N = C^{\infty}(W;\mathbb{R}),.)$ l'algèbre associative définie par le produit des fonctions. Une p-cochaîne $(p \geq 1)$ C de $(N,.)$ est une application p-linéaire de N^p dans N. Le cobord de Hochschild de la p-cochaîne C est la (p+1)-cochaîne $\tilde{\partial} C$ donnée par :

$$\text{(2-1)}\quad \tilde{\partial} C(u_0,\dots,u_p) = u_0\, C(u_1,\dots,u_p) - C(u_0 u_1, u_2,\dots,u_p) + C(u_0, u_1 u_2,\dots,u_p)$$
$$+(-1)^p C(u_0,\dots,u_{p-1}u_p) + (-1)^{p+1} C(u_0,\dots,u_{p-1})\, u_p$$

On a $\tilde{\partial}^2 = 0$. Un 1-cocycle de $(N,.)$ est une dérivation de cette algèbre, donc donnée par un champ de vecteurs.

Une p-cochaîne C est dite d-différentielle ($d \geqslant 0$) si elle est définie par un opérateur multidifférentiel d'ordre maximum d en chaque argument. Si T est une 1-cochaîne $(d+1)$-différentielle, $\tilde{\partial} T$ est d-différentielle. J'ai établi inversement la proposition non triviale:

Proposition - Si T est un endomorphisme de N tel que $C = \tilde{\partial} T$ sont d-différentielle ($d \geqslant 0$), T est lui-même $(d+1)$-différentiel.

On note que si $\tilde{\partial} T$ est nul sur les constantes, il en est de même pour T. Soit $\tilde{H}^p(N; N)$ le p^e espace de cohomologie pour la cohomologie différentielle de Hochschild ; J. Vey a établi à partir de résultats de Gelfand le théorème suivant (dont j'ai indiqué ultérieurement une preuve plus élémentaire):

Théorème (Vey) $\tilde{H}^p(N; N)$ est isomorphe à l'espace des p-tenseurs contravariants antisymétriques de W

Un tel tenseur définit un opérateur multidifférentiel alterné d'ordre 1 avec lequel on l'identifie. Je n'envisagerai ici en général que des cochaînes différentielles nulles sur les constantes, ce qui ne modifie pas la cohomologie. M. Cahen et S. Gutt ont étendu le résultat de Vey à la cohomologie locale en dimension 2 et 3.

b) De manière symétrique, dérivations et déformations d'une algèbre de Lie procèdent d'une même cohomologie que j'appelle conventionnellement cohomologie de Chevalley. Il s'agit de la cohomologie à valeurs dans l'algèbre correspondant à la représentation adjointe. Soit (W, F) une variété symplectique, (N, P) l'algèbre de Lie de Poisson correspondante. Une p-cochaîne ($p \geqslant 0$) C de Chevalley est une application p-linéaire alternée de N^p dans N, les 0-cochaînes étant identifiées aux éléments de N. Le cobord de Chevalley ∂ est défini classiquement par la formule :

$$\partial C(u_0,\dots,u_p) = \varepsilon_{0\dots p}^{\lambda_0\dots\lambda_p}\left(\frac{1}{p!}\{u_{\lambda_0}, C(u_{\lambda_1},\dots,u_{\lambda_p})\} - \frac{1}{2(p-1)!}\, C(\{u_{\lambda_0},u_{\lambda_1}\}, u_{\lambda_2},\dots,u_{\lambda_p})\right)$$

où $u_\lambda \in N$ et où ε est l'indicateur d'antisymétrisation de Kronecker. Un 1-cocycle de (N, P) est une dérivation, un 1-cocycle exact une dérivation intérieure. Même définition (pour $d \geqslant 1$) d'une p-cochaîne d-différentielle que dans le cas associatif ; si C est d-différentielle, ∂C est aussi d-différentielle. J'ai établi (comparer avec la proposition du a);

Proposition - Si C est un 2-cocycle exact d-différentiel ($d \geqslant 1$) de Chevalley, il existe un opérateur d-différentiel T tel que $C = \partial T$.

Avez et moi-même (1972) avons déterminé toutes les dérivations de (N, P) sans hypothèse a priori de différentiabilité. En particulier les dérivations nulles sur les constantes sont données par $\mathcal{L}(X)u$, où X est un vecteur symplectique. Nous notons $H^p(N; N)$ le p^e espace de cohomologie pour la cohomologie différentielle de Chevalley avec cochaînes nulles sur les constantes.

3 - Déformations formelles.

Rappelons brièvement, en les adaptant, les principaux résultats de Gerstenhaber concernant les déformations des structures algébriques, en particulier des algèbres associatives.

a) Soit $E(N;\nu)$ l'espace des fonctions formelles de $\nu \in \mathbb{C}$ à coefficients dans N ; ν est dit le paramètre de déformation. Considérons une application bilinéaire $N \times N \to E(N;\nu)$ qui donne la série formelle :

$$u *_\nu v = \sum_{r=0}^{\infty} \nu^r C_r(u,v) = u.v + \sum_{r=1}^{\infty} \nu^r C_r(u,v) \tag{3-1}$$

où les C_r $(r \geqslant 1)$ sont des 2-cochaînes différentielles de (N,.). Ces cochaînes s'étendent naturellement à $E(N;\nu)$. On a une déformation formelle de (N,.) si

(3-1) satisfait formellement la relation d'associativité. S'il en est ainsi, (3-1) définit sur $E(N;\nu)$ une structure d'algèbre associative formelle. Si (3-1) est arbitraire, on a pour $u, v, w \in N$

$$(3\text{-}2)\qquad (u *_\nu v) *_\nu w - u *_\nu (v *_\nu w) = \sum_{t=1}^{\infty} \nu^t \tilde{D}_t(u,v,w)$$

où $\tilde{D}_t$ est la 3-cochaîne donnée par

$$\tilde{D}_t(u,v,w) = \sum_{r+s=t} \left[C_r(C_s(u,v),w) - C_r(u, C_s(v,w)) \right] \qquad (r,s \geq 0)$$

Posons :

$$\tilde{E}_t(u,v,w) = \sum_{r+s=t} \left(C_r(C_s(u,v),w) - C_r(u, C_s(v,w)) \right) \quad (r,s \geq 1)$$

On a l'identité :

$$\tilde{D}_t \equiv \tilde{E}_t - \tilde{\partial} C_t$$

Si (3-1) est limité à l'ordre q, on a une déformation d'ordre q si l'associativité est satisfaite à l'ordre $(q+1)$ près. S'il en est ainsi $\tilde{E}_{q+1}$ est automatiquement un 3-cocycle de Hochschild. Pour qu'on puisse trouver une 2-cochaîne C_{q+1} vérifiant $\tilde{D}_{q+1} \equiv E_{q+1} - \tilde{\partial} C_{q+1} = 0$, il faut et il suffit que $\tilde{E}_{q+1}$ soit exact ; $\tilde{E}_{q+1}$ définit une classe de cohomologie, élément de $\tilde{H}^3(N;N)$ qui est l'obstruction à l'ordre $(q+1)$ à la construction d'une déformation. Une déformation d'ordre 1 est dite infinitésimale ; on a $\tilde{E}_1 = 0$ et il vient seulement $\tilde{\partial} C_1 = 0$; ainsi C_1 est un 2-cocycle de $(N,.)$.

b) Considérons une série formelle en ν

$$(3\text{-}3)\qquad T_\nu = \sum_{s=0}^{\infty} \nu^s T_s = Id._N + \sum_{s=1}^{\infty} \nu^s T_s$$

où les $T_s (s \geq 1)$ sont des endomorphismes de N qui vont être nécessairement des opérateurs différentiels; T_ν opère naturellement sur $E(N;\nu)$. Considérons une application bilinéaire $N \times N \to E(N;\nu)$ correspondant à :

(3-4) $$u *'_\nu v = u.v + \sum_{r=1}^{\infty} \nu^r C'_r$$

où les C'_r sont encore des 2-cochaînes différentielles. Supposons (3-4), (3-4) telles qu'on ait formellement l'identité :

(3-5) $$T_\nu (u *'_\nu v) = T_\nu u *_\nu T_\nu v$$

On démontre à partir de formules universelles la proposition suivante :

<u>Proposition</u> - <u>La déformation (3-1) de (N,.) étant donnée, toute série formelle (3-3), où les T_s sont nécessairement des opérateurs différentiels nuls sur les constantes, engendre une application bilinéaire unique (3-4) satisfaisant (3-5). Cette application est une nouvelle déformation qui est dite équivalente à (3-1). En particulier une déformation est dite triviale si elle est équivalente à la déformation identique ($r = 0$ pour $r \geqslant 1$)</u>

Nous dirons que T_ν transforme $*'_\nu$ en $*_\nu$. On a

$$C'_t - C_t + \tilde{G}_t = \tilde{\partial} T_t$$

avec

$$\tilde{G}_t(u,v) = \sum_{r+s=t} T_s C'_r(u,v) - \sum_{s+s'=t} T_s u . T_{s'} v - \sum_{r+s=t} \left(C_r(T_s u, v) + C_r(u, T_s v)\right)$$
$$- \sum_{r+s+s'=t} C_r(T_s u, T_{s'} v) \qquad (r,s,s' \geqslant 1)$$

Si deux déformations sont équivalentes à l'ordre q, $C'_{q+1} - C_{q+1} + \tilde{G}_{q+1}$ est un 2 co-cycle dont la classe, élément de $\tilde{H}^2(N;N)$ est <u>l'obstruction à l'équivalence à l'ordre (q+1)</u>. En particulier deux déformations infinitésimales définies par les 2-cocycles C_1 et C'_1 sont équivalentes si $(C'_1 - C_1)$ est exact.

c) Soit $E(N;\lambda)$ l'espace des fonctions formelles de $\lambda \in C$ à coefficients dans N. Une déformation de l'algèbre de Lie de Poisson (N, P) est définie par une application bilinéaire alternée $N \times N \to E(N;\lambda)$ donnée par :

$$[u,v]_\lambda = P(u,v) + \sum_{r=1}^{\infty} \lambda^r C_{2r+1}(u,v) \tag{3-6}$$

où les C_{2r+1} sont des 2-cochaînes différentielles de (N, P) telles que l'identité de Jacobi soit formellement satisfaite. S'il en est ainsi, (3-6) définit sur $E(N;\lambda)$ une structure d'algèbre de Lie formelle. La cohomologie de Chevalley joue pour les déformations d'algèbre de Lie exactement le même rôle que la cohomologie de Hochschild pour les déformations d'algèbre associative.

4 - Les $*_\nu$-produits.

a) Une 2-cochaîne $C(u, v)$ de Hochschild est dite paire si elle est symétrique en u, v, impaire si elle est antisymétrique. Une 3-cochaîne $B(u, v, w)$ de Hochschild est paire si elle est symétrique en u, w, impaire si elle est antisymétrique en u, w. Si A est une 1-cochaîne, $\tilde{\partial} A$ est paire ; si C est une 2-cochaîne, $\tilde{\partial} C$ est impaire pour C paire, paire pour C impaire.

Soit C un 2-cocycle de Hochschild. Si C est pair, il est exact d'après le théorème de Vey; si C est impair il est non-exact et donné par un 2-tenseur antisymétrique. Soit B un 3-cocycle de Hochschild ; si B est pair il est exact et $B = \tilde{\partial} C^{(i)}$; si B est impair, $B = T + \tilde{\partial} C^{(p)}$, où $C^{(i)}$ (resp. $C^{(p)}$) est impair (resp. pair) et où T est donnée par un 3-tenseur antisymétrique.

b) Sur la variété symplectique (W, Λ), P donné par Λ définit un 2-cocycle de Hochschild qui n'est jamais exact. Nous ne considérons dans la suite que les déformations associatives de la forme

$$u *_\nu v = u.v + \nu P(u,v) + \sum_{r=2}^{\infty} \nu^r C_r(u,v) \tag{4-1}$$

satisfaisant les hypothèses suivantes :

1) les C_r sont nulles sur les constantes,

2) C_r est paire pour r pair, impaire pour r impair.

S'il en est ainsi, nous dirons que (4-1) définit un $*_\nu$-produit (ou star produit). Les hypothèses se traduisent par :

$$u *_\nu 1 = 1 *_\nu u = u \qquad\qquad u *_{-\nu} v = v *_\nu u$$

Par antisymétrisation, un $*_\nu$-produit donne naissance à une algèbre de Lie formelle (3-6) (avec $\lambda = \nu^2$) :

$$[u,v]_\lambda = (2\nu)^{-1}(u *_\nu v - v *_\nu u) \tag{4-2}$$

J'ai établi le théorème suivant d'unicité :

Théorème - Si une algèbre de Lie formelle (3-6) est engendrée par un $*_\nu$-produit, ce $*_\nu$-produit est unique.

Nous indiquerons celles des algèbres de Lie formelles qui sont engendrées par un $*_\nu$-produit.

En ce qui concerne l'existence de telles déformations, J. Vey (1975) a établi par une méthode sophistiquée que toute variété symplectique (W, F) à $b_3(W) = 0$ admet une algèbre de Lie formelle d'un type particulier que je définirai et que j'appelle algèbre de Lie de Vey. Suivant une de mes suggestions, Neroslavsky et Vlassov (1979) ont montré en jouant simultanément sur la parité et les deux cohomologies que, sous la même hypothèse, il existe sur (W, F) un $*_\nu$-produit. Nous pensons que l'hypothèse faite est inutile.

c) Le rapport entre l'équivalence entre $*_\nu$-produits et l'équivalence entre algèbres de Lie engendrées conduit à l'étude suivante. Soit $*_\nu$, $*'_\nu$ deux star-produits équivalents et T_ν transformant $*'_\nu$ en $*_\nu$; $A_\nu = T_{-\nu}(T_\nu)^{-1}$ définit un automorphisme de $*_\nu$ vérifiant $A_{-\nu} = (A_\nu)^{-1}$. On montre par récurrence qu'il existe un automorphisme unique (à partie principale triviale) B_ν de $*_\nu$ tel que $A_\nu = B_\nu^2$; il vérifie $B_{-\nu} = (B_\nu)^{-1}$. En changeant B_ν en $B_{-\nu}$, on voit que T_ν admet une décomposition unique :

(4-3) $$T_\nu = B_\nu \, T_\nu^{(p)}$$

où $T_\nu^{(p)}$, pair en ν, transforme $*'_\nu$ en $*_\nu$ et B_ν est un automorphisme de $*_\nu$ vérifiant $B_{-\nu} = (B_\nu)^{-1}$. Ainsi deux star-produits équivalents sont pair-équivalents par rapport à ν. Deux algèbres de Lie formelles engendrées par deux star-produits équivalents sont équivalentes par rapport à $\lambda = \nu^2$. Inversement si une algèbre de Lie formelle est engendrée par un star-produit, toute algèbre de Lie équivalente est engendrée par un star-produit équivalent.

5 - Connexions symplectiques et invariant symplectique β.

a) Une connexion symplectique Γ est une connexion linéaire sans torsion sur (W, F) telle que $\nabla F = 0$, où ∇ est l'opérateur de dérivation covariante défini par Γ. Soit $\bar{\Gamma}$ une connexion linéaire sans torsion arbitraire ; toute connexion Γ sans torsion diffère de $\bar{\Gamma}$ par un tenseur T de type (1, 2) covariantement symétrique. Sur le domaine U d'une carte $\{x^i\}$, on a :

$$\nabla_k F_{ij} = \bar{\nabla}_k F_{ij} - T_{ijk} + T_{jik} \qquad (T_{ijk} = F_{ir} T^r_{jk} \; ; \; T_{ijk} = T_{ikj})$$

Si l'on choisit T défini par :

(5-1) $$T_{ijk} = \frac{1}{3} \left(\bar{\nabla}_k F_{ij} + \bar{\nabla}_j F_{ik} \right)$$

on vérifie immédiatement que $\nabla F = 0$ pour Γ et que Γ est donc une connexion symplectique. Il est clair que le résultat subsiste si on ajoute au second membre de (5-1) un 3-tenseur covariant symétrique arbitraire. Ainsi une variété symplectique admet une infinité de connexions symplectiques, deux telles connexions différant par un tenseur de type (1, 2) déduit d'un 3-tenseur covariant complètement symétrique arbitraire.

Il résulte de plus de (5-1) que si G est un groupe de Lie opérant sur (W,F) par symplectomorphismes et s'il existe sur (W, F) une connexion linéaire G-invariante, il existe sur (W, F) une connexion symplectique G-invariante.

b) Supposons que (W, Λ) admette une connexion symplectique <u>sans courbure</u> ; s'il en est ainsi (W, Λ, Γ) est dite <u>une variété symplectique plate</u>. L'exemple le plus simple est donné par le fibré cotangent de $\mathbb{R}^n$, soit $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Introduisons l'opérateur bidifférentiel $P^r_\Gamma = P^r$ d'ordre maximum r en chaque argument, défini par l'expression suivante sur chaque domaine U d'une carte arbitraire $\{x^i\}$ $(i, j, \ldots = 1, \ldots, 2n)$:

$$P^r(u,v)\big|_U = P^r_\Gamma(u,v)\big|_U = \Lambda^{i_1 j_1}\cdots\Lambda^{i_r j_r}\nabla_{i_1\ldots i_r} u\,\nabla_{j_1\ldots j_r} v \qquad (u, v \in N) \tag{5-2}$$

Nous posons $P^o(u, v) = uv$. Pour $r = 1$, nous obtenons l'opérateur de Poisson P.

Etant donné une fonction formelle $f(z)$ à coefficients constants telle que $f(o) = 1$, substituons P^r à z^r dans le développement de $f(z)$; on obtient ainsi une application bilinéaire $(u,v) \in N \times N \to u *_\nu v = f(\nu P)(u,v)$. Nous voulons choisir f de façon à définir ainsi un star produit. La réponse est donnée par :

<u>Proposition</u> - <u>Si (W, Λ, Γ) est une variété symplectique plate, il existe une fonction formelle unique du crochet de Poisson P qui engendre un $*_\nu$-produit : c'est la fonction exponentielle.</u>

On a :

$$u *_\nu v = \sum_{r=0}^{\infty} (\nu^r/r!)\, P^r(u,v) = \exp(\nu P)(u,v) \tag{5-3}$$

qui engendre la déformation de l'algèbre de Lie de Poisson $(\lambda = \nu^2)$:

$$[u,v]_\lambda = \sum_{r=0}^{\infty} (\lambda^r/(2r+1)!)\, P^{2r+1}(u,v) = \nu^{-1}\,\mathrm{sh}(\nu P)(u,v) \tag{5-4}$$

Il est remarquable que, <u>pour $\nu = \hbar/2i$</u>, on déduit de (5-4) un crochet $\frac{2}{\hbar}\sin(\frac{\hbar}{2}P)$ donné en 1949 par Moyal dans le contexte de la quantification de Hermann Weyl-Wigner sur laquelle nous allons revenir. Nous dirons que (5-3)(resp (5-4)) est

<u>le $*_\nu$ -produit de Moyal</u> (resp. le crochet de Moyal).

Considérons le terme P^3 de (5-4). Si ce 2-cocycle de Chevalley était exact, il serait d'après une proposition antérieure le cobord d'un opérateur différentiel d'ordre 3 ; mais un tel cobord n'a jamais de terme de type bidifférentiel (3, 3). Ainsi P^3 n'est pas exact et les déformations (5-3), (5-4) sont <u>non triviales</u> même à l'ordre 1.

c) La situation de Moyal peut se généraliser de la manière suivante : soit Γ une connexion symplectique arbitraire ; P et $P^2_\Gamma/2$ définissent toujours un $*_\nu$ -produit à l'ordre 2. Pour $u \in N$, désignons par $\mathcal{L}(X_u)\Gamma$ le 3-tenseur covariant symétrique déduit de la dérivée de Lie de la connexion Γ par le champ hamiltonien X_u. Dans une carte pour laquelle F ou Λ admet des composantes constantes on a :

$$(\mathcal{L}(X_u)\Gamma)_{i_1 i_2 i_3} = \partial_{i_1 i_2 i_3} u - S\,\Lambda^{k\ell}\,\Gamma_{k i_1 i_2}\,\partial_{\ell i_3} u - \Lambda^{k\ell}\,\partial_k \Gamma_{i_1 i_2 i_3}\,\partial_\ell u$$

où S est la sommation après permutation circulaire sur $i_1\ i_2\ i_3$. Considérons la 2-cochaîne de Chevalley S^3_Γ donnée dans une carte arbitraire par :

$$S^3_\Gamma(u,v)\Big|_U = \Lambda^{i_1 j_1}\Lambda^{i_2 j_2}\Lambda^{i_3 j_3}(\mathcal{L}(X_u)\Gamma)_{i_1 i_2 i_3}(\mathcal{L}(X_v)\Gamma)_{j_1 j_2 j_3} \tag{5-5}$$

Il résulte des propriétés de la dérivation de Lie que S^3_Γ est un 2-cocycle de Chevalley $(\partial S^3_\Gamma = 0)$ de (N, P) admettant même symbole principal que P^3_Γ . Un raisonnement identique à celui du cas plat montre que le 2-cocycle S^3_Γ n'est jamais exact. On vérifie que pour toute connexion symplectique Γ , P, $P^2_\Gamma/2$, $S^3_\Gamma/6$ détermine un $*_\nu$ -produit à l'ordre 3.

Si l'on modifie la connexion Γ , S^3_Γ est modifié par un cobord. Par suite la 2-classe de cohomologie $\beta \in H^2(N ; N)$ de Chevalley défini par S^3_Γ est indépendante du choix de Γ et est <u>un invariant</u> de la structure symplectique de la variété. On établit

<u>Proposition</u> - <u>Le second espace $H^2(N ; N)$ de cohomologie de Chevalley admet comme générateurs la classe</u> β <u>et les classes définies par les images par μ^{-1} des 2-formes fermées de W.</u>

On voit que $H^2(N ; N)$, de dimension $1+b_2(W)$, est déterminé par β et par la cohomologie de G. de Rham (ici en dimension 2). Il en est de même pour $H^3(N ; N)$;

en particulier tout cocycle de Chevalley 1-différentiel est l'image par κ^{-1} d'une forme fermée de W ; il est exact si la forme est exacte.

6 - Les star-produits de Vey.

a) Introduisons les notations suivantes : nous désignons par Q^r un opérateur bidifférentiel d'ordre maximum r en chaque argument, nul sur les constantes, satisfaisant l'hypothèse de parité et dont le symbole principal coïncide avec celui de P^r_Γ. En particulier nous prenons $Q^0(u, v) = uv$, $Q^1 = P$. J'introduit la définition suivante

Définition - Un $*_\nu$-produit de Vey est un $*_\nu$-produit de la forme :

$$u *_\nu v = \sum_{r=0}^{\infty} (\nu^r/r!)\, Q^r(u, v) \tag{6-1}$$

une algèbre de Lie de Vey est une algèbre de Lie formelle donnée par un crochet de la forme :

$$[u, v]_\lambda = \sum_{r=0}^{\infty} (\lambda^r/(2r+1)!)\, Q^{2r+1}(u, v) \tag{6-2}$$

Mon point de vue diffère très sensiblement de celui initial de Vey qui considérait essentiellement les algèbres de Lie. Considérons un $*_\nu$-prcduit de Vey à l'ordre 2 ; on montre qu'il existe une connexion symplectique unique Γ telle que :

$$Q^2 = P^2_\Gamma + \tilde{\partial} H \tag{6-3}$$

où H est un opérateur différentiel d'ordre maximum 2. Supposons que Q^3 soit un 2-cocycle de Chevalley ($\partial Q^3 = 0$) ; il existe de même une connexion symplectique unique Γ telle que :

$$Q^3 = S^3_\Gamma + T + 3\,\partial H \tag{6-4}$$

où H est un opérateur différentiel d'ordre maximum 2 et T un 2-tenseur image d'une 2-forme fermée par Λ^{-1}. Pour que P, $Q^2/2$, $Q^3/6$ donne un $*_\nu$-produit à l'ordre 3, il faut et il suffit que <u>les connexions symplectiques et les opérateurs H qui apparaissent dans (6-3), (6-4) coïncident</u>.

b) Par une longue étude des types bidifférentiels, j'ai établi la proposition suivante :

<u>Proposition</u> - <u>Supposons que (W, F) admette un $*_\nu$-produit de la forme</u>

$$u *_\nu v = u.v + \nu P(u,v) + (\nu^2/2)\, Q^2(u,v) + \sum_{r=3}^{\infty} \nu^r C_r(u,v) \tag{6-5}$$

<u>Ce $*_\nu$-produit est un $*_\nu$-produit de Vey</u>.

On en déduit

<u>Corollaire</u> - <u>Tout $*_\nu$-produit de (W, F) est équivalent à un $*_\nu$-produit de Vey.</u>

En effet soit Γ une connexion symplectique arbitraire. On a $\tilde{\partial}(C_2 - P^2_\Gamma/2)=0$ et $(C_2 - P^2_\Gamma/2)$ est un 2-cocycle de Hochschild pair donc exact. Il existe un opérateur différentiel A tel que :

$$C_2 = \frac{1}{2} P^2_\Gamma + \tilde{\partial} A$$

Par la transformation $T_\nu = Id - \nu^2 A$ on obtient un nouveau star produit tel que $C'_2 = P^2_\Gamma/2$, qui est donc un $*_\nu$-produit de Vey d'après la proposition précédente. On voit l'intérêt de la notion de star produit de Vey.

c) Il existe des théorèmes d'existence pour de tels $*_\nu$-produits. Mais il est aussi utile de connaître pour eux des procédés de construction. Je me limiterai à l'exemple le plus simple. Considérons la variété symplectique plate définie par le fibré cotangent de $\mathbb{R}^n - \{0\}$, soit $E = (\mathbb{R}^n - \{0\}) \times \mathbb{R}^n$. Le groupe résoluble K de dimension 2 opère sur E de la manière suivante :

$$(x,y) \in E = (\mathbb{R}^n - \{0\}) \times \mathbb{R}^n \to (x' = e^\rho x,\ y' = e^{-\rho}(y + \sigma x)) \quad (\rho, \sigma \in \mathbb{R})$$

K préserve la structure symplectique de E et la connexion symplectique plate correspondante ; il préserve les P^r et par suite le produit de Moyal sur E. L'espace des orbites de K dans E est isomorphe à $T^* S^{n-1}$ où $S^{n-1}=SO(n)/SO(n-1)$ est la sphère de dimension $(n-1)$. On en déduit par quotient un $*_V$ -produit de Wey naturel sur $T^* S^{n-1}$, invariant par $SO(n)$. On sait que le problème de Kepler régularisé de dimension n admet comme espace de phase la variété de Moser $T_0^* S^n$, fibré cotangent de la sphère privé de sa section nulle. On a obtenu pour la variété de Moser un $*_V$ -produit de Vey naturel invariant.

De cette méthode de quotient, on peut déduire la construction de $*_V$ -produits par exemple sur les fibrés cotangents des groupes classiques où des variétés de Stiefel ou de Grassmann.

7 - Introduction à une théorie spectrale et quantification.

a) Revenons à la variété symplectique plate $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. On sait que, sous des hypothèses convenables, Hermann Weyl a défini dans ce cas, en termes de transformations de Fourier, une application Ω (l'application de Weyl) qui, à chaque élément u d'une large classe de fonctions classiques ou distributions, fait correspondre un opérateur $\hat{u}$ d'un espace de Hilbert et inversement. La quantification usuelle procède en termes de tels opérateurs. Mais on peut montrer qu'au produit de Moyal (avec $\nu = \hbar/2i$) correspond par Ω le produit des opérateurs correspondants. Si

$$u * v = \exp((\hbar/2i)P)(u,v) \qquad \text{on a} \qquad \Omega(u * v) = \Omega(u).\,\Omega(v)$$

Le crochet de Moyal est (à un facteur constant près) l'image par Ω^{-1} du commutateur des opérateurs. On note que si l'intersection des supports de u et v est compacte, on a :

$$\int_W (u * v)\,\eta = \int_W uv.\,\eta \tag{7-1}$$

où $\eta = F^n/n!$ est l'élément de volume symplectique. De Wigner à S. de Groot, et tout récemment Grossmann, cette correspondance entre fonctions et opérateurs a été systématiquement utilisée, mais le rôle du produit de Moyal s'est trouvé masqué par la relation (7-1) qui ne vaut que dans le cas plat.

A la lumière de l'introduction systématique de star produits, il apparait comme possible de développer directement une mécanique quantique en termes de fonctions ordinaires ou distributions et de star produits, sans référence à une application de Weyl et à des opérateurs, d'une manière autonome et complète.

Posons $N^c = C^\infty(W;\mathbb{C})$ et supposons que ν soit imaginaire pur. Si $u, v \in N^c$, l'hypothèse de parité sur un star produit se traduit pas :

$$\overline{u *_\nu v} = \bar{v} *_\nu \bar{u} \tag{7-2}$$

b) considérons une variété symplectique <u>munie d'un $*_\nu$ -produit déterminé</u>. Soit $H \in N$ l'hamiltonien d'un problème. Par référence à la valeur $\nu = \hbar/2i$ du paramètre de déformation suggérée par le produit de Moyal, nous sommes conduits à traduire l'équation de la dynamique quantique par :

$$\frac{du_t}{dt} = \frac{i}{\hbar}\, 2\nu \, [H, u_t]_{\nu^2} \qquad (u_t \in E(N^c;\nu) \times \mathbb{R}) \tag{7-3}$$

Si l'on pose $\tilde{H} = iH/\hbar$, on a :

$$du_t/dt = \tilde{H} *_\nu u_t - u_t *_\nu \tilde{H} \tag{7-4}$$

Introduisons les $*_\nu$-puissances de $\tilde{H}(\tilde{H}^{(*)p} = \tilde{H}^{(*)p-1} *_\nu \tilde{H})$. Il résulte de l'hypothèse de parité que $\tilde{H}^{(*)p}$ ne dépend que des puissances paires de ν.
On peut définir la $*_\nu$-exponentielle de $\tilde{H}t$ de la manière suivante :

$$\mathrm{Exp}_*(\tilde{H}t) = \sum_{p=0}^{\infty} (t^p/p!)\, \tilde{H}^{(*)p} \tag{7-5}$$

Si $u_0 \in E(N^c;\nu)$ définissons u_t formellement par :

$$u_t = \mathrm{Exp}_*(\tilde{H}t) *_\nu u_0 *_\nu \mathrm{Exp}_*(-\tilde{H}t) \tag{7-6}$$

(7-6) donne la solution formelle de (7-4) prenant la valeur u_0 pour $t = 0$

c) considérons maintenant <u>le point de vue de l'analyse mathématique</u> et donnons à ν la valeur $\hbar/2i$. Supposons H tel que, pour t dans un voisinage complexe de l'origine, le second membre de (7-5) converge vers une distribution sur W notée encore $\mathrm{Exp}_*(\tilde{H}t)$. Supposons en outre, cas le plus simple, que, pour t fixé dans un voisinage de l'origine, $\mathrm{Exp}_*(\tilde{H}t)$ admet un développement de Fourier-Dinchlet unique

$$\mathrm{Exp}_*(\hat{H}t) = \sum_{\lambda \in I} \pi_\lambda \, e^{\frac{i\lambda t}{\hbar}} \tag{7-7}$$

où I est un ensemble de $\mathbb{C}$ et $\pi_\lambda \in N^c$. Ce développement est analogue au développement spectral d'un opérateur. On déduit de (7-7) que l'on a :

$$\sum_{\lambda \in I} \pi_\lambda = 1 \qquad\qquad H * \pi_\lambda = \pi_\lambda * H = \lambda \pi_\lambda \tag{7-8}$$

et (7-8) implique :

$$H = \sum \lambda \pi_\lambda \qquad\qquad \pi_\lambda * \pi_{\lambda'} = \delta_{\lambda\lambda'} \pi_\lambda$$

où $\delta_{\lambda\lambda'} = 0$ pour $\lambda' \neq \lambda$, $\delta_{\lambda\lambda'} = 1$ pour $\lambda' = \lambda$. On voit que <u>I peut être interprété comme le spectre de H et que π_λ est le projecteur propre correspondant à $\lambda \in I$</u>. Montrons que le spectre I et les π_λ sont caractérisés de manière unique par les relations (7-8). En effet considérons un autre ensemble $(\lambda', \pi'_{\lambda'})$, où $\lambda' \in I'$, tel que :

$$\sum_{\lambda' \in I'} \pi'_{\lambda'} = 1 \qquad\qquad H * \pi'_{\lambda'} = \pi'_{\lambda'} * H = \lambda' \pi'_{\lambda'}$$

On a :

$$\pi'_{\lambda'} * H * \pi_\lambda = \lambda' \pi'_{\lambda'} * \pi_\lambda = \lambda \pi'_{\lambda'} * \pi_\lambda$$

Ainsi pour $\lambda' \neq \lambda$, on a $\pi'_{\lambda'} * \pi_\lambda = 0$. Si $\lambda \notin I'$, on a $(\sum_{\lambda' \in P} \pi'_{\lambda'}) * \pi_\lambda = \pi_\lambda = 0$. On voit que $I \subset I'$ et $I' \subset I$, donc que $I' = I$. De plus les relations:

$$\Big(\sum_{\lambda' \in I} \pi'_{\lambda'}\Big) * \pi_\lambda = \pi_\lambda \qquad\qquad \pi'_\lambda * \Big(\sum_{\lambda' \in I} \pi_{\lambda'}\Big) = \pi'_\lambda$$

impliquent $\pi'_\lambda * \pi_\lambda = \pi_\lambda = \pi'_\lambda$ et les projecteurs propres sont égaux.

Un star produit est dit <u>non dégénéré</u> si, pour $u \in N^c$, $\bar{u} * u = 0$ sur un domaine implique $u = 0$ sur ce domaine. Il résulte de (7-1) que le produit de

Moyal et par suite tous les star produits qui s'en déduisent par quotient sont non dégénérés. S'il en est ainsi, on déduit du raisonnement précédent et du fait que $\Pi_\lambda * \Pi_\lambda = 0$ implique $\Pi_\lambda = 0$ que <u>le spectre de toute fonction à valeurs réelles admettant un développement spectral au sens de (7-7) est réel et que les Π_λ correspondants sont à valeurs réelles.</u>

a) Définissons N_λ par l'intégrale

$$N_\lambda = \int_W \Pi_\lambda \tilde{\eta}$$

où $\tilde{\eta} = \eta/(2\pi\hbar)^n$. Si N_λ est fini, un état normalisé ρ_λ du système est défini par $\rho_\lambda = \Pi_\lambda/N_\lambda$ et N_λ est la multiplicité de l'état au sens usuel de la mécanique quantique.

Plus généralement, on peut introduire la transformée de Fourier au sens des distributions

$$\mathrm{Exp}_*(\tilde{H}t) = \int e^{\frac{i\lambda t}{\hbar}} d\mu(\lambda)$$

et le support de $d\mu$ définit le spectre de H. C'est, au facteur $\hbar/i$ près, le spectre de Schwartz de $\mathrm{Exp}_*(\hat{H}t)$, considéré comme une distribution en t.

Un état ρ est ici une distribution (pseudo probabilité) à valeurs réelles sur l'espace de phase, normalisée par la condition $\int_W \rho\,\tilde{\eta} = 1$, telle que :

$$\rho * \rho = (1/N)\rho$$

où N est la multiplicité. La valeur mesurée $\langle u \rangle_t$ de l'observable u au temps t pour l'état ρ est donnée par :

$$\langle u \rangle_t = \int_W (u_t * \rho)\hat{\eta} \tag{7-9}$$

Cette formule se réduit à la formule de Wigner pour le produit de Moyal.

e) L'algorithme précédent appliqué directement au cas plat donne pour l'oscillateur harmonique de dimension n les niveaux d'énergie $E_m = \hbar(m+\frac{n}{2})$ et leurs multiplicités correctes. En ce qui concerne l'atome d'hydrogène, on considère naturellement la variété $T_0^* S^3$ de Moser comme espace de phase. Si l'on introduit le star produit correspondant, invariant par $SO(4)$, on obtient le spectre complet c'est-à-dire le spectre discret négatif et le spectre continu positif.

8 - Lemmes préliminaires et introduction d'une connexion symplectique

a) considérons une application bilinéaire $N \times N \to E(N\,;\nu)$ donnée par :

$$uv + \nu P(u,v) + \sum_{r=2}^{\infty} \nu^r C_r(u,v) \qquad (C_1 = P)$$

où les $C_r (r \geqslant 1)$ sont des 2-cochaînes différentielles, nulles sur les constantes, satisfaisant l'hypothèse de parité. A une telle application, nous avons associé les 3-cochaînes :

$$\tilde{E}_t(u,v,w) = \sum_{r+s=t} \left(C_r(C_s(u,v),w) - C_r(u, C_s(v,w))\right) \qquad (r,s \geqslant 1)$$

Un calcul direct montre que l'on a

Lemme - Si t est impair (resp. pair), $\tilde{E}_t$ est une 3-cochaîne de Hochschild paire (resp.impaire).

E étant une 3-cochaîne de Hochschild, désignons par $\hat{\Sigma} E$ la 3-cochaîne dfinie par

$$(\hat{\Sigma} E)(u,v,w) = E(u,v,w) - E(v,u,w) - E(u,w,v)$$

On vérifie immédiatement que si C est une 2-cochaîne de Hochschild paire, on a:

$$\hat{\Sigma}\tilde{\partial} C = 0 \tag{8-1}$$

b) considérons sur (W, F) <u>une connexion symplectique Γ déterminée</u>. Une p-cochaîne de Hochschild différentielle C, nulle sur les constantes peut s'écrire d'une manière unique $C = \sum C_{(r_1,\dots,r_p)}$ $(r_1,\dots,r_p \geqslant 1)$ où l'on a localement :

$$C_{(r_1,\dots,r_p)}(u_1,\dots,u_p)\Big|_U = C_{(r_1,\dots,r_p)}^{i_1^1\dots i_{r_1}^1,\dots,i_1^p\dots i_{r_p}^p}\, \nabla_{i_1^1\dots i_{r_1}^1} u_1 \dots \nabla_{i_1^p\dots i_{r_p}^p} u_p$$

Les coefficients du second membre sont supposés symétriques en $(i_1^k \dots i_{r_k}^k)$ $(k = 1,\dots,p)$ et définissent sur W des tenseurs contravariants. On dit que $C_{(r_1,\dots,r_p)}$ est, pour Γ, la partie de C de type multidifférentiel $(r_1,\dots,r_p)$

Un $*_\nu$-produit tel que toutes ses 2-cochaînes C_{2r} $(r \geqslant 1)$ aient une partie de type (1, 1) nulle pour Γ est dit <u>à partie de type (1, 1) triviale pour Γ</u>.

9 - <u>Le cas où $b_2(W) = 0$</u>

Pour une variété symplectique (W, F) telle que $b_2(W) = 0$, la 2-forme F est exacte et $H^2(N ; N)$ admet β comme seul générateur. Beaucoup de résultats généraux se déduisent de l'étude de ce cas particulier.

a) Nous allons établir

<u>Proposition</u> - <u>Si (W, F) est telle que $b_2(W) = 0$ tous les $*_\nu$-produits existants sont équivalents.</u>

Considérons en effet sur W deux stars produits

$$u *_\nu v = uv + \nu P(u,v) + \sum_{r=2}^{\infty} \nu^r C_r(u,v)$$

et

$$u *'_\nu v = uv + \nu P(u,v) + \sum_{r=2}^{\infty} \nu^r C'_r(u,v)$$

Procédons par récurrence et supposons que, par transformation, on ait fait en sorte que $C'_r = C_r$ pour $r \leqslant (2q-1)$ (avec $q \geqslant 1$). Le 2-cocycle de Hochschild pair $(C'_{2q} - C_{2q})$ est exact et l'on a

$$C'_{2q} = C_{2q} + \tilde{\partial} A_1$$

où A_q est un opérateur différentiel. Par la transformation $T_\nu = \mathrm{Id} + \nu^{2q} A_q$, on peut étendre l'hypothèse de récurrence à $r = 2q$. S'il en est ainsi $(C'_{2q+1} - C_{2q+1})$ est un 2-cocycle à la fois de Hochschild et de Chevalley et l'on a :

$$C'_{2q+1} - C_{2q+1} = T$$

où l'opérateur T est donné par un 2-tenseur antisymétrique, image par μ^{-1} d'une 2-forme fermée, donc exacte de W ; T est aussi exact et il existe un vecteur Z tel que $T = \partial \mathcal{L}(Z)$. L'équivalence donnée par $T_\nu = \mathrm{Id} + \nu^{2q} \mathcal{L}(Z)$ préserve les C_r pour $r \leqslant 2q$ et transforme C_{2q+1} en $C_{2q+1} + T = C'_{2q+1}$. Ainsi les star produits sont équivalents.

10 - Théorème d'existence

Soit (W, F) une variété symplectique et Γ une connexion symplectique déterminée sur (W, F).

a) Reprenons la situation du § 8, a. Supposons $t = 2q+2 \; (q \geqslant 0)$ pair. Dans l'expression de $\tilde{E}_t = \tilde{E}_{2q+2}$, les deux entiers r, s sont tous deux pairs ou tous deux impairs. Dans $\hat{\Sigma}\, \tilde{E}_{2q+2}$, la contribution des termes correspondant à r, s pairs disparait et l'on obtient avec $r = 2r'+1$, $s = 2s'+1$:

$$\hat{\Sigma}\, \tilde{E}_{2q+2}(u, v, w) = 2\, S \sum_{r'+s'=q} C_{2r'+1}(C_{2s'+1}(u, v), w) \qquad (r', s' \geqslant 0)$$

où S est la sommation après permutation circulaire sur u, v, w. Posons

$$D_q = S \sum_{r+s=q} C_{2r+1}(C_{2s+1}(u, v), w) \qquad (r, s \geqslant 0)$$

Les D_q sont les homologues des $\tilde{D}_q$ en ce qui concerne les déformations de l'algèbre de Lie de Poisson. Pour que les C_{2r+1} définissent une déformation de cette algèbre d'ordre q il faut et il suffit que $D_t = 0$ pour $t = 1, \ldots, q$. Nous avons donc :

(10-1) $$\hat{\sum} \tilde{E}_{2q+2} = 2 D_q$$

ou, d'après (8-1) :

(10-2) $$\hat{\sum} \tilde{D}_{2q+2} = 2 D_q$$

Les identités :

$$\hat{\sum} \tilde{D}_{2t+2} = 2 D_t \qquad (t = 1, \ldots, q)$$

conduisent à la conclusion suivante

<u>Lemme</u> - <u>Par antisymétrisation d'un $*_\nu$-produit à l'ordre 2q+2, on obtient une déformation de l'algèbre de Lie de Poisson d'ordre q. En particulier D_{q+1} est un 3-cocycle de Chevalley</u>.

b) Considérons un $*_\nu$-produit d'ordre 2. On peut l'écrire

(10-3) $$uv + \nu \underline{P}(u,v) + \nu^2 C_2(u,v)$$

où l'on peut supposer, par équivalence, $C_2 = (1/2)\, P^2_\Gamma$. Nous allons procéder par récurrence. Choisissons un entier impair $t = 2q+1$ ($q \geqslant 1$) et supposons qu'il existe un $*_\nu$-produit d'ordre $t-1 = 2q$ pair prolongeant (10-3). Le 3-cocycle de Hochschild $\tilde{E}_{2q+1}$ est pair, donc exact et il existe une 2-cochaîne différentielle C_{2q+1} <u>impaire</u>, nulle sur les constantes, telle que

(10-4) $$\tilde{E}_{2q+1} = \tilde{\partial} C_{2q+1}$$

Choisissons cette 2-cochaîne impaire, <u>qui est définie à un opérateur bidifférentiel impair T près d'ordre 1</u>. Nous obtenons ainsi un $*_\nu$-produit d'ordre $t = 2q+1$ impair. Nous nous proposons d'étudier le 3-cocycle de Hochschild impair $\tilde{E}_{2q+2}$ qui peut s'écrire (§4, a)

(10-5) $$\tilde{E}_{2q+2} = T^{(3)}_{2q+2} + \tilde{\partial} C^{(p)}$$

où $T^{(3)}_{2q+2}$ est un opérateur tridifférentiel donné par un 3-tenseur antisymétrique et où $C^{(p)}$ est une 2-cochaîne paire. On a d'après (8-1) :

$$3\, T^{(3)}_{2q+2} = \hat{\Sigma}\, \tilde{E}_{2q+2}$$

soit d'après (10-1) :

(10-6) $$T^{(3)}_{2q+2} = (2/3)\, D_q$$

Il résulte du lemme appliquée à l'ordre 2q, que D_q est un 3-cocycle de Chevalley de (N, P). <u>Ainsi $T^{(3)}_{2q+2}$ est un 3-cocycle de Chevalley</u> ; un tel cocycle est l'image par μ^{-1} d'une 3-forme fermée de W et il est exact si et seulement si la 3-forme est exacte.

c) Cherchons à modifier C_{2q+1} de façon que $T^{(3)}_{2q+2}$ soit nul. Si on change C_{2q+1} en $C_{2q+1} + T$, où T correspond à un 2-tenseur antisymétrique arbitraire, on a d'après (10-6) :

$$D_q \to D_q - \partial T \qquad \text{et} \qquad T^{(3)}_{2q+2} \to T^{(3)}_{2q+2} - (2/3)\, \partial T$$

On peut ainsi annuler $T^{(3)}_{2q+2}$ lorsque le 3-cocycle de Chevalley mis en évidence est exact.

Il en est certainement ainsi <u>si l'on suppose $b_3(W) = 0$</u>. Sous cette hypothèse, pour un choix convenable de C_{2q+1}, le 3-cocycle $\tilde{E}_{2q+2}$ de Hochschild est exact et il existe une 2-cochaîne paire $C_{2q+2} = C^{(p)}$ telle qu'on obtienne un $*_\nu$-produit d'ordre 2q+2. Nous avons ainsi établi par récurrence l'existence sur (W,F) d'un $*_\nu$-produit.

Du choix de C_2, il résulte que ce $*_\nu$-produit est un $*_\nu$-produit de Vey. De l'exactitude des 2-cocycles pairs de Hochschild, il résulte qu'on peut par équivalence annuler la partie de type (1,1) pour Γ de chaque cochaîne C_{2r} de rang pair. On a :

Théorème d'existence - Sur toute variété symplectique (W, F) telle que $b_3(W) = 0$, il existe des $*_\nu$-produits. D'une manière plus précise, étant donnée une connexion symplectique Γ, il existe des star produits de Vey à partie de type (1,1) triviale pour Γ.

Ce résultat est dû à Neroslavsky et Vlassov.

11 - Star produits invariants

a) Soit (W, F) une variété symplectique sur laquelle opère effectivement par symplectomorphismes un groupe de Lie G. Nous avons vu que si (W, F) admet une connexion linéaire G-invariante, elle admet une connexion symplectique G-invariante Γ. S'il en est ainsi, on a le lemme suivant :

Lemme - Soit C (resp. E) un 2-cocycle(resp. 3-cocycle) de Hochschild exact et G-invariant ; il est alors le cobord d'une 1-cochaîne (resp. 2 cochaîne) G-invariante, à partie de type 1 (resp. (1,1) nulle relativement à Γ.

En effet, si C est un 2-cocycle G-invariant exact, on a $C = \tilde{\partial} A$, où A est un opérateur différentiel à partie de type 1 nulle pour Γ. La connexion étant G-invariante, pour tout $g \in G$ les opérateurs différentiels gA sont aussi à partie de type 1 nulle pour Γ ; $\tilde{\partial}$ commutant avec l'action de $g \in G$, on a $gC - C = \tilde{\partial}(gA - A) = 0$ et $(gA - A)$ est un opérateur différentiel d'ordre 1 qui ne peut être que nul d'après la nullité des parties de type 1 de A et gA. Ainsi A est nécessairement G-invariant.

De manière analogue, si E est un 3-cocycle G-invariant exact, on a $E = \tilde{\partial} C$, où C est une 2-cochaîne différentielle à partie de type (1,1) nulle pour Γ. Si on introduit les cobords des opérateurs différentiels obtenus par complète symétrisation des tenseurs définis par les $C_{(k,\ 1)}(k \geqslant 2)$, le raisonnement est semblable au précédent, mais plus délicat

b)Un star produit de Vey détermine d'une manière unique une connexion symplectique Γ telle que $Q^2 = P^2_\Gamma + \tilde{\partial} H$, où H est un opérateur d'ordre 2. Il en résulte

Proposition - Pour une variété symplectique sur laquelle opère par symplectomorphismes un groupe de Lie G, l'existence d'un star produit de Vey G-invariant implique l'existence d'une connexion symplectique G-invariante.

D'un point de vue inverse, nous pouvons établir le théorème suivant :

Théorème - Soit (W, F) une variété symplectique sur laquelle opère par symplectomorphismes un groupe de Lie compact, connexe G. S'il existe sur (W, F) un $*_\nu$-produit, il existe un $*_\nu$-produit de Vey G-invariant à partie de type $(1,1)$ triviale pour une connexion symplectique G-invariante Γ.

En effet le groupe G étant compact, il existe sur (W, F) une connexion linéaire G-invariante et par suite une connexion symplectique G-invariante Γ. Par hypothèse (W, F) admet un $*_\nu$-produit que nous pouvons, par équivalence, supposer de la forme :

$$u *_\nu v = uv + \nu P(u,v) + (\nu^2/2)\, P^2_\Gamma(u,v) + \sum_{r=3}^{\infty} \nu^r C_r(u,v) \tag{11-1}$$

où $C_r = Q^2/r!$ Procédons par récurrence : supposons que, par transformation, on ait fait en sorte que (11-11) soit tel que les C_r soient G-invariantes pour $r \leqslant 2q-1$ $(q \geqslant 1)$; $\tilde{E}_{2q}$ étant un 3-cocycle de Hochschild exact et G-invariant, il résulte du lemme qu'il existe une 2-cochaîne G-invariante C'_{2q} à partie de type $(1,1)$ nulle pour Γ telle que $\tilde{\partial} C'_{2q} = \tilde{E}_{2q}$. On a $\tilde{\partial}(C'_{2q} - C_{2q}) = 0$ et $(C'_{2q} - C_{2q})$ est un 2-cocycle pair donc exact. Il existe un opérateur différentiel A tel que :

$$C'_{2q} - C_{2q} = \tilde{\partial} A$$

En transformant (11-1) au moyen de $T_\nu = \mathrm{Id.} + \nu^{2q} A$, on peut donc supposer que C_{2q} est G-invariant.

S'il en est ainsi, $\tilde{E}_{2q+1} = \tilde{\partial} C_{2q+1}$ est un 3-cocycle exact G-invariant et il existe une 2-cochaîne G-invariante C'_{2q+1} à partie de type $(1, 1)$ nulle, telle que $\tilde{E}_{2q+1} = \tilde{\partial} C'_{2q+1}$. Ainsi $(C'_{2q+1} - C_{2q+1})$ est un 2-cocycle de Hochschild impair :

(11-2) $$C'_{2q+1} - C_{2q+1} = T$$

où T est un opérateur bidifférentiel impair d'ordre 1 défini par un 2-tenseur désigné par la même notation. Il résulte du raisonnement du § 10 qu'en vertu de l'hypothèse de récurrence, ∂T est G-invariant.

Ainsi T est l'image par μ^{-1} d'une 2-forme β de W telle que $d\beta$ soit G-invariante. Désignons par $\bar{\beta}$ la moyenne des transformées de β par les éléments de G au sens de la mesure de Haar attachée au groupe G. La 2-forme $\bar{\beta}$ est G-invariante et vérifie

$$d\bar{\beta} = d\beta$$

Il existe ainsi une 2-forme fermée γ telle que :

$$\beta = \bar{\beta} + \gamma$$

On sait que, le groupe G étant connexe, la transformée $g^{*}\gamma$ de γ par $g \in G$ est cohomologue à γ. Par suite la 2-forme $\bar{\gamma}$, moyenne des transformées de γ par les éléments de G au sens de la mesure de Haar, est cohomologue à γ et l'on a :

$$\gamma = \bar{\gamma} + d\alpha$$

où $\bar{\gamma}$ est G-invariante et où α est une 1-forme. Il vient

$$\beta = \bar{\beta} + \bar{\gamma} + d\alpha$$

et le 2-tenseur T peut s'écrire :

(11-3) $$T = \bar{T} + \partial \mathcal{L}(Z)$$

où $\bar{T}$ est un 2-tenseur G-invariant et où Z est le vecteur $\mu^{-1}(\alpha)$. On a ainsi :

$$(C'_{2q+1} - \bar{T}) - C_{2q+1} = \partial \mathcal{L}(Z)$$

et l'on peut par transformation passer de C_{2q+1} à la 2-cochaîne G-invariante $(C'_{2q+1} - \bar{T})$. On a ainsi établi par récurrence que (W, F) admet un star produit de Vey G-invariant. Celui-ci est à partie de type (1, 1) triviale pour Γ.

Du théorème précédent, il résulte :

<u>Corollaire</u> - <u>Soit (W = G/H, F) un espace homogène symplectique à G compact, connexe. Si (W, F) admet un star produit, il existe sur cette variété des star produits de Vey G-invariants à parties de type (1, 1) triviales relativement à une connexion symplectique G-invariante.</u>

12 - <u>Fibré cotangent d'un espace homogène</u>

a) Soit M une variété différentiable de dimension n. Le fibré cotangent $\pi : T^*M \to M$ admet la 1-forme canonique ω et, par suite la 2-forme symplectique exacte $F = d\omega$. Soit $\{x^\alpha\}$ $(\alpha, \beta, \ldots = 1,\ldots,n)$ une carte de M de domaine U ; nous notons $\{x^i\} = \{x^\alpha, x^{\bar\alpha} = p_\alpha\}$ (i, j, .. = 1, ..., 2n ; $\bar\alpha = \alpha + n$) la carte de T^*M de domaine $\pi^{-1}(U)$ définie par $\{x^\alpha\}$. On a $\omega|_{\pi^{-1}(U)} = p_\alpha dx^\alpha$.

Soit X un champ de vecteurs de M. Nous notons $\hat{X}$ le champ hamiltonien de (T^*M, F) défini par le scalaire $f = \omega(X) \in C^\infty(T^*M ; R)$; $\hat{X}$ admet pour composantes dans la carte $\{x^\alpha, x^{\bar\alpha} = p_\alpha\}$:

$$\hat{X}^\alpha = X^\alpha \qquad\qquad \hat{X}^{\bar\alpha} = -p_\rho \partial_\alpha X^\rho$$

et sa projection sur M est X .

Soit Γ une connexion linéaire sans torsion sur M. Cherchons sur T^*M une connexion linéaire sans torsion satisfaisant les deux conditions intrinsèques suivantes :

C_1) <u>Pour tout champ de vecteurs X de M, on a en $\hat{x} \in T^*M$ (avec $\pi(\hat{x}) = x \in M$)</u>

$$(12\text{-}1) \qquad (\hat\nabla_{\bar\beta} \hat{X}^\alpha)(\hat{x}) = 0 \qquad\qquad (\hat\nabla_{\bar\beta} \hat{X}^{\bar\alpha})(\hat{x}) = -(\nabla_\alpha X^\beta)(x)$$

C_2) <u>Pour tout champ de vecteurs X de M, on a pour tout champ Y tel que</u>

<u>$(\nabla Y)(x) = 0$</u>

$$(\hat{\nabla}_{\hat{Y}} \hat{X})(\hat{\alpha}) = (\nabla_Y X)^{\wedge}(\hat{\alpha}) \tag{12-2}$$

La condition (C_1) se traduit par les relations :

$$\hat{\Gamma}^{\alpha}_{\bar{\beta} i} = 0 \qquad \hat{\Gamma}^{\bar{\alpha}}_{\bar{\beta}\bar{\gamma}} = 0 \qquad \hat{\Gamma}^{\bar{\alpha}}_{\bar{\beta}\gamma} = -\Gamma_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma} \tag{12-3}$$

et la condition (C_2) par :

$$\hat{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\gamma} = \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} \qquad \hat{\Gamma}^{\bar{\alpha}}_{\beta\gamma} = -p_\rho \left(\partial_\alpha \Gamma^{\rho}_{\beta\gamma} - \Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta} \Gamma^{\rho}_{\sigma\gamma} - \Gamma^{\sigma}_{\alpha\gamma} \Gamma^{\rho}_{\sigma\beta} \right) \tag{12-4}$$

Les relations (12-3), (12-4) définissent d'une manière unique une connexion $\hat{\Gamma}$ sans torsion sur $T^{*}M$. On peut déduire de $\hat{\Gamma}$ une connexion symplectique $\tilde{\Gamma}$ sur $T^{*}M$ selon le procédé du § 5, a ; $\tilde{\Gamma}$ et $\hat{\Gamma}$ ont mêmes coefficients dans la carte $\{x^{\alpha}, x^{\bar{\alpha}}\}$ à l'exception de :

$$\tilde{\Gamma}^{\bar{\alpha}}_{\beta\gamma} = -\frac{1}{3} p_\rho \, S \left(\partial_\alpha \Gamma^{\rho}_{\beta\gamma} - 2 \Gamma^{\sigma}_{\beta\gamma} \Gamma^{\rho}_{\sigma\alpha} \right)$$

où S est la sommation après permutation circulaire sur α, β, γ.

b) Soit $M = G/H$ un espace homogène à G connexe compact ; M admet une métrique riemannienne et par suite une connexion riemannienne G-invariante Γ. Le groupe G opère naturellement par symplectomorphismes sur la variété symplectique $(T^{*}M, F)$. Il résulte du a que $(T^{*}M, F)$ admet une connexion symplectique G-invariante $\tilde{\Gamma}$ déduite de Γ. On déduit du théorème du § 11.

Proposition - Soit G/H un espace homogène à G compact connexe. Si $T^{*}(G/H)$ admet un star produit, cette variété admet un star produit G-invariant.

c) Soit G un groupe de Lie connexe compact. Le groupe G admet une connexion linéaire sans torsion G-biinvariante, c'est-à-dire invariante par l'action à gauche et à droite de G sur lui-même. La structure symplectique naturelle de $T^{*}G$ est aussi biinvariante par l'action à gauche et à droite de G sur $T^{*}G$. Par suite il existe sur $T^{*}G$ une connexion symplectique G-biinvariante.

On notera que T^*G admet lui-même une structure de groupe, mais que sa structure symplectique n'est pas invariante par les actions de T^*G sur lui-même. On a :

Proposition - Soit G un groupe de Lie compact connexe ; T^*G admet une structure symplectique et une connexion symplectique Γ G-biinvariante. Si T^*G admet un star produit, il admet un star produit de Vey G-biinvariant à partir de type (1,1) triviale pour Γ .

REFERENCES

1 A. Avez et A. Lichnerowicz C.R. Acad. Sc. t 275, A, (1972) p 113

2 F. Bayen, M. Flato, C. Fronsdal, A. Lichnerowicz et D. Sternheimer
Ann. of Phys. t 111 (1978), p 61-110 et 111-151

3 M. Flato, A. Lichnerowicz, D. Sternheimer C.R. Acad Sc t 279, A, (1974),
p 877 ; Compos Matem t 31 (1975) p 47-82 ; C.R. Acad Sc t 283, A (1976) p 19

4 M. Gerstenhaber Ann of Math t 79 (1964) p 59-90

5 S. Gutt Lett in Math. Phys. t 3, (1979), p 297-310

6 A. Lichnerowicz Lett in Math Phys. t 3 (1979), p 495-502
Ann di Matem. t 123, (1980), p 287-330 ;

7 O. M. Neroslavsky et A. T. Vlassov Sur les déformations de l'algèbre des fonctions d'une variété symplectique 1979 en russe ; C.R. Acad. Sc. à paraître

8 J. E. Moyal Proc. Cambridge Philos Soc t 45 (1949), p 99-124

9 S. de Groot : La transformation de Weyl et la fonction de Wigner : une forme alternative de la mécanique quantique. Presses de l'Université de Montréal (1974)

10 J. Vey Comm. Math. Helv. t 50 (1975), p 421-454

11 D. Arnal et J.C. Cortet J. Math Phys t 20, (1979), p 556-563