

# RECHERCHE COOPÉRATIVE SUR PROGRAMME N° 25

JEAN LERAY

## Table des matières

*Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg - RCP25, 1978, tome 25*  
« Analyse lagrangienne et mécanique quantique par Jean Leray », , exp. n° 2, p. 3-7

[http://www.numdam.org/item?id=RCP25\\_1978\\_\\_25\\_\\_3\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RCP25_1978__25__3_0)

© Université Louis Pasteur (Strasbourg), 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Recherche Coopérative sur Programme n° 25 » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

CHAP. I. - TRANSFORMATION DE FOURIER ET GROUPE SYMPLECTIQUE

§ 1. Opérateurs différentiels, groupes métaplectique et symplectique.

0. Introduction. .... 9

1. Le groupe métaplectique  $M_p(\ell)$  . .... 9

2. Le sous-groupe  $Sp_2(\ell)$  de  $M_p(\ell)$  . .... 17

3. Opérateurs différentiels à coefficients polynomiaux..... 29

§ 2. Indices de Maslov ; indices d'inertie ; les variétés lagrangiennes et leurs orientations. .....

0. Introduction. .... 34

1. Choix de structures hermitiennes de  $Z(\ell)$ . .... 34

2. La grassmannienne lagrangienne  $\Lambda(\ell)$  de  $Z(\ell)$  . .... 36

3. Les revêtements de  $Sp(\ell)$  et  $\Lambda(\ell)$  . .... 41

4. Indices d'inertie . .... 47

5. L'indice de Maslov  $m$  sur  $\Lambda_\infty^2(\ell)$ . .... 52

6. Le saut de l'indice de Maslov  $m(\lambda_\infty, \lambda'_\infty)$  en un point  
( $\lambda, \lambda'$ ) où  $\dim \lambda \cap \lambda' = 1$  . .... 58

7. L'indice de Maslov sur  $Sp_\infty(\ell)$  ; l'inertie mixte . .... 63

8. Indices de Maslov sur  $\Lambda_q(\ell)$  et  $Sp_q(\ell)$  . .... 65

9. Variétés lagrangiennes. .... 67

10.  $q$  - orientation . .... 69

§ 3. Espaces symplectiques.

0. Introduction. .... 72

1. Espace symplectique  $Z$  . .... 72

2. Les repères de  $Z$  . .... 74

3. Les  $q$  - repères de  $Z$  . .... 75

4. Géométries  $q$  - symplectiques . .... 79

Conclusion . .... 79

CHAP. II . - FONCTIONS LAGRANGIENNES ; OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS LAGRANGIENS.

<u>Introduction</u> .....	81
§ 1. <u>Analyse formelle.</u>	
0. Sommaire.....	83
1. L'algèbre $C(X)$ des classes d'équivalence asymptotique . ....	83
2. Nombres formels ; fonctions formelles.....	88
3. Intégration des éléments de $F_0(X)$ .....	95
4. Transformation des fonctions formelles par les éléments de $Sp_2(\lambda)$ .....	103
5. Norme et produit scalaire des fonctions formelles à support compact.....	109
6. Opérateurs différentiels formels .....	117
§ 2. <u>Analyse lagrangienne.</u>	
0. Sommaire.....	124
1. Opérateurs lagrangiens.....	125
2. Fonctions lagrangiennes sur $\check{V}$ .....	129
3. Fonctions lagrangiennes sur $V$ .....	135
4. Le groupe $Sp_2(Z)$ .....	145
§ 3. <u>Systèmes lagrangiens homogènes à une inconnue.</u>	
0. Sommaire .....	146
1. Les variétés lagrangiennes sur lesquelles sont définies les solutions lagrangiennes de $a U = 0$ .....	146
2. Rappel de la théorie d'E. Cartan $\left[ \begin{smallmatrix} \text{CS} \\ \downarrow \end{smallmatrix} \right]$ des formes de Pfaff.....	147
3. Variétés lagrangiennes de l'espace symplectique $Z$ et de ses hypersurfaces.....	150
4. Calcul de $a U$ .....	158

5. Résolution de l'équation lagrangienne $a U = 0$ .....	162
6. Solutions à amplitude lagrangienne positive de l'équation lagrangienne $a U = 0 \text{ mod. } 1/v^2$ : quantification de Maslov...	166
7. Solution de certains systèmes lagrangiens à une inconnue.....	168
Conclusion. ....	173

§ 4. Systèmes lagrangiens homogènes à plusieurs inconnues.

1. Calcul de $\sum_m a_n^m U_m$ .....	175
2. Résolution du système lagrangien $a U = 0$ , quand les zéros de $\det. a_0^0$ sont simples .....	180
3. Un système lagrangien particulier $a U = 0$ , pour lequel les zéros de $\det. a_0^0$ sont multiples .....	183

CHAP. III. - ÉQUATIONS DE SCHRÖDINGER ET KLEIN-GORDON, POUR L'ATOME À UN ÉLECTRON, DANS UN CHAMP MAGNÉTIQUE.

<u>Introduction.</u> .....	187
----------------------------	-----

§ 1. Un hamiltonien H, auquel s'applique commodément le chap. II, § 3, n° 7. Les niveaux d'énergie, avec effet Zeeman, de l'atome à un électron.

1. Quatre fonctions dont tous les couples, sauf un, sont en involution sur $E^3 \oplus E^3$ .....	190
2. Choix d'un hamiltonien H. ....	194
3. Les tores quantifiés $T(\ell, m, n)$ caractérisant les solutions, définies mod. $1/v$ sur des variétés compactes, du système lagrangien :	
$a U = \left( a_{L^2} - L_0^2 \right) U = \left( a_M - M_0 \right) U = 0 \text{ mod. } 1/v^2$ .....	198
4. Exemple : les opérateurs de Schrödinger et Klein-Gordon....	203

§ 2. <u>L'équation lagrangienne</u> a $U = 0 \pmod{1/v^2}$ ; (a associé à H ; U à <u>amplitude lagrangienne</u> $\cong 0$ , <u>définie sur V compacte</u> )	
0. Introduction. ....	209
1. Les solutions de l'équation a $U = 0 \pmod{1/v^2}$ , à amplitude lagrangienne $\cong 0$ , définies sur les tores $V [L_0, M_0]$ .....	210
2. Variétés lagrangiennes compactes V, autres que les tores $[L_0, M_0]$ , sur lesquelles existent des solutions de l'équation a $U = 0 \pmod{1/v^2}$ , à amplitude lagrangienne $\cong 0$ .	216
3. Exemple : l'opérateur de Schrödinger - Klein - Gordon.....	231
Conclusion. ....	234
§ 3. <u>Le système lagrangien</u> : a $U = (a_M - \text{const.}) U =$ $(a_{L^2} - \text{const.}) U = 0$ , quand a est l'opérateur de <u>Schrödinger - Klein - Gordon</u>	
0. Introduction.....	235
1. Commutativité des opérateurs a, $a_{L^2}$ et $a_M$ associés aux Hamiltoniens H (§ 1, n° 2), $L^2$ et M (§ 1, n° 1) .....	235
2. Cas d'un opérateur a commutant à $a_{L^2}$ et $a_M$ .....	238
3. Un cas plus spécial.....	250
4. Le cas de Schrödinger - Klein - Gordon.....	256
Conclusion. ....	259
§ 4. <u>L'équation aux dérivées partielles de Schrödinger - Klein - Gordon.</u>	
0. Introduction.....	260
1. Etude du problème (0.1) sans l'hypothèse (0.4) .....	261
2. Le cas de Schrödinger - Klein - Gordon .....	264
Conclusion. ....	266

CHAP. IV . - EQUATION DE DIRAC AVEC EFFET ZEEMAN .

<u>Introduction.</u> .....	267
§ 1. <u>Un problème lagrangien à deux inconnues.</u>	
1. Choix d'opérateurs commutant mod. $1/v^2$ .....	267
2. Résolution d'un problème lagrangien à deux inconnues .....	270
§ 2. <u>L'équation de Dirac.</u>	
1. Réduction de l'équation de Dirac, en analyse lagrangienne .....	279
2. L'équation de Dirac réduite, pour l'atome à un électron, dans un champ magnétique constant.....	285
3. Les niveaux d'énergie.....	289
4. La probabilité de présence de l'électron . .....	292
<u>Conclusion.</u> .....	295