JEAN LERAY

Chapitre III Équations de Schrödinger et de Klein-Gordon, pour l'atome à un électron, dans un champ magnétique

Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg - RCP25, 1978, tome 25
« Analyse lagrangienne et mécanique quantique par Jean Leray », , exp. nº 5, p. 187-266
<http://www.numdam.org/item?id=RCP25_1978__25__187_0>

CHAPITRE III

Équations de Schrödinger et de Klein-Gordon, pour l'atome à un électron, dans un champ magnétique.

INTRODUCTION . - Sommaire . - Les problèmes les plus intéressants de la théorie des équations aux dérivées partielles, linéaires et homogènes, sont les problèmes de valeurs propres ; leur caractère essentiel est de n'avoir de solution qu'exceptionnellement. Ce chapitre III donne des exemples de problèmes lagrangiens ayant ce même caractère ; ces problèmes supposent :

$$\ell = 3 \quad ; \quad Z(3) = X \oplus X^* \quad ; \quad X = X^* = E^3 \text{ (espace euclidien) ;}$$

ils concernent l'opérateur lagrangien a associé à un hamiltonien H , de type approprié : le système d'Hamilton qu'il définit possède deux intégrales premières définies sur $Z(3)$: la longueur L et l'une des composantes M du vecteur $x \wedge p$ de E^3 .

Cet hamiltonien peut être celui de l'électron, non-relativiste ou relativiste, soumis à l'action simultanée du champ électrique d'un noyau atomique fixe et d'un champ magnétique constant (effet Zeeman) ; alors H dépend d'un paramètre : le niveau d'énergie E de l'électron ; a est l'opérateur de Schrödinger ou (cas relativiste) celui de Klein-Gordon ; les niveaux d'énergie pour lesquels nos problèmes lagrangiens ont une solution coïncident avec ceux que définissent les problèmes qu'il est classique d'étudier à propos de ces opérateurs.

L'intérêt du point de vue lagrangien est sa simplicité : par application du théorème 7.1 (Chap. II, § 3), le § 1 obtient ces niveaux d'énergie par une quadrature ; elle se calcule aisément par la méthode des résidus dans les cas Schrödinger et Klein-Gordon.

Le § 1 cherche les solutions, définies mod. $1/\nu$ sur une variété lagrangienne compacte, du système lagrangien :

$$(1) \qquad a\,U = (a_{L^2} - \text{const.})\,U = (a_M - \text{const.})\,U = 0 \qquad \text{mod. } 1/\nu^2 \quad ,$$

où a_{L^2} et a_M sont les opérateurs lagrangiens associés aux intégrales premières L^2 et M : il applique le théorème 7.1. Les équations possédant des solutions (en particulier les niveaux d'énergie) et ces solutions sont caractérisées par 3 entiers, qu'introduit la quantification de Maslov :

$$\ell \;,\; m \;,\; n \qquad \text{tels que } |m| \leq \ell < n \;;$$

ce sont les 3 nombres quantiques de Schrödinger ; les variétés lagrangiennes sur lesquelles ces solutions sont définies sont <u>des tores</u> $T(\ell,m,n)$ de dimension 3 (cf. théorème 7.1, 2°)), d'équations

$$T(\ell,m,n) \;:\; H(x,p) = L^2(x,p) - \text{const.} = M - \text{const.} = 0 \;,$$

ces constantes ayant les mêmes valeurs que dans (1) et dépendant de (ℓ,m,n) .

Le § 2 cherche <u>les solutions</u>, <u>définies</u> mod. $1/\nu$ <u>sur une variété lagrangienne compacte</u> V <u>et à amplitude lagrangienne</u> > 0 , <u>de l'équation lagrangienne</u>

$$\text{(2)} \qquad a\,U = 0 \quad \text{mod. } 1/\nu^2 \;.$$

Il s'agit donc d'un problème formellement analogue au problème aux limites qu'il est classique d'étudier à propos de l'équation de Schrödinger, la condition d'allure à l'infini de ce problème classique étant remplacée par la condition que V est compacte. En général, la condition d'existence est la même : un triplet d'entiers quantiques la définit ; mais la solution correspondant à ce triplet n'est plus nécessairement unique.

Le § 3 cherche <u>les solutions, définies sur une variété lagrangienne compacte</u>, du système lagrangien

$$\text{(3)} \qquad a\,U = (a_{L^2} - \text{const.})\,U = (a_M - \text{const.})\,U = 0 \;,$$

les constantes étant des nombres formels, réels mod. $1/\nu^2$, H <u>étant l'hamiltonien de l'électron</u>, relativiste ou non ; alors a , a_{L^2} , <u>et</u> a_M <u>commutent</u> ; le théorème 7.2 s'applique ; les solutions sont encore caractérisées par le triplet d'entiers quantiques (ℓ, m, n) ; les solutions du problème (1) sont, mod. $1/\nu$, celles du problème (3).

Le § 4 rappelle <u>le problème qu'il est classique de se poser à propos des équations de Schrödinger et Klein-Gordon</u> : trouver une fonction

$$u \;:\; E^3 \to \mathbf{C}$$

de carré sommable ainsi que son gradient, vérifiant l'équation aux dérivées partielles

(4) $$a\, u = 0 \quad ;$$

le § 3 rappelle la résolution de ce problème, pour montrer qu'elle diffère essentiellement de celle des problèmes précédents : nous constatons, sans l'expliquer, que tous ces problèmes définissent les mêmes niveaux d'énergie.

Les difficultés que rencontre le § 2 et la longueur des calculs qu'emploie le § 3 contrastent avec la simplicité du § 1 ; ce § 1 justifie la conclusion suivante :

CONCLUSION . - Appliquée à l'atome à un électron, placé dans un champ magnétique constant, la quantification de Maslov (Chap. II, § 3, n° 6 et 7) donne aux grandeurs observables (c'est-à-dire aux niveaux d'énergie) les mêmes valeurs que la mécanique ondulatoire ; mais cette quantification de Maslov est directement apparentée à la mécanique corpusculaire, donc, à la première théorie quantique ; néanmoins elle n'en a pas les défauts : elle a une justification logique (Chap. I et II) ; elle n'exige pas la détermination des trajectoires de l'électron non-quantifié, mais seulement la connaissance des intégrales premières classiques, L et M , du système d'Hamilton définissant ces trajectoires.

L'interprétation probabiliste de cette quantification est la suivante : dans l'état défini par un choix du triplet d'entiers quantiques (ℓ, m, n) , le point (x,p) représentant à la fois la position x et la quantité de mouvement p de l'électron appartient à un tore $T(\ell, m, n)$ à 3 dimensions de l'espace à 6 dimensions : $Z(3) = E^3 \oplus E^3$; la probabilité que (x,p) appartienne à une partie de $T(\ell, m, n)$ est définie par la mesure invariante η de ce tore $T(\ell, m, n)$ (cf. § 1).

Note . - Soient 2 triplets distincts d'entiers quantiques :

$$(\ell, m, n) \neq (\ell', m', n') \quad ;$$

ils définissent (§ 1) des tores dont l'intersection est vide :

$$T(\ell, m, n) \cap T(\ell', m', n') = \emptyset \quad ;$$

soient U et U' deux fonctions lagrangiennes définies respectivement sur

$$T(\ell, m, n) \quad \text{et} \quad T(\ell', m', n') \quad ;$$

leur produit scalaire est donc (Chap. II, § 2, théorème 3.2, 3°)) :

$$(U/U') = 0 \quad .$$

Historique . - V.P. Maslov n'a pas explicité cet emploi de sa quantification ; il n'a étudié que le cas de nombres quantiques tendant vers l'infini, c'est-à-dire "le principe de correspondance" de la mécanique quantique.

§ 1. Un hamiltonien H , auquel s'applique commodément le théorème 7.1(Ch. II,§ 3). Les niveaux d'énergie, avec effet Zeeman, de l'atome à un électron.

Le théorème 7.1 du chap. II, § 3 suppose données, sur $\Omega \subset Z(\ell)$, ℓ fonctions, 2 à 2 en involution. Ce chapitre III choisit $\ell = 3$ et un triplet classique de telles fonctions.

1 . QUATRE FONCTIONS, DONT TOUS LES COUPLES, SAUF UN, SONT EN INVOLUTION SUR $E^3 \oplus E^3$. - Notons $X = X^* = E^3$ l'espace euclidien de dimension 3 ; appliquons le chapitre II à

$$\ell = 3 \quad , \quad Z(3) = E^3 \oplus E^3 \quad ,$$

un repère R_0 de Z étant donc choisi : le théorème 5 du chap. II, § 3 nous évite d'en employer d'autre.

Par contre, dans E^3 , nous employons non seulement un repère orthonormé fixe (I_1 , I_2 , I_3) , mais aussi un repère orthonormé mobile. Notons :

$$x \in X = E^3 \quad , \quad p \in X^* = E^3 \quad ,$$

(x_1 , x_2 , x_3) et (p_1 , p_2 , p_3) les coordonnées de x et p dans (I_1 , I_2 , I_3) :

$$x = \sum_{j=1}^{3} x_j\, I_j \quad , \quad p = \sum_{j=1}^{3} p_j\, I_j \quad .$$

Définissons par

$$(1.1) \quad \begin{aligned} &R(x) = |x| \quad , \quad P(p) = |p| \quad , \quad Q(x,p) = < p,x > \quad , \quad L(x,p) = |x \wedge p| \quad , \\ &M(x,p) = x_1\, p_2 - x_2\, p_1 \quad \text{(troisième composante de } x \wedge p) \quad , \end{aligned}$$

cinq fonctions de (x,p) , évidemment liées par les relations

$$(1.2) \qquad L^2 + Q^2 = P^2\, R^2 \quad ; \quad |M| \leq L \quad ; \quad 0 \leq P \quad ; \quad 0 \leq R \quad .$$

Le vecteur I_3 a donc un rôle priviligié ; (ce sera, par exemple, la direction du champ magnétique produisant l'effet Zeeman).

Dans $E^3 \oplus E^3$, le système caractéristique de $d < p,dx >$ est

$$dx = dp = 0 \quad :$$

toute fonction $E^3 \oplus E^3 \to R$ en est intégrale première ; la parenthèse de Poisson (. , .) (définition 2 du chap. II, § 3) de deux telles fonctions est donc définie; vu la formule (2.5) (ibid.)

(1.3) $(L,M) = (L,Q) = (L,R) = (M,Q) = (M,R) = 0 \quad , \quad (Q,R) = R \quad .$

D'après le théorème 2 (<u>E. Cartan</u>) du chap. II, § 3, une quadrature définit localement sur $E^3 \oplus E^3$ quatre fonctions numériques réelles

$$f_o \ , \ f_1 \ , \ f_3 \ , \ f_5$$

telles que :

(1.4) $$< p,dx > = df_o + f_1\, dL + f_3\, dM + f_5\, dR \ .$$

<u>Explicitons ces fonctions</u> f_j. Notons (J_1 , J_2 , J_3) <u>le repère mobile orthonormé</u>, défini pour $L \neq 0$, tel que :

(1.5) $$x = R\, J_1 \quad , \quad x \wedge p = L\, J_3 \ ,$$

ce qui implique :

(1.6) $$p = QR^{-1}\, J_1 + LR^{-1}\, J_2 \quad , \quad P \neq 0 \quad , \quad R \neq 0 \ .$$

Notons $\omega_1 , \omega_2 , \omega_3$ les composantes infinitésimales du déplacement relatif de ce repère (G. Darboux -E. Cartan) ; ce sont les formes de Pfaff

$$\omega_1 = < J_3 ,dJ_2 > = - < J_2 , dJ_3 > \quad , \quad \omega_2 = < J_1 ,dJ_3 > \quad , \quad \omega_3 = < J_2 , dJ_1 >$$

telles que :

(1.7) $$dJ_1 = \omega_3\, J_2 - \omega_2\, J_3 \quad , \quad dJ_2 = \omega_1\, J_3 - \omega_3\, J_1 \quad , \quad dJ_3 = \omega_2\, J_1 - \omega_1\, J_2 \ ;$$

rappelons que la différentiation extérieure de ces relations donne les équations (qui sont les équations de structure du groupe orthogonal) :

(1.8) $$d\omega_1 = \omega_3 \wedge \omega_2 \quad , \quad d\omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_3 \quad , \quad d\omega_3 = \omega_2 \wedge \omega_1 \ .$$

La différentiation de $(1.5)_1$ donne, vu (1.7) :

(1.9) $$dx = (dR)\, J_1 + R\, \omega_3\, J_2 - R\, \omega_2\, J_3 \ ;$$

d'où, vu (1.6)

(1.10) $$< p,dx > = QR^{-1}\, dR + L\, \omega_3 \ .$$

Pour transformer cette formule en une formule du type (1.4), introduisons les angles d'Euler Φ , Ψ , Θ ; ce sont les paramètres du repère (J_1 , J_2 , J_3) définis comme suit, pour

$$J_3 \neq \pm I_3 \quad , \quad \text{c'est-à-dire : } |M| < L \ :$$

Θ est l'angle de I_3 et J_3 ; $o < \Theta < \pi$;
une rotation de Φ autour de I_3 transforme (I_1, I_2, I_3) en (I'_1, I'_2, I_3) tels que

$$I'_2 \sin \Theta = I_3 \wedge J_3 ;$$

une rotation de Θ autour de I'_2 transforme (I'_1, I'_2, I_3) en (I''_1, I'_2, J_3) ;
une rotation de Ψ autour de J_3 transforme (I''_1, I'_2, J_3) en (J_1, J_2, J_3).
Evidemment :

$$M = L \cos \Theta ; \tag{1.11}$$

Φ et Ψ sont définis mod. 2π. On a les formules classiques :

$$\begin{aligned} J_1 &= (\cos\Phi \cos\Psi \cos\Theta - \sin\Phi \sin\Psi)\, I_1 + \\ &\quad + (\sin\Phi \cos\Psi \cos\Theta + \cos\Phi \sin\Psi)\, I_2 - \cos\Psi \sin\Theta\, I_3 ; \\ J_2 &= (-\cos\Phi \sin\Psi \cos\Theta - \sin\Phi \cos\Psi) I_1 + \\ &\quad + (-\sin\Phi \sin\Psi \cos\Theta + \cos\Phi \cos\Psi) I_2 + \sin\Psi \sin\Theta\, I_3 \\ J_3 &= \cos\Phi \sin\Theta\, I_1 + \sin\Phi \sin\Theta\, I_2 + \cos\Theta\, I_3 . \end{aligned} \tag{1.12}$$

$$\begin{aligned} \omega_1 &= -\cos\Psi \sin\Theta\, d\Phi + \sin\Psi\, d\Theta ; \\ \omega_2 &= \sin\Psi \sin\Theta\, d\Phi + \cos\Psi\, d\Theta ; \\ \omega_3 &= \cos\Theta\, d\Phi + d\Psi . \end{aligned} \tag{1.13}$$

L'expression explicite de la formule (1.10) est, vu (1.11) et $(1.13)_3$:

$$< p, dx > = Q \frac{dR}{R} + L\, d\Psi + M\, d\Phi ; \tag{1.14}$$

cette formule fondamentale est du type (1.4), <u>conformément au théorème d'E. Cartan</u> qui nous guide.

<u>Formules complémentaires</u>. - La différentiation de (1.6) donne, vu (1.7) :

$$dp = [d(QR^{-1}) - LR^{-1}\omega_3]J_1 + [d(LR^{-1}) + QR^{-1}\omega_3]J_2 + [LR^{-1}\omega_1 - QR^{-1}\omega_2]J_3 . \tag{1.15}$$

Vu (1.9) $d^3x = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$ vaut :

(1.16) $$d^3x = R^2(dR) \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 \quad ;$$

D'où, vu (1.15) :

$$d^3x \wedge d^3p = L\,\frac{dR}{R} \wedge dQ \wedge dL \wedge \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 \quad ,$$

c'est-à-dire, en substituant aux ω_j leurs expressions (1.13) et en éliminant Θ grâce à (1.11) :

(1.17) $$d^3x \wedge d^3p = dL \wedge dM \wedge dQ \wedge \frac{dR}{R} \wedge d\Phi \wedge d\Psi \quad .$$

Notons Ω^6 <u>une partie ouverte de</u> $Z(3) = E^3 \oplus E^3$ sur laquelle :

$$|M| < L \quad ;$$

sur Ω^6 nous pouvons donc employer les coordonnées

$$L\ ,\ M\ ,\ Q\ ,\ R\ ,\ \Phi\ ,\ \Psi \quad ,$$

Φ et Ψ étant définis mod. 2π .

<u>Note</u> 1 . - Sur Ω^6 , $L \neq 0$; donc, vu $(1.2)_1$: $P \neq 0$, $R \neq 0$.

LEMME 1 . - Soit V une variété lagrangienne de Ω^6 ; (dim V = 3) ; remplaçons chacune des fonctions et des formes différentielles précédentes par sa restriction à V .

1°) <u>Le contour apparent</u> Σ_{R_0} <u>de</u> V est la surface de V où :

(1.18) $$\Sigma_{R_0} \ : \ dR \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 = 0 \quad \text{sur } V \ .$$

2°) Au voisinage d'un point de Σ_{R_0} , il existe sur V une forme différentielle $\overline{\omega}$ de degré 3 , nulle part nulle, telle que sur Σ_{R_0} :

(1.19) $$dQ \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 / \overline{\omega} \geqq 0 \ ; \quad dL \wedge dR \wedge \omega_2 / \overline{\omega} \geqq 0 \ ; \quad dR \wedge \omega_3 \wedge \omega_1 / \overline{\omega} \geqq 0 \ ,$$

les trois premiers membres étant trois fonctions non simultanément nulles ; il existe une constante c telle que, au voisinage de ce point de V , l'indice de Maslov m_{R_0} de V ait la valeur :

(1.20) $$\begin{aligned} m_{R_0} &= c \quad\ \ \text{pour } dR \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 / \overline{\omega} < 0 \ , \\ &= 1 + c \ \text{pour } dR \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 / \overline{\omega} > 0 \ . \end{aligned}$$

<u>Preuve de</u> 1°) . - L'expression (1.16) de d^3x .

<u>Preuve de</u> 2°) .- Calculons le saut de m_{R_o} à travers Σ_{R_o} en appliquant le théorème 3.2 du chap. I, § 3. Vu (1.9), (1.15), et (1.18), les composantes $d_j x$ et $d_j p$ de dx et dp dans le repère (J_1, J_2, J_3) vérifient sur V en les points de Σ_{R_o} :

$$d_1p \wedge d_2x \wedge d_3x = R^2[d(QR^{-1}) - LR^{-1}\omega_3] \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 = R\, dQ \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 \quad ;$$

$$d_1x \wedge d_2p \wedge d_3x = -\, R\, dR \wedge [d(LR^{-1}) + QR^{-1}\omega_3] \wedge \omega_2 = dL \wedge dR \wedge \omega_2 \quad ;$$

$$d_1x \wedge d_2x \wedge d_3p = (dR) \wedge \omega_3 \wedge [L\,\omega_1 - Q\,\omega_2] = L\, dR \wedge \omega_3 \wedge \omega_1 \quad .$$

D'où, vu ce théorème 3.2 (chap. I, § 3), l'existence de $\overline{\omega}$ vérifiant (1.19) et (1.20).

2. CHOIX D'UN HAMILTONIEN H . - Soit une fonction indéfiniment différentiable

$$H : \Omega^6 \to R \quad ;$$

<u>en involution avec</u> L <u>et</u> M , c'est-à-dire, vu (1.14) , fonction composée des fonctions L , M , Q , R :

(2.1) $$H(x,p) = H[L(x,p) \;,\; M(x,p) \;,\; Q(x,p) \;,\; R(x)] \quad ;$$

$H[.]$ est une fonction indéfiniment différentiable, définie sur une partie ouverte Ω^4 de l'espace R^4 de coordonnées L , M , Q , R ; nous supposons sur Ω^4 :

(2.2) $$0 < R \;,\; |M| < L \;,\; (H_Q \,,\, H_R) \neq (0 \,,\, 0) \quad \text{pour} \quad H = 0 \; :$$

H_Q désigne la fonction valant $\dfrac{\partial H[L\,,\,M\,,\,Q\,,\,R]}{\partial Q}$.

Vu (1.3), <u>les trois fonctions</u> H , L , M <u>de</u> (x,p) <u>sont deux à deux en involution</u>, ce qui permet d'appliquer explicitement le chap. II, § 3 à <u>l'opérateur lagrangien</u> a <u>associé à</u> H .

D'après le théorème 2 (<u>E. Cartan</u>) du chap. II, § 3 , une quadrature définit localement, sur Ω^6 , quatre fonctions numériques réelles

$$g_0 \ , \ g_1 \ , \ g_2 \ , \ g_3$$

telles que

$$< p \ , \ dx > \ = dg_0 + g_1 \, dL + g_2 \, dM + g_3 \, dH \ ; \tag{2.3}$$

nous emploierons cette formule pour $H = 0$; le lemme qui suit l'explicite pour

$H = 0$;

vu (1.14), la quadrature est la définition de Ω par (2.8).

<u>Notations</u> . - Soit (cf. chap. II, § 3) W l'hypersurface de Ω^6 d'équation

$$W : \quad H(x,p) = 0$$

Notons (L_0 , M_0) tout couple de nombres réels tel que $|M_0| < L_0$; notons $V[L_0 , M_0]$ toute composante connexe de la partie de W d'équations

$$V[L_0 , M_0] : H(x,p) = 0 \ , \quad L(x,p) = L_0 \ , \quad M(x,p) = M_0 \ . \tag{2.4}$$

W est la réunion des $V[L_0 , M_0]$; vu le théorème 7.1, $V[L_0 , M_0]$ est une variété lagrangienne ; elle est le produit topologique

- du tore de dimension 2 et de coordonnées Φ et Ψ mod. 2π ;
- d'une courbe connexe $\Gamma[L_0 ; M_0]$ du demi-plan ouvert de coordonnées $(Q , R > 0)$; l'équation de cette courbe est

$$\Gamma[L_0 , M_0] \quad : \quad H[L_0 , M_0 , Q , R] = 0 \ ; \tag{2.5}$$

cette courbe n'a pas de point singulier, vu $(2.2)_3$.

Sur W définissons, à l'addition près d'une fonction de (L, M), une fonction numérique réelle t de $[L, M, Q, R]$ par la condition :

(2.6) $$dt = \frac{dR}{RH_Q[L, M, Q, R]} = -\frac{dQ}{RH_R[L, M, Q, R]} \quad \text{sur } \Gamma[L, M];$$

quand la courbe $\Gamma[L, M]$ est fermée, alors t est défini mod. $c[L, M]$, où

(2.7) $$c[L, M] = \oint_{\Gamma[L, M]} \frac{dR}{RH_Q} = -\oint_{\Gamma[L, M]} \frac{dQ}{RH_R} \quad ;$$

t est monotone sur Γ ; (L, M, t, Φ, Ψ) constitue un sytème de coordonnées locales de W.

Définissons sur W, à l'addition près d'une fonction de (L, M), une autre fonction numérique réelle Ω par :

(2.8) $$d\Omega = Q\frac{dR}{R} \quad \text{sur } \Gamma[L, M];$$

quand la courbe $\Gamma[L, M]$ est fermée, alors Ω est défini mod. $2\pi N[L, M]$ où

(2.9) $$N[L, M] = \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma[L, M]} Q\frac{dR}{R} > 0 ;$$

Ω n'est pas monotone sur Γ. Notons sa différentielle :

(2.10) $$d\Omega[L, M, t] = Q\frac{dR}{R} + \lambda[L, M, t]\, dL + \mu[L, M, t]\, dM;$$

le § 2 précisera les propriétés des fonctions λ et μ ainsi définies.

Nous pouvons maintenant expliciter la restriction de (2.3) à W :

LEMME 2 . - 1°) La restriction à W de la forme de Pfaff

$$\omega = \langle p, dx \rangle$$

est :

(2.11) $$\omega_W = d(\Omega + L\Psi + M\Phi) - (\lambda + \Psi)\, dL - (\mu + \Phi)\, dM.$$

2°) Le système caractéristique de $d\omega_W$ est <u>le système d'Hamilton</u> :

$$(2.12) \qquad \frac{dx}{H_p(x,p)} = -\frac{dp}{H_x(x,p)}, \quad H(x,p) = 0 .$$

Ses intégrales premières sont les fonctions composées des fonctions :

$$(2.13) \qquad L, M, \lambda + \Psi, \mu + \Phi ;$$

L et M sont en involution ; $\lambda + \Psi$ et $\mu + \Phi$ aussi.

3°) Sur les courbes solution de ce système, c'est-à-dire sur les courbes caractéristiques de W, nous avons

$$(2.14) \quad dt = \frac{dx}{H_p(x,p)} = -\frac{dp}{H_x(x,p)} = \frac{dR}{RH_Q[L,M,R,Q]} = \frac{d\Psi}{H_L[\,.\,]} = \frac{d\Phi}{H_M[\,.\,]} = -\frac{dQ}{RH_R[\,.\,]},$$

$$dL = dM = 0 .$$

4°) Sur W :

$$(2.15) \qquad \left.\frac{d^3x \wedge d^3p}{dH}\right|_W = dL \wedge dM \wedge dt\, d\Phi \wedge d\Psi .$$

<u>Preuve de</u> 1°). - L'expression (1.14) de $\langle p, dx\rangle$ dans Z et l'expression (2.10) de $Q\,dR/R$ sur W.

<u>Preuve de 2°)</u>. - Le lemme 3.2 (E. Cartan) du Chap. II, § 3 prouve que $d\omega_W$ a pour système caractéristique (2.12) et est de rang 4 ; or, vu (2.11) :

$$d\omega_W = dL \wedge d(\lambda + \Psi) + dM \wedge d(\mu + \Phi) ;$$

donc (définition d'E. Cartan du sytème caractéristique, Chap. II, § 3, n° 2), les 4 fonctions (2.13) sont intégrales premières de ce système ; les couples L, M et $\lambda + \Psi, \mu + \Phi$ sont en involution vu la Note 2.2 du Chap. II, § 3.

<u>Preuve de 3°)</u>. - Ce même lemme (E. Cartan) et l'expression (1.14) de $\langle p, dx\rangle$ prouvent que $d\omega_W$ a pour système caractéristique :

$$\frac{dR}{RH_Q[L,M,Q,R]} = \frac{d\Psi}{H_L[\,.\,]} = \frac{d\Phi}{H_M[\,.\,]} = -\frac{dQ}{RH_R[\,.\,]} = \frac{dL}{0} = \frac{dM}{0}, \quad H = 0 .$$

Evidemmment :

$$\frac{dx}{H_p(x,p)} = \frac{<x, dx>}{<x, H_p(x,p)>} = \frac{R\,dR}{<x, L_p> H_L + <x, M_p> H_M + <x, Q_p> H_Q} ;$$

or, puisque $x \wedge (p + sx)$ est indépendant de la variable réelle s ,

$$<x, L_p> = <x, M_p> = 0 ;$$

d'autre part

$$<x, Q_p> = R^2 ;$$

les quatre relations précédentes impliquent:

$$\frac{dx}{H_p(x,p)} = \frac{dR}{RH_Q[L, M, Q, R]} = \frac{d\Psi}{H_L} = \frac{d\Phi}{H_M} = -\frac{dQ}{RH_R} ,$$

donc (2.14) , vu (2.6) et (2.12) .

<u>Preuve de 4°</u>) . - La formule (1.17) s'écrit :

$$d^3x \wedge d^3p = dL \wedge dM \wedge dH \wedge \frac{dR}{RH_Q} \wedge d\Phi \wedge d\Psi ,$$

où, pour $H = 0$, vu (2.14) :

$$\frac{dR}{RH_Q} = dt \mod. (dL, dM) ;$$

d'où (2.15) , dont le sens est le suivant :

$\left.\frac{d^3x \wedge d^3p}{dH}\right|_W$ désigne la restriction ϖ_W à W des formes de degré 5 , ϖ,
telles que $dH \wedge \varpi = d^3x \wedge d^3p$; ϖ_W est évidemment indépendant du choix de ϖ.

3. LES TORES QUANTIFIES $T(\ell, m, n)$ CARACTERISANT LES SOLUTIONS, DEFINIES mod. $1/\nu$ SUR DES VARIETES COMPACTES, DU SYSTEME LAGRANGIEN :

(3.1) $$aU = (a_{L^2} - L_o^2)U = (a_M - M_o)U = 0 \mod. 1/\nu^2 ;$$

a, a_{L^2} et a_M désignent <u>les opérateurs lagrangiens associés</u> respectivement <u>aux hamiltoniens en involution</u> :

$$H , L^2 , M ;$$

L_o et M_o sont deux constantes réelles telles que : $|M_o| < L_o$.

D'après le théorème 7.1 du chap. II , § 3 , les solutions de ce système sont les fonctions lagrangiennes U , à amplitude lagrangienne constante, définies mod. $1/\nu$ sur celles des variétés $V[L_o, M_o]$, compactes ou non, définies par (2.4), qui vérifient la condition quantique de Maslov (chap. II , § 3 , déf. 6.2) ; $V[L_o, M_o]$ est choisi connexe ; la mesure η_V de V, invariante par les vecteurs caractéristiques de H , $L^2 - L_o^2$ et $M - M_o$, qui sert à définir l'amplitude lagrangienne, est

(3.2) $$\eta_V = dt \wedge d\Phi \wedge d\Psi ,$$

vu (2.15) et la formule (7.4) du chap. II, § 3 .

Rappelons l'énoncé de cette condition quantique de Maslov : la fonction

(3.3) $$\frac{1}{2\pi\hbar} \varphi_{R_o} - \frac{1}{4} m_{R_o} \qquad (\text{ où } \hbar = \frac{i}{\nu_o} \text{ est réel})$$

est uniforme sur V mod. 1

La phase φ_{R_o} de $V[L_o, M_o]$ (définie chap. I , § 2 , n° 9 ; § 3 , n° 1) , vu (2.11) où $L = L_o$, $M = M_o$, est :

(3.4) $$\varphi_{R_o} = \Omega + L_o \Psi + M_o \Phi .$$

Calculons l'indice de Maslov de $V[L_o, M_o]$:

LEMME 3 . - 1°) Le contour apparent Σ_{R_o} de $V[L_o, M_o]$ est la réunion $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ de deux surfaces de $V[L_o, M_o]$ d'équations

$$\Sigma_1 : \Psi = 0 \text{ mod. } \pi ; \Sigma_2 : H_Q[L, M, Q, R] = 0 .$$

2°) L'indice de Maslov m_{R_o} de $V[L_o, M_o]$ est, à l'addition près d'un entier constant :

(3.5) $$m_{R_o} = [\frac{1}{\pi}\Psi] - [\frac{1}{\pi} \text{ arc tg} \frac{H_Q}{H_R}] \text{ sur } \check{V}[L_o, M_o] ;$$

[...] désigne la partie entière de ....

Preuve . - Appliquons le lemme 1. Sur $V[L_o, M_o]$, vu (1.11) et (1.13) :

$$\omega_1 = -\cos\Psi\sin\Theta\, d\Phi\,,\ \omega_2 = \sin\Psi\sin\Theta\, d\Phi,\ L_o\,\omega_3 = L_o\, d\Psi + M_o\, d\Phi\,;$$

donc, vu (2.6) :

$$(3.6)\qquad dR\wedge\omega_2\wedge\omega_3 = -\,RH_Q\ \sin\Psi\sin\Theta\ \ dt\wedge d\Psi\wedge d\Phi\,,$$

$$(3.7)\qquad dQ\wedge\omega_2\wedge\omega_3 = \ RH_R\ \sin\Psi\sin\Theta\ \ dt\wedge d\Psi\wedge d\Phi\,,$$

$$(3.8)\qquad dR\wedge\omega_3\wedge\omega_1 = -\,RH_Q\ \cos\Psi\sin\Theta\ \ dt\wedge d\Psi\wedge d\Phi\,,$$

où $R\sin\Theta\neq 0$, vu $(2.2)_1$ et $(2.2)_2$.

Vu le lemme 1. 1°) , $\sum_{R_o}$ a pour équation

$$H_Q\sin\Psi = 0\ ;$$

d'où le 1°) du lemme 3.

Au voisinage d'un point de $\sum_1 \setminus \sum_1 \cup \sum_2$, $H_Q\cos\Psi\neq 0$; nous pouvons donc dans le lemme 1.2°) choisir :

$$\bar\omega = dR\wedge\omega_3\wedge\omega_1\ ;\ dR\wedge\omega_2\wedge\omega_3\,/\,\bar\omega\ = \operatorname{tg}\Psi\ ;$$

d'où, vu ce lemme :

$$(3.9)\qquad m_{R_o} = [\,\tfrac{1}{\pi}\,\Psi\,] + \text{const}\,.$$

Au voisinage d'un point de $\sum_2 \setminus \sum_1 \cup \sum_2$, $H_R\sin\Psi\neq 0$ vu $(2.2)_3$; nous pouvons donc dans le lemme 1.2°) choisir :

$$\bar\omega = dQ\wedge\omega_2\wedge\omega_3\ ;\ dR\wedge\omega_2\wedge\omega_3\,/\,\bar\omega\ = -\,H_Q\,/\,H_R\ ;\ \text{d'où :}$$

$$(3.10)\qquad m_{R_o} = \text{const.} - [\,\tfrac{1}{\pi}\ \operatorname{arc}\ \operatorname{tg}\frac{H_Q}{H_R}\,]\,.$$

L'expression globale de m_{R_o} résulte des deux expressions locales (3.9) et (3.10) .

La condition quantique de Maslov (3.3) s'énonce, vu (3.4) et (3.5) : la fonction

$$\frac{1}{\hbar}\ \frac{\Omega}{2\pi} + \frac{1}{4\pi}\ \mathrm{arc\ tg}\ \frac{H_Q}{H_R} + \left(\frac{L_o}{\hbar} - \frac{1}{2}\right)\frac{\Psi}{2\pi} + \frac{M_o}{\hbar}\ \frac{\Phi}{2\pi}$$

est définie mod. 1 sur $V[L_o , M_o]$.

Si $V[L_o , M_o]$ est compacte, c'est-à-dire si la courbe $\Gamma[L_o , M_o]$ est fermée, cette condition est la suivante, vu (2.9) :

$$\frac{1}{\hbar} N[L_o , M_o] + \tfrac{1}{2}\ ,\ \frac{1}{\hbar} L_o - \tfrac{1}{2}\ ,\ \frac{1}{\hbar}\ M_o$$

sont 3 entiers ; notons-les, pour retrouver les notations classiques en physique quantique :

$$n - \ell \quad , \quad \ell \quad , \quad m \quad ;$$

puisque $N > 0$ et $|M_o| < L_o$, nous avons

$$|m| \leqq \ell < n.$$

Si $V[L_o , M_o]$ n'est pas compacte, cette condition quantique de Maslov se réduit à la suivante :

$$\frac{1}{\hbar}\ L_o - \tfrac{1}{2} = \ell\ ,\ \frac{1}{\hbar}\ M_o = m$$

sont deux entiers tels que $|m| \leqq \ell$.

La conclusion de ce n°3 est donc le

THEOREME 3 . - Les variétés connexes sur lesquelles sont définies les solutions du système lagrangien (3.1) sont :

1°) les variétés $V[L_o , M_o]$ COMPACTES, définies par (2.4), et telles qu'existent 3 entiers :

$$\ell\ ,\ m\ ,\ n\ ,$$

vérifiant les conditions :

(3.11) $$|m| \leqq \ell < n\ ,$$

(3.12) $$L_o = \hbar\,(\ell + \tfrac{1}{2})\ ,\ M_o = \hbar\ m\ ,\ L_o + N[L_o , M_o] = \hbar\ n\ ;$$

$V[L_o ; M_o]$ est alors un tore, qui sera noté $T(\ell , m , n)$: ses coordonnées sont

(3.13) $t \bmod c[L_o , M_o]$, défini par (2.7) ; Ψ mod. 2π ; Φ mod. 2π.

2°) les variétés $V[L_o, M_o]$ NON-COMPACTES, définies par (2.4), et telles qu'existent 2 entiers

$$\ell \ , \ m$$

vérifiant les conditions :

(3.14) $$|m| \leq \ell \ ;$$

(3.15) $$L_o = \hbar\left(\ell + \tfrac{1}{2}\right) \ , \ M_o = \hbar\, m \ ;$$

$V[L_o, M_o]$ est alors le produit

- d'un tore de dimension 2, de coordonnées Ψ mod. 2π, Φ mod. 2π ;
- et d'une droite, demi-droite ou segment de coordonné t.

Munissons $V[L_o, M_o]$, compacte ou non, de la mesure invariante par les vecteurs caractéristiques de H, $L^2 - L_o^2$, $M - M_o$:

(3.16) $$\eta_V = dt \wedge d\Phi \wedge d\Psi \ ;$$

alors les solutions de (3.1) définies sur V sont les fonctions lagrangiennes à amplitude lagrangienne constante.

Note 3.1. - Nous nous limiterons désormais à l'étude des variétés lagrangiennes compactes ; (par exemple : de l'électron appartenant à un atome).

Note 3.2. - Les vecteurs caractéristiques de $L^2 - L_o^2$ et $M - M_o$ sont respectivement :

(3.17) $$\varkappa_{L^2 - L_o^2} \ : dL = dM = dt = o \ , \ d\Psi = 2L_o \ , \ d\Phi = o \ ;$$

(3.18) $$\varkappa_{M - M_o} \ : dL = dM = dt = \quad d\Psi = o \ , \ d\Phi = 1 \ .$$

L'on vérifie de suite que ces vecteurs laissent η_V invarariant.

Preuve de (3.17). - $\varkappa_{L^2 - L_o^2}$ est le vecteur tangent à $V[L_o, M_o]$ tel que, vu $(1.2)_1$, puis $(1.5)_1$ et (1.6), puis $(1.5)_1$ et (1.12) :

$$dx = 2LL_p = 2(R^2 p - Qx) = 2LRJ_2 = 2L\,\frac{\partial x(L, M, t, \Psi, \Phi)}{\partial \Psi}$$

ce qui prouve (3.17).

Preuve de (3.18). - $\varkappa_{M - M_o}$ est le vecteur tangent à $V[L_o, M_o]$ tel que, vu (1.1), puis $(1.5)_1$ et (1.12) :

$$d\,x = (-x_2\ ,\ x_1\ ,\ o) = \frac{\partial\,x(L\,,M\,,t\,,\Psi\,,\Phi)}{\partial\,\Phi}\ .$$

Note 3.3. - Le vecteur caractéristiques de H [cf. (2.14)]:

(3.19) $$\varkappa\ :\ d\,L = d\,M = o\ ,\ d\,t = 1,\ d\,\Psi = H_L\ ,\ d\,\Phi = H_M$$

et ceux de $L^2 - L_o^2$ et $M - M_o$ engendrent, conformément au théorème 7.1. 2°) du Chap. II , §3, un groupe de translations de la variété $V[L_o\ ,\ M_o\ ]$, quand elle est compacte, donc un tore : les translations, en coordonnées [cf. (2.7) et § 2, (1.5)] :

$$t \quad \text{mod.}\,c[L_o,M_o]\ ,\ \Psi + \lambda\,[t,L_o,M_o] - \frac{N_L[L_o,M_o]}{c\,[L_o,M_o]}\,t \quad \text{mod.}\,2\,\pi\ ,\ \Phi + \pi - \frac{N_M}{c}\,t \quad \text{mod.}\ 2\ \pi$$

4. EXEMPLES : LES OPERATEURS DE SCHRÖDINGER ET KLEIN - GORDON. -

Choisissons :

(4.1) $$H\ (x\ ,\ p) = \tfrac{1}{2}\,[P^2 - \frac{K[\,R\,,\,M]}{R^2}\ ]\ ,$$

$K\ :\ R_+ \oplus R \to R$ étant une fonction donnée. Autrement dit :

(4.2) $$H\,[\,L,\,M\,,\,Q\,,\,R\,] = \frac{1}{2\,R^2}\ [\ L^2 + Q^2 - K\,[\,R\,,\,M\,]]\ .$$

L'application du théorème 3 est immédiate.

La condition que (2.4) définisse au moins une hypersurface compacte $V\ [\ L_o\ ,\ M_o\ ]$, qui est un tore, est la suivante : la fonction

$$R_+\ \ni R \mapsto K\ [\,R\,,\,M_o\,] - L_o^2 \in R$$

est positive entre deux zéros consécutifs, R_1 et R_2 $(0 < R_1 < R_2)$;

alors (2.9) définit :

(4.3) $$N\ [\ L_o\ ,\ M_o\ ] = \frac{1}{\pi}\int_{R_1}^{R_2} \sqrt{K\,[R\,,\,M_o\,] - L_o^2}\ \frac{d\,R}{R} > 0\ .$$

Note 4.1. - Si K est fonction affine de M, alors, vu (4.1) :

(4.4) $$<\frac{\partial}{\partial\,x}\ ,\ \frac{\partial}{\partial\,p}>\ H\ (x\ ,\ p\,) = 0$$

et par suite [Chap. II , § 1 , Déf. 6.2 et (6.3)] , l'opérateur associé à H a pour expression dans R_o :

(4.5) $$a = \frac{1}{2\nu^2} \Delta - \frac{1}{2R^2} K \left[R , \frac{1}{\nu} \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \right]$$

où : $\Delta = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$; l'opérateur $\frac{1}{\nu} \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \right)$ et le produit par toute fonction de R commutent.

<u>Exemple</u> 4.1 . - Nommons <u>opérateur de Schrödinger - Klein - Gordon</u> l'opérateur associé à l'hamiltonien :

(4.6) $$H(x,p) = \frac{1}{2} \left[P^2 + A(M) - \frac{2B(M)}{R} + \frac{C(M)}{R^2} \right],$$

où A, B, C : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont des fonctions données. Notons :

$$A_o = A(M_o) , \quad B_o = B(M_o) , \quad C_o = C(M_o) .$$

La condition qu'existe au moins une variété compacte $V[L_o , M_o]$ définie par (2.4) s'explicite comme suit :

(4.7) $$A_o > 0 , \quad L_o^2 + C_o > 0 , \quad B_o > \sqrt{A_o} \sqrt{L_o^2 + C_o} ;$$

quand elle est satisfaite, $V[L_o , M_o]$ est unique et, vu (4.3) :

$$N[L_o , M_o] = \frac{1}{2\pi} \oint \sqrt{- A_o R^2 + 2 B_o R - L_o^2 - C_o} \frac{dR}{R} ,$$

l'intégrale étant calculée le long d'un lacet de $\mathbb{C}$ entourant la coupure $[R_1 , R_2]$; le calcul de deux résidus, en $R = \infty$ et $R = 0$, donne :

(4.8) $$N[L_o , M_o] = \frac{B_o}{\sqrt{A_o}} - \sqrt{L_o^2 + C_o} > 0 .$$

L'énoncé du théorème 3 devient donc le suivant :

THEOREME 4.1. - Soit a l'opérateur de Schrödinger - Klein - Gordon, c'est-à-dire l'opérateur associé à l'hamiltonien (4.6) ; soient a_{L^2} et a_M les opérateurs associés aux hamiltoniens L^2 et M . Alors le système lagrangien

$$(4.9) \qquad a\,U = (a_{L^2} - L_o^2)\ U = (a_M - M_o)\ U = 0 \quad \text{mod. } 1/\nu^2$$

possède des solutions définies sur une variété COMPACTE si et seulement s'il existe un triplet d'entier (ℓ , m , n) tel que :

$$(4.10) \qquad L_o = \hbar\,(\ell + 1/2)\ ,\ M_o = \hbar\, m\ ,$$

$$(4.11) \qquad \begin{cases} |m| \leq \ell < n\ ,\quad (\ell + 1/2)^2 + C_o \hbar^{-2} > 0\ , \\ A_o = B_o^2\, \hbar^{-2} \left[n - \ell - 1/2 + \sqrt{(\ell + 1/2)^2 + C_o \hbar^{-2}} \right]^{-2} . \end{cases}$$

Si cette condition est réalisée, cette variété compacte est unique : c'est le tore $T(\ell , m , n)$ d'équations

$$(4.12) \qquad T(\ell , m , n) : H(x , p) = L(x , p) - L_o = M(x , p) - M_o = 0\ .$$

Munissons ce tore de la mesure invariante (3.16) ; alors les solutions de (4.9) définies mod. $1/\nu$ sur $T(\ell , m , n)$ sont les fonctions lagrangiennes à amplitude lagrangienne constante.

Notations, concernant la physique et employées seulement par la fin de ce n° 4. - Donnons-nous, dans E^3 , un potentiel électrique $\mathcal{A}_0 : X \to R$ et un potentiel-vecteur magnétique $(\mathcal{A}_1 , \mathcal{A}_2 , \mathcal{A}_3) : X \to R^3$, indépendants du temps et vérifiant la loi physique :

$$(4.13) \qquad \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \mathcal{A}_j}{\partial x_j} = 0 \quad ;$$

on sait que les trajectoires dans E^3 de l'électron, non-relativiste ou relativiste, de masse μ , de charge électrique $-\varepsilon < 0$, sont les solutions du système d'Hamilton défini par l'hamiltonien valant dans le cas non-relativiste :

$$(4.14) \qquad H(x,p) = \frac{1}{2\mu} \sum_{j=1}^{3} [p_j + \frac{\varepsilon}{c} \mathcal{A}_j(x)]^2 - E - \varepsilon \mathcal{A}_0(x) \quad ,$$

dans le cas relativiste :

$$(4.15) \quad H(x,p) = \frac{1}{2\mu} \sum_{j=1}^{3} [p_j + \frac{\varepsilon}{c} \mathcal{A}_j(x)]^2 - \frac{1}{2\mu\, c^2} [E + \varepsilon \mathcal{A}_0(x)]^2 + \frac{1}{2} \mu\, c^2 \quad ;$$

c est la vitesse de la lumière ;
E est une constante, qui est l'énergie des électrons dont la position x et la quantité de mouvement p vérifient $H(x,p)=0$;(énergie incluant la masse au repos $\mu\, c^2$ dans le cas relativiste).

Vu (4.13)

$$\langle \frac{\partial}{\partial x} , \frac{\partial}{\partial p} \rangle \; H(x,p) = 0 \quad ;$$

vu le chap. II, § 1, (6.3) et déf. 6.2, l'opérateur associé à H est donc, dans le cas non-relativiste l'opérateur de Schrödinger :

$$(4.16) \quad a = \frac{1}{2\mu} [\frac{1}{\nu^2} \Delta + \frac{2\varepsilon}{c} \sum_j \mathcal{A}_j(x) \frac{1}{\nu} \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\varepsilon^2}{c^2} \sum_j \mathcal{A}_j^2(x)] - E - \varepsilon \mathcal{A}_0(x) \quad ,$$

dans le cas relativiste l'opérateur de Klein-Gordon :

$$(4.17) \quad a = \frac{1}{2\mu} [\frac{1}{\nu^2} \Delta + \frac{2\varepsilon}{c} \sum_j \mathcal{A}_j \frac{1}{\nu} \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\varepsilon^2}{c^2} \sum_j \mathcal{A}_j^2] - \frac{1}{2\mu\, c^2} [E + \varepsilon \mathcal{A}_0]^2 + \frac{\mu\, c^2}{2} \quad .$$

Particularisons comme suit ces hamiltoniens et ces opérateurs : $\mathcal{A}_0$ est le potentiel électrique du noyau de nombre atomique Z , placé à l'origine ; le champ magnétique est constant, parallèle au troisième axe de coordonnées et d'intensité $\mathcal{H}$.

Autrement dit :

$$(4.18) \qquad \mathcal{A}_o(x) = \frac{\varepsilon Z}{R} \, , \mathcal{A}_1(x) = -\frac{1}{2}\mathcal{H}x_2 \, , \mathcal{A}_2(x) = \frac{1}{2}\mathcal{H}x_1 \, , \mathcal{A}_3 = 0 \quad .$$

Négligeons, comme en physique, les termes en $\mathcal{H}^2$; les hamiltoniens (4.14) et (4.15) de l'électron deviennent des hamiltoniens du type (4.6) : dans le cas non-relativiste

$$(4.19) \qquad H(x,p) = \frac{1}{2\mu}\left[P^2 + \frac{\varepsilon}{c}\mathcal{H}M - 2\mu E - \frac{2\mu\,\varepsilon^2 Z}{R}\right] \quad ;$$

dans le cas relativiste

$$(4.20) \qquad H(x,p) = \frac{1}{2\mu}\left[P^2 + \frac{\varepsilon}{c}\mathcal{H}M + \mu^2 c^2 - \frac{E^2}{c^2} - \frac{2\varepsilon^2 ZE}{c^2 R} - \frac{\varepsilon^4 Z^2}{c^2 R^2}\right] \quad .$$

L'opérateur de Schrödinger devient :

$$(4.21) \qquad a = \frac{1}{2\mu}\left[\frac{1}{\nu^2}\Delta + \frac{\varepsilon\mathcal{H}}{c\nu}\left(x_1\frac{\partial}{\partial x_2} - x_2\frac{\partial}{\partial x_1}\right) - 2\mu E - \frac{2\mu\,\varepsilon^2 Z}{R}\right] \quad ;$$

l'opérateur de Klein-Gordon devient :

$$(4.22) \qquad a = \frac{1}{2\mu}\left[\frac{1}{\nu^2}\Delta + \frac{\varepsilon\mathcal{H}}{c\nu}\left(x_1\frac{\partial}{\partial x_2} - x_2\frac{\partial}{\partial x_1}\right) - \frac{E^2}{c^2} - \frac{2\varepsilon^2 ZE}{c^2 R} - \frac{\varepsilon^4 Z^2}{c^2 R^2}\right] \quad .$$

La relation $(4.11)_3$ définit E en fonction de (ℓ, m, n) ; ce calcul fait apparaître les constantes classiques :

$\alpha = \frac{\varepsilon^2}{\hbar c} \simeq \frac{1}{137}$, "constante de structure fine", sans dimension,

$\beta = \frac{\varepsilon\hbar}{2\mu c}$, "magnéton de Bohr" , ($\beta\mathcal{H}$ a la dimension de l'énergie),

et la fonction valant :

$$(4.23) \qquad F(n,k) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\alpha Z}{n - k + \sqrt{k^2 - \alpha^2 Z^2}}\right)^2}} \quad .$$

L'énoncé du theorème 4.1 devient le suivant :

THÉORÈME 4.2 . - Soit a l'opérateur de Schrödinger (4.21) ou l'opérateur de Klein-Gordon (4.22), H étant (4.19) ou (4.20) ; soient a_{L^2} et a_M les opérateurs associés à L^2 et M . Pour certaines valeurs des constantes E , L_o , M_o le système lagrangien :

$$(4.9) \qquad a\,U = (a_{L^2} - L_o^2)\,U = (a_M - M_o)\,U = 0 \qquad \text{mod. } 1/\nu^2$$

possède des solutions définies mod. $1/\nu$ sur des variétés COMPACTES ; ces valeurs de E , L_o , M_o s'expriment, en fonction des triplets d'entiers (ℓ, m, n) , tels que :

$$|m| \leqq \ell < n \quad \text{et, dans le cas Klein-Gordon,} \quad \ell + 1/2 \geqq \alpha Z \ ;$$

ces expressions de E , L_o , M_o sont les suivantes :

$$(4.24) \qquad E = -\mu c^2 \frac{\alpha^2 Z^2}{2n^2} + \beta\mathscr{H} m \quad \text{dans le cas Schrödinger,}$$

$$(4.25) \qquad E^2 = \mu c^2 (\mu c^2 + 2\beta\mathscr{H} m)\, F^2(n, \ell + 1/2) \quad \text{dans le cas Klein-Gordon,}$$

$$(4.26) \qquad L_o = \hbar(\ell + 1/2) \quad , \quad M_o = \hbar m \ .$$

Ces solutions de (4.9) sont définies sur les tores (4.12). Munissons ces tores de la mesure invariante (3.16) ; alors ces solutions sont les fonctions lagrangiennes, définies sur ces tores, d'amplitude lagrangienne constante.

Note 4.2 . - Les physiciens, négligeant β^2 et $\beta\alpha^2$, simplifient (4.25) comme suit :

$$\pm E \simeq \mu\, c^2\, F(n, \ell + 1/2) + \beta\mathscr{H} m \ ;$$

le signe - concerne l'anti-matière $(\mu < 0)$.

Note 4.3 . - Les niveaux d'énergie (4.24) et (4.25) sont ceux que donne l'étude de l'équation aux dérivées partielles

$$a\,u = 0 \ ,$$

la fonction $u : E^3 \setminus \{0\} \to C$ et son gradient étant de carrés sommables (Chap. III, § 4).

§ 2. L'équation lagrangienne $a\,U = 0 \bmod. 1/\nu^2$;

(a associé à H ; U à amplitude lagrangienne $\geqq 0$, définie sur V compacte).

0. INTRODUCTION. - Sommaire. - Le § 1 a étudié le problème (1) (Introduction du chap. III), c'est-à-dire un système de trois équations lagrangiennes. Ce § 2 étudie la première de ces trois équations et, plus précisément, le problème (2) (Ibid.).

Toute solution du problème (1) est solution du problème (2), vu le théorème 3 du § 1. Dans le cas exceptionnel où l'hamiltonien H est indépendant de M (par exemple : Schrödinger et Klein-Gordon sans champ magnétique), une même rotation de E^3 opérant sur x et p transforme évidemment les solutions du problème (1) en solutions du problème (2) qui ne sont plus solutions du problème (1). Sans se placer dans ce cas exceptionnel, le théorème 1 de ce § 2 construit des solutions du problème (2) qui ne sont pas solutions du problème (1) : une solution du problème (2) définie sur un tore $T(\ell, m, n)$ (§ 1, théor. 3) n'est pas, en général, unique à un facteur multiplicatif constant près.

Par contre, le théorème 2 montre que, même si H dépend de paramètres, ces tores $T(\ell, m, n)$ sont en général les seules variétés lagrangiennes compactes V sur lesquelles sont définies des solutions du problème (2). Le théorème 3.1. précise même que, dans le cas Schrödinger et Klein-Gordon, les problèmes (1) et (2) définissent les mêmes niveaux d'énergie : les niveaux classiques.

Note. - Le théorème 1 de ce § 2 n'a pas de signification physique : son critère est le caractère rationnel ou non de nombres qui, dans le cas de Schrödinger et Klein-Gordon, dépendent de grandeurs physiques.

CONCLUSIONS. - Appelons "problème bien posé" un problème qui, posé pour l'équation de Schrödinger - Klein-Gordon, a les caractères essentiels du problème classique (4)

(Introduction au Chap. III) : le problème (1) (Ibid.) est bien posé, vu le § 1 , théorème 4.2 ; vu la note qui précède, ce § 2 montre que le problème (2) (Ibid) n'est pas bien posé.

1. LES SOLUTIONS DE L'EQUATION $aU = 0 \bmod. 1/\nu^2$, À AMPLITUDE LAGRANGIENNE ≥ 0, DEFINIES SUR LES TORES $V[L_o, M_o]$. - Le § 1, n° 2 a choisi H et défini les variétés :

$$W : H = 0 \quad ; \quad V[L_o, M_o] : H = L - L_o = M - M_o = 0 .$$

Toute variété lagrangienne compacte V de W est réunion de caractéristiques K de H (dont le paramètre t varie de $-\infty$ à $+\infty$) ; V est donc réunion d'adhérences compactes $\bar{K}$ de telles caractéristiques.

Propriétés d'une caractéristique K de H à adhérence compacte $\bar{K}$. - Une telle caractéristique K, vu § 1 (2.13), appartient à un tore $V[L_o, M_o]$ et a pour équations dans ce tore :

(1.1) $$K : \Psi - \Psi_o + \lambda[L_o, M_o, t] = \Phi - \Phi_o + \mu[L_o, M_o, t] = 0 \quad (\Phi_o, \Psi_o : \text{const})$$

Rappelons que les coordonnées de $V[L_o, M_o]$:

$$(\Psi, \Phi, t)$$

sont définies

$$(\text{mod. } 2\pi, \text{ mod. } 2\pi, \text{ mod } c_o), \text{ où } c_o = c[L_o, M_o].$$

Plus explicitement : soit R^3 de coordonnées (Ψ, Φ, t) ; soit $\mathbf{Z}^3$ le groupe additif des triplets d'entiers (ξ, η, ζ) opérant comme suit sur R^3 :

$$\mathbf{Z}^3 \ni (\xi, \eta, \zeta) : (\Psi, \Phi, t) \longmapsto (\Psi + 2\pi\xi, \Phi + 2\pi\eta, t + c_o\zeta) :$$

le quotient de R^3 par ce groupe $\mathbf{Z}^3$ est $V[L_o, M_o]$; il existe une application naturelle :

(1.2) $$R^3 \to R^3/\mathbf{Z}^3 = V[L_o M_o].$$

Etant donnée une fonction

$$F : (L, M, t) \to F[L, M, t] \in R,$$

notons :

$$\Delta_t F[L, M, t] = F[L, M, t + c[L, M]] - F[L, M, t] ;$$

évidemment :

(1.3) $$\Delta_t R = \Delta_t Q = o ;$$

vu, au § 1 , les définitions (2.8) de Ω et (2.9) de N :

(1.4) $$\Delta_t \Omega[L, M, t] = 2\pi N[L, M] ;$$

vu (1.3) et au § 1 la définition (2.10) de λ et μ :

$$2\pi\, d N[L, M] = \Delta_t \lambda[L, M, t]\, dL + \Delta_t \mu[L, M, t]\, dM ,$$

c'est-à-dire :

(1.5) $$\Delta_t \lambda = 2\pi N_L , \quad \Delta_t \mu = 2\pi N_M .$$

Notons :

$$N_{L_o} = N_L[L_o, M_o] , \quad N_{M_o} = N_M[L_o, M_o] .$$

Nous pouvons maintenant expliciter $\bar{K}$:

LEMME 1.1. . - 1) Supposons N_{L_o} et N_{M_o} rationnels :

(1.6) $$N_{L_o} = -\frac{L_1}{N_1} , \quad N_{M_o} = -\frac{M_1}{N_1} , \text{ où } (L_1, M_1, N_1) \in \mathbf{Z}^3, \text{ P.G.C.D. } (L_1, M_1, N_1) = 1 ;$$

(c'est-à-dire : L_1 , M_1 , N_1 sont des entiers, de plus grand commun diviseur 1).Alors $K = \bar{K}$ <u>est une courbe fermée</u> , d'équations (1.1).

Plus précisément les équations (1.1) définissent une courbe ouverte $\tilde{R}^1$ (c'est-à-dire homéomorphe à R^1) de R^3; vu (1.5) et (1.6) , le sous-groupe $\tilde{\mathbf{Z}}^1$ de $\mathbf{Z}^3$ engendré par (L_1 , M_1 , N_1) laisse $\tilde{R}^1$ invariant ; on a :

(1.7) $$K = \bar{K} = \tilde{R}^1 / \tilde{\mathbf{Z}}_1 .$$

2°) Supposons N_{L_o} <u>et</u> N_{M_o} <u>liés par une unique relation affine</u>

(1.8) $L_1 N_{L_o} + M_1 N_{M_o} = N_1$, où $(L_1, M_1, N_1) \in \mathbb{Z}^3$, P.G.C.D. $(L_1, M_1, N_1) = 1$.

Alors $\bar{K}$ <u>est le tore</u> T^2 , de dimension 2 , défini dans $V[L_o, M_o]$ par l'équation :

(1.9) $L_1 \{\Psi - \Psi_o + \lambda[L_o, M_o, t]\} + M_1 \{\Phi - \Phi_o + \mu[L_o, M_o, t]\} = 0$.

Plus précisément, l'équation (1.9) définit une surface $\tilde{R}^2$ de R^3 homéomorphe à R^2 ; vu (1.5) et (1.8) , le sous-groupe $\tilde{\mathbb{Z}}^2$ de $\mathbb{Z}^3$ d'équation :

(1.10) $$\tilde{Z}^2 : \ L_1 \xi + M_1 \eta + N_1 \zeta = 0$$

opère sur $\tilde{R}^2$; on a :

(1.11) $$T^2 = \tilde{R}^2 / \tilde{\mathbb{Z}}^2 .$$

Pour expliciter des générateurs de $\tilde{\mathbb{Z}}^2$, notons :

(1.12) $L_2 =$ P.G.C.D (M_1, N_1) , $M_2 =$ P.G.C.D. (L_1, N_1), $N_2 =$ P.G.C.D. (L_1, M_1) ;

M_2 et N_2 divisent L_1 ; P.G.C.D $(M_2, N_2) = 1$ vu $(1.8)_3$; il existe donc L_3 et de même M_3 , N_3 , entiers tels que :

(1.13) $$L_1 = L_3 M_2 N_2 , \ M_1 = L_2 M_3 N_2 , \ N_1 = L_2 M_2 N_3 .$$

$\tilde{Z}^2$ est engendré par ses trois éléments :

(1.14) $$(0, M_2 N_3, -M_3 N_2), \ (-L_2 N_3, 0, L_3 N_2), \ (L_2 M_3, -L_3 M_2, 0),$$

que lie évidemment la relation

(1.15) $$L_3 (0, M_2 N_3, -M_3 N_2) + M_3 (-L_2 N_3, 0, L_3 N_2) + N_3 (L_2 M_3, -L_3 M_2, 0) = 0 .$$

3°) Supposons qu'<u>aucune relation affine à coefficients entiers ne lie</u> N_{L_o} <u>et</u> N_{M_o}.

Alors $\bar{K}$ <u>est le tore</u> $V[L_o, M_o]$.

Preuve. - La partie de R^3 dont K est l'image naturelle dans $V[L_o, M_o]$ est définie par la condition :

$$\left(\frac{\Psi - \Psi_o + \lambda[L_o, M_o, t]}{2\pi}, \frac{\Phi - \Phi_o + \mu[L_o, M_o, t]}{2\pi}\right) \in G$$

où G est l'image de $\mathbf{Z}^3$ dans le groupe additif R^2 par le morphisme :

$$\mathbf{Z}^3 \ni (\xi, \eta, \zeta) \mapsto (\xi + N_{L_o}\zeta, \eta + N_{M_o}\zeta) \in \mathbf{R}^2 .$$

Donc $\bar{K}$ est l'image naturelle dans $V[L_o, M_o]$ de la partie fermée de R^3 définie par la condition

$$(1.16) \quad \left(\frac{\Psi - \Psi_o + \lambda[L_o, M_o, t]}{2\pi}, \frac{\Phi - \Phi_o + \mu[L_o, M_o, t]}{2\pi}\right) \in \bar{G}$$

où $\bar{G}$ est l'adhérence de G ; $\bar{G}$ un sous-groupe fermé de R^2.

Trois cas se présentent :

1) G est discret ; 2) $\dim \bar{G} = 1$; 3) $\bar{G} = \mathbf{R}^2$.

1) G est discret, c'est-à-dire : $\bar{G} = G$. La condition qu'il en soit ainsi s'énonce :

N_{L_o} et N_{M_o} sont rationnels

(Cf. rapidité de convergence vers un nombre irrationnel des réduites de son développement en fraction continue). Sous l'hypothèse (1.6), qui exprime cette condition, $\bar{K} = K$ et le sous-groupe $\tilde{Z}^1$ de Z^3 qui laisse invariant la courbe $\tilde{R}^1 \subset R^3$ d'équations (1.1) a pour éléments les $(\xi, \eta, \zeta) \in \mathbf{Z}^3$ tels que :

$$N_1 \xi = L_1 \zeta, \; N_1 \eta = M_1 \zeta ;$$

vu $(1.6)_3$, N_1 divise ζ ; $\tilde{Z}^1$ est donc engendré par $(L_1, M_1, N_1) \in \mathbf{Z}^3$.

2) $\dim \bar{G} = 1$. - $\bar{G}$ est alors l'ensemble des $(\theta, \tau) \in R^2$ vérifiant une condition :

$$(1.17) \quad L_1 \theta + M_1 \tau \in \mathbf{Z}, \; (L_1, M_1 \in R) ;$$

vu la définition de G, la condition que $\bar{G}$ est le sous-groupe (1.17) de R^2 s'énonce :

(1.8) est vérifié ; G n'est pas discret ;

vu 1°), elle s'énonce donc :

N_{L_o} et N_{M_o} <u>sont liés par une unique relation affine à coefficients entiers, qui est</u> (1.8) .

Sous cette hypothèse, vu la définition (1.16) de $\bar{K}$ et la définition (1.17) de $\bar{G}$, $\bar{K}$ est l'image par (1.2) de la variété $\tilde{R}^2$ de R^3 d'équation (1.9) . Le sous-groupe $\tilde{\mathbf{Z}}^2$ de $\mathbf{Z}^3$ qui laisse invariant $\tilde{R}^2$ est évidemment défini par (1.10), qui implique, vu $(1.8)_3$ et (1.12) :

(1.18) L_2, M_2, N_2 divisent respectivement ξ, η, ζ.

Vu (1.13), $\tilde{\mathbf{Z}}_2$ contient les trois éléments (1.14). D'une part $(1.14)_1$ engendre le sous-groupe de $\tilde{\mathbf{Z}}_2$ d'équation :

$$\xi = 0,$$

car P.G.C.D. $(M_2 N_3, M_3 N_2) = 1$, vu $(1.12)_1$, $(1.13)_2$ et $(1.13)_3$. Donc P.G.C.D. $(N_3, M_3) = 1$, ce qui implique que, sur le sous-groupe de $\tilde{\mathbf{Z}}_2$ engendré par ses éléments $(1.14)_2$ et $(1.14)_3$, ξ prend toutes valeurs multiples de L_2. Les trois éléments (1.14) de $\tilde{\mathbf{Z}}_2$ engendrent donc $\tilde{\mathbf{Z}}_2$, vu (1.18).

3°) $\bar{G} = R^2$. - Vu 1°) et 2°), la condition que $\bar{G} = R^2$ s'énonce :

N_{L_o} et N_{M_o} ne sont liés par aucune relation affine à coefficients entiers.

Si $\bar{G} = R^2$, alors $\bar{K}$ est l'image de R^3 par (1.2) ; donc $\bar{K} = V[L_o, M_o]$.

<u>Mesures de $V[L_o, M_o]$ invariantes</u>. - Rappelons que $V[L_o, M_o]$ possède une mesure > 0, invariante par le vecteur caractéristique $\varkappa$ de H (§1, (3.2)) :

$$\eta_V = dt \wedge d\Phi \wedge d\Psi.$$

Toute mesure de $V[L_o, M_o]$ invariante par $\varkappa$ est le produit de η_V par une fonction $V[L_o, M_o] \to R$ invariante par $\varkappa$, c'est-à-dire constante sur les adhérences $\bar{K}$ des caractéristiques K de H appartenant à $V[L_o, M_o]$.

Le lemme suivant est donc une conséquence évidente du lemme 1.1 :

LEMME 1.2. - 1°) Supposons que N_{L_o} <u>et</u> N_{M_o} <u>sont les nombres rationnels</u> (1.6). Alors les caractéristiques de H appartenant à $V[L_o, M_o]$ sont les courbes fermées d'équations :

$$K(c_1, c_2) : \quad \Psi + \lambda[L_o, M_o, t] = c_1 \qquad \Phi + \mu[L_o, M_o, t] = c_2 ,$$

où c_1 et c_2 sont des constantes définies respectivement

$$\text{mod. } 2\pi \frac{M_2}{N_1} = \frac{2\pi}{L_2 N_3}, \qquad \text{mod. } 2\pi \frac{L_2}{N_1} = \frac{2\pi}{M_2 N_3};$$

$$L_2 = \text{P.G.C.D. } (M_1, N_1), \quad M_2 = \text{P.G.C.D. } (L_1, N_1).$$

Les <u>mesures de</u> $V[L_o, M_o]$ <u>invariantes</u> par le vecteur caractéristique $\varkappa$ de H valent :

$$(1.19) \qquad F(\Psi + \lambda[L_o, M_o, t], \quad \Phi + \mu[L_o, M_o, t])\ \eta_V ,$$

$F(.,.)$ étant <u>une fonction arbitraire de périodes</u> respectives $2\pi \frac{M_2}{N_1}$ et $2\pi \frac{L_2}{N_1}$ en ses deux arguments.

2°) Supposons N_{L_o} <u>et</u> N_{M_o} <u>liés par l'unique relation affine</u> (1.8). Alors les adhérences $\bar{K}$ des caractéristiques K de H appartenant à $V[L_o, M_o]$ sont les tores d'équations :

$$(1.20) \qquad T^2(c_o) : \quad L_1\{\Psi + \lambda[L_o, M_o, t]\} + M_1\{\Phi + \mu[L_o, M_o, t]\} = c_o ,$$

c_o étant une constante définie mod. 2π. Les <u>mesures</u> <u>de</u> $V[L_o, M_o]$ <u>invariantes</u> par le vecteur caractéristique $\varkappa$ de H valent :

$$(1.21) \qquad F[L_1(\Psi + \lambda) + M_1(\Phi + \lambda)]\ \eta_V ,$$

$F[.]$ étant <u>une fonction arbitraire de période</u> 2π.

3°) Supposons qu'<u>aucune relation affine à coefficients entiers ne lie</u> N_{L_o} <u>et</u> N_{M_o} ;

alors toute caractéristique K de H appartenant à $V[L_o, M_o]$ a pour adhérence $\bar{K} = V[L_o, M_o]$. Toute <u>mesure de</u> $V[L_o, M_o]$ <u>invariante</u> par le vecteur caractéristique $\varkappa$ de H vaut :

(1.22) $$\text{const. } \eta_V .$$

Il est aisé de conclure :

THEOREME 1 . - 1°) <u>Les tores</u> $V[L_o, M_o]$ <u>sur lesquels peut être définie</u> mod. $1/\nu$ <u>une solution lagrangienne</u> U , <u>à amplitude lagrangienne</u> $\geqq 0$, <u>de l'équation</u>

$$a\, U = 0 \text{ mod. } 1/\nu^2 \qquad (a : \text{opérateur associé à } H)$$

<u>sont définis par la condition</u> (3.11) , (3.12) <u>du</u> § 1 : <u>il existe trois entiers</u> :

$$\ell , m , n ,$$

<u>tels que</u> :

$$|m| \leqq \ell < n ,$$

$$L_o = \hbar\,(\ell + 1/2) , \; M_o = \hbar\, m , \; L_o + N[L_o, M_o] = \hbar\, n .$$

2°) <u>Pour que la solution</u> U , <u>définie sur un tel tore</u>, <u>soient unique</u>, <u>à un facteur constant près, il faut et suffit que les dérivées de</u> N :

$$N_L[L_o, M_o] , \; N_M[L_o, M_o]$$

<u>ne soient liées par aucune relation affine à coefficients entiers</u>.

<u>Preuve.</u> - Vu le théorème 6 du chap. II , § 3 : la condition d'existence d'une telle solution sur $V[L_o , M_o]$ est la condition quantique de Maslov ; la condition de son unicité est celle de l'unicité de la mesure invariante η de $V[L_o, M_o]$ (à un facteur constant près) . Le § 1 , n° 3 a donné à la condition quantique de Maslov l'énoncé (3.11) - (3.12). Le lemme 1.2 donne la condition d'unicité de la mesure invariante.

2. VARIETES LAGRANGIENNES COMPACTES V , AUTRES QUE LES TORES $V[L_o, M_o]$, SUR LESQUELLES EXISTENT DES SOLUTIONS DE L'EQUATION : $a\,U = 0$ mod. $1/\nu^2$, A AMPLITUDE LAGRANGIENNE $\geqq 0$. - Montrons que de telles variétés V n'existent qu'exceptionnellement.

Le calcul de leur indice de Maslov (lemme 2.3 et 2.4) emploiera les propriétés suivantes :

<u>Autres propriétés des caractéristiques</u> K <u>de</u> H <u>à adhérence compacte</u>. -
La différentiation de la définition (2.10) (Chap. III, § 1) de λ et μ donne :

$$\frac{1}{R}\, dQ \wedge dR + d\lambda \wedge dL + d\mu \wedge dM = 0 ,$$

où L, M, Q, R sont des fonctions de (L,M,t) vérifiant $H[L, M, Q, R] = 0$; donc :

$$H_L\, dL + H_M\, dM + H_Q\, dQ + H_R\, dR = 0 ;$$

d'où, par élimination de dQ :

$$\left[\frac{H_L}{RH_Q} dR + d\lambda\right] \wedge dL + \left[\frac{H_M}{RH_Q}\, dR + d\mu\right] \wedge dM = 0 ;$$

il existe donc trois fonctions numériques réelles ρ, σ, τ de (L, M, t) ; définies pour $H_Q \neq 0$, telles que :

(2.1)
$$d\lambda = - \frac{H_L}{RH_Q}\, dR + \rho\, dL + \sigma\, dM ,$$
$$d\mu = - \frac{H_M}{RH_Q}\, dR + \sigma\, dL + \tau\, dM ;$$

vu l'expression (1.5) de $\Delta_t\lambda$ et $\Delta_t\mu$, puis, au § 1, la définition (2.6) de t, ces relations impliquent :

(2.2) $$\Delta_t\rho = 2\pi N_{L^2} , \quad \Delta_t\sigma = 2\pi N_{LM} , \quad \Delta_t\tau = 2\pi N_{M^2} ,$$

(2.3) $$\lambda_t[L, M, t] = - H_L[L, M, Q, R], \quad \mu_t = - H_M .$$

Explicitons <u>la partie singulière</u>, pour $H_Q = 0$, de ρ, σ, τ et $\rho\tau - \sigma^2$: vu (2.1),

(2.4) $$\rho = \frac{R_L\, H_L}{R\ \ H_Q} + \lambda_L , \quad \sigma = \frac{R_M\, H_L}{R\ \ H_Q} + \lambda_M = \frac{R_L\, H_M}{R\ \ H_Q} + \mu_L , \quad \tau = \frac{R_M\, H_M}{R\ \ H_Q} + \mu_M ;$$

donc :

$$\rho\tau - \sigma^2 = \frac{1}{RH_Q}\left[R_L H_L \mu_M - R_M H_L \mu_L - R_L H_M \lambda_M + R_M H_M \lambda_L\right] + \lambda_L \mu_M - \lambda_M \mu_L .$$

Or, puisque $H[L, M, Q, R] = 0$:

$$H_R R_L + H_L + H_Q Q_L = H_R R_M + H_M + H_Q Q_M = 0 ;$$

quand $H_R \neq 0$, ces relations permettent d'éliminer R_L et R_M des expressions précédentes de $\rho, \sigma, \tau, \rho\tau - \sigma^2$; vu, au § 1, l'hypothèse (2.2) :

$$H_R \neq 0 \text{ pour } H_Q = 0 ;$$

donc :

LEMME 2.1. - Les fonctions

$$\rho + \frac{H_L^2}{RH_Q H_R} , \quad \sigma + \frac{H_L H_M}{RH_Q H_R} , \quad \tau + \frac{H_M^2}{RH_Q H_R} ,$$

(2.5)

$$\rho\tau - \sigma^2 + \frac{1}{RH_Q H_R}\left[H_L^2 \mu_M - H_L H_M (\mu_L + \lambda_M) + H_M^2 \lambda_L \right]$$

sont <u>bornées</u> au voisinage des points où $H_Q = 0$.

<u>Propriétés des variétés lagrangiennes compactes</u> V <u>de</u> W. - V est engendré par des caractéristiques de H, à adhérence compacte, appartenant donc à des tores $V[L_o, M_o]$; les fonctions

$$L, M, N = N[L, M], \quad c = c[L, M]$$

sont donc définies sur V.

Notons V_2 la partie ouverte de V où $dL \wedge dM \neq 0$, si elle n'est pas vide. Quand $dL \wedge dM = 0$ sur V, notons V_1 la partie ouverte de V où $(dL, dM) \neq 0$, si elle n'est pas vide. V_1 et V_2 sont donc des variétés lagrangiennes de V, non nécessairement compactes, engendrées par des caractéristiques K de H, à adhérences $\bar{K}$ compactes ; elles contiennent ces adhérences.

Quand V_2 et V_1 n'existent pas, V <u>est donc l'un des tores</u> $V[L_o, M_o]$.
Vu le lemme suivant, ni V_1, ni V_2 n'existe, sauf si le graphe de la fonction :

$$N : (L, M) \mapsto N[L, M]$$

<u>contient un segment rectiligne de direction rationnelle</u>.

La conséquence du théorème 2 qu'énonce l'introduction (§ 2, n° 0) résulte donc de ce lemme.

LEMME 2.2. - 1°) <u>Sur</u> V_2, N <u>est fonction affine de</u> (L, M) ; plus précisément :

(2.6) $L_1\, dL + M_1\, dM + N_1\, dN = 0$, où $(L_1, M_1, N_1) \in \mathbf{Z}^3$, P.G.C.D. $(L_1, M_1, N_1) = 1$.

V_2 est défini dans W par la donnée d'une fonction F de deux variables et par les équations:

$$(2.7) \qquad \Psi + \lambda[L, M, t] + F_L[L, M] = \Phi + \mu[L, M, t] + F_M[L, M] = 0.$$

Plus précisément, dans l'espace R^5 de coordonnées (L, M, ψ, Φ, t), ces équations (2.7) définissent une variété $\tilde{V}_2$ de dimension 3, sur laquelle, vu (1.5) où $N_L = -L_1/N_1$, $N_M = -M_1/L_1$, le sous-groupe $\tilde{\mathbf{Z}}_1$ de $\mathbf{Z}_3$ engendré par $(L_1, M_1, N_1) \in \mathbf{Z}^3$ opère comme suit :

$$(2.8) \qquad (\xi, \eta, \zeta) : (L, M, \psi, \Phi, t) \mapsto (L, M, \psi + 2\pi\xi, \Phi + 2\pi\eta, t + c[L, M]\zeta) ;$$

on a :

$$(2.9) \qquad V_2 = \tilde{V}_2 / \tilde{\mathbf{Z}}_1 .$$

V_2 possède la <u>mesure invariante</u> par le vecteur caractéristique de H :

$$\underset{V}{\eta} = dL \wedge dM \wedge dt.$$

2°) <u>Sur</u> V_1, L, M et N <u>sont fonctions affines d'une même variable</u> s ; plus précisément :

$$(2.10)\quad \frac{dL}{L_1} = \frac{dM}{M_1} = \frac{dN}{N_1} = ds \quad \text{où } (L_1, M_1) \neq 0,\ (L_1, M_1, N_1) \in \mathbf{Z}^3,\ \text{P.G.C.D. } (L_1, M_1, N_1) = 1 .$$

V_1 est défini dans W par la donnée de trois fonctions de s :

L et M, affines, vérifiant (2.10), et F,

et par les équations :

$$L = L(s)\ ,\ M = M(s)\ ,$$

(2.11)

$$L_1 \{ \psi + \lambda [L, M, t] \} + M_1 \{ \Phi + \mu [L, M, t] \} + F_s(s) = 0 .$$

Plus précisément, ces équations (2.11) définissent dans R^5 une variété $\tilde{V}_1$ de dimension 3, sur laquelle opère suivant (2.8) le sous-groupe $\tilde{Z}_2$ de Z_3 d'équation (1.10) ; rappelons que ce sous-groupe est engendré par ses trois éléments (1.14) ; on a :

$$(2.12)\qquad V_1 = \tilde{V}_1 / \tilde{Z}_2 .$$

V_1 possède la <u>mesure invariante</u> par le vecteur caractéristique de H :

$$\eta_V = (M_1\, d\psi - L_1\, d\Phi) \wedge ds \wedge dt .$$

3°) Les <u>phases</u> de V_1 et V_2 dans le repère R_o (chap. III, § 1, n° 1) valent:

$$(2.13)\qquad \varphi_{R_o} = \Omega + L\,\Psi + M\,\Phi + F .$$

<u>Note 2.1</u>. - Au § 1, (2.8) et (2.10) définissent :

Ω à l'addition près d'une fonction F de (L, M) ;

λ et μ à l'addition près de ses dérivées F_L et F_M.

Etant donné V_1 ou V_2, on peut donc choisir Ω tel que dans (2.7), (2.11) et (2.13) :

$$F = 0 .$$

Pour quantifier V, nous n'emploierons que la conséquence suivante de (2.13) et des définitions, au § 1, (2.7) de $c[L, M]$, (2.9) de N : F étant choisi nulle, la fonction :

(2.14) $\qquad \varphi_{R_o} - 2\pi N \dfrac{t}{c\,[L,M]} - L\Psi - M\Phi$ est définie sur V_1 et sur V_2.

<u>Préliminaires à la preuve</u>. - Vu la formule (2.11) du § 1, le théorème 3.1 du chap. II, § 3 s'applique avec :

$$\ell = 3\,,\ h_1 = L\,,\ h_2 = M\,,\ g_o = \Omega + L\Psi + M\Phi\,,\ g_1 = -\Psi - \lambda\,,\ g_2 = -\Phi - \mu\,,$$

la phase φ_{R_o} devant remplacer la phase lagrangienne ψ.
Toute variété lagrangienne V de W a donc localement des équations de l'un des quatre types suivants :

$(2.15)_1$ $$\Psi + \lambda + F_L\,[L\,,M] = \Phi + \mu + F_M = 0\ ;$$

$(2.15)_2$ $$M = f\,(L)\,,\ \Psi + \lambda + f_L\,(L)\,(\Phi + \mu) + F_L\,(L) = 0\,;$$

$(2.15)_3$ résultant de $(2.15)_2$ par permutation de $(L\,,\Psi)\,,(M\,,\Phi)$;

$(2.15)_4$ $$L = \text{const.}\,,\ M = \text{const.}\ ;$$

F et f sont fonctions d'une ou deux variables. La phase φ_{R_o} de V a l'expression (2.13), avec $F = 0$ dans le quatrième cas.

<u>Preuve de 1°)</u>. - Localement, V_2 a des équations du type $(2.15)_1$; V_2 est donc engendré par des caractéristiques K appartenant à des tores $V\,[L_o\,,M_o\,]$ disjoints ; leurs adhérences $\bar{K}$ sont donc disjointes et appartiennent à V_2 ; dim $V_2 = 3$; donc :

$$\dim.\ \bar{K} = 1\ .$$

Vu le lemme 1.1, les valeurs de N_L et N_M sur V sont donc des nombres rationnels. Les fonctions N_L et N_M sont donc constantes sur V et vérifient (1.6), ce qu'exprime (2.6). D'où 1°) et (2.13).

<u>Preuve de 2°)</u>. - Localement, V_1 a des équations du type $(2.15)_2$ ou $(2.15)_3$; c'est-à-dire du type :

(2.16) $\qquad L = L(s)\,,\ M = M(s)\,,\ \ L_s(s)\,(\Psi + \lambda) + M_s(s)\,(\Phi + \mu) + F_s(s) = 0$

où $(L_s, M_s) \neq 0$. Pour chaque valeur de s , notons $T(s)$ la variété de W d'équations (2.16) : dim $T(s) = 2$.

Puisque V_1 est engendré par des caractéristiques d'équations :

$$L = \text{const.}\ ,\ M = \text{const.}\ ,\ \Psi + \lambda = \text{const.}\ ,\ \Phi + \mu = \text{const.}$$

et contient leurs adhérences, V_1 contient les adhérences $\overline{T(s)}$ des $T(s)$. Déterminons - les.

Vu l'expression (1.5) de $\Delta_t\,\lambda$ et $\Delta_t\,\mu$ et vu que $L_s\,N_L + M_s\,N_M = N_s$, $T(s)$ est l'image dans W de l'ensemble des $(\Psi, \Phi, t) \in R^3$ tels que :

$$L_s\,\frac{\Psi + \lambda\,[L, M, t]}{2\pi} + M_s\,\frac{\Phi + \mu\,[L, M, t]}{2\pi} + \frac{1}{2\pi}\,F_s \in G(s)\ ,$$

où $G(s)$ est l'image de $\mathbf{Z}^3$ dans le groupe additif R par le morphisme :

$$\mathbf{Z}^3 \ni (\xi, \eta, \zeta) \longmapsto L_s\,\xi + M_s\,\eta + N_s\,\xi\ .$$

$\overline{T(s)}$ est donc l'image dans W de l'ensemble des $(\Psi, \Phi, t) \in R^3$ tels que :

$$L_s\,\frac{\Psi + \lambda\,[L, M, t]}{2\pi} + M_s\,\frac{\Phi + \mu\,[L, M, t]}{2\pi} + \frac{1}{2\pi}\,F_s \in \overline{G(s)}\ ,$$

$\overline{G(s)}$ étant l'adhérence de $G(s)$, donc un sous-groupe fermé de R .

$\overline{G(s)} = R$ et $\overline{T(s)}$ est donc le tore, de dimension 3 , $V\,[L(s), M(s)]$, sauf si $G(s)$ est discret, c'est-à-dire s'il existe $(L_1, M_1, N_1) \in \mathbf{Z}^3$ tels que

$$\frac{L_s}{L_1} = \frac{M_s}{M_1} = \frac{N_s}{N_1}\ ,\quad \text{P.G.C.D.}\ (L_1, M_1, N_1) = 1\ .$$

Puisque dim $V_1 = 3$, il doit en être ainsi pour tout s : les fonctions M_s / L_s , N_s / L_s sont à valeurs rationnelles, donc constantes ; les entiers L_1, M_1, N_1 sont indépendants de s , qu'on peut choisir tel que (2.10) ait lieu. D'où 2°) et (2.13).

Quantification de V. - Imposons à V la condition quantique de Maslov ; pour l'exprimer, calculons l'indice de Maslov m_{R_o} de V_2 et de V_1 ; nous emploierons le lemme 1 du § 1 .

Nous ferons $F = 0$ dans le lemme 2.2 (cf. Note 2.1) .

LEMME 2.3 . - 1°) Les fonctions ρ, σ, τ sont définies sur V_2 ; notons $\bar{R}$ le complété de R par un point à l'infini ; la fonction $F : V_2 \to \bar{R}$ valant

(2.17) $$F(L, M, t) = \frac{\rho L^2 + 2\sigma L M + \tau M^2}{L(L^2 - M^2)(\rho\tau - \sigma^2)} \in \bar{R}$$

est donc définie sur $V_2 \setminus \Sigma''$, Σ'' étant la partie de V_2 où :

(2.18) $$\Sigma'' : \frac{\rho}{M^2} = - \frac{\sigma}{LM} = \frac{\tau}{L^2} .$$

2°) Si $V_2 \setminus \Sigma''$ est connexe, alors sur son revêtement universel :

(2.19) $$m_{R_o} = \left[\frac{1}{\pi} \Psi + \frac{1}{\pi} \operatorname{arc\,tg} F(L,M,t) \right] , \quad ([\ldots] : \text{partie entière de } \ldots) .$$

3°) La fonction :

(2.20) $$m_{R_o} - \frac{1}{\pi} \Psi - 2 \frac{t}{c[L, M]}$$

est définie (c'est-à-dire : uniforme) sur V_2 .

Note 2.2 . - Supposons donnée la fonction

$$N : (L, M) \mapsto N[L, M] , \text{ vérifiant } (2.6) ,$$

choisissons H vérifiant (2.9) , § 1, puis Ω vérifiant (2.8) , § 1 ; pour des choix génériques :

$$\dim \Sigma'' = 1 , \quad V_2 \setminus \Sigma'' \text{ est connexe} .$$

Preuve de 1°) . - Rappelons que (L, M, t) sont des coordonnées locales de V_2 ; vu (2.2) et (2.6)

$$\Delta_t \rho = \Delta_t \sigma = \Delta_t \tau = 0 \ ;$$

d'où 1°) .

<u>Preuve de</u> 2°) . - <u>Le contour apparent de</u> V_2 . - Les formules (1.11) et (1.13) du § 1 donnent sur W :

(2.21) $$\frac{L}{\sin \Theta} \omega_2 \wedge \omega_3 = L \sin \Psi \, d\Phi \wedge d\Psi + \frac{\cos \Psi}{L^2 - M^2} (M\,dL - L\,dM) \wedge (L\,d\Psi + M\,d\Phi) \ .$$

Or la différentation de (2.7) , où $F = 0$, donne sur V_2 , vu la définition (2.1) de ρ , σ , τ :

$$d\Psi + \rho\, dL + \sigma\, dM = d\Phi + \sigma\, dL + \tau\, dM = 0 \qquad \text{mod. } dR \ ;$$

vu (2.6) § 1 :

$$dR = R\, H_Q \ dt \quad \text{mod. } (dL , dM) \ .$$

D'où :

(2.22) $$\frac{L}{R \sin \Theta} dR \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 = G\,(L , M , t , \Psi) \ dL \wedge dM \wedge dt \ ,$$

en notant G la fonction, qui, vu le lemme 2.1 , est régulière sur V_2 :

$$G = - H_Q \left[L\,(\rho\tau - \sigma^2) \ \sin \ \Psi + \frac{\rho L^2 + 2\sigma L M + \tau M^2}{L^2 - M^2} \cos \ \Psi \right] .$$

Vu le lemme 1 du § 1 , le contour apparent Σ_{R_o} de V_2 est donc :

$$\Sigma_{R_o} = \Sigma' \cup \Sigma'' \ ,$$

Σ'' étant défini par (2.18) , Σ' étant la surface de $V_2 \setminus \Sigma''$ d'équation :

(2.23) $$\Sigma' : \quad \mathrm{tg}\, \Psi + F\,(L , M , t) = 0 \ ,$$

où F est défini par (2.17) .

<u>Calcul de</u> m_{R_o} . - Les formules (1.11) et (1.13) du § 1 donnent sur W :

(2.24) $$\frac{L}{\sin \Theta} \omega_3 \wedge \omega_1 = L \cos \Psi \, d\Phi \wedge d\Psi - \frac{\sin \Psi}{L^2 - M^2} (M\,dL - L\,dM) \wedge (L\,d\Psi + M\,d\Phi) \ ;$$

d'où, par les calculs qui déduisent (2.22) de (2.21) :

(2.25) $\frac{L}{R\sin\theta}\ dR\wedge\omega_3\ \wedge\omega_1 = G_\Psi\,(L, M, t, \Psi)\ dL\wedge dM\wedge dt$.

Ces relations (2.22) , (2.25) et le lemme 1 § 1 donnent, au voisinage d'un point de Σ':

$$m_R = \text{const.} \quad \text{pour} \quad G/G_\Psi < 0 ,$$

$$m_R = 1 + \text{const.} \quad \text{pour} \quad G/G_\Psi > 0 .$$

Ce résultat vaut évidemment pour toute fonction G s'annulant une fois sur Σ' , par exemple pour la fonction :

$$G = \frac{1}{\pi}\Psi + \frac{1}{\pi}\ \text{arc tg}\ F\,(L, M, t) \qquad \text{mod. } 1 ;$$

donc, sur $V_2 \setminus \Sigma''$, m_{R_0} a localement l'expression (2.19), à une constante additive près. D'où 2°).

<u>Preuve de 3°)</u> . - Supposons d'abord H et Ω génériques (Note 2.2), donc $V_2 \setminus \Sigma''$ connexe et

$$L H_L + M H_M \neq 0 \quad \text{pour } H_Q = 0 ,$$

ce qui implique, vu le lemme 2.1, que la fonction

$$f = \rho L^2 + 2\sigma LM + \tau M^2 : V_2 \setminus \Sigma'' \to \bar{R}$$

est définie. Vu (2.19) , la fonction

(2.26) $m_{R_0} - \frac{1}{\pi}\Psi - \frac{1}{\pi}$ arc tg F est définie sur $V_2 \setminus \Sigma''$;

vu la définition de F , où $|M| < L$ d'après l'hypothèse (2.2) du § 1 , on a au voisinage des points où $F = 0$:

$$F / f < 0 ;$$

$F = 0$ équivaut à $f = 0$; donc :

(2.27) arc tg F + arc tg f est définie sur $V_2 \setminus \Sigma''$;

$$\Delta_t\,(\rho L_1^2 + 2\sigma L_1 M_1 + \tau M_1^2) = 2\pi\,[L_1^2 N_{L^2} + 2L_1 M_1 N_{LM} + M_1^2 N_{M^2}] = 2\pi\,\frac{d^2N}{ds^2} = 0 .$$

Preuve de 2°). - Le contour apparent de V_1. - La différentiation de (2.32) donne, vu (2.10) et la définition (2.1) de ρ, σ, τ :

$$d\Psi + (\rho L_1 + \sigma M_1)\,ds + M_1\,dr = d\Phi + (\sigma L_1 + \tau M_1)\,ds - L_1\,dr = 0 \quad \text{mod. } dR ;$$

d'où, vu (2.21), puisque $dR = R\,H_Q\,dt$ mod. (dL, dM), c.à.d. mod. ds :

$$\text{(2.35)} \qquad \frac{L}{R\sin\Theta}\, dR \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 = G(s, t, \Psi)\; ds \wedge dr \wedge dt ,$$

où :

$$G(s, t, \Psi) = H_Q\,[\,L(\rho L_1^2 + 2\sigma L_1 M_1 + \tau M_1^2)\sin\Psi + \frac{N_o^2}{L^2 - M^2}\cos\Psi] ;$$

vu 1°) et le lemme 2.1, la fonction $G : V_1 \to \bar{\bar{R}}$ est définie et régulière sur V_1. Vu le lemme 1 du § 1, le contour apparent $\sum_{R_o}$ de V_1 a donc pour équation :

$$\sum_{R_o} : \quad \operatorname{tg}\Psi + F(r, s, t) = 0 .$$

Calcul de m_{R_o}. - Le calcul déduisant (2.35) de (2.21) permet de déduire de (2.24) la formule :

$$\frac{L}{R\sin\Theta}\, dR \wedge \omega_3 \wedge \omega_1 = G_\Psi(s, t, \Psi)\,ds \wedge dr \wedge dt .$$

D'où, en appliquant le lemme 1 du § 1 comme le fait le lemme 2.4, l'expression (2.34) de m_{R_o}.

Preuve de 3°). - Supposons V_1 générique. Vu (2.34) :

$$\text{(2.36)} \qquad m_{R_o} - \frac{1}{\pi}\,\Psi - \frac{1}{\pi}\operatorname{arc\,tg} F(r,s,t) \quad \text{est définie sur } V_1 ;$$

vu (2.33), où $|M| < L$ d'après l'hypothèse (2.2) du § 1, et vu le lemme 2.1, $F = 0$

or :

(2.28) $$\operatorname{arc\,tg} f + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{f} = \text{const.} \;;$$

vu le lemme 2.1 , $\frac{1}{f} = 0$ équivaut à $H_Q = 0$ et, au voisinage des points où $H_Q = 0$:

$$\frac{H_Q}{H_R} f < 0 \;;$$

donc :

(2.29) $$\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{f} + \operatorname{arc\,tg} \frac{H_Q}{H_R} \quad \text{est définie sur} \quad V_2 \setminus \Sigma'' \;;$$

or, vu l'orientation de Γ , § 1, (2.9) :

(2.30) $$\operatorname{arc\,tg} \frac{H_Q}{H_R} + 2\pi \frac{t}{c[L\,,M]} \quad \text{est définie sur} \quad \Gamma\,[L\,,M]\,.$$

Les formules (2.26) ... (2.30) prouvent 3°) pour H et Ω génériques. D'où 3°).

LEMME 2.4. - 1°) Définissons sur V_1 une constante N_o et une fonction r par les relations :

(2.31) $$L_1 M - M_1 L = N_o \;;$$

(2.32) $$\Psi + \lambda + M_1 r = \Phi + \mu - L_1 r = 0\,.$$

Les fonctions $(r\,,s\,,t)$ sont des coordonnées de $\tilde{V}_1$.

Une fonction $F : V_1 \to \bar{R}$ est définie par la formule (quand V_1 est générique) :

(2.33) $$F(r\,,s\,,t) = \frac{N_o^2}{L(L^2-M^2)\,(\rho L_1^2 + 2\sigma L_1 M_1 + \tau M_1^2)}\,.$$

2°) Si V_1 est générique ($N_o \neq 0$; $H_{L^2} L_1^2 + 2H_{LM} L_1 M_1 + H_{M^2} M_1^2 \neq 0$ pour $H_Q = 0$), alors :

(2.34) $$m_{R_o} = [\tfrac{1}{\pi}\Psi + \tfrac{1}{\pi} \operatorname{arc\,tg} F(r\,,s\,,t)] \quad ([\ldots] : \text{partie entière de...})$$

3°) La fonction (2.20) est définie sur V_1 .

<u>Preuve de</u> 1°). - $(2.11)_2$, où $F = 0$ (Note 2.1) justifie la définition (2.32) de r . Vu (2.2) et (2.10) :

équivaut à $H_Q = 0$; au voisinage des points de V_1 où $H_Q = 0$:

$$F \frac{H_R}{H_Q} < 0 ;$$

donc :

(2.37) $$\operatorname{arc\,tg} F + \operatorname{arc\,tg} \frac{H_Q}{H_R} \text{ est défini.}$$

Les formules (2.30), (2.36) et (2.37) prouvent que la fonction (2.20) est définie sur V_1 générique, donc sur tout V_1.

LEMME 2.5. - 1°) Pour que V_2 <u>vérifie la condition quantique de Maslov</u>, il faut et suffit que, sur V_2, les fonctions L, M et N soient liées par une relation :

(2.38) $$L_1 \left(L - \frac{\hbar}{2}\right) + M_1 M + N_1 \left(N + \frac{\hbar}{2}\right) = \hbar N_0 ,$$

où :

(2.39) $$L_1, M_1, N_1 \neq 0, N_0 \in \mathbb{Z}, \quad \text{P. G. C. D.} (L_1, M_1, N_1) = 1 .$$

2°) Pour que V_1 <u>vérifie la condition quantique de Maslov</u>, il faut et suffit que, sur V_1, les fonctions L, M et N soient liés par les trois relations ;

(2.40) $$(L_1, M_1, N_1) \wedge \left(L - \frac{\hbar}{2}, M, N + \frac{\hbar}{2}\right) = \hbar (L_0, M_0, N_0) ,$$

où : $\wedge$ désigne le produit vectoriel dans E^3,

(2.41) $$L_1, M_1, N_1, L_0, M_0, N_0 \in \mathbb{Z}, \quad L_1^2 + M_1^2 \neq 0 ,$$
$$\text{P.G.C.D.} (L_1, M_1, N_1) = 1 , L_0 L_1 + M_0 M_1 + N_0 N_1 = 0 ;$$

deux seulement des trois relations (2.40) sont donc indépendantes.

<u>Préliminaires à la preuve.</u> - Une variété V vérifie la condition quantique de Maslov (chap. III, § 2, définition 6.2) quand la fonction

$$\frac{1}{2\pi\hbar} \varphi_R - \frac{1}{4} m_R \quad \text{est définie mod. 1 sur } V.$$

Vu (2.14) et (2.20), V_1 ou V_2 vérifie donc cette condition quand la fonction

$$(2.42) \qquad \left(\frac{L}{\hbar}+\frac{1}{2}\right)\frac{\Psi}{2\pi}+\frac{M}{\hbar}\frac{\Phi}{2\pi}+\left(\frac{N}{\hbar}+\frac{1}{2}\right)\frac{t}{c[L,M]}$$

est définie mod. 1 sur V_1 ou V_2.

<u>Preuve de 1°)</u>. - Vu le lemme 2.2 1°) : la fonction (2.42) est définie sur $\tilde{V}_2$; $V_2=\tilde{V}_2/\tilde{\mathbf{Z}}_1$; $\tilde{\mathbf{Z}}_1$ a pour générateur :

$$(L_1, M_1, N_1)$$

et opère sur $\tilde{V}_2$ suivant (2.8). La condition quantique de Maslov est donc :

$$\left(\frac{L}{\hbar}+\frac{1}{2}\right)L_1+MM_1+\left(\frac{N}{\hbar}+\frac{1}{2}\right)N_1\in\mathbf{Z}.$$

D'où 1°).

<u>Preuve de 2°)</u>. - Vu le lemme 2.2 2°): la fonction (2.42) est définie sur $\tilde{V}_1$; $V_1=\tilde{V}_1/\tilde{\mathbf{Z}}_2$; $\tilde{\mathbf{Z}}_2$ a pour générateurs :

$$(0, M_2N_3, -M_3N_2), (-L_2N_3, 0, L_3N_2), (L_2M_3, -L_3M_2, 0)$$

$L_2, \dots N_3$ étant définis par (1.12) et (1.13) ; $\tilde{\mathbf{Z}}_2$ opère sur $\tilde{V}_2$ suivant (2.8). La condition quantique de Maslov est donc :

$$\frac{M}{\hbar}M_2N_3-\left(\frac{N}{\hbar}+\frac{1}{2}\right)M_3N_2\in\mathbf{Z}\ ;\ -\left(\frac{L}{\hbar}+\frac{1}{2}\right)L_2N_3+\left(\frac{N}{\hbar}+\frac{1}{2}\right)L_3N_2\in\mathbf{Z}\ ;$$

$$\left(\frac{L}{\hbar}+\frac{1}{2}\right)L_2M_3-\frac{M}{\hbar}L_3M_2\in\mathbf{Z}\ ;$$

vu (1.13) cette condition quantique équivaut à la condition (2.40) - (2.41), complétée par la suivante : L_0, M_0, N_0 sont respectivement multiples de L_2, M_2, N_2. Or :

$$L_2 = \text{P.G.C.D.}(M_1, N_1), \dots ;$$

cette dernière condition résulte donc de (2.41). D'où 2°).

THEOREME 2. - Cherchons une solution U de l'équation lagrangienne

$$a\, U = 0 \mod 1/\nu^2 \quad (a : \text{opérateur associé à } H) ;$$

à amplitude lagrangienne $\geqq 0$, qui soit définie mod. $1/\nu$ sur une variété lagrangienne V compacte, autre que les tores $V[L_o, M_o]$ étudiés par le théorème 1 ; pour que U existe, il est nécessaire que le graphe de la fonction

$$N : (L, M) \longmapsto N[L, M] \quad [\text{Cf. Chap. III , § 1 , (2.9)}]$$

contienne un segment rectiligne d'équation plückérienne :

$$(2.40) \qquad (L_1, M_1, N_1) \wedge \left(L - \frac{\hbar}{2} , M , N + \frac{\hbar}{2}\right) = \hbar\,(L_o, M_o, N_o)$$

telle que :

$$L_1, M_1, N_1, L_o, M_o, N_o \in \mathbf{Z} , \ L_1^2 + M_1^2 \neq 0 ,$$

$$(2.41) \qquad \text{P.G.C.D.}(L_1, M_1, N_1) = 1 , \ L_o L_1 + M_o M_1 + N_o N_1 = 0 .$$

COMPLEMENT . - La condition :

$$N_o' \in \mathbf{Z}$$

est nécessaire et suffisante pour qu'existe un tel segment dans un domaine plan , appartenant à ce graphe de N et ayant une équation :

$$(2.43) \qquad L_1' \left(L - \frac{\hbar}{2}\right) + M_1' \, M + N_1' \left(N + \frac{\hbar}{2}\right) = \hbar N_o'$$

telle que :

$$(2.44) \qquad L_1' , M_1' , N_1' \in \mathbf{Z} , \ \text{P.G.C.D.}(L_1', M_1', N_1') = 1 , \ N_o' \in \mathbf{R} .$$

Note 2.3 . - Ce complément facilite l'application du théorème (cf. n° 3).

Preuve du théorème . - Vu le chapitre II , § 3 , théorème 6, V doit vérifier la condition quantique de Maslov. Puisque V n'est pas l'un des tores $V[L_o, M_o]$, V

doit contenir une variété lagrangienne V_2 ou V_1 vérifiant cette condition quantique ; vu le lemme 2.5 , le graphe de la fonction N contient donc :

soit un segment rectiligne d'équations (2.40) - (2.41) ;

soit un domaine plan d'équation (2.38) - (2.39) et donc un tel segment.

Preuve du complément . - La condition $N'_o \in \mathbb{Z}$ est évidemment suffisante. Prouvons qu'elle est nécessaire ; supposons que, dans l'espace R^3 de coordonnées (L, M, N), le plan d'équation (2.43)-(2.44) contienne une droite d'équations (2.40)-(2.41) cette hypothèse s'exprime par les 4 relations (dont les 2 dernières résultent des précédentes):

$$L_1 L'_1 + M_1 M'_1 + N_1 N'_1 = o ,$$

$$N'_o = \frac{M'_1 N_o - N'_1 M_o}{L_1} = \frac{N'_1 L_o - L'_1 N_o}{M_1} = \frac{L'_1 M_o - M'_1 L_o}{N_1} .$$

Ces relations impliquent $N'_o \in \mathbb{Z}$, puisque P.G.C.D. $(L_1, M_1, N_1) = 1$.

3. EXEMPLE : L'OPERATEUR DE SCHRÖDINGER - KLEIN - GORDON .

Nous choisissons pour a l'opérateur associé à l'hamiltonien H , défini au § 1 par (4.6) , où A sera supposé fonction affine de M , B et C constants, $B > 0$.

Ce § 1 a étudié le système :

$$a\,U = a_{L^2 - L_o^2}\, U = a_{M - M_o}\, U = 0 ,$$

et retrouvé les niveaux d'énergie classiques.

En étudiant la seule équation :

$$a\,U = 0 ,$$

nous allons retrouver les mêmes conditions d'existence, donc ces mêmes niveaux d'énergie classiques .

THEOREME 3.1 . - L'équation lagrangienne :

(3.1) $$a\,U = 0 \text{ mod. } 1/\nu^2$$

possède une solution U à AMPLITUDE LAGRANGIENNE $\geqq 0$, définie mod. $1/\nu$ sur une variété COMPACTE V si et seulement s'il existe un triplet d'entiers (ℓ, m, n)

vérifiant la condition (4.11) du théorème 4.1 du § 1 .

Note 3 . - Sous cette condition ni l'unicité de V, ni l'unicité de U à un facteur constant près (cf. Théor. 1) ne sont assurées.

Preuve . - L'existence d'une telle solution de (3.1), sous cette condition (4.11) du § 1, est assurée par le théorème 1 et aussi par ce théorème 4.1 du § 1 .

Vu le théorème 1, il ne peut exister de telle solution de (3.1) , définie sur un tore $V[L_o, M_o]$ que sous cette condition .

Vu le théorème 2 et la formule (4.8) du § 1 donnant la valeur de la fonction N :

$$N[L,M] = \frac{B}{\sqrt{A(M)}} - \sqrt{L^2+C}\ , \tag{3.2}$$

l'existence d'une telle solution sur une variété V autre qu'un tore $V[L_o, M_o]$ exige ceci :

Le graphe de N contient un segment de droite .

Elle exige donc que l'un des trois cas suivant se présente :

Premier cas : $A(M) = A_o$ est indépendant de M ; $C = 0$.

Vu (3.2), le graphe de N est donc le plan d'équation :

$$L + N = \frac{B}{\sqrt{A_o}} .$$

Le théorème 2 et son complément exigent l'existence d'un entier n tel que :

$$\frac{B}{\sqrt{A_o}} = \not{h}\, n\ ,$$

La condition (4.11) du théorème 4.1 , § 1 est donc vérifiée , puisqu'elle est indépendante de ℓ pour $C = 0$ et de m pour $A(M)$ indépendant de M.

Second cas : $C = 0$; A dépend de M .

Vu (3.2) , le graphe de N contient les seules droites d'équation :

$$M = M_o\ , N + L = \frac{B}{\sqrt{A_o}}\ , \quad \text{où } M_o = \text{const.}\ , A_o = A(M_o)\ ;$$

leurs équations plückériennes sont donc :

$$(1, 0, -1) \wedge (L - \frac{\hbar}{2}, M, N + \frac{\hbar}{2}) = (M_0, -\frac{B}{\sqrt{A_0}}, M_0).$$

Le théorème 2 exige l'existence d'entiers m et n tels que :

$$M_0 = \hbar m, \quad \frac{B}{\sqrt{A_0}} = \hbar n ;$$

$n > |m|$ car $N > 0$ et $L > |M|$ par hypothèse : cf. (1.2) au § 1. La condition (4.11) du § 1 est donc vérifiée.

Troisième cas : $A = A_0$ est indépendant de M ; $C \neq 0$.

Vu (3.2), le graphe de N contient les seules droites d'équation :

$$L = L_0, \quad N = \frac{B}{\sqrt{A_0}} - \sqrt{L_0^2 + C} \quad \text{où } L_0 \text{ est une constante, } L_0^2 + C > 0 ;$$

leurs équations plückériennes sont :

$$(0, 1, 0) \wedge (L - \frac{\hbar}{2}, M, N + \frac{\hbar}{2}) = (\frac{B}{\sqrt{A_0}} - \sqrt{L_0^2 + C} + \frac{\hbar}{2}, 0, \frac{\hbar}{2} - L_0).$$

Le théorème 2 exige l'existence d'entiers ℓ, n tels que :

$$\frac{B}{\sqrt{A_0}} + L_0 - \sqrt{L_0^2 + C} = \hbar n, \quad L_0 = \hbar(\ell + \tfrac{1}{2}) ;$$

$0 \leqq \ell$ car $0 < L_0$; $\ell < n$ car $N > 0$ par hypothèse,

La condition (4.11) du § 1 est donc vérifiée.

THEOREME 3.2. - Choisissons pour a l'opérateur de Klein-Gordon (4.22) du § 1; supposons le champ magnétique $\mathcal{H} \neq 0$. Alors les tores $T(\ell, m, n)$, définis par (4.12) § 1, sont les seules variétés compactes sur lesquelles existe une solution lagrangienne, U, à amplitude lagrangienne $\geqq 0$, de l'équation :

$$a\,U = 0 \quad \text{mod. } 1/\nu^2 .$$

Preuve. - La preuve du théorème 3.1 prouve que la condition nécessaire qu'énonce le théorème 2 ne peut pas être satisfaite quand a est l'opérateur de Klein-Gordon ($C \neq 0$) où A dépend de M ($\mathcal{H} \neq 0$).

CONCLUSION . - Nous ne poursuivons pas cette étude malaisée de l'équation $a\,U = 0 \mod. 1/\nu^2$; en particulier nous n'explicitons pas les variétés lagrangiennes, autres que les tores $T(\ell, m, n)$, sur lesquelles existent des solutions de l'équation de Schrödinger ou des solutions, quand $\mathcal{H} = 0$, de l'équation de Klein - Gordon.

§ 3 . Le système lagrangien : $a\,U = (a_M - \text{const.})\,U = (a_{L^2} - \text{const.})\,U = 0$, quand a est l'opérateur de Schrödinger - Klein - Gordon .

0. INTRODUCTION . -

Ce § 3 étudie le système lagrangien que le § 1 a résolu mod. $1/\nu^2$.

Le n° 1 cherche sous quelle condition s'applique le théorème 7.2 du chap. II , § 3

Les n° 2,3 et 4 explicitent l'application de ce théorème sous des hypothèses appropriées, de plus en plus strictes, qui constituent finalement la suivante : a est l'opérateur de Schrödinger - Klein - Gordon ; le théorème d'existence 4.1 est finalement obtenu.

Note 0 . - A. Voros (cf. [23] - [24] me fait observer que ces propriétés des équations de Schrödinger et de Klein - Gordon s'étendent au cas d'un potentiel électrique, fonction à valeurs > 0 de la seule variable R , si le niveau d'énergie E n'est plus astreint à être un nombre réel et s'il lui est permis d'être un nombre formel quelconque, de phase nulle .

1. COMMUTATIVITE DES OPERATEURS a , a_{L^2} ET a_M ASSOCIES AUX HAMILTONIENS H (§ 1, n° 2) , L^2 ET M (§ 1 , n° 1) . - Cherchons quand le théorème 7.2 du chap. II , § 3 s'applique à ces opérateurs, c'est-à-dire quand ils commutent.

LEMME 1. - 1°) a_M et a (donc, en particulier, a_M et a_{L^2}) commutent.

2°) La condition que a_{L^2} et a commutent s'énonce :

(1.1) $$(\forall L, M, Q, R) \quad H_{M^2 Q} = H_{M^2 R} = 0 .$$

Preuve .- Soient a et a' les opérateurs lagrangiens associés à deux hamiltoniens H et H' ; vu la formule (1.1) du chap. II, § 2, leur commutateur

$$a \circ a' - a' \circ a$$

est associé à la fonction formelle valant :

$$(1.2) \quad -2 \sum_{r \in N} \frac{1}{(2r+1)!} \frac{1}{(2\nu)^{2r+1}} \left[< \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial p'} > - < \frac{\partial}{\partial x'}, \frac{\partial}{\partial p} > \right]^{2r+1} H(x,p) H'(x', p') \Big|_{\substack{x'=x \\ p'=p}}$$

Supposons H et H' en involution, ce qui est le cas de H (§ 1, n° 2), L^2 et M (§ 1, n° 1), vu au § 1 (1.3) : le premier terme de (1.2) est nul. Si H' est linéaire en (x', p'), tous les autres termes sont évidemment nuls : a et a' commutent; d'où le 1°) du lemme. Supposons que H' est un polynome homogène de degré 4 en (x', p') ; alors, vu (1.2), $a \circ a' - a' \circ a$ est associé à $\frac{1}{\nu^3} H''$, H'' étant l'hamiltonien valant :

$$H''(x, p) = -\frac{1}{24} \left[< \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial p'} > - < \frac{\partial}{\partial x'}, \frac{\partial}{\partial p} > \right]^3 H(x, p) H'(x', p') \Big|_{\substack{x'=x \\ p'=p}}$$

Une double application de la formule de Taylor montre que le terme de $H'(x'+y, p'+q)$ homogène de degré 1 en (x', p) et 3 en (y, q) est :

$$\frac{1}{6} \left[< q, \frac{\partial}{\partial p'} > + < y, \frac{\partial}{\partial x'} > \right]^3 H'(x', p') = \left[< p', \frac{\partial}{\partial q} > + < x', \frac{\partial}{\partial y} > \right] H'(y, q) ;$$

donc, si H' est homogène de degré 2 en chacune de ses deux variables :

$$H''(x, p) = -\frac{1}{4} \left[< p, H'_{p'}\left(\frac{\partial}{\partial p}, \frac{\partial}{\partial x}\right) > - < x, H'_{x'}\left(\frac{\partial}{\partial p}, \frac{\partial}{\partial x}\right) > \right] H(x, p) .$$

En particulier, pour $H' = L^2$, c'est-à-dire : $H'(x', p') = |x' \wedge p'|^2$:

$$(1.3) \quad H''(x, p) = \frac{1}{2} < p \wedge \frac{\partial}{\partial p} + x \wedge \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial p} \wedge \frac{\partial}{\partial x} > H(x, p) ;$$

dans cette formule, les couples d'opérateurs

$$\left(p \wedge \frac{\partial}{\partial p} + x \wedge \frac{\partial}{\partial x}\right)_j \quad , \quad \left(\frac{\partial}{\partial p} \wedge \frac{\partial}{\partial x}\right)_j \qquad \text{commutent .}$$

L'opérateur $\left(p \wedge \frac{\partial}{\partial p} + x \wedge \frac{\partial}{\partial x}\right)_j$ est une rotation infinitésimale agissant sur x et p ; elle annule donc L, Q, R ; un calcul aisé donne :

$$\left(p \wedge \frac{\partial}{\partial p} + x \wedge \frac{\partial}{\partial x}\right) M(x, p) = x_3\, p - p_3\, x ;$$

supposons H fonction composée de L, M, Q, R [§ 1, (2.1)] ;

(1.3) devient donc :

$$H''(x, p) = \tfrac{1}{2} < \frac{\partial}{\partial p} \wedge \frac{\partial}{\partial x}\, ,\ H_M\, x_3\, p - H_M\, p_3\, x > ;$$

notons pour toute fonction F de (x, p) :

$$\mathcal{X} F = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ F_{x_1} & F_{x_2} & F_{x_3} \end{vmatrix} \quad , \quad \mathcal{P} F = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ F_{p_1} & F_{p_2} & F_{p_3} \end{vmatrix} \quad ;$$

l'expression précédente de H'' s'écrit :

$$H''(x, p) = \tfrac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_3} \mathcal{P} H_M - \tfrac{1}{2} \frac{\partial}{\partial p_3} \mathcal{X} H_M .$$

Or les opérateurs différentiels linéaires $\mathcal{X}$ et $\mathcal{P}$ annulent évidemment P^2, Q, R^2, donc L^2 vu (1.2) § 1 ;

$$\mathcal{X} M = - \tfrac{1}{2} \frac{\partial L^2}{\partial x_3} \quad , \quad \mathcal{P} M = - \tfrac{1}{2} \frac{\partial L^2}{\partial p_3} ;$$

en notant $\mathcal{D} F$ le déterminant fonctionnel

$$\mathcal{D}\, F = \frac{\partial L^2}{\partial x_3}\, \frac{\partial F}{\partial p_3} - \frac{\partial L^2}{\partial p_3}\, \frac{\partial F}{\partial x_3} \quad ,$$

l'expression de H" devient donc :

$$H''(x, p) = \tfrac{1}{4}\, \mathcal{D}\, H_{M^2} \ .$$

Or l'opérateur differentiel linéaire $\mathcal{D}$ annule évidemment L et M ;

$$\tfrac{1}{2}\, \mathcal{D}\, Q = P^2 x_3^2 - R^2 p_3^2 \quad ; \quad \frac{R}{2} \mathcal{D}\, R = Q\, x_3^2 - R^2 p_3\, x_3$$

l'expression précédente de H" devient donc :

$$(1.4) \qquad H''(x, p) = \tfrac{1}{2} \left(P^2 H_{M^2 Q} + \frac{Q}{R} H_{M^2 R}\right) x_3^2 - \frac{R}{2} H_{M^2 R}\; p_3\, x_3 - \tfrac{1}{2} R^2 H_{M^2 Q}\; p_3^2$$

Vu le n°1 du § 1, p_3/x_3 est indépendant de (L, M, Q, R) : la condition :

$$(\forall\, x, p)\ H''(x, p) = 0$$

équivaut donc à (1.1), ce qui prouve le 2°) du lemme.

2. CAS D'UN OPERATEUR $\breve{a}$ COMMUTANT À a_{L^2} ET a_M. - Supposons (1.1) vérifié : le lemme 1 prouve que le théorème 7.2 du chap. II, § 3 s'applique au système lagrangien :

$$(2.1)_r \qquad a\, U = (a_{L^2} - c_L)\, U = (a_M - c_M)\, U = 0 \quad \text{mod. } 1/\nu^{r+2} \quad (r \geqq 1) \ ,$$

où c_L et c_M sont deux nombres formels de phase nulle, tels que :

$$(2.2) \qquad c_L - L_o^2 = c_M - M_o = 0 \quad \text{mod. } 1/\nu^2 \ .$$

Les expressions $a^+_{L^2}$ et a^+_M de a_{L^2} et a_M dans R_o sont les suivantes, vu le chap. I, § 1, n° 3 et la formule

$$e^{\frac{1}{2\nu} < \frac{\partial}{\partial x} , \frac{\partial}{\partial p} >} L^2(x, p) = \left[1 + \frac{1}{2\nu} < \frac{\partial}{\partial x} , \frac{\partial}{\partial p} > + \frac{1}{8\nu^2} < \frac{\partial}{\partial x} , \frac{\partial}{\partial p} >^2\right] (P^2 R^2 - Q^2)$$

$$= P^2 R^2 - Q^2 - \frac{2}{\nu} Q - \frac{3}{2\nu^2} \; :$$

(2.3) $$a^+_{L^2} (\nu , x , \frac{1}{\nu} \frac{\partial}{\partial x}) = \frac{1}{\nu^2} (\Delta_o - \frac{3}{2}) ,$$

où

(2.4) $$\Delta_o = R^2 \Delta - \sum_{j,k} x_j x_k \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} - 2\sum_j x_j \frac{\partial}{\partial x_j} \; [\Delta = \sum_j (\frac{\partial}{\partial x_j})^2]$$

est le laplacien sphérique, vu son expression (2.24) : il opère sur les restrictions des fonctions aux sphères : R = const. ;

$$a^+_M (\nu , x , \frac{1}{\nu} \frac{\partial}{\partial x}) = \frac{1}{\nu} (x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1}) ,$$

qui est une rotation infinitésimale.

Imposons à l'inconnue U d'être définie mod. $1/\nu^{r+1}$ sur une variété lagrangienne <u>compacte</u> V ; vu le théorème 3 du § 1

i) V est nécessairement l'un des tores

$$V = V [L_o , M_o] = T (\ell , m , n) \quad : \quad H = L^2 - L_o^2 = M - M_o = 0$$

que définit le 1°) de ce théorème

ii) l'amplitude lagrangienne β_o de U est nécessairement constante.

Si $\beta_o = 0$, $(2.1)_r$ se réduit à $(2.1)_{r-1}$; imposons donc la condition :

(2.5) $$\beta_o = \text{const.} \neq 0 .$$

Nommons <u>problème</u> $(2.1)_r$ le problème défini par le système $(2.1)_r$, la condition (2.5) et la condition que V <u>est compacte</u>.

<u>Notations</u> . - La formule (3.16) de ce même théorème 3 du § 1 explicite la mesure invariante η : les formules (1.16) et (3.6) du § 1 explicitent d^3x ; la formule (3.4) du chap. I , § 3 définit arg. $d^3 x = \pi \, m_{R_o}$; m_{R_o} est donné par (3.5) § 1 ; arg. $\eta = 0$ par définition ; d'où la valeur de la fonction χ ,

que définit et emploie le § 3 du chap. III, et de son argument :

$$\chi = \frac{\eta}{d^3x} = [R^3 H_Q [L_o , M_o , Q , R] \sin \Psi \sin \Theta]^{-1} , \quad \text{où} \quad \Theta = \text{const.} ;$$

(2.6)

$$\text{arg.}\, \chi = - \text{arg.}\, H_Q - \text{arg.} \sin \Psi , \quad \text{où} : \text{arg.}\, H_Q = - \pi [\frac{1}{\pi} \text{arc tg} \frac{H_Q}{H_R}] , \quad \text{arg.} \sin \Psi = \pi [\frac{\Psi}{\pi}] ;$$

rappelons que [...] est la partie entière de .... .

Le contour apparent de V est

(2.7) $$\sum_{R_o} : H_Q \sin \Psi = 0 \; ; \quad \chi : V \setminus \sum_{R_o} \to \mathbb{R} .$$

Soit U une fonction lagrangienne sur V , à amplitude lagrangienne

$$\beta_o = \text{const.} \neq 0 ;$$

son expression dans R_o sera notée :

(2.8) $$U_{R_o} (\nu) = \sqrt{\chi}\, \beta (\nu)\, e^{\nu \varphi_{R_o}} , \quad \text{où} \quad \beta (\nu) = \sum_{s \in \mathbb{N}} \frac{\beta_s}{\nu^s} ;$$

vu, au chap. II , § 2 , le théorème de structure 2.2 et la définition 3.2 des fonctions lagrangiennes, la fonction

$$\chi^{-3s} \beta_s : V \to \mathbb{C}$$

est régulière même sur $\sum_{R_o}$.

Soient D_H , D_L , D_M les opérateurs tels que :

$$[a U]_{R_o} = \frac{\sqrt{\chi}}{\nu} e^{\nu \varphi_{R_o}} D_H \beta ;$$

(2.9) $$[(a_{L^2} - L_o^2) U]_{R_o} = \frac{\sqrt{\chi}}{\nu} e^{\nu \varphi_{R_o}} D_L \beta ;$$

$$[(a_M - M_o) U]_{R_o} = \frac{\sqrt{\chi}}{\nu} e^{\nu \varphi_{R_o}} D_M \beta .$$

D_H, D_{L^2} et D_M <u>commutent</u>, puisque a, a_{L^2} et a_M commutent.

Employons sur $V \setminus \sum_{R_o}$ les coordonnées locales (R, Ψ, Φ).

LEMME 2.1. - 1°) Avec ce choix de coordonnées :

$$D_M = \frac{\partial}{\partial \Phi} . \tag{2.10}$$

2°) Si U est solution de l'équation

$$(a_M - c_M)\, U = 0 \quad \text{mod } 1/\nu^{r+2}, \tag{2.11}$$

où c_M est un nombre formel, de phase nulle, tel que

$$c_M = M_o \quad \text{mod. } 1/\nu^2 ,$$

alors :

$$c_M = M_o \quad \text{mod. } 1/\nu^{r+2} ;$$

β est, mod. $1/\nu^{r+1}$, fonction des seules coordonnées (R, Ψ).

<u>Preuve de 1°)</u>. - Calculons D_M au moyen du théorème 4 du chap. II, § 3 : on substitue à H dans ce théorème l'hamiltonien $M - M_o$; vu (3.18), § 1, les caractéristiques de cet hamiltonien ont pour équations

$$dt = d\Psi = 0 , \quad \text{c'est-à-dire : } dR = d\Psi = 0 ;$$

le paramètre de ces caractéristiques est Φ, qu'on substitue à t dans ce théorème. On obtient (2.10).

<u>Preuve de 2°)</u>. - Pour $r = 0$, 2°) est évident. Une récurrence sur r permet de supposer 2°) vrai quand on y remplace r par $r - 1$; alors

$$c_M = M_o + \frac{M_{r+1}}{\nu^{r+1}} \qquad (M_{r+1} \in C) ;$$

(2.11), vu (2.9) et (2.10), équivaut à :

$$\frac{\partial \beta_r}{\partial \Phi} = M_{r+1}\, \beta_o , \quad \text{où } \beta_o = \text{const.} \neq 0 ;$$

or β_r est une fonction de Φ ayant la période 2π ; donc :

$$M_{r+1} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \beta_r}{\partial \Phi} = 0 \; ;$$

d'où 2°)

Notations . - Nous supposerons désormais β fonction des seules variables (R, Ψ) ; vu (2.10) , D_H et D_L commutent à $\frac{\partial}{\partial \Phi}$ et opèrent donc sur les fonctions de (R, Ψ) .

LEMME 2.2 . - 1°) En coordonnées locales (R, Ψ, Φ) :

$$D_L \; \beta = 2\, L_o \frac{d\tau}{d\Psi} \left[\frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{1}{\nu} \; F \right] \beta - \frac{5}{4\nu} \; \beta \; , \tag{2.12}$$

où : τ est la variable

$$\tau = \operatorname{cotg} \Psi \; ;$$

F est l'opérateur à coefficients polynomiaux valant :

$$F\,\beta = F_1 \; \beta + \frac{\partial}{\partial \tau} \left[F_2 \frac{\partial \beta}{\partial \tau} \right] \; ,$$

F_1 et F_2 étant les polynomes de τ valant :

$$F_1 (\tau) = \frac{5\, M_o^2\, \tau^2 + L_o^2 + M_o^2}{8\, L_o\, (L_o^2 - M_o^2)} \; , \; F_2 (\tau) = \frac{(M_o^2\, \tau^2 + L_o^2)\; (\tau^2 + 1)}{2\, L_o\, (L_o^2 - M_o^2)} \; .$$

2°) Soit U une fonction lagrangienne, définie sur le tore : $V[L_o , M_o]$, d'amplitude lagrangienne $\beta_o \neq 0$ et solution du système :

$$(a_{L^2} - c_L)\; U = (a_M - M_o)\; U = 0 \quad \text{mod. } 1/\nu^{r+2} \; , \tag{2.13}$$

où c_L est un nombre formel, de phase nulle, tel que :

$$c_L = L_o^2 \quad \text{mod. } 1/\nu^2 \; .$$

Notons $\sum$ l'ensemble des points de la courbe $\Gamma\,[L_o , M_o]$ [§ 1 , (2.5)] où:

$$\Sigma : H_Q = 0 \ .$$

Alors :

(2.14) $$c_L = L_o^2 - \frac{5}{4\nu^2} \quad \text{mod. } 1/\nu^{r+2} ;$$

(2.15) $$\beta(\nu, R, \Psi) = g(\nu, R)\, f(\nu, \tau) \quad \text{mod. } 1/\nu^{r+1},$$

g étant une fonction formelle, arbitraire, de phase nulle, définie sur $\Gamma[L_o, M_o] \setminus \Sigma$, f étant définie comme suit.

3°) Il existe une unique fonction formelle, définie sur $\mathbb{R}$, f, valant :

(2.16) $$f(\nu, \tau) = \sum_{s \in \mathbb{N}} \frac{1}{\nu^s} f_s(\tau) \qquad (\tau \in \mathbb{R})$$

telle que :

(2.17) $$\frac{df}{d\tau} = \frac{1}{\nu} F f ;$$

(2.18) $f_o = 1$; f_s est un polynome réel de τ, de degré $3s$, ayant la parité de s ;

(2.19) $$f \bar{f} = 1 + \frac{1}{\nu} F_2 \left(\bar{f} \frac{df}{d\tau} - f \frac{d\bar{f}}{d\tau}\right) \quad [\ \bar{f} : \text{imaginaire conjugué de } f\ ];$$

[(2.19) exprime f_{2s} au moyen de $f_1, \ldots, f_{2s-1}$.]

Toute solution de (2.17) mod. $1/\nu^r$ est, mod. $1/\nu^r$, le produit de f par un nombre formel de phase nulle.

Note 2 . - La fonction formelle U' de x, homogène de degré 0 , définie pour

$$M_o R < L_o \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \ ,$$

valant :

(2.20) $$U'(\nu, x) = \frac{f(\nu, \Psi)}{\sqrt{\sin \Psi}}\, e^{\nu(L_o \Psi + M_o \Phi)} ,$$

vérifie :

(2.21) $$\frac{1}{\nu}\left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1}\right) U' = M_o\, U' \;;\; \frac{1}{\nu^2}\, \Delta U' = \frac{1}{R^2}\left(L_o^2 + \frac{1}{4\nu^2}\right) U' .$$

Preuve de 1°). - Calculons D_L au moyen du théorème 4 du chap. II, § 3 : on y substitue à H l'hamiltonien $L^2 - L_o^2$; vu (3.17), § 1, les caractéristiques de cet hamiltonien ont pour équations

$$dt = d\Phi = o, \text{ c'est-à-dire : } dR = d\Phi = 0 \;;$$

le paramètre de ces caractéristiques est $\Psi / 2L_o$, qu'on substitue à t dans ce théorème ; au second membre de la formule (4.5) de ce théorème doit être substitué :

$$e^{\frac{1}{2}<\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial p}>} L^2(x, p) = \left[1 + \tfrac{1}{2}<\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial p}> + \frac{1}{8}<\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial p}>^2\right](P^2 R^2 - Q^2)$$

$$= P^2 R^2 - Q^2 - 2Q - \frac{3}{2} \;;$$

ce théorème donne :

(2.22) $$D_L\, \beta = 2L_o \frac{\partial \beta}{\partial \Psi} + \frac{1}{\nu}\left[\chi^{-1/2}\, \Delta_o(\beta \chi^{1/2}) - \frac{3}{2}\beta\right],$$

où Δ_o est défini par (2.4) en coordonnées (x_1, x_2, x_3).

Vu le § 1, (1.5) et (1.12), nous avons, en employant aux premiers membres les coordonnées (R, Ψ, Φ) et aux seconds membres les coordonnées (x_1, x_2, x_3) ;

(2.23) $$R\frac{\partial}{\partial R} = \sum_{j=1}^{3} x_j \frac{\partial}{\partial x_j} \;;\; \text{donc : } R^2 \frac{\partial^2}{\partial R^2} = \sum_{j,k} x_j\, x_k \frac{\partial^2}{\partial x_j\, \partial x_k} .$$

La définition (2.4) de Δ_o s'énonce donc :

(2.24) $$\Delta_o = R^2 \Delta - R^2 \frac{\partial^2}{\partial R^2} - 2R \frac{\partial}{\partial R} .$$

Or les formules (1.5) et (1.12) du § 1 donnent :

$$\frac{x_3}{R} = -\sin\Theta \cos\Psi, \text{ où } \cos\Theta = \frac{M_o}{L_o}, \text{ vu § 1, (1.11) ;}$$

d'où, sur V :

$$< R_x , \Psi_x > = 0 \ ; \ R^2 < \Psi_x , \Psi_x > = 1 + \frac{\operatorname{cotg}^2 \Theta}{\sin^2 \Psi} \ , \ R^2 \Delta \Psi = \operatorname{cotg} \Psi \left(1 - \frac{\operatorname{cotg}^2 \Theta}{\sin^2 \Psi}\right) ;$$

d'où l'expression de $R^2 \Delta$ sur les fonctions de (R , Ψ) ; portée dans (2.24), elle donne sur ces fonctions :

$$(2.25) \qquad \Delta_o = \left(1 + \frac{\operatorname{cotg}^2 \Theta}{\sin^2 \Psi}\right) \frac{\partial^2}{\partial \Psi^2} + \operatorname{cotg} \Psi \left(1 - \frac{\operatorname{cotg}^2 \Theta}{\sin^2 \Psi}\right) \frac{\partial}{\partial \Psi} \ ;$$

d'où, vu (2.6), par un calcul banal :

$$\chi^{-\frac{1}{2}} \Delta_o (\beta \chi^{1/2}) = \sqrt{\sin \Psi} \ \Delta_o \left(\frac{\beta}{\sqrt{\sin \Psi}} \right)$$

$$(2.26) \qquad = - 2 L_o \frac{d\tau}{d \Psi} F \beta + \tfrac{1}{4} \beta \ ;$$

de (2.22) résulte donc (2.12) .

<u>Preuve de 2°)</u> . - Vu le lemme 2.1, β est localement fonction des seules variables (R , Ψ) . Vu ce lemme et (2.12) , β_o est une fonction, non identiquement nulle, de la seule variable R.

Pour $r = o$, 2°) est évident. Une récurrence sur r permet de supposer que $\beta_o , \dots , \beta_{r-1}$ sont des polynomes en τ, à coefficients fonctions de R et que 2°) est vrai, quand on y remplace r par $r - 1$. Alors :

$$c_L = L_o^2 - \frac{5}{4 \nu^2} + \frac{2 L_o L_{r+1}}{\nu^{r+1}} \quad \text{mod. } 1 / \nu^{r+2} \ (L_{r+1} \in C) \ ;$$

l'équation $(2.13)_1$ s'écrit donc :

$$(2.27) \qquad \frac{1}{\nu} D_L \ \beta + \left(\frac{5}{4 \nu^2} - \frac{2 L_o L_{r+1}}{\nu^{r+1}}\right) \beta = 0 \quad \text{mod. } 1 / \nu^{r+2} \ ;$$

vu l'hypothèse de récurrence, cette équation vaut mod. $1 / \nu^{r+1}$; vu (2.12), elle s'écrit donc :

$$d\beta_r = (F\beta_{r-1})\, d\tau + L_{r+1}\beta_o\, d\Psi, \quad \text{pour} \quad R = \text{const.} \ ;$$

donc, puisque F est un opérateur à coefficients polynomiaux, β_r est la somme d'un polynome en $\tau = \operatorname{cotg}\Psi$ et de la fonction $L_{r+1}\ \beta_o\ \Psi$; où $\beta_o \neq 0$;

or β_r est une fonction de Ψ de période 2π ; donc :

$$L_{r+1} = 0 \ ; \ \beta_r \quad \text{est un polynome en} \quad \tau \ ;$$

(2.27) s'écrit :

$$d\beta = \frac{1}{\nu}(F\beta)\, d\tau \qquad \text{mod. } 1/\nu^{r+1} \quad \text{pour} \quad R = \text{const.} \ ;$$

d'où (2.15), si 3°) est vrai.

<u>Preuve de</u> 3°). - La condition que (2.16) vérifie (2.17) mod $1/\nu^r$ s'écrit :

$$f_o = \text{const.}, \quad \frac{df_s}{d\tau} = F f_{s-1} \quad \text{pour} \quad s = 1, \ldots, r-1 \ ;$$

f_s est donc un polynome en τ, de degré $3s$, contenant une constante d'intégration arbitraire ; f est donc bien défini, au produit près par un nombre formel, de phase nulle.

Choisissons les constantes d'intégrations réelles : les f_r sont réelles.
Il existe un choix unique des constantes d'intégration des f_{2s-1} tel que les f_r aient la parité de r.

<u>Preuve de</u> (2.19). - Soit $\bar{f}$ l'imaginaire conjuguée de f ; puisque ν est imaginaire pure et F réel, (2.17) implique :

$$\frac{d\bar{f}}{d\tau} = -\frac{1}{\nu} F\bar{f} \ ; \ \frac{d}{d\tau}(f\bar{f}) = \frac{1}{\nu}(\bar{f}Ff - fF\bar{f}),$$

c'est-à-dire, vu la définition de F :

$$\frac{d}{d\tau}(f\bar{f}) = \frac{1}{\nu}\left[\bar{f}\frac{d}{d\tau}\left(F_2\frac{df}{d\tau}\right) - f\frac{d}{d\tau}\left(F_2\frac{d\bar{f}}{d\tau}\right)\right] = \frac{1}{\nu}\frac{d}{d\tau}\left[F_2\left(\bar{f}\frac{df}{d\tau} - f\frac{d\bar{f}}{d\tau}\right)\right];$$

donc :

$$f\bar{f} - \frac{1}{\nu}F_2\left(\bar{f}\frac{df}{d\tau} - f\frac{d\bar{f}}{d\tau}\right) = \sum_{s\in N}\frac{c_s}{\nu^{2s}} \quad (c_o = 1, c_s \in R).$$

c'est-à-dire, puisque les f_r sont réelles :

$$(\forall s \in \mathbb{N}) \sum_{s'=o}^{2s} (-1)^{s'} f_{2s-s'} f_{s'} = 2F_2 \sum_{s'=o}^{2s-1} (-1)^{s'} f_{s'} \frac{d}{d\tau} f_{2s-1-s'} + c_s ;$$

si $s > 0$, cette formule exprime f_{2s} au moyen de $f_1, \dots, f_{2s-1}$ et de $c_s \in \mathbb{R}$, qu'annule un choix approprié de la constante d'intégration de f_{2s}.

Preuve de $(2.21)_2$. - Vu (2.12) et (2.17) :

$$D_L f = -\frac{5}{4\nu} f ;$$

c'est-à-dire, vu la définition (2.9) de D_L :

$$\left[a^+_{L^2}(\nu, x, \frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x}) - L_o^2 + \frac{5}{4\nu^2} \right] (\sqrt{\chi} f e^{\nu \varphi_{R_o}}) = 0 ;$$

c'est-à-dire, vu l'expression (2.3) de $a^+_{L^2}$ et l'expression (2.6) de χ, puisque Δ_o opère sur les restrictions des fonctions aux sphères $R = $ cte et puisque φ_R a l'expression (3.4) du § 1, où Ω ne dépend que de R :

$$(\frac{1}{\nu^2} \Delta_o - L_o^2 - \frac{1}{4\nu^2}) \quad U'(\nu, x) = 0 ,$$

U' étant défini par (2.20) ; U' est homogène de degré 0 en x ; d'où $(2.21)_2$, vu la définition (2.24) de Δ_o.

Preuve de $(2.21)_1$. - De la définition (2.16) de f et de l'expression (2.10) de D_M résulte :

$$D_M f = 0 ;$$

c'est-à-dire, vu la définition (2.8) - (2.9) de D_M :

$$(a^+_M - M_o) (\sqrt{\chi} f e^{\nu \varphi_{R_o}}) = 0 ;$$

le début du n° 2 a calculé :

$$a^+_M = \frac{1}{\nu} (x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1}) ;$$

a_M^+ annule donc les fonctions de la seule variable R ; vu l'expression (2.6) de χ et l'expression (3.4) § 1 de φ_{R_o}, la relation précédente équivaut donc à $(2.21)_1$.

LEMME 2.3. - Il existe un opérateur D, opérant sur les fonctions formelles g définies sur $\Gamma[L_o, M_o]\setminus\Sigma$, tel que :

$$D_H[f(\nu,\Psi)\, g(\nu,R)] = f(\nu,\Psi)\, Dg(\nu,R). \tag{2.28}$$

On a localement :

$$D = \sum_{s\in\mathbb{N}} \frac{1}{\nu^s} D_s\left(R, \frac{d}{dR}\right) \tag{2.29}$$

$D_s\left(R, \frac{d}{dR}\right)$ étant un opérateur différentiel défini sur $\Gamma[L_o, M_o]\setminus\Sigma$;

$$D_o = R H_Q \frac{d}{dR}. \tag{2.30}$$

Preuve. - Puisque D_H commute à D_L, qui a l'expression (2.12),

$$\frac{d\tau}{d\Psi}\left(\frac{\partial}{\partial\tau} - \frac{1}{\nu}F\right) D_H[f(\nu,\Psi)\, g(\nu,R)] =$$

$$D_H\left[\frac{d\tau}{d\Psi}\left(\frac{\partial}{\partial\tau} - \frac{1}{\nu}F\right) f(\nu,\Psi)\, g(\nu,R)\right] = 0 ;$$

vu le lemme 2.2 3°), $D_H[fg]$ est donc le produit de f par une fonction formelle, qui est définie sur $\Gamma[L_o, M_o]\setminus\Sigma$ et qui est notée Dg.

Le théorème 4 du chap. II, § 3 prouve que D_H est du type :

$$D_H = \sum_{s\in\mathbb{N}} \frac{1}{\nu^s} D_{H,s}\left(R, \Psi, \frac{\partial}{\partial R}, \frac{\partial}{\partial\Psi}\right),$$

$D_{H,s}$ étant un opérateur différentiel ; il en résulte que D est du type (2.29). Puisque les caractéristiques de H vérifient (2.14), § 1, ce même théorème prouve que :

$$D_H(fg)\, dt = d(fg) \bmod. 1/\nu, \text{ pour } dR = RH_Q\, dt,\ d\Psi = H_L\, dt ;$$

or :

$$f = 1 \mod. 1/\nu \ ;$$

donc :

$$D_H (f g) = R H_Q \frac{dg}{dR} \quad \mod. 1/\nu \ ;$$

cette relation équivaut à (2.30) .

THEOREME 2 . - 1°) Le problème $(2.1)_r$, défini au début de ce n°2 , n'est possible que si :

$$c_L = L_o^2 - \frac{5}{4\nu^2} \quad , c_M = M_o \ .$$

2°) CE PROBLEME $(2.1)_r$ EQUIVAUT AU PROBLEME $(2.31)_r$ dont voici l'énoncé : définir sur $\Gamma [L_o , M_o] \setminus \Sigma$, mod. $1/\nu^{r+1}$, une fonction formelle

$$g(\nu) = \sum_{s \in \mathbb{N}} \frac{1}{\nu^s} g_s \quad (g_o = 1 , g_s : \Gamma [L_o , M_o] \setminus \Sigma \to C)$$

satisfaisant aux conditions :

$$(2.31)_r \quad \begin{cases} Dg = 0 \mod. 1/\nu^{r+1} \ ; \\ (H_Q)^{3r} g \ \text{ est régulière, mod. } 1/\nu^{r+1} , \text{ sur } \Gamma [L_o , M_o] . \end{cases}$$

Toute fonction formelle satisfaisant aux conditions $(2.31)_r$ est, mod. $1/\nu^{r+1}$, le produit de g par un nombre formel de phase nulle.

La condition que g est solution du problème $(2.31)_r$ équivaut évidemment à la suivante :

g est solution du problème $(2.31)_{r-1}$;

$$(2.32)_r \quad \begin{cases} R H_Q \dfrac{dg_r}{dR} + \sum\limits_{s=1}^{r} D_s g_{r-s} = 0 \quad \text{sur } \Gamma [L_o , M_o] \setminus \Sigma \ ; \\ (H_Q)^{3r} g_r \ \text{ est régulière sur } \Gamma [L_o , M_o] . \end{cases}$$

Ω étant défini par (2.8) , § 1 , définissons sur $\Gamma [L_o , M_o] \setminus \Sigma$ la fonction formelle

$$U''(\nu) = \frac{g e^{\nu \Omega}}{\sqrt{R^3 H_Q}} \ ;$$

alors $U'(\nu)\, U''(\nu)$ est l'expression U_{R_o} d'une solution U du problème $(2.1)_r$. Toute solution du sytème $(2.1)_r$, définie sur $V[L_o, M_o]$, est, mod. $1/\nu^{r+1}$, le produit de cette solution par un nombre formel.

3°) Supposons g solution du problème $(2.31)_{r-1}$; il existe alors une fonction $g_r : \check{\Gamma}[L_o, M_o] \setminus \check{\Sigma} \to C$ vérifiant $(2.32)_r$, quand on y remplace Γ par son revêtement universel $\check{\Gamma}$; g_r est définie à une constante additive près. La condition que g_r est définie sur $\Gamma[L_o, M_o] \setminus \Sigma$ équivaut à la possibilité de résoudre les problèmes équivalents $(2.1)_r$ et $(2.31)_r$.

Preuve de 1°). - Les lemmes 2.1 2°) et 2.2 2°).

Preuve de 2°). - (2.6), (2.8), les lemmes 2.1 2°), 2.2 2°) et 2.3, les théorèmes 5 et 7.2 du chap. II, § 3.

Preuve de 3°). - Ces théorèmes.

3. UN CAS PLUS SPECIAL. - Pour préciser ce théorème 2, choisissons, comme au § 1, n° 4 :

$$H[L, M, Q, R] = \tfrac{1}{2}\,\{P^2 - \frac{1}{R^2}\,K[R, M]\} = \frac{1}{2R^2}\,\{L^2 + Q^2 - K[R, M]\} \; ; \tag{3.1}$$

choisissons K fonction affine de M : la condition (1.1) est vérifiée ; vu au § 1, (4.5), l'opérateur associé à H a pour expression dans R_o :

$$a = \frac{1}{2\nu^2}\,\Delta - \frac{1}{2R^2}\,K[R, \frac{1}{\nu}(x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1})]. \tag{3.2}$$

$$L_o^2 + Q^2 - K[R, M_o] = 0 \quad \text{sur la courbe } \Gamma[L_o, M_o] \; ; \tag{3.3}$$

Σ est l'ensemble des points de cette courbe où $Q = 0$.

LEMME 3. - On a :

$$D = \frac{Q}{R}\,[\frac{d}{dR} - \frac{1}{\nu}\,G], \tag{3.4}$$

où G opère sur les fonctions

$$g : \Gamma[L_o, M_o] \setminus \Sigma \to C$$

et vaut :

$$Gg = G_1\, g + \frac{d}{dR}\,[G_2\, \frac{dg}{dR}], \tag{3.5}$$

G_1 et G_2 étant les fonctions, définies sur $\Gamma[L_o, M_o]\setminus\Sigma$, valant :

$$G_1(R,Q) = \frac{G_3(R)}{Q^5}, \quad G_2(R,Q) = -\frac{1}{2}\frac{R}{Q}, \tag{3.6}$$

où

$$G_3(R) = -\frac{5}{32} R(K_R)^2 + \frac{1}{8}(K - L_o^2)(K_R + R K_{R^2}).$$

<u>Preuve.</u> - L'opérateur D s'explicite comme suit, à l'aide du théorème 4 du chap. II, § 3 : dans la formule (4.5) de ce théorème $s=2$ et

$$e^{\frac{1}{2}\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial p}\rangle} H^{(2)}(x,p) = e^{\frac{1}{2}\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial p}\rangle} \tfrac{1}{2}P^2 = \tfrac{1}{2}P^2 ; \tag{3.7}$$

les équations (2.14) § 1 des caractéristiques impliquent :

$$dR = \frac{Q}{R}\,dt, \quad d\Psi = \frac{L_o}{R^2}\,dt ; \tag{3.8}$$

ce théorème donne donc, vu la définition (2.9) de D_H, quand β dépend des seules coordonnées (R, Ψ) de V :

$$D_H\beta\,dt = d\beta + \frac{1}{2\nu}\chi^{-1/2}\Delta(\beta\chi^{1/2})\,dt$$

pour dt, dR, $d\Psi$ vérifiant (3.8) ; c'est-à-dire :

$$D_H\beta = \frac{\partial\beta}{\partial R}\frac{Q}{R} + \frac{\partial\beta}{\partial\Psi}\frac{L_o}{R^2} + \frac{1}{2\nu}\chi^{-1/2}\Delta(\beta\chi^{1/2}). \tag{3.9}$$

Vu (2.6)

$$\chi = [QR\sin\Psi\sin\Theta]^{-1}, \quad \Theta = \text{const.} ;$$

donc, vu la définition (2.24) de Δ_o, qui opère sur les restrictions des fonctions aux sphères $R = \text{const.}$;

$$\chi^{-1/2}\Delta(\beta\chi^{1/2}) = \frac{1}{R^2}\sqrt{\sin\Psi}\,\Delta_o\left(\frac{\beta}{\sqrt{\sin\Psi}}\right) + \sqrt{QR}\left(\frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{2}{R}\frac{\partial}{\partial R}\right)\left(\frac{\beta}{\sqrt{QR}}\right)$$

remplaçons Δ_o par son expression (2.26) et portons le résultat dans (3.9) ; nous obtenons :

$$D_H\,\beta = \frac{Q}{R}\,\frac{\partial \beta}{\partial R} + \frac{\sqrt{Q\,R}}{2\,\nu}\,\left(\frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{2}{R}\,\frac{\partial}{\partial R}\right)\left(\frac{\beta}{\sqrt{Q\,R}}\right)$$

$$+ \frac{L_o}{R^2}\quad \frac{d\,\tau}{d\,\Psi}\left(\frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{1}{\nu}\,F\right)\,\beta + \frac{1}{8\,\nu}\quad \frac{\beta}{R^2}\ .$$

Choisissons

$$\beta\,(\nu\,,R\,,\Psi) = f\,(\nu\,,\Psi)\,g(\nu\,,R)\ ,$$

f étant la fonction formelle de Ψ définie par le lemme 2.2, g étant une fonction formelle définie sur $\Gamma\,[L_o\,,M_o] \setminus \Sigma$; conformément au lemme 2.3, nous obtenons :

$$D_H\,(f\,g) = f\,D\,g\ ,$$

avec

$$D\,g = \frac{Q}{R}\left[\frac{d\,g}{d\,R} + \frac{1}{2\,\nu}\quad\frac{1}{\sqrt{Q\,R}}\quad\left(R^2\,\frac{d^2}{dR^2} + 2\,R\,\frac{d}{d\,R}\right)\left(\frac{g}{\sqrt{Q\,R}}\right) + \frac{1}{8\,\nu}\,\frac{g}{Q\,R}\right]\ .$$

Un calcul banal en déduit l'expression (3.4) de D , G ayant l'expression (3.5) , G_1 et G_2 valant :

$$G_1 = \frac{1}{4}\,\frac{d}{d\,R}\,\left[\frac{R}{Q^2}\quad\frac{d\,Q}{d\,R}\right] + \frac{1}{8}\,\frac{R}{Q^3}\,\left(\frac{d\,Q}{d\,R}\right)^2\ ,\quad G_2 = -\,\frac{1}{2}\,\frac{R}{Q}\ .$$

Or, vu l'équation (3.3) de $\Gamma\,[L_o\,,M_o]$:

$$Q^2 = K\,[\,R\,,M_o\,] - L_o^2\quad ;$$

d'où l'expression (3.6) de G_1 .

Le lemme précédent permet d'expliciter les propriétés du problème $(2.3)_r$, auquel le théorème 2 a réduit le problème $(2.1)_r$.

<u>Définition 3</u> . - Une fonction $g\,:\,\Gamma[\,L_o\,,M_o\,] \setminus \Sigma \to \mathbb{C}$ est dite <u>paire</u> ou <u>impaire</u> quand :

$$(\forall\,(\pm\,Q\,,R) \in \Gamma\,[L_o\,,M_o\,] \setminus \Sigma)\ :\ g\,(Q\,,R) = \pm\,g\,(-\,Q\,,R)\ .$$

THEOREME 3.1 . - (Complément au théorème 2). Faisons l'hypothèse (3.1) .

1°) Si le problème $(2.31)_r$ possède une solution g telle que $g_o = 1$, alors il possède une solution unique telle que :

$$g_o = 1 \ ; \ g_s \ \text{est réel et a la parité de} \ s \ (s \leq r) \ ;$$

$$g \bar{g} = 1 - \frac{1}{2\nu} \frac{R}{Q} \left(\bar{g} \frac{dg}{dR} - g \frac{d\bar{g}}{dR}\right) \bmod 1/\nu^{r+1} . \tag{3.10}$$

Cette formule (3.10) signifie que, pour $2 \leq 2s \leq r$:

$$\sum_{s'=o}^{2s} (-1)^{s'} g_{2s-s'} \ g_{s'} = - \frac{R}{Q} \sum_{s'=o}^{2s-1} (-1)^{s'} g_{s'} \frac{d}{dR} g_{2s-1-s'} \ ; \tag{3.11}$$

elle exprime donc g_{2s} au moyen de $g_1, \ldots, g_{2s-1}$.

2°) Si le problème $(2.31)_{2s-1}$ possède une solution , alors le problème $(2.31)_{2s}$ en possède une .

Note 3. - La fonction formelle U'', définie sur $\Gamma [L_o , M_o] \setminus \Sigma$ par le théorème 2 2°), vaut évidemment :

$$U''(\nu) = \frac{g(\nu)}{\sqrt{QR}} \ e^{\nu \Omega} \ ; \tag{3.12}$$

elle vérifie :

$$\frac{1}{\nu^2} \Delta U''(\nu , R) = \frac{1}{R^2} \left\{ K[R, M_o] - L_o^2 - \frac{1}{4\nu^2} \right\} U''(\nu , R) , \tag{3.13}$$

où Δ est le laplacien : $\frac{d^2}{dR^2} + \frac{2}{R} \frac{d}{dR}$.

Preuve de 1°) . - Supposons 1°) prouvé quand on substitue $r-1$ à r et supposons le problème $(2.31)_r$ possible : vu le théorème 2 2°) et le lemme 3, g_r est défini, à une constante d'intégration près, par les conditions :

$$(3.14)_r \qquad \frac{dg_r}{dR} = G \ g_{r-1} \ \text{ sur } \ \Gamma [L_o , M_o] \setminus \Sigma \ , \ Q^{3r} g_r \ \text{est régulière sur } \Gamma [L_o , M_o].$$

Or G change la parité ; si r est impair, un choix convenable de la constante d'intégration rend donc g_r réelle et impaire ; si $r = 2s$ est pair, g_{2s} est donc paire .

On a :

$$\frac{dg}{dR} = \frac{1}{\nu} \, G g \bmod. 1/\nu^{r+1} \; ; \; G g = G_1 g + \frac{d}{dR}\left[G_2 \frac{dg}{dR} \right] ;$$

un calcul analogue à la preuve de (2.19) en déduit (3.10) , à l'addition près d'un nombre formel $\sum_s c_s / \nu^{2s}$ ($c_s \in \mathbb{R}$), qu'on annule en choisissant convenablement les constantes d'intégration des g_{2s} .

<u>Preuve de</u> 2°). - Supposons $r = 2s$ pair et le problème $(2.31)_{2s-1}$ possible ; vu le théorème 2.3°), le problème $(3.14)_{2s}$ possède une solution g_{2s} quand on y remplace Γ par son revêtement universel $\check{\Gamma}$; la preuve de (3.11) reste valable ; or (3.11) prouve que g_{2s} est définie sur $\Gamma[L_o, M_o] \setminus \Sigma$; g_{2s} est donc solution du problème $(3.14)_{2s}$.

<u>Preuve de la Note</u> 3. - Vu l'expression (3.2) de a et le théorème 2.2°) :

$$\left\{ \frac{1}{\nu^2} \Delta - \frac{1}{R^2} \quad K \quad \left[R, \frac{1}{\nu} \left(x_1 \frac{\partial}{\partial r_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial r_1} \right) \right] \right\} \left[U'(\nu, x) \, U''(\nu, x) \right] = 0 ,$$

où U' est homogène en x , de degré 0, et où U'' ne dépend que de R , ce qui implique :

$$\Delta (U' . U'') = U' . \Delta U'' + U'' . \Delta U' .$$

D'où, (3.13), vu $(2.21)_2$.

<u>Notations</u> . - Soit $[R_1, R_2] \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ l'ensemble des valeurs prises par R sur $\Gamma[L_o, M_o] \setminus \Sigma$; soit ω un voisinage simplement connexe du segment réel fermé $[R_1, R_2]$ dans le plan complexe $\mathbb{C}$; $R \in \mathbb{C}$.

THEOREME 3.2 . - <u>Supposons</u> K <u>holomorphe dans</u> ω ; <u>définissons par</u> (3.3) Q <u>holomorphe dans</u> $\mathbb{C} \setminus [R_1, R_2]$.

1°) <u>Si le problème</u> $(2.31)_{2s}$ <u>possède une solution</u> g , <u>alors</u>

$$(\forall r \leq 2s) \quad Q^{3r} g_r (Q, R) = (-Q)^{3r} g_r(-Q, R)$$

est une fonction de R, holomorphe dans ω.

En particulier, g_{2s} est une fonction de R, méromorphe dans ω, de pôles R_1 et R_2.

2°) La condition que le problème $(2.31)_{2s+1}$ est possible - condition qui implique aussi la possibilité du problème $(2.31)_{2s+2}$ - est la suivante : la primitive de $(G g_{2s})\,dR$ est définie (c.à.d. uniforme) dans $\omega \setminus [R_o, R_1]$.

Preuve. - Supposons 1°) vrai ; (1°) est évident pour $s=0$). Alors la fonction $g_{2s+1} : \check{\Gamma}[L_o, M_o] \setminus \check{\Sigma} \to C$ est évidemment la valeur prise, sur la coupure $[R_1, R_2]$ de C, par la primitive de $(G g_{2s})\,dR$, qui est définie sur le revêtement universel de $\omega \setminus [R_1, R_2]$. La condition que g_{2s+1} est définie sur $\Gamma[L_o, M_o] \setminus \Sigma$ équivaut évidemment à la condition que cette primitive est définie sur $\omega \setminus [R_1, R_2]$.

S'il en est ainsi, moyennant un choix convenable de sa constante d'intégration, cette primitive g_{2s+1} est, au voisinage de R_1 et de R_2, une fonction méromorphe impaire de Q : elle prend des valeurs opposées sur les deux bords de la coupure $[R_1, R_2]$, comme Q.

Pour R voisin de R_1 ou de R_2, Q est voisin de 0, g_{2s} est une fonction paire de Q possédant en $Q=0$ un pôle d'ordre $6s$; vu (3.3), (3.5), (3.6) et (3.14) :

$$\frac{d\, g_{2s+1}}{dQ} = \frac{dR}{dQ} G g_{2s} = 2\frac{G_3}{K_R}\, g_{2s}\, \frac{1}{Q^4} - \frac{1}{4}\frac{d}{dQ}\Big[\frac{RK_R}{Q^2}\, \frac{dg_{2s}}{dQ}\Big], \quad \text{où } K_R \neq 0 ;$$

g_{2s+1} est donc localement une fonction impaire de Q possédant en $Q=0$ un pôle d'ordre $3(2s+1)$.

Par suite $Q^{3(2s+1)}\, g_{2s+1}$ est holomorphe sur ω.

(3.11) définit g_{2s+2} ; $Q^{3(2s+2)}\, g_{2s+2}$ est donc holomorphe sur ω. Par suite 1°) vaut quand on remplace s par $s+1$.

4 . LE CAS DE SCHRÖDINGER - KLEIN - GORDON . - Pour établir la possibilité $(\forall r)$ du problème $(2.1)_r$, que nous avons réduit au problème $(2.31)_r$, une hypothèse appropriée est évidemment nécessaire.

Nous n'avons pas réussi à en trouver d'autre que la suivante : K <u>est un polynome du second degré</u> :

$$K[R, M] = -R^2 A(M) + 2 R B(M) - C(M) ;$$

c'est-à-dire : <u>l'expression de</u> a <u>dans</u> R_o <u>est l'opérateur de Schrödinger - Klein - Gordon</u> (§ 1, n° 4) ; A, B <u>et</u> C <u>sont des fonctions affines de</u> M .

Alors, dans le théorème 3.2, $\omega = \mathbb{C}$; dans la définition (3.5) de l'opérateur G, G_3 est un polynome en R de degré 3, G_1 et G_2 sont des fonctions holomorphes dans $\mathbb{C} \setminus [R_1, R_2]$ et à l'infini, où G_1 s'annule 2 fois ; si g est holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus [R_1, R_2]$ et à l'infini, alors la primitive de $(Gg)\,dR$ l'est aussi : tous les g_r existent donc, sont holomorphes dans $\mathbb{C} \setminus [R_1, R_2]$ et à l'infini. Puisque g_r est holomorphe à l'infini et que $Q^{3r} g_r$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$, $Q^{3r} g_r$ est un polynome en R de degré $3r$.
Nous avons donc prouvé les deux théorèmes suivants :

THEOREME 4.1 (<u>Existence et unicité</u>) . - <u>Supposons que</u> a <u>ait pour expression dans</u> R_o <u>l'opérateur de Schrödinger - Klein - Gordon</u> (§ 1, <u>Exemple</u> 4.1).

1°) <u>La condition que le système lagrangien</u>

(4.1) $$aU = (a_{L^2} - c_L)U = (a_M - c_M)U = 0 ,$$

<u>où</u> c_L <u>et</u> c_M <u>sont deux nombres formels tels que</u>

(4.2) $$c_L - L_o^2 = c_M - M_o = 0 \mod 1/\nu^2,$$

<u>possède une solution définie sur une variété lagrangienne</u> COMPACTE $\underline{\underline{V}}$ <u>est la suivante</u> :

i) $$c_L = L_o^2 + \frac{1}{4\nu^2} , \quad c_M = M_o ;$$

ii) V <u>est l'un des tores lagrangiens</u> $V[L_o, M_o] = T(\ell, m, n)$, <u>définis par le théorème</u> 4.1 <u>du</u> § 1 .

2°) Il existe une solution lagrangienne U de (4.1), définie sur un tel tore V et possédant l'amplitude lagrangienne.

$$\beta_o = 1 .$$

Toute solution lagrangienne de (4.1), définie sur V, est le produit de U par un nombre formel de phase nulle.

Note 4.1. - La projection de V sur X est

$$V_X : R_1 \leq |x| \leq R_2 \ , \ M_o |x| \leq L_o \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \ ,$$

où R_1 et R_2 sont les deux racines de l'équation :

$$A_o R^2 - 2 B_o R + C_o + L_o^2 = 0 \qquad (A_o, B_o, C_o : \text{valeurs de } A, B, C \text{ en } M_o).$$

THEOREME 4.2 (Structure) . - Il existe une unique solution U de (4.1), définie sur un tel tore V, et ayant la structure suivante.

Son expression U_{R_o} dans le repère R_o (§1 , n° 1) est du type :

$$(4.3) \qquad U_{R_o}(\nu) = U'(\nu)\, U''(\nu) \ ;$$

la coordonnée locale $x \in V_X$ étant employée sur V, $U'(\nu)$ est une fonction de x, homogène de degré 0, formelle, vérifiant :

$$(4.4) \quad \frac{1}{\nu}\left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1}\right) U'(\nu, x) = M_o\, U'(\nu, x) \ ; \ \frac{1}{\nu^2} \Delta U'(\nu, x) = \frac{1}{R^2}\left(L_o^2 + \frac{1}{4\nu^2}\right) U'(\nu, x)$$

$U''(\nu)$ est une fonction de R, formelle, vérifiant :

$$(4.5) \qquad \frac{1}{\nu^2} \Delta U''(\nu, x) = \frac{1}{R^2} \left\{ K[R, M_o] - L_o^2 - \frac{1}{4\nu^2} \right\} U''(\nu, x) \ .$$

U' et U'' sont définies par les formules :

$$(4.6) \qquad U'(\nu, x) = \frac{f(\nu, \tau)}{\sqrt{\sin \Psi}}\, e^{\nu (L_o \Psi + M_o \Phi)} \ , \ U''(\nu, x) = \frac{g(\nu, Q, R)}{\sqrt{Q\, R}}\, e^{\nu \Omega} \ ,$$

où $\tau = \operatorname{cotg} \Psi$ et où Ω est la fonction de R définie par (2.8) § 1 ;

arg. sin Ψ et arg. Q ont les sauts $+\pi$ en les points $\Psi = 0 \bmod. \pi$ et $Q = 0$ de R et $\Gamma[L_o, M_o]$, orientés dans les sens $d\Psi > 0$ et $Q\, dR > 0$;

$$f(\nu) = \sum_{r \in \mathbb{N}} \frac{1}{\nu^r} f_r \quad \text{et} \quad g(\nu) = \sum_{r \in \mathbb{N}} \frac{1}{\nu^r} g_r$$

sont les fonctions formelles de phase nulle, définies respectivement sur R et sur $\Gamma[L_o, M_o] \setminus \Sigma$ par l'ensemble des propriétés suivantes :

$$(4.7) \qquad \frac{df}{d\tau} = \frac{1}{\nu} F f \quad , \quad \frac{dg}{dR} = \frac{1}{\nu} G g ,$$

les opérateurs différentiels F et G valant :

$$(4.8) \qquad F f = F_1 f + \frac{d}{d\tau}\left[F_2 \frac{df}{d\tau}\right], \quad G g = G_1 g + \frac{d}{dR}\left[G_2 \frac{dg}{dR}\right],$$

où : F_1 et F_2 sont les polynômes pairs de τ, de degrés 2 et 4, définis par le lemme 2.2 1°),

$Q^5 G_1$ et $Q G_2$ sont les polynômes de R, de degrés 3 et 1, définis par (3.6) ;

$f_o = 1$; $g_o = 1$; les fonctions f_r et g_r sont réelles et ont la parité de r ;

$$(4.9) \qquad f \bar{f} = 1 + \frac{1}{\nu} F_2 \left(\bar{f} \frac{df}{d\tau} - f \frac{d\bar{f}}{d\tau}\right), \quad g \bar{g} = 1 + \frac{1}{\nu} G_2 \left(\bar{g} \frac{dg}{dR} - g \frac{d\bar{g}}{dR}\right) ;$$

ces formules (4.9) donnent explicitement les fonctions paires f_{2s} et g_{2s} au moyen de $f_1, \ldots, f_{2s-1}$ et de $g_1, \ldots, g_{2s-1}$; les fonctions impaires f_{2s+1} et g_{2s+1} sont définies par les quadratures :

$$d f_{2s+1} = (F f_{2s})\, d\tau , \quad d g_{2s+1} = (G g_{2s})\, dR ;$$

f_r est un polynôme en τ de degré $3r$;

$Q^{3r} g_r$ est un polynôme en R de degré $3r$.

Note 4. - $g_{2s+1} - G_2 \dfrac{dg_{2s}}{dR}$ est donc la fonction impaire sur $\Gamma[L_o, M_o] \setminus \Sigma$, primitive de la forme différentielle $G_1 g_{2s}\, dR$; cette forme est du type

$\frac{\Pi'(R)}{Q^{6s+5}}\, dR$, Π' étant un polynôme de degré $6s+3$; vu le théorème précédent cette primitive est du type $\frac{\Pi(R)}{Q^{6s+3}}$, Π étant un polynôme de degré $6s+3$.

Donnons une preuve plus directe de ce fait essentiel :

LEMME 4.2 . - $(\forall s \in \mathbb{N})$ la dérivation :

$$\frac{d}{dR}\,\frac{\Pi(R)}{Q^{2s+1}} = \frac{\Pi'(R)}{Q^{2s+3}} \quad (Q^2 : \text{polynome en } R \text{ de degré } 2 \text{ ; discr. } Q \neq 0) \tag{4.10}$$

définit un automorphisme $\Pi \mapsto \Pi'$ de l'espace vectoriel des polynômes de degré $2s+1$.

<u>Preuve</u> . - Soit Π un polynôme de degré $2s+1$; $\Pi(R)\,Q^{-2s-1}$ est holomorphe à l'infini, où sa dérivée a donc un zéro double ; par suite (4.10) définit un polynôme Π' de degré $2s+1$; l'application

$$\Pi \mapsto \Pi'$$

est donc un endomorphisme d'espace vectoriel de dimension finie ; or c'est évidemment un monomorphisme ; c'est donc un isomorphisme.

CONCLUSION . - <u>Ce § 3 a cherché, quand dim X = 3 , un système lagrangien, d'inconnue scalaire, possédant une solution, unique à un facteur multiplicatif près, définie sur une variété lagrangienne</u> COMPACTE. <u>Il a trouvé un seul système de ce type : celui qu'emploie la mécanique ondulatoire des particules sans spin</u>.

§ 4. L'équation aux dérivées partielles de Schrödinger - Klein - Gordon.

0. INDRODUCTION . - Nommons problème (0.1) le problème classique que voici : trouver les fonctions non nulles

$$u : E^3 \rightarrow C ,$$

de carrés sommables ainsi que leurs gradients, solutions de l'équation aux dérivées partielles :

$$(0.1) \qquad a\, u = 0 ,$$

où a est l'opérateur différentiel associé à l'hamiltonien :

$$(0.2) \qquad H[L, M, Q, R] = \tfrac{1}{2} \{ P^2 - \frac{1}{R^2} K[R, M] \} ,$$

K étant une fonction affine de M [cf. § 3 , (3.1) et (3.2)] ;
cet opérateur est donc [cf. chap II , § 3 , déf. 6.2] :

$$(0.3) \qquad a = \frac{1}{2\nu_o^2} \Delta - \frac{1}{2R^2} K [R , \frac{1}{\nu_o} (x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1})] , \text{ où } \nu_o = \frac{i}{\hbar} .$$

Le n° 2 suppose [cf. § 3 , n° 4] :

$$(0.4) \qquad K [R , M] = - R^2 A (M) + 2 R B (M) - C (M) ,$$

A , B , C étant des fonctions affines de M : alors a est l'opérateur de Schrödinger - Klein - Gordon .

Ce § 4 rappelle brièvement la solution de ce problème classique (0.1) ; c'est à deux fins :
i) établir des analogies formelles entre sa solution et celle du problème lagrangien (2.1) § 3 : résoudre

$$a\, U = (a_{L^2} - c_L)\, U = (a_M - c_M)\, U = 0 \qquad \text{sur } V \text{ compact ;}$$

ii) établir que la condition d'existence de la solution de ce problème lagrangien, [qui est celle de ce problème mod $1/\nu^2$, cf. (3.1), § 1],

se trouve être la même que celle du problème classique (0.1), dans le cas Schrödinger - Klein - Gordon, c'est-à-dire sous l'hypothèse (0.4) ; cette hypothèse est essentielle.

Note 0. - L'équation de Schrödinger - Klein - Gordon est, pour des choix convenables de A, B, C, l'équation de Schrödinger et celle de Klein - Gordon, (4.21) et (4.22) du § 1, où les termes en $\mathcal{H}^2$ ont été omis. L'usage est de traiter en "perturbation" les termes de ces équations linéaires en $\mathcal{H}$; nous ne le ferons pas : nous étudions rigoureusement le problème (0.1) pour établir que l'affirmation ii) est rigoureuse.

1. ETUDE DU PROBLEME (0.1), SANS L'HYPOTHESE (0.4). - Rappel des propriétés des des harmoniques sphériques $u'_{\ell,m}$. - L'ensemble des polynomes en $x \in E^3$, harmoniques, homogènes de degré ℓ, est un espace vectoriel sur C, de dimension $2\ell+1$; il a pour base les polynomes

$$R^{\ell}\, u'_{\ell,m} \quad (\ell \text{ et } m \text{ entiers, } |m| \leq \ell)$$

définis par le système, où $u'_{\ell,m}$ est homogène de degré 0 et vérifie donc

$$R^2\, \Delta u' = \Delta_0 u' \quad [\text{cf. (2.4) et (2.24) § 3}]:$$

(1.1) $$\Delta u'_{\ell,m} + \frac{1}{R^2}\, \ell\,(\ell+1)\, u'_{\ell,m} = 0 \;;\; \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1}\right) u'_{\ell,m} = i\, m\, u'_{\ell,m}.$$

Soit S^2 la sphère unité de E^3 et σ sa mesure ;

$$\int_{S^2} \left| \frac{\partial}{\partial x} u'_{\ell,m} \right|^2 \sigma = \ell\,(\ell+1) \int_{S^2} |u'_{\ell,m}|^2\, \sigma \;;$$

$\forall\, (\ell_1, m_1) \neq (\ell_2, m_2)$, $<.\,,.>$ étant le produit scalaire sesquilinéaire :

$$\int_{S^2} \left< \frac{\partial}{\partial x} u'_{\ell_1,m_1} \,,\, \frac{\partial}{\partial x} u'_{\ell_2,m_2} \right> \sigma = \int_{S^2} u'_{\ell_1,m_1}\, \bar{u}'_{\ell_2,m_2}\, \sigma = 0 .$$

Les restrictions des $u'_{\ell,m}$ à S^2 forment un système complet de fonctions sur S^2 : toute fonction $u : E^3 \to \mathbb{C}$, de carré sommable ainsi que son gradient, possède un unique développement série :

$$u = \sum_{\ell,m} u'_{\ell,m}\, u''_{\ell,m},$$

les $u''_{\ell,m}$ étant des fonctions de la seule variable $R > 0$, telles que :

$$\int_{E^3} |u|^2\, d^3x = \sum_{\ell,m} \int_{S^2} |u'_{\ell,m}|\, \sigma \int_0^{+\infty} R^2\, |u''_{\ell,m}|^2\, dR < \infty,$$

$$\int_{E^3} \left|\frac{\partial}{\partial x} u\right|^2 d^3x = \sum_{\ell,m} \int_{S^2} \left|\frac{\partial}{\partial x} u'_{\ell,m}\right|^2 \sigma \cdot \int_0^{+\infty} |u''_{\ell,m}|^2\, dR + \sum_{\ell,m} \int_{S^2} |u'_{\ell,m}|^2 \sigma \cdot \int_0^{+\infty} R^2 \left|\frac{d}{dR} u''_{\ell,m}\right|^2 dR < \infty.$$

<u>Résolution du problème</u> (0.1) . - La condition que la série u soit solution du problème (0.1) s'énonce, vu (0.3) et (1.1) : $(\forall\, \ell, m)$

$$(1.2)\quad \left(\frac{d^2}{dR^2} + \frac{2}{R}\frac{d}{dR}\right) u''_{\ell,m}(R) + \frac{1}{R^2}\left\{\frac{1}{\hbar^2} K[R, \hbar m] - \ell(\ell+1)\right\} u''_{\ell,m}(R) = 0 .$$

D'où, évidemment, en notant $R u''_{\ell,m} = v$:

THEOREME 1.1. - <u>Le problème</u> (0.1) <u>équivaut au problème</u> (1.3) <u>que voici</u>. <u>Trouver les entiers</u> ℓ, m <u>et les fonctions non nulles</u> $v :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ <u>tels que</u> :

$$|m| \leqq \ell ,$$

$$(1.3)\qquad \frac{d^2 v}{dR^2} + \frac{1}{R^2}\left\{\frac{1}{\hbar^2} K[R, \hbar m] - \ell(\ell+1)\right\} v = 0 ;$$

$$(1.4)\qquad \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{R^2}\right) v^2\, dR < \infty , \quad \int_0^{+\infty} \left(\frac{dv}{dR}\right)^2 dR < \infty .$$

<u>Note</u> 1.1 . - Le problème (0.1) est donc possible si et seulement si le suivant l'est. Trouver deux entiers ℓ, m et une fonction non nulle $u : E^3 \to \mathbb{C}$, de carré sommable ainsi que son gradient, tels que :

$$|m| \leq \ell \ ,$$

(1.5) $\quad au = 0\ ,\ \Delta_o u + \ell\,(\ell+1)\,u = 0\ ,\ (x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1})\,u = i\,m\,u\ .$

Rappelons que ce système (1.5) joue un rôle essentiel en physique .

Note 1.2 . - Les équations (1.1) , (1.2) et le système (1.5) s'obiennent formellement en remplaçant

$$\nu \ ,\quad U' \ ,\quad U'' \ ,\quad U$$

par

$$\frac{i}{\hbar} \ ,\quad u'_{\ell,m} \ ,\quad u''_{\ell,m} \ ,\quad u$$

dans les équations (2.21), (3.13) et dans le système (2.1) du § 3 , compte-tenu du théorème 3, § 1 et du théorème 2, § 3 , qui imposent :

$$L_o = \hbar\,(\ell + \tfrac{1}{2})\ ,\ M_o = \hbar\, m\ ,\ c_L = L_o^2 - \frac{5}{4\nu^2}\ ,\quad c_M = M_o\ ,$$

c'est-à-dire, vu (2.3) § 3 :

$$a^+_{L^2} - c_L = \frac{1}{\nu^2}\,\Delta_o - \hbar^2\,[\ell + \tfrac{1}{2} - \frac{i}{2\nu\hbar}]\,[\ell + \tfrac{1}{2} + \frac{i}{2\nu\hbar}]\ ,$$

$$a^+_M - c_M = \frac{1}{\nu}\,(x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1}) - \hbar\, m\ .$$

Supposons K fonction holomorphe de R à l'origine . - Notons :

(1.6) $\quad C_o = -K\,[0, \hbar m]\ ,\quad \gamma = \sqrt{(\ell + \frac{1}{2})^2 + C_o\,\hbar^{-2}}\ ;$

le théorème de Fuchs construit deux solutions indépendantes de l'équation (1.3) ; si 2γ n'est pas entier, leurs quotients respectifs par $R^{\pm\gamma + \frac{1}{2}}$ sont holomorphes à l'origine . Si γ est imaginaire pur, toute solution non nulle de (1.3) fait donc diverger les intégrales (1.4) à l'origine . Il en est de même si $\gamma = 0$ (cf. Fuchs). Supposons $\gamma > 0$; la solution v de (1.3) qui est le produit de

$R^{\gamma+\frac{1}{2}}$ par une fonction holomorphe fait converger les intégrales (1.4) à l'origine, les autres solutions de (1.3) les font diverger (cf. Fuchs) . Donc, puisque le problème (1.3) équivaut au problème 0.1 :

THEOREME 1.2 . - Si K est holomorphe à l'origine, alors la possibilité du problème (0.1) équivaut à celle du problème suivant. Trouver deux entiers ℓ et m tels que :

$$|m| \leq \ell \,, \quad \gamma > 0 \,,$$

et que la solution v de (1.3) , dont le quotient par $R^{\gamma+1/2}$ est holomorphe, non nulle, à l'origine, vérifie :

$$(1.7) \qquad \int_1^{+\infty} v^2 \, dR < \infty \quad , \quad \int_1^{\infty} \left(\frac{dv}{dR}\right)^2 dR < \infty .$$

2. LE CAS DE SCHRÖDINGER - KLEIN - GORDON . - Dans ce cas, c'est-à-dire sous l'hypothèse (0.4), le théorème précédent peut-être explicité. Notons :

$$M_o = \hbar m \,, \; A_o = A(M_o) \,, \; B_o = B(M_o) \,, \; C_o = C(M_o) \,,$$

$$(2.1) \qquad \alpha = \sqrt{A_o}\, \hbar^{-1} \,, \; \beta = B_o \hbar^{-2} \,.$$

L'équation (1.3) devient l'équation hypergéométrique confluante :

$$(2.2) \qquad \frac{d^2 v}{dR^2} + \left[-\alpha^2 + \frac{2\beta}{R} - \frac{\gamma^2 - 1/4}{R^2} \right] v = 0 \,,$$

où : $\alpha^2 \,,\, \beta \,,\, \gamma \in R \,,\; \gamma > 0$;

si $\alpha^2 > 0$, alors nous choisissons $\alpha > 0$.

Notons v la solution non nulle de (2.2) telle que $v\, R^{-\gamma - 1/2}$ soit une fonction entière de R : elle est définie à une constante multiplicative près (Fuchs).

LEMME 2 . - La convergence des intégrales (1.7) équivaut à la condition :

$$(2.3) \qquad \frac{\beta}{\alpha} + \frac{1}{2} - \gamma \quad \text{est entier} > 0 .$$

Preuve . - Donnons à v l'expression :

$$(2.4) \qquad v(R) = R^{\gamma + 1/2} \; e^{-\alpha R} \sum_{s \in N} c_s R^s \;;\; (c_s \in C) \;;$$

en la portant dans (2.2) , on obtient (Fuchs) la formule de récurrence définissant les c_s en fonction de c_o :

(2.5) $$s(s+2\gamma)\, c_s = 2\,[\,\alpha(s+\gamma-\tfrac{1}{2}) - \beta\,]\, c_{s-1} .$$

La condition (2.3) équivaut donc à la suivante :

$$\sum_{s\in\mathbb{N}} c_s R^s \quad \text{est un polynome ;}$$

elle implique $\alpha^2 > 0$, donc $\alpha > 0$, donc la convergence des intégrales (1.7).

Prouvons que (1.7) n'a pas lieu quand (2.3) n'est pas vérifié.

Cas : $\alpha > 0$. - Si $\sum_s c_s R^s$ n'est pas un polynome, alors, pour un choix approprié du signe de c_o :

$c_s > 0$, pour s voisin de $+\infty$. où $c' > 0$;

Soit :

$$\epsilon \in]0,\alpha[\ ;$$

(2.5) donne :

$s\, c_s > 2\,\epsilon\, c_{s-1}$, pour s voisin de $+\infty$, où $c' > 0$;

donc :

$\sum_s c_s R^s > c'\, e^{2\epsilon R}$, pour R voisin de $+\infty$,

l'intégrale $(1.7)_1$ diverge donc :

Cas : $\alpha^2 < 0$. - L'expression classique de v par une intégrale donne une expression asymptotique classique de v : pour R voisin de $+\infty$,

$$v = c\, e^{\alpha R}\, R^{-s/\alpha} + \bar{c}\, e^{-\alpha R}\, R^{s/\alpha} + \dots ,$$

où c et $\bar{c}$ sont constants, α imaginaire pure . L'intégrale $(1.7)_1$ diverge donc . (Cf. Whittaker and Watson, Modern Analysis, [18], chap. XVI. The confluent hypergéometric function, Asymptotic expansion) .

Cas : $\alpha = 0$, $\beta < 0$. - Vu (2.5) :

$$v(R) = R^{\gamma + \frac{1}{2}} \sum_{s \in \mathbb{N}} c_s R^s \ , \quad \text{où } (\forall s) : c_s > 0 \ ;$$

l'intégrale $(1.7)_1$ diverge donc .

Cas : $\alpha = 0$, $\beta > 0$. - $R^{-\gamma - \frac{1}{2}} v$ vérifie une équation différentielle à coefficients linéaires ; d'où, par la méthode de Laplace :

$$v(R) = \sqrt{R} \int_T t^{-2\gamma - 1} e^{\sqrt{2\beta R}(t - t^{-1})} dt ,$$

T étant le bord d'une demi-bande de $\mathbb{C}$ contenant la coupure $]-\infty, o[$; d'où, par la méthode du col, la valeur asymptotique, pour R voisin de $+\infty$:

$$v(R) \simeq R^{1/4} \left[c\, e^{2i\sqrt{2\beta R}} + \bar{c}\, e^{-2i\sqrt{2\beta R}} \right] ;$$

l'intégrale $(1.7)_1$ diverge donc :

Le théorème 1.2 et le lemme 2 , où α et β sont définis par (2.1) et γ par (1.6), prouvent ceci :

THEOREME 2 . - Quand a est l'opérateur de Schrödinger - Klein - Gordon, alors

1°) le problème classique (0.1) , dont nous venons de rappeler l'étude,

2°) le problème lagrangien (2.1) du § 3 :

$$a\, U = (a_{L^2} - c_L)\, U = (a_M - c_M)\, U = 0 \quad \text{sur} \quad V \quad \text{compact},$$

3°) ce même problème mod. $1/\nu^2$, c'est-à-dire le problème (3.1) du § 1 ,

ont tous trois la même condition de possibilité : l'existence d'un triplet d'entiers (ℓ, m, n) vérifiant la condition (4.11) du théorème 4.1, § 1 .

Note 2. - La comparaison du théorème 1.2 et du théorème 3.1 1°) § 1 prouve que le théorème précédent ne s'applique pas à tout opérateur a associé à un hamiltonien H du type (0.2) .

CONCLUSION . - Bien que les problèmes aux limites classiques et les problèmes lagrangiens soient absolument indépendants, il se trouve qu'ils définissent les mêmes niveaux d'énergie des équations de Schrödinger et de Klein - Gordon.

Les niveaux d'énergie observés en physique sont ceux de l'équation de Dirac, qu'étudie le chapitre suivant .