D. Kastler

Fondements de la mécanique statistique de l'équilibre

Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg - RCP25, 1977, tome 24
« Conférences de : A. Andreotti, A. Connes, D. Kastler, P. Lelong, J.E. Roberts et G. Velo. Un texte proposé par W. Laskar », , exp. n° 3, p. 88-144

<http://www.numdam.org/item?id=RCP25_1977__24__88_0>

FONDEMENTS DE LA MECANIQUE STATISTIQUE
DE L'EQUILIBRE

-:-:-:-:-

Exposé de D. KASTLER

à la 23ème Rencontre entre Physiciens et Mathématiciens

(R.C.P. de Strasbourg, Novembre 1976)

I - INTRODUCTION

Notre but est d'exposer une méthode de déduction de principes premiers (localité, stabilité) de l' "Ansatz de Gibbs", hypothèse servant traditionnellement de base à la mécanique statistique de l'équilibre, ceci dans le cadre de la théorie (relativiste) des systèmes à une infinité de degrés de liberté. L'exposé est basé sur les articles suivants :

[1] R. HAAG, D. KASTLER, E. TRYCH-POHLMEYER
Stability and Equilibrium States
Comm. Math. Phys. 38, 173 (1974).

[1A] O. BRATTELI, D. KASTLER
Relaxing the Clustering Condition in the Derivation of the KMS Property. Comm. Math. Phys. 46, 37 (1976).

[2] H. ARAKI, R. HAAG, D. KASTLER, M. TAKESAKI
Extension of KMS States and Chemical Potential.
ZIF Preprint, Bielefeld, à paraître dans Comm. Math. Phys.

Un article de revue antérieur au travail [2] :

[3] D. KASTLER - Equilibrium States of Matter and Operator Algebras - Marseille preprint - à paraître dans Symposia Mathematica

vise à placer le sujet dans son contexte mathématique (Systèmes asymptotiquement abéliens, Spectre d'Arveson, Perturbations par des cocycles de groupes à un paramètre d'automorphismes, Invariants $S(\mathfrak{M})$ de Connes) 1).

Ce que nous nous proposons de montrer, c'est que (modulo spécifications plus ou moins provisoires ou essentielles) tout état extrémal invariant d'un système asymptotiquement abélien qui est stable pour des perturbations locales de la dynamique est nécessairement (mis à part les états-trace), soit un "état de Gibbs limite" 2) à température β^{-1} et à potentiel chimique μ, soit un "état fondamental" (à énergie positive), en bref : un état

1) L'approche du potentiel chimique décrite dans [3] est entre temps abandonnée au profit de [2] (où, alternativement de l'article [4] de la bibliographie, parallèle à [2] avec des techniques différentes). Par ailleurs, la description du type des facteurs engendrés par les états de température est devenue plus précise (Testard [5]).
2) Terminologie rattachée à la théorie historique : nous entendons de manière précise : un état KMS (voir plus bas).

KMS à température finie ou non d'un sous-groupe à un paramètre du produit direct du groupe dynamique par le groupe de jauge 3). On voit donc que les notions de température et de potentiel chimique se déduisent d'hypothèses de localité dans le temps (asymptotisme abélien) et de la stabilité des états. Ceci s'effectue en deux étapes : on déduit d'abord la notion de température de la stabilité pour l'état sur l'algèbre des observables [1]. Puis on obtient celle de potentiel chimique en étendant l'état aux champs (inobservables) : on sait le faire par trois méthodes (deux décrites dans [2], une dans [4]) 4).

Avant de nous lancer dans le vif du sujet, nous voulons brièvement commenter la philosophie de l'utilisation des C^*-algèbres pour les systèmes à une infinité de degrés de liberté (fixant de la terminologie au passage) ; et, d'autre part, décrire l'approche traditionnelle de la mécanique statistique de l'équilibre - afin de situer notre attitude par rapport à la tradition.

L'intérêt des C^*-algèbres en physique réside en ce qu'elles sont des objets intrinsèquement définis (à savoir, les $*$-algèbres de Banach satisfaisant à $\|A^*A\| = \|A\|^2$ pour tout élément A), mais susceptibles (sauf à se réduire à l'algèbre des compacts sur un espace de Hilbert) d'une multitude de réalisations non isomorphes comme $*$-algèbres uniformément fermées d'opérateurs bornés sur un espace de Hilbert. L'idée de base consiste à utiliser l'objet intrinsèque pour la formulation des lois physiques, et les diverses représentations (états) pour la description des diverses situations physiques. Pour des systèmes à un nombre fini de degrés de

3) Traditionellement, le groupe de jauge est un tore de dimension n (n espèces de particules). L'article [2] traite le cas d'un groupe de jauge compact quelconque.

4) On peut ensuite rattacher directement la notion de potentiel chimique à l'algèbre des observables([2] section IV, exposée plus bas).

liberté, cette "approche algébrique" apporte peu, vu qu'alors la C^*-algèbre est celle des opérateurs compacts sur un espace de Hilbert, laquelle n'a qu'une représentation irréductible à une équivalence unitaire près (ceci est une forme du résultat de Von Neumann-Stone sur l'unicité de la représentation irréductible des relations de commutation canoniques). Par contre, dès qu'on a affaire à un système infini (en d'autres termes, si on envisage, non la mécanique quantique ordinaire, mais la théorie des champs) la C^*-algèbre correspondante (présumablement simple) est antiliminaire [5] et possède, en tant que telle, une myriade de représentations inéquivalentes, lesquelles reflètent l'énorme variété des situations physiques possibles. Ces représentations se répartissent en classes de quasi-équivalence, deux représentations étant quasi-équivalentes si elles sont, grosso modo, équivalentes modulo les multiplicités de leurs composantes irréductibles. La quasi-équivalence est la notion d'équivalence correspondant à une notion d'ordre, celle de quasi-inclusion des représentations. Les classes de quasi-équivalence de représentations d'une C^*-algèbre forment une algèbre de Boole [6] dont les éléments minimaux sont les (classes de quasi-équivalence de) représentations primaires (ou factorielles, pour rappeler que ces représentations sont caractérisables par le fait qu'on obtient un facteur au sens de Von Neumann en prenant la fermeture faible correspondante de l'algèbre). Ces concepts, lesquels se transcrivent des représentations aux états en considérant les représentations

5) ou NGCR suivant la terminologie de J. Glimm.

6) L'algèbre de Boole des représentations d'une C^*-algèbre $\mathfrak{A}$ est isomorphe à l'algèbre des projecteurs d'une algèbre de Von Neumann abélienne $\mathfrak{Z}$, à savoir le centre du bidual $\mathfrak{A}^{**}$ de $\mathfrak{A}$ (on montre que ce bidual a une structure d'algèbre de Von Neumann).

engendrées par ceux-ci au moyen de la construction de Guelfand-Neumark-Segal (construction GNS), sont interprétés physiquement comme suit : un état (une représentation) primaire décrit une situation du système qui se trouve physiquement spécifiée de manière maximale. De surcroit, deux représentations primaires seront disjointes (ou quasi équivalentes) suivant qu'elles décrivent des situations physiques diffèrent entre elles de manière infinie (ou finie) [7]. Si, comme c'est probablement le cas en théorie des champs relativiste, la C^*-algèbre du système est simple, toutes les représentations sont fidèles : elles sont alors automatiquement isométriques et chacune d'entre elles offre une description complète de la C^*-algèbre - pourrait donc exclusivement servir à la description de la physique du système : ceci se traduit par le fait que chaque représentation a un ensemble d'états associés (fournis par les matrices-densités sur l'espace de Hilbert correspondant) [8] dense dans l'ensemble de tous les états pour la topologie faible de dual $\sigma(\mathfrak{A}^*, \mathfrak{A})$ [9]. Mais, bien entendu, si rien ne privilégie telle représentation du point de vue des principes, le choix de la représentation (commode) est dicté par la situation physique : à tel état du système (décrit par un état de sa C^*-algèbre) correspond la représentation engendrée par cet état au moyen de la construction GNS.

7) i.e. diffèrent suivant un nombre infini (ou fini) de degrés de liberté. Disjoint signifie : contenu dans l'orthocomplément booléen.

8) appelés états normaux de la représentation.

9) Généralement, deux représentations d'une C^*-algèbre sont faiblement équivalentes (= ont le même noyau) si et seulement si les fermetures pour la topologie $\sigma(\mathfrak{A}^*, \mathfrak{A})$ de leurs ensembles respectifs d'états normaux sont les mêmes. Cela revient à dire que chaque état normal de l'une des représentations peut être mimétisé à ε près, pour tout ensemble fini d'observables, par un état normal de l'autre représentation.

En résumé, les propriétés algébriques (relations de commutations, groupes d'automorphismes, etc.) correspondent aux lois physiques tandis que les propriétés spatiales (liées aux espaces de Hilbert des diverses représentations : états normaux correspondants, fermeture de l'algèbre dans la topologie faible des opérateurs correspondante, éventuellement implémentation unitaire correspondante de tel groupe d'automorphismes [10]) décrivent des circonstances inhérentes aux différentes situations physiques (états) du système.

Nous concluons ces indications sur les traits généraux de l'approche algébrique en rappelant des définitions et en fixant notre terminologie. L'objet de base qui nous intéressera par la suite est l'algèbre quasi-locale douée de son évolution dans le temps (groupe dynamique) : soit un cas particulier $\{\mathfrak{A}, R, \alpha\}$, où R est la droite temporelle additive, du concept suivant :

Définition 1

Un C^*-système $\{\mathfrak{A}, G, \alpha\}$ est le triplet d'une C^*-algèbre $\mathfrak{A}$, d'un groupe localement compact G et d'un morphisme $g \in G \to \alpha_g$ de G dans le groupe des automorphismes de $\mathfrak{A}$ tel que $g \in G \to \phi(\alpha_g(A))$ soit continue pour tout $A \in \mathfrak{A}$ et tout état ϕ de $\mathfrak{A}$.

Définition 2

Une représentation covariante $\{\pi, U\}$ du C^*-système $\{\mathfrak{A}, G, \alpha\}$ sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ est le couple d'une $*$-représentation π de $\mathfrak{A}$ et d'une représentation unitaire continue U de G, toutes deux sur $\mathcal{H}$, telles que

$$\pi(\alpha_g(A)) = U_g \, \pi(A) \, U_g^* \quad , \quad A \in \mathfrak{A}, \; g \in G . \tag{1}$$

10) si ce groupe n'est pas "brisé" par la représentation.

Définition 3

$\{\mathfrak{A},G,\alpha\}$ étant un C^*-système et ϕ un état G-invariant de $\mathfrak{A}$ (c.à.d. tel que $\phi \circ \alpha_g = \phi$ pour tout $g \in G$) la construction GNS $\{\pi,U,\mathcal{H},\Phi\}$ de ϕ est la représentation covariante $\{\pi,U\}$ de $\{\mathfrak{A},G,\alpha\}$ sur $\mathcal{H}$, accompagnée du vecteur $\Phi \in \mathcal{H}$ cyclique pour $\pi(\mathfrak{A})$, telle que

$$(2) \qquad \begin{cases} \phi(A) = (\Phi \mid \pi(A) \mid \Phi) \\ U_g \Phi = \Phi \end{cases}, \qquad A \in \mathfrak{A}, g \in G$$

(définition à une équivalence unitaire près)

Définition 4

Un W^*-système $\{\mathfrak{M},G,\alpha\}$ est le triplet d'une algèbre de Von Neumann $\mathfrak{M}$, d'un groupe localement compact G, et d'un morphisme $g \in G \to \alpha_g$ de G dans les automorphismes de $\mathfrak{M}$ tel que $g \in G \to \phi(\alpha_g(X))$ soit continue pour tout $X \in \mathfrak{M}$ et tout état normal ϕ de $\mathfrak{M}$. Etant donnée une représentation covariante $\{\pi,U\}$ du C^*-système $\{\mathfrak{A},G,\alpha\}$[11)], le W^*-système associé est obtenu par $\mathfrak{M} = \pi(\mathfrak{A})''$ et $\alpha_g(X) = U_g X U_g^*$, $X \in \mathfrak{M}$, $g \in G$.

On notera, pour une bonne compréhension des rôles respectifs des C^* algèbres et des algèbres de Von Neumann en théorie algébrique des champs, que la définition 1 décrit des concepts algébriques (relatifs à la physique) alors que les définitions 2,3 et 4 décrivent des concepts spatiaux (relatifs à des situations physiques particulières).

Nous passons maintenant à une esquisse de l'attitude traditionnelle en mécanique statistique de l'équilibre

11) où π est supposée être une représentation non dégénérée de $\mathfrak{A}$.

vis à vis de laquelle il nous faut situer notre programme. La mécanique statistique de l'équilibre est traditionnellement fondée sur l' <u>"Ansatz de Gibbs"</u> qui donne, pour la description de l'état à température β^{-1} et à potentiel μ d'un système d'extension spatiale finie, la recette suivante [12] : la valeur moyenne de l'observable a dans cet état $\omega_{\beta,\mu}$ est égale à

$$(3) \qquad \omega_{\beta,\mu}(a) = \frac{Tr\{e^{-\beta(H-\mu N)}a\}}{Tr\{e^{-\beta(H-\mu N}\}} \quad ,$$

où H désigne l'opérateur hamiltonien et N l'opérateur nombre de particules du système. La formule (3) n'est applicable qu'à un système d'extension spatiale finie (enfermé dans une boite) car il est nécessaire, pour sa validité, que $e^{-\beta(H-\mu N)}$ soit un opérateur à trace, dont le spectre soit donc discret - ce qui est obtenu par la quantification dans la boite (de parois réfléchissantes, ou avec des conditions aux limites périodiques, etc.). La recette (3) donne une description aussi exacte qu'on le souhaite des propriétés expérimentales de l'état $\omega_{\beta,\mu}$, à condition de prendre les dimensions de la boite suffisamment grandes. Elle est donc satisfaisante pour les résultats numériques qu'on souhaite extraire de la théorie. Mais elle est tout à fait inadéquate du point de vue fondationnel, d'une part parce que l'on souhaite définir l'état $\omega_{\beta,\mu}$ de façon mathématiquement exacte, et de l'autre pour une raison non formelle, mais physique : le modèle du système

12) Cette recette est, en fait, la transcription quantique évidente de la recette formulée par Gibbs en mécanique classique.

enfermé dans le boite est, en effet, tout à fait contraire à la réalité du comportement thermodynamique : le spectre alors discret de l'hamiltonien implique l'existence d'états excités qui se perpétueraient dans le temps au lieu de "tendre vers l'équilibre" ! La raison physique de l'inadéquation du modèle est claire : tout fluide enfermé dans une enceinte interagit faiblement, mais de manière essentielle, avec l'enceinte ; et c'est à cette interaction qu'est dû le caractère continu du spectre de l'énergie, entraînant le comportement du retour à l'équilibre (si on s'en éloigne modérément [13]). Un modèle réaliste pour une substance dans une enceinte devrait donc inclure l'interaction avec l'enceinte. De tels modèles sont fatalement artificiels et quasiment intractables. Comme, d'autre part, on observe que la nature de l'enceinte est sans influence sur le comportement de la substance pour peu qu'on s'éloigne quelque peu des parois, il est naturel de s'adresser à un modèle différent, celui où la substance est contenue, non dans une enceinte hétérogène, mais dans un bain indéfini de cette même substance : on est ainsi amené à considérer la "limite thermodynamique", à savoir la limite, pour une observable A à distance finie, de l'expression (3) où l'on prend la boite de plus en plus grande (avec des parois de plus en plus éloignées). On s'attend effectivement, pour des valeurs de β et μ correspondant à une situation régulière (pas de transition de phase) [14] à ce qu'on ait convergence de (3) quand la boite

13) e.g. en ne modifiant l'état que relativement à un nombre fini de degrés de liberté locaux.

14) S'il y a transition de phase, on s'attend au contraire à une pluralité de "limites thermodynamiques" (obtenue, par exemple, en variant les conditions aux limites aux bords de la boite).

devient infinie (c'est ce qui a été controuvé mathématiquement ces quinze dernières années par les "constructivistes" en mécanique statistique, dans leur effort remarquable de rigorisation de l'approche traditionnelle).

Notre propos est de développer un programme différent visant à atteindre directement, à partir de principes (axiomes) mathématiquement simples et physiquement nécessaires, les propriétés des états d'équilibre du C^*- système $\{\mathcal{Cl},R,\alpha\}$ décrivant le milieu physique infini et son évolution dynamique (les propriétés, donc, qui, en théorie constructive, soit apparaissent soit persistent après la limite thermodynamique). Pour formuler un tel programme, il est nécessaire de disposer d'une propriété algébrique qui contienne la même information que le complexe Ansatz de Gibbs + limite thermodynamique . HAAG, HUGENHOLTZ et WINNINK [6] ont reconnu en 1967 que la "condition de Kubo-Martin-Schwinger" [15] (condition KMS) remplissait exactement ce rôle. Nous concluons donc cette introduction en décrivant cette condition, laquelle, historiquement, apparaît comme suit : revenant à l' "Ansatz de Gibbs" (3) et notant par σ_t l'automorphisme du système dans la boite implémenté par l'unitaire $e^{i(H-\mu N)t}$:

$$(4) \qquad \sigma_t(A) = e^{i(H-\mu N)t} A e^{-i(H-\mu N)t} \quad , \quad t \in R$$

le groupe d'automorphisme à un paramètre $t \to \sigma_t$ s'étendra, pour des observables A analytiques pour ce groupe, à des valeurs imaginaires du temps, de la façon suivante :

$$\sigma_{i\beta}(A) = e^{-\beta(H-\mu N)} A \, e^{\beta(H-\mu N)} \quad , \quad \beta \in R .$$

15) proposée par ces auteurs [6] [7] comme condition aux limites pour le système d'équations différentielles déterminant les "fonctions de Green".

On a alors, pour A analytique et B quelconque

$$\omega_{\beta,\mu}(B\sigma_{i\beta}(A)) = \frac{Tr\{e^{-\beta(H-\mu N)}\,B\,e^{-\beta(H-\mu N)}A\,e^{\beta(H-\mu N)}\}}{Tr\{e^{-\beta(H-\mu N)}\}}$$

$$(5) \qquad = \frac{Tr\{e^{-\beta(H-\mu N)}AB\}}{Tr\{e^{-\beta(H-\mu N)}\}} \qquad ,$$

$$= \omega_{\beta,\mu}(AB)$$

condition qui persiste lorsqu'on effectue la limite thermodynamique. Tenant compte du fait que l'hamiltonien H et l'opérateur nombre de particules N [16] engendrent respectivement le groupe des automorphismes dynamiques $t \to \alpha_t$ et le groupe des automorphismes de jauge $\theta \to \gamma_\theta$ [17], que donc

$$(6) \qquad \sigma_t = \alpha_t \gamma_{\mu t} \qquad , t \in \mathbb{R} ,$$

on voit que l' "Ansatz de Gibbs" implique pour un état d'équilibre thermodynamique à température β^{-1} et à potentiel chimique μ la propriété donnée par la

<u>Définition 5</u>

Soit $\{\mathcal{F}, \mathbb{R}, \sigma\}$ un C^*-système. Un état ω de $\mathcal{F}$ est un <u>état KMS à température β</u> (un état β-KMS) si, pour chaque $B \in \mathcal{F}$ et chaque $A \in \mathcal{F}$ analytique pour σ [18]

$$(7) \qquad \omega(B\sigma_{i\beta}(A)) = \omega(AB) \qquad .$$

16) changé de signe.

17) lesquels commutent entre eux, comme H et N.

18) Signalons que si l'état ω est β-KMS, il est automatiquement σ-invariant : $\omega \circ \sigma_t = \omega$ pour tous les $t \in \mathbb{R}$. On sait que la condition KMS est entre temps devenue un des concepts de base en théorie moderne des algèbres de Von Neumann (cf. l'exposé d'Alain Connes à cette Réunion).

Notre programme est donc désormais clair : il va consister, à partir de principes physiquement naturels (asymptotisme abélien du système $\{\mathfrak{F}, R, \alpha\}$, stabilité de l'état ω pour des perturbations locales de la dynamique) à établir mathématiquement la "condition KMS"(7) pour un sous-groupe à un paramètre du type (6) du groupe engendré par le temps et la jauge. En fait, nous prouverons la condition KMS sous la forme équivalente suivante (laquelle est valable pour des éléments quelconques $A, B \in \mathfrak{F}$): définissant les fonctions F_{AB} et G_{AB} comme suit

$$(8) \qquad \begin{cases} F_{AB}(t) = \omega(B\sigma_t(A)) \\ G_{AB}(t) = \omega(\sigma_t(A)B) \end{cases} , \quad t \in R,$$

ω est KMS à température β si et seulement si les transformées de Fourier $\hat{F}_{AB}$ et $\hat{G}_{AB}$ satisfont la relation [19]

$$(9) \qquad \hat{F}_{AB}(E) = e^{\beta E}\hat{G}_{AB}(E) \quad , \qquad E \in R$$

La dérivation de la propriété β-KMS pour le sous-groupe à un paramètre (6) du groupe dynamique et du groupe de jauge s'effectuera en deux étapes. Dans la section II ci-après, on étudiera d'abord les états d'équilibres de l'algèbre des observables (quasi locales) $\mathfrak{A}$ [20] sur laquelle le groupe de jauge agit trivialement, en sorte que

19) Façon cavalière d'écrire que les mesures bornées à droite et à gauche sont égales.

20) La théorie historique fait apparaître l'algèbre des observables comme la partie invariante de jauge $\mathfrak{A}$ d'une algèbre de champs (en principe inobservables) $\mathfrak{F}$. La théorie algébrique des champs considère $\mathfrak{A}$ comme l'objet fondamental (physiquement et mathématiquement) et $\mathfrak{F}$ (avec son groupe de jauge G) comme un objet auxilliaire constructible à partir de $\mathfrak{A}$ ([10] [11] [12] et l'exposé de John Roberts à cette réunion).

les automorphismes σ_t de la formule (6) se réduisent sur $\mathfrak{A}$ aux automorphismes temporels α_t, $t \in R$.
Pour $A,B \in \mathfrak{A}$ on a alors

$$(10) \qquad \begin{cases} F_{AB}(t) = \omega(B\alpha_t(A)) \\ G_{AB}(t) = \omega(\alpha_t(A)B) \end{cases}$$

en sorte que la propriété (9) de l'état ω à expliquer se réduit à la condition β-KMS relativement au groupe temporel $t \rightarrow \alpha_t$.

La deuxième étape, traitée en section III, consiste à étendre l'état β-KMS ω sur $\mathfrak{A}$ à l'algèbre des champs $\mathfrak{F}$, extension qui fera apparaître la condition β-KMS pour un groupe à un paramètre du type (6). On peut aussi, si on désire développer la théorie à partir de l'algèbre $\mathfrak{A}$ des observables quasi-locales considérée comme l'objet fondamental, présenter la notion de potentiel chimique en termes de concepts ne faisant intervenir que $\mathfrak{A}$ (à l'exclusion de $\mathfrak{F}$ - voir section III ci-après).

II - LA TEMPERATURE

Pour donner un sens précis au résultat annoncé en début d'introduction il faut décrire exactement ce qu'on entend par "stabilité d'un état pour des perturbations locales de la dynamique".

Il nous faut donc d'abord introduire le concept de perturbations locales (ou intérieures) de la dynamique, et ceci dans notre cadre algébrique, c'est-à-dire pour un C^*-système (système dynamique) $\{\mathfrak{A}, \mathbb{R}, \alpha\}$: physiquement $\mathfrak{A}$ est l'algèbre quasi-locale douée de son groupe dynamique α. Ces perturbations sont indexées par des éléments self-adjoints $h = h^* \in \mathfrak{A}$ qui jouent physiquement le rôle d'incrément à l'hamiltonien : on perturbe la dynamique en augmentant l'hamiltonien d'un terme intérieur à l'algèbre (d'où le nom de perturbation intérieure ou locale puisque les $h \in \mathfrak{A}$ représentent des grandeurs (quasi) locales). Mathématiquement il n'est pas nécessaire de parler d'hamiltonien ni d'introduire une représentation (covariante). On peut en effet procéder de manière algébrique, de la façon suivante : étant donné $h = h^* \in \mathfrak{A}$ l'équation différentielle

(11) $$i \frac{d P_t^{(h)}}{dt} = P_t^{(h)} \alpha_t(h)$$

portant sur une fonction $t \to P_t^{(h)}$ à valeurs dans $\mathfrak{A}$ et assortie de la condition initiale

(12) $$P_0^{(h)} = I$$

définit univoquement $\mathcal{P}_t^{(h)}$, $t \in \mathbb{R}$, et l'on montre aisément que $\mathcal{P}_t^{(h)}$ est un <u>cocycle unitaire</u>, i.e.

(13) $$\mathcal{P}_{s+t}^{(h)} = \mathcal{P}_s^{(h)} \alpha_s (\mathcal{P}_t^{(h)}) \qquad , t, s \in \mathbb{R},$$

(14) $$\mathcal{P}_t^{(h)*} = \mathcal{P}_t^{(h)^{-1}} =: \alpha_t (\mathcal{P}_{-t}^{(h)}) \qquad , t \in \mathbb{R}.$$

En conséquence la formule

(15) $$\alpha_t^{(h)}(A) = \mathcal{P}_t^{(h)} \alpha_t(A) \mathcal{P}_t^{(h)}$$

définit, comme on le vérifie immédiatement, un groupe continu à un paramètre $t \to \alpha_t^{(h)}$ d'automorphismes de $\mathfrak{A}$ qu'on appellera le <u>perturbé de α par la perturbation locale (ou intérieure) h</u> [13] [14] [15].

L'interprétation physique de h comme incrément à l'hamiltonien résulte de la formule suivante : si A est un élément α-différentiable de $\mathfrak{A}$, on voit facilement que A est $\alpha^{(h)}$-différentiable et on obtient en différentiant (15) et en tenant compte de (11)

(16) $$i \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \alpha_t^{(h)}(A) = i \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \alpha_t(A) + [h, A]$$

ce qui correspond bien, s'il existe un hamiltonien H, à le remplacer par $H - h$, l'opérateur infinitésimal des groupes α, $\alpha^{(h)}$ étant alors donnés par le crochet de Lie par H, resp. $H - h$.

Notons pour la connexion avec ce qui est habituel en mécanique quantique (et bien qu'il ne doive pas nous servir par la suite) le développement suivant de $\mathcal{P}_t^{(h)}$ en série de perturbations :

(17)
$$\mathcal{P}_t^{(h)} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}_{t,n}^{(h)}$$
$$\mathcal{P}_{t,n}^{(h)} = (-i)^n \int_0^t dt_n \int_0^{t_n} dt_{n-1} \cdots \int_0^{t_2} dt_1\, \alpha_{t_1}(h) \cdots \alpha_{t_n}(h)$$

en qui le lecteur physicien reconnaîtra le développement perturbatif de l'unitaire associé à la "représentation de l'interaction" : dans le cas présent, où la perturbation à l'hamiltonien est un opérateur borné on obtient facilement pour (17) une majorante exponentielle impliquant immédiatement la convergence.

Ayant spécifié la classe des perturbations nous pouvons maintenant donner une définition précise de la stabilité des états.

Définition 6

Soit ω un état α-invariant du C^*-système $\{\mathfrak{A}, R, \alpha\}$ et soit $\mathfrak{A}_{sa}$ la partie self-adjointe de $\mathfrak{A}$: ω est dit stable pour des perturbations locales (ou intérieures) de la dynamique s'il existe une application $h \to \omega^{(h)}$ d'un voisinage $\mathcal{V}$ de 0 dans $\mathfrak{A}_{sa}$ dans l'ensemble des états de $\mathfrak{A}$ telle que

(i) $\omega^{(h)}$ est $\alpha^{(h)}$-invariant i.e.

(18) $$\omega^{(h)}(\alpha_t^{(h)}(A)) = \omega^{(h)}(A) \quad , A \in \mathfrak{A} , \quad t \in R$$

(ii) $\lambda \in R \to \omega^{(\lambda h)}$ est continue en $\lambda = 0$ au sens faible, i.e.

(19) $$\omega^{(\lambda h)}(A) \xrightarrow[\lambda \to 0]{} \omega(A) \quad , \quad A \in \mathfrak{A} .$$

(iii) $\omega^{(h)}$ est asymptotique à ω pour $t = \pm\infty$ au sens faible, i.e.

(20) $$\omega^{(h)}(\alpha_t(A)) \xrightarrow[t \to \pm\infty]{} \omega(A) \quad , \quad A \in \mathfrak{A} .$$

L'interprétation physique de cette définition est diaphane : (i) exprime le fait que $\omega^{(\lambda)}$ est l'état d'équilibre perturbé correspondant à la dynamique $\alpha^{(\lambda)}$; (ii) signifie que cet état perturbé est proche de l'état originel ω ; et (iii) requiert le "retour à l'équilibre" de $\omega^{(\lambda)}$ dans l'avenir et dans le passé si on désenclanche la perturbation. Toutes ces conditions sont évidemment physiquement nécessaires, à l'exception peut-être de (20) pour $t = -\infty$ qui exprime en quelque sorte l'invariance des états d'équilibre pour les inversions de temps.

Cette définition étant donnée, nous allons immédiatement en tirer des conséquences mathématiques dans le cas de systèmes pour lesquels les correlations s'évanouissent dans le temps conformément à (21).

Définition 7 Soit $\{\mathfrak{A}, \mathbb{R}, \alpha\}$ un C*-système avec $\mathfrak{A}_0$ un sous-ensemble (dense) de $\mathfrak{A}$. $\{\mathfrak{A}, \mathbb{R}, \alpha\}$ est dit L^1-asymptotiquement abélien sur $\mathfrak{A}_0$ si on a, pour tous $A, B \in \mathfrak{A}_0$

$$(21) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \| [B, \alpha_t(A)] \| \, dt < \infty$$

où $[A,B] = AB - BA$. [21]

Soit donc $\{\mathfrak{A}, \mathbb{R}, \alpha\}$ un C*-système asymptotiquement abélien au sens qui précède et soit ω un état de $\mathfrak{A}$ α-invariant stable pour des perturbations locales de la dynamique.

21) Nous présumons que les systèmes dynamiques rencontrés en théorie quantique des champs relativiste satisfont à la définition 7, en prenant pour $\mathfrak{A}_0$ des observables suffisamment locales.

Ecrivant (18) sous forme différentielle pour un $B \in \mathfrak{A}$ α-différentiable

(22) $$\omega^{(h)}\left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \alpha_t^{(d)}(B)\right) = 0$$

on obtient en tenant compte de (16)

(23) $$\omega^{(h)}\left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \alpha_t(B)\right) = i\,\omega^{(h)}\left([h, B]\right).$$

Insérant dans cette équation

(24) $$B = \int_S^T \alpha_t(A)\,dt \quad , \quad A \in \mathfrak{A}_0 ,$$

(B est évidemment α-différentiable avec

(25) $$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \alpha_t(B) = \alpha_T(A) - \alpha_S(A) \qquad)$$

nous obtenons

(26) $$\omega^{(h)}\left(\alpha_T(A) - \alpha_S(A)\right) = i\,\omega^{(h)}\left([h, \int_S^T \alpha_t(A)\,dt]\right).$$

Passant maintenant aux limites $S \to -\infty$, $T \to +\infty$, lesquelles ont un sens, à gauche en vertu de (20), à droite en vertu de (21) si $h \in \mathfrak{A}_0$, il vient

(27) $$\omega^{(h)}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} [h, \alpha_t(A)]\,dt\right) = 0 \quad , A \in \mathfrak{A}_0 , h \in \mathfrak{A}_0 \cap \mathcal{V}.$$

Remplaçant alors h par λh et prenant la limite $\lambda \to 0$, (19) implique alors que

(28) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \omega\left([h, \alpha_t(A)]\right) dt = 0 ,$$

ce que nous pouvons réécrire, utilisant la notation (10)

(29) $$\int_{-\infty}^{+\infty} [F_{A\ell}(t) - G_{A\ell}(t)]\, dt = 0 \quad , \quad A, \ell \in \mathfrak{A}_0 .$$

Ceci n'est autre que

(30) $$\hat{F}_{A\ell}(0) = \hat{G}_{A\ell}(0) ,$$

c'est-à-dire le cas particulier de la condition KMS (9) pour $E = 0$. Nous sommes donc sur le droit chemin !

Le reste du travail consiste à se "hisser" du cas particulier (30) au cas général (9). Nous allons esquisser deux façons de le faire, dans des cadres différents, correspondant aux Théorèmes 2 et 2a ci-dessous [22]: ces deux méthodes consistent l'une et l'autre à passer de (29) a la relation

(31) $$\int_{-\infty}^{+\infty} F_{A_1B_1}(t)\, F_{A_2B_2}(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} G_{A_1B_1}(t)\, G_{A_2B_2}(t)\, dt$$

(où A_1, B_1, A_2, B_2 sont arbitraires dans $\mathfrak{A}_0$), laquelle permet de conclure l'argument de la façon suivante : si on remarque que

$$\begin{cases} F_{\alpha_s(B)A}(t) = G_{AB}(s-t) \\ G_{\alpha_s(B)A}(t) = F_{AB}(s-t) \end{cases} \quad , \quad A, B \in \mathfrak{A} , \; s, t \in \mathbb{R} ,$$

(conséquence immédiate des définitions (10)) et si on suppose $\mathfrak{A}_0$ α-invariant, on déduit de (31) que

(32) $$F_{A_1B_1} * G_{A_2B_2} = G_{A_1B_1} * F_{A_2B_2} \quad , \quad A_1, B_1, A_2, B_2 \in \mathfrak{A}_0$$

soit, par transformation de Fourier :

22) Le reste de cette section expose les idées générales des raisonnements sans viser à la rigueur mathématique : le lecteur ne doit donc pas prendre ce que nous y écrivons au pied de la lettre.

(33) $$\hat{F}_{A_1B_1}(E)\ \hat{G}_{A_2B_2}(E) = \hat{G}_{A_1B_1}(E)\ \hat{F}_{A_2B_2}(E)$$

A ce point, nous invoquons le [23)]

Théorème 1

Soit ω un état α-invariant faiblement clustering du C^*-système $\{\mathcal{A},R,\alpha\}$, et $\{\pi,U\}$ la représentation covariante qu'il engendre. Alors, le spectre de U est, soit unilatère (contenu dans R^+, ou dans R^-), soit toute la droite réelle, soit de la forme Zb, $b \geqslant 0$. Le dernier cas est exclu si $\mathcal{A}$ est simple non abélienne, ou si ω est fortement clustering.

Mettant à part le cas du spectre unilatère, qui caractérise les "états fondamentaux", nous pouvons donc, étant donné $E \in R$ qui est alors un point du spectre de l'énergie, choisir A_2 et B_2 tels que $\hat{G}_{A_2B_2}(E) \neq 0$, et écrire (33)

(34) $$\hat{F}_{A_1B_1}(E) = \Phi(E)\ \hat{G}_{A_1B_1}(E)$$

où $\Phi(E) = \hat{F}_{A_2B_2}(E) / \hat{G}_{A_2B_2}(E)$ est une fonction universelle (ne dépendant pas de A_1 et B_1) puisque les choix de A_1,B_1,A_2 et B_2 sont indépendants. Nous sommes presque parvenus à la condition β-KMS (9). Il ne reste que de montrer que la fonction Φ est une exponentielle. Ceci pourra se faire de deux façons : soit, comme en [1A], en tirant de la propriété (31) que ω est séparant (sépare $\pi_\omega(\mathcal{A})''$) et en montrant l'identité, à l'échelle près, du groupe dynamique α_t avec le groupe modulaire σ_t^ω de ω ; soit, de manière moins économique mais plus diaphane [1] en déduisant le caractère exponentiel de Φ de

23) Les physiciens savent depuis longtemps que les états clustering engendrent des représentations pour lesquelles le spectre de l'énergie est un sous-groupe de R (ceci est un cas particulier de la propriété de groupe de l'invariant $S(\mathcal{M})$ de Connes [16] qui, en l'espèce, se réduit au spectre, les projecteurs α-invariants de $\mathcal{M} = \pi(\mathcal{A})''$ étant triviaux). On passe facilement de là au théorème 1 (généralisation du résultat mentionné dans les articles (1) et (3)- voir note à venir [17]).

la relation obtenue en portant (34) dans

$$(35)\quad \int_{-\infty}^{+\infty} F_{A_1B_1}(t)\, F_{A_2B_2}(t)\, F_{A_3B_2}(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} G_{A_1B_1}(t)\, G_{A_2B_2}(t)\, G_{A_3B_3}(t)\, dt\,,$$

relation obtenue à partir de (31) comme cette dernière l'était à partir de (29).

Pour finir, il nous reste donc à expliquer comment (31) résulte de (29). On peut, à cet effet, argumenter de deux façons différentes :

D'une part, on peut tirer parti du caractère arbitraire de A et h dans (31) en les choisissant tels que $A = A_1\alpha_u(A_2)$ $h = B_1\,\alpha_u(B_2)$, $A_1, B_1, A_2, B_2 \in \mathfrak{A}_0$, $u \in R$[24] : on a alors

$$(36)\quad \int_{-\infty}^{+\infty} F_{Ah}(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega\big(B_1\alpha_u(B_2)\,\alpha_t(A_1)\,\alpha_u(\alpha_t(A_2))\big)\, dt$$

expression qui pour $u \to \infty$ tend vers

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \omega\big(B_1\alpha_t(A_1)\big)\,\omega\big(B_2\alpha_t(A_2)\big)\, dt$$

en utilisant le caractère clustering de ω et l'asymptotisme abélien de $\{\mathfrak{A}, R, \alpha\}$. On voit alors, en opérant de la même façon pour $\int_{-\infty}^{+\infty} G_{Ah}(t)\, dt$ qu'on obtiendra ainsi (31) à partir de (29). Pour que la limite $u \to \infty$ soit valable sous l'intégrale (36) il faudra se mettre dans le champ d'application du théorème de la convergence dominée, d'où l'hypothèse d' "hyperclustering" dans le

24) si tant est, ce que nous supposerons maintenant, que $\mathfrak{A}_0$ est non seulement α-invariant, mais fermé par produits.

Théorème 2

Soit $\{\mathfrak{A},R,\alpha\}$ un C^*-système L'-asymptotiquement abélien sur $\mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{A}_0$ étant une sous $*$-algèbre dense de $\mathfrak{A}$ invariante pour les α_t, $t \in R$. Soit ω un état α-invariant de $\mathfrak{A}$ et supposons que ω soit (i) hyperclustering d'ordre 4 sur $\mathfrak{A}_0$, (ii) stable pour les perturbations locales de la dynamique. Alors, si ω n'est pas un état-trace :

- ou bien ω engendre une représentation covariante $\{\pi,U\}$ telle que le spectre de U ("le spectre de l'énergie") soit unilatéral,

- ou bien ω est β-KMS pour $t \to \alpha_t$, $\beta \in R$.

Définition 8

Un état α-invariant ω du C^*-système $\{\mathfrak{A},R,\alpha\}$ est dit hyperclustering d'ordre p sur $\mathfrak{A}_0 \subset \mathfrak{A}$ si pour tout ensemble $A_1, A_2, \ldots, A_k \in \mathfrak{A}_0$, $k \leqslant p$, il existe des constantes positives C et δ telles que

$$\omega^T_{(k)}\left(\alpha_{t_1}(A_1)\ldots\ldots\alpha_{t_k}(A_k)\right) \leq \frac{C}{\{1+\sup_{i\neq j}|t_i-t_j|\}^{1+\delta}} ,$$

où $\omega^T_{(k)}$ dénote l'espérance tronquée d'ordre k [3].

La stabilité requise pour l'état ω dans le théorème ci-dessus est du type "stabilité à la contamination" l'incrément local h à l'hamiltonien modélisant l'introduction d'une impureté dans le système ("addition d'un grain de poussière"). On pourra, alternativement, envisager un autre type de stabilité, à savoir la stabilité de la coexistence du système $\{\mathfrak{A},R,\alpha\}$ dans l'état ω avec un ou plusieurs autres systèmes. La formalisation de cet autre type de stabilité conduit à la

Définition 9

Soit ω un état α-invariant du C^*-système $\{\mathfrak{A},R,\alpha\}$: ω est dit coexistant s'il existe un C^*-système $\{\mathfrak{A}^{(1)},R,\alpha^{(1)}\}$ L^1-asymptotiquement abélien sur une sous $*$-algèbre $\alpha^{(1)}$-invariante dense de $\mathfrak{A}^{(1)}$, et un état $\alpha^{(1)}$-invariant extrémal $\omega^{(1)}$ de $\mathfrak{A}^{(1)}$ tels que l'état $\omega \otimes \omega^{(1)}$ du C^*-système produit $\{\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A}^{(1)},R,\alpha \otimes \alpha^{(1)}\}$ soit stable pour les permutations intérieures de la dynamique(de ce dernier).

Physiquement, cette définition signifie que , après avoir juxtaposé les systèmes $\{\mathfrak{A},R,\alpha\}$ et $\{\mathfrak{A}^{(1)},R,\alpha^{(1)}\}$ en les isolant dynamiquement (paroi isolante), on n'observe rien de dramatique si on introduit un couplage local (trou dans la paroi).

La définition 9 fournit une autre technique pour passer de (29) à (31), mais cette fois-ci en appliquant (29) à l'état produit $\omega \otimes \omega^{(1)}$ du C^*-système produit $\{\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A}^{(1)},R, \alpha \otimes \alpha^{(1)}\}$(justifiable de (29) si ω est supposé coexistant): (31) est alors obtenu par le choix $A = A_1 \otimes A_2$, $h = h_1 \otimes h_2$, $A_1, h_1 \in \mathfrak{A}_o$, $A_2, h_2 \in \mathfrak{A}_o^{(1)}$. En supposant ω "bicoexistant", on obtiendrait également (35) de cette façon. Mais on peut procéder plus économiquement, à partir de (31), comme dans (1a). On obtient alors le

Théorème 2a

Soit $\{\mathfrak{A},R,\alpha\}$ un C^*-système L^1-asymptotiquement abélien sur une sous $*$-algèbre α-invariante dense $\mathfrak{A}_o$ de $\mathfrak{A}$, soit ω un état α-invariant de $\mathfrak{A}$ et supposons ω (i) extrémal invariant (= faiblement clustering) et (ii) coexistant. Alors, on a la même conclusion que pour le théorème 2 , si on suppose $\mathfrak{A}$ simple non abélienne.

.../...

Nous terminons cette section par une brêve allusion à la façon dont on peut traiter, dans le cadre précédent, les milieux en translation uniforme et la brisure de l'invariance euclidienne (cristaux). Imaginons un fluide ou un cristal en équilibre thermodynamique et en translation uniforme : s'il s'agit d'une fluide, l'état correspondant est invariant de translation ; pour un cristal, il sera périodique dans le temps et dans l'espace - mais dans ce dernier cas, on pourra substituer à cet état périodique l'état invariant obtenu en l'intégrant sur une période. On a là des états stationnaires qui méritent certainement le nom d'états d'équilibre mais dont on ne s'attend pas à ce qu'ils soient stables pour les perturbations locales de la dynamique considérées plus haut (grain de poussière immobile dans un milieu en mouvement !). Par contre, on aura stabilité pour des automorphismes perturbés du type $\alpha^{(\bar{h})}$ où, formellement

$$\bar{h} = \iiint \alpha_{\vec{x}}(h)\, d^3x$$

(intégrale étendue à tout l'espace - bien évidemment $\bar{h}$ n'a pas de signification en lui-même, mais $\alpha^{(\bar{h})}$ est définissable, vu que la définition ne fait appel qu'à l'action de $\bar{h}$ dans un commutateur $[\bar{h},A]$, lequel a un sens pour A local). La stabilité de l'état ω pour les perturbations de ce type conduit alors à (29) où h est remplacé par $\bar{h}$, c'est-à-dire à

$$\iiiint F_{Ah}(\vec{x},t)\, d^3x\, dt = \iiiint G_{Ah}(\vec{x},t)\, d^3x\, dt \quad , \tag{37}$$

analogue quadridimensionnel de (29) où

$$\begin{cases} F_{Ah}(\vec{x},t) = \omega(h\, \alpha_{\vec{x}}\, \alpha_t(A)) \\ G_{Ah}(\vec{x},t) = \omega(\alpha_{\vec{x}}\, \alpha_t(A)\, h) \end{cases} \tag{37a}$$

.../...

où $\alpha_{\vec{x}}$ est l'automorphisme de $\mathcal{A}$ correspondant à la translation spatiale $\vec{x}$. L'exploitation de (37) conduit alors, par un raisonnement analogue au précédent, mais où le groupe temporel R est remplacé par le groupe spatio-temporel R^4 à la relation

$$(38) \qquad \hat{F}_{Ak}(E,\vec{p}) = e^{\beta E+\vec{\beta}\cdot\vec{p}}\,\hat{G}_{Ak}(E,\vec{p}) \ .$$

On trouve, comme il fallait s'y attendre, une température quadridimensionnelle $(\beta,\vec{\beta})$ dont la partie spatiale décrit l'impulsion du milieu en mouvement. On voit facilement que (38) exprime le fait que ω est β-KMS pour un sous-groupe R' à un paramètre du groupe R^4. Alors, de deux choses l'une :

- ou bien l'état de départ ω était fortement clustering, il est alors factoriel et décrit un fluide.

- ou bien ω était seulement faiblement clustering : dans ce cas, la mesure centrale correspondante est ergodique et ω est une intégrale, pour cette mesure, d'états factoriels, qui, comme nous allons le voir, décrivent des cristaux.

Le cas le plus simple est celui d'une mesure transitive [18] qui fournit la décomposition centrale de ω sous forme d'une intégrale d'états périodiques - ces dernières restant β-KMS pour le groupe R' , donc invariants pour ce groupe, sont donc nécessairement également périodiques dans l'espace, ce qui correspond à un cristal lancé dans une direction congrue avec ses directions d'axes. Une mesure centrale intransitive décrirait un cristal en mouvement dans une direction à coefficients directeurs irrationnels.

Nous avons là un cas particulier d'un mécanisme mathématique général conduisant à des brisures de symétrie : à savoir la décomposition centrale d'un état <u>faiblement clustering</u> par rapport à α_t, β-KMS pour un sous-groupe à un paramètre (distinct de α_t) du produit direct de la droite temporelle et d'un autre groupe de symétrie. Le premier exemple de ce mécanisme a été remarqué par H.Araki dans la théorie du potentiel chimique [2].

III - LE POTENTIEL CHIMIQUE

Ayant démontré, en les définissant comme α-invariant extrémaux et stables, que les états d'équilibre de $\mathfrak{A}$ satisfont à la condition β-KMS (β fini ou non) pour le groupe des automorphismes temporels, le but que l'on recherche maintenant, si l'on s'attache à retrouver les résultats de la théorie historique, sera d'expliquer la formule (5), c'est-à-dire de démontrer que l'extension d'un tel état à l'algèbre des champs $\mathfrak{F}$ est β-KMS pour un groupe d'automorphismes de la forme (6).

Indépendamment de toute idée préconçue, le problème est de discuter en quoi peuvent différer les différents états d'équilibre de l'algèbre $\mathfrak{A}$ correspondant à une température donnée β^{-1}. De ce point de vue, il importe de trouver des tests permettant de distinguer ces états les uns des autres en révélant le ou les paramètres qui, outre la température, indexent les états d'équilibre. Dans ce qui suit, nous décrirons deux types de tests, qui sont, en fait, deux versions du même test :

- d'une part, comme le suggère la théorie historique, le comportement de l'extension des états à l'algèbre $\mathfrak{F}$.

- d'autre part, le comportement relatif aux automorphismes localisés de $\mathfrak{A}$ [11].

On s'attend à ce que ces deux types de tests soient liés l'un à l'autre puisque l'algèbre des champs $\mathfrak{F}$ n'est en fait qu'une construction auxiliaire permettant d'implémenter les automorphismes localisés au moyen de ses unitaires [10] [11] [12]. On ne s'étonnera donc pas que les deux types de tests conduisent l'un et l'autre au même paramètre de classification des états d'équilibre, à savoir le potentiel chimique – lequel se trouve ainsi algébriquement interprété (les éléments de classification liés à l'existence de différentes phases ne sont pas abordés dans cette étude).

Hypothèses

Nous considérons l'algèbre des observables $\mathfrak{A}$ comme une sous-C^*-algèbre d'une C^*-algèbre $\mathfrak{F}$ (l'algèbre des champs) douée de deux groupes d'automorphismes continus commutant entre eux, le groupe dynamique $t \in R \to \alpha_t$ et le groupe de jauge [25] $g \in G \to \gamma_g$, où G est supposé compact (non forcément abelien[26]). $\mathfrak{A}$ est la partie G-invariante de $\mathfrak{F}$:

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{F}^G = \{ A \in \mathfrak{F} \; ; \; \gamma_g(A) = A \text{ pour tout } g \in G \},$$

et on suppose le système $\{\mathfrak{F}, R, \alpha\}$ asymptotiquement abélien dans le sens suivant : pour tous $a, b \in \mathfrak{F}$.

(39) $$\| [\alpha_t(a), b] \| \xrightarrow[t \to \infty]{} 0$$

([ ] représente un commutateur - le cas d'opérateurs de Fermi, où [ ] est à remplacer par l'anticommutateur $[\ ]_+$ [27]) a été traité [2] mais ne sera pas évoqué dans cet exposé).

25) de première espèce.

26) ceci présente un certain intérêt en vue de groupes tels que SU_2, SU_3, etc.

27) En d'autres termes, on considère un C^*-système $\{\mathfrak{F}, R \times G, \alpha \times \gamma\}$, $R \times G$ le produit direct de la droite temporelle et du "groupe de jauge", tel que le système $\{\mathfrak{F}, R, \alpha\}$ soit asymptotiquement abélien (ou asymptotiquement grassmannien, s'il s'agit de fermions). On notera que la partie G-invariante $\mathfrak{A}$ de $\mathfrak{F}$ est alors telle que $\alpha_t(\mathfrak{A}) \subset \mathfrak{A}$, $t \in R$.
Par la suite, nous désignerons les éléments de $\mathfrak{F}$ par des lettres minuscules a,b, etc. et ceux de $\mathfrak{A}$ par des lettres majuscules A,B, etc.

Théorème 3

Les hypothèses ci-dessus entraînent que :

(i) tout état α-invariant extrémal ω de $\mathfrak{A}$ possède une extension α-invariante extrémale ϕ à $\mathfrak{F}$. De plus, deux telles extensions ϕ_1, ϕ_2 sont telles que $\phi_2 = \phi_1 \circ \gamma_g$ pour un g $\in$ G. En d'autres termes, on a existence et unicité à une jauge près de l'extension α-invariante extrémale à $\mathfrak{F}$ de tout état α-invariant extrémal de $\mathfrak{A}$).

(ii) Soit ω un état de $\mathfrak{A}$ β-KMS extrémal pour α (du type de ceux fournis par les théorèmes I et Ia)[28] supposons de plus ω fidèle (i.e. $\omega(A^*A) = 0$, $A \in \mathfrak{A}, \Rightarrow A = 0$)[29] Si ϕ est une extension α-invariante extrémale de ω à $\mathfrak{F}$, ϕ est β-KMS pour un groupe d'automorphismes de $\mathfrak{F}$ à un paramètre de la forme $t \to \alpha_t \, \gamma_{\xi_t}$, où $t \to \xi_t$ est un sous-groupe à un paramètre du centre du stabilisateur G_ϕ de ϕ.

iii) Avec les hypothèses de (ii), dans le cas usuel où G est le tore de dimension 1[30] (donc où $\xi_t = \mu t$, $\mu \in R$), et supposant en plus que $\mathfrak{A}$ possède une structure locale, le <u>potentiel chimique</u> μ est directement[31] caractérisable de la manière suivante : si ρ est un <u>automorphisme localisé</u> [11]. de charge n de $\mathfrak{A}$, avec $v_t \in \mathfrak{A}$ un cocycle unitaire continu qui le lie à ses conjugués par des automorphismes temporels :

$$(40) \qquad \rho^{-1} \circ \alpha_t \circ \rho = Ad\, v_t \circ \alpha_t \qquad , \quad t \in R \ ,$$

28) Un état β-KMS de $\mathfrak{A}$ pour α est β-KMS extrémal si et seulement si il est α-invariant extrémal, et il est alors factoriel.

29) Si $\mathfrak{A}$ est simple, cette spécification devient inutile, tout état β-KMS de $\mathfrak{A}$ étant automatiquement fidèle (dû au fait que l'idéal à gauche d'un état KMS est un idéal bilatère).

30) la généralisation à un tore de dimension n est évidente.

31) sans intervention de l'algèbre des champs $\mathfrak{F}$. Un automorphisme ρ est dit <u>localisé dans le double cone</u> K s'il se réduit à l'identité sur la sous-algèbre correspondant à l'ensemble K' des points de genre espace par rapport aux points de K.

on a que

a) l'état $\omega\circ\varsigma$ est quasi-équivalent à l'état ω.

b) la dérivée de Radon-Nicodym de $\omega\circ\varsigma$ par rapport à ω [16] est liée comme suit au cocycle v_t :

(41) $$(\mathcal{D}(\omega\circ\varsigma) : \mathcal{D}\omega)_t = e^{in\beta(\mu+c)t}\, \pi_\omega(v_{-\beta t})$$

où c est une constante réelle indépendante de ω, π_ω désignant la représentation engendrée par ω.

Remarque 1. Pour G non commutatif, le potentiel chimique apparait dans le théorème 3(ii) comme un vecteur de l'algèbre de Lie de G. La groupe à un paramètre $t \to \xi_t$ est trivial (= le potentiel chimique s'annule) si G_ϕ est trivial (absence de symétrie de jauge pour l'état ϕ) ou si G_ϕ est simple (donc de centre trivial).

Remarque 2. Dans le cas usuel $G = \mathbb{T}^1$, on a l'alternative : ϕ invariant de jauge ($G_\phi = \mathbb{T}^1$) ou non (G_ϕ trivial). C'est seulement dans le premier cas qu'on peut avoir un potentiel chimique non nul.

Remarque 3. Un état ω de $\mathfrak{A}$ β-KMS extrémal est fortement clustering puisque primaire, mais il peut arriver que ses extensions α-invariantes extrémales à $\mathfrak{F}$ soient seulement faiblement clustering. Dans ce cas, la décomposition centrale d'une telle extension ϕ est transitive [18] en vertu de la compacité de G. Les composantes primaires correspondantes sont toujours β-KMS pour le groupe à un paramètre $t \to \alpha_t \gamma_{\xi_t}$, cependant, elles "cassent" l'invariance de temps. Dans le cas $G = \mathbb{T}^1$ on obtient ainsi des états ϕ α-invariants en restriction à $\mathfrak{A}$, mais périodiques dans le temps sur $\mathfrak{F}$ (comme on en rencontre dans l'effet Josephson, ou comme limite thermodynamique avec certaines conditions aux bornes pour la condensation de Bose du gaz libre de Bose [22]).

Remarque 4. Si ω n'est pas fidèle (possible si $\mathfrak{A}$ n'est pas simple, comme c'est le cas pour la partie invariante de jauge de l'algèbre des CAR), il y a possibilité que ϕ soit "de type état fondamental" dans certaines directions du groupe de jauge (cf. [2] et remarque 6 plus bas).

Remarque 5. Nous supposons ici le système $\{\mathfrak{F}, \mathbb{R}, \alpha\}$ asymptotiquement abélien et l'état ω invariant dans le temps, ayant en vue la théorie relativiste. Si on s'intéresse aux systèmes de spin, on aura recours à ces hypothèses pour le groupe des translations spatiales. Le lecteur trouvera la théorie correspondante dans [2] et [4].

Démonstration du Théorème 3(i)

Soit ω un état extrémal α-invariant de $\mathfrak{A}$ (ou synonymement), puisque $\{\mathfrak{A}, R, \alpha\}$ est asymptotiquement abélien, faiblement "clustering"[32], c'est-à-dire satisfaisant

$$(42) \qquad \frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} \omega\left(\alpha_t(A)\,B\right) dt \xrightarrow[T=\infty]{} \omega(A)\,\omega(B) \quad , \ A, B \in \mathfrak{A}$$

a) Existence d'une extension α-invariante extrémale ϕ de ω à $\mathfrak{F}$:

L'ensemble $\mathcal{S}$ des extensions α-invariantes de ω à $\mathfrak{F}$ est convexe compact non vide (R étant amenable) : il possède donc un élément extrémal ϕ. Si $\phi = \lambda\phi_1 + (1-\lambda)\phi_2$, $0 < \lambda < 1$, ϕ_1, ϕ_2 α-invariants, on a par restriction à $\mathfrak{A}$ $\omega = \lambda\phi_1|_{\mathfrak{A}} + (1-\lambda)\phi_2|_{\mathfrak{A}}$ d'où $\phi_1|_{\mathfrak{A}} = \phi_2|_{\mathfrak{A}} = \omega$ puisque ω est extrémal α-invariant, d'où $\phi_1 = \phi_2$ puisque ϕ est extrémal dans $\mathcal{S}$.

b) Unicité à une jauge près de l'extension α-invariante extrémale

La preuve est basée sur la remarque que, pour un état ϕ de $\mathfrak{F}$

32) ou faiblement "mixing" comme on dit en théorie ergodique commutative. Ne sachant comment traduire le mot en français, nous l'adoptons tel quel.

α-invariant extrémal (c'est-à-dire faiblement clustering), la fermeture en norme $\overline{\mathcal{E}'_\phi(G)}$ de l'ensemble

(43) $$\mathcal{E}'_\phi(G) = \{\phi^{(a)} : g \in G \to \phi(\gamma_g(a)) \ ; \ a \in \mathfrak{F}\}$$

est une sous C^*-algèbre de $\mathcal{E}(G)$ [33] globalement invariante par les translations à droite par les éléments de G :
en effet, d'une part

(44) $$\phi(\gamma_g(a^*)) = \overline{\phi(\gamma_g(a))} \ , \quad a \in \mathfrak{F}, \ g \in G,$$

et, d'autre part, pour a,b $\in \mathfrak{F}$,

(45) $$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} \phi(\alpha_t(\gamma_g(a))\gamma_g(b))\,dt \xrightarrow[T=\infty]{} \phi(\gamma_g(a))\,\phi(\gamma_g(b))$$

d'où la multiplicativité de $\overline{\mathcal{E}'(G)}$ (on observera que les fonctions sur G figurant à gauche de (44) forment un ensemble équicontinu). On a alors

(46) $$\overline{\mathcal{E}'_\phi(G)} = \mathcal{E}(G_\phi \backslash G)$$

où $G_\phi\backslash G = \{G_\phi g \ ; \ g \in G\}$, d'après le résultat classique[34]:

Lemme A

Soit G un groupe compact et soit $\lambda(k)$ $(\rho(k))$ l'opérateur de translation à gauche (à droite) dans $\mathcal{E}(G)$: $\{\lambda(k)f\}(g)=f(kg)$, $\{\rho(k)f\}(g)=f(gk)$. Les correspondances

(47a) $$K \to \mathfrak{A} = \mathcal{E}(K\backslash G) = \{f \in \mathcal{E}(G) \ ; \ \lambda(k)f = f \ \ \forall\, k \in K\}$$

(47b) $$\mathfrak{A} \to K = \{k \in G \ ; \ f(kg) = f(g) \ \ \forall\, f \in \mathfrak{A} \text{ et } g \in G\}$$

établissent une bijection entre les sous-groupes fermés K de G et les sous C^*-algèbres $\mathfrak{A}$ de $\mathcal{E}(G)$ globalement invariantes par les $\rho(g)$, $g \in G$.

33) Nous notons $\mathcal{E}(G)$ l'ensemble des fonctions continues sur le groupe compact G. $\mathcal{E}(G)$ est une C^*-algèbre avec la structure multiplicative et la conjugaison complexe habituelles.

34) où nous assimilons la fonction $f \in \mathcal{E}(G)$ invariante par les $\lambda(k)$, $k \in K$ avec la fonction $f \circ \phi \in \mathcal{E}(K\backslash G)$, ϕ étant l'application canonique $G \to K\backslash G$.

Le lemme A est une conséquence facile du théorème de Stone-Weierstrass. Notre résultat d'unicité résultera du lemme B suivant, lequel s'obtient aisément en tenant compte du fait que les transposés des automorphismes d'une C^*-algèbre abélienne sont les homéomorphismes de son spectre [35].

Lemme B

Soient K_i , $i = 1,2$, des sous-groupes fermés du groupe compact G : tout isomorphisme de C^*-algèbre de $\mathcal{E}(K_1\backslash G)$ sur $\mathcal{E}(K_2\backslash G)$ commutant avec les $\rho(g)$, $g \in G$, est de la forme $\lambda(h)$ pour un $h \in G$ tel que $K_2 = h K_1 h^{-1}$.

Soient, en effet, ϕ_1 et ϕ_2 deux extensions α-invariantes extrémales de l'état ω sur $\mathfrak{A}$, $K_i = G_{\phi_i}$, $i = 1,2$ les stabilisateurs correspondants.
Pour $a,b \in \mathfrak{F}$

$$A(a,b,t) = \int_G \gamma_g (a^* \alpha_t(b))\, dg \tag{48}$$

appartient à $\mathfrak{A}$ et donne donc la même valeur à ϕ_1 et ϕ_2 .
Comme on a, en vertu du clustering des ϕ_i et par équicontinuité

$$\lim_{T=\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} \phi_i \left\{ A(a,b,t)\right\} dt = \int \overline{\phi_i^{(a)}(g)}\, \phi_i^{(b)}(g)\, dg = \left(\phi_i^{(a)} \mid \phi_i^{(b)}\right)_{L^2(K_i\backslash G)},$$

on conclut à l'existence d'une isométrie linéaire V de $L^2(K_1\backslash G)$ sur $L^2(K_2\backslash G)$ telle que, pour tout $a \in \mathfrak{F}$,

$$V \phi_1^{(a)} = \phi_2^{(a)} \tag{49}$$

35) On trouvera des démonstrations des lemmes A, B et C en appendice de [2]. Pour une référence générale sur la dualité de Tannaka, on consultera [19].

Par ailleurs (45) montre que $\phi^{a\alpha_t(b)}$ tend vers le produit $\phi^a\ \phi^b$ à la Cesaro pour $t = \infty$ (uniformément par équicontinuité). Il suit de là que

$$(50)\qquad V\left(\phi_1^{(a)}\phi_1^{(b)}\right) = \phi_2^{(a)}\phi_2^{(b)} \qquad , a,b \in \mathfrak{F},$$

Il résulte de là que si T_i est la représentation de $\mathcal{E}(K_i\backslash^G)$ sur $L^2(K_i\backslash^G)$ obtenue par multiplication point par point

$$(51)\qquad \{T_i(f)\xi\}(g) = f(g)\,\xi(g) \quad , \ f \in \mathcal{E}(K_i\backslash^G), \ \xi \in L^2(K_i\backslash^G),$$

on a que

$$(52)\qquad T_2(Vf) = VT_1(f)V^*.$$

Comme T_2 est isométrique, on en conclut que V est un isomorphisme de $\mathcal{E}(K_1\backslash^G)$ sur $\mathcal{E}(K_2\backslash^G)$, lequel commute évidemment avec les $\rho(g)$, $g \in G$. Le lemme B fournit alors $g \in G$ tel que, pour $a \in \mathfrak{F}$, $\phi_2^{(a)} = \lambda(g) = \phi_1^{(a)}$, i.e.

$$\phi_2(\gamma_1(a)) = \phi_2(\gamma_{g1}(a)) = (\phi_1\circ\gamma_g)(\gamma_1(a)),$$

d'où le résultat. Notons, pour une utilisation ultérieure, qu'une variante du résultat précédent permet de conclure :

<u>Lemme C</u>

Soient $\mathcal{A}_0{}^i$, $i = 1,2$, de fermeture normique $\mathcal{A}^i$, des sous *-algèbres de $\mathcal{E}(G)$ globalement invariantes par les translations à droite par les éléments de G et soient K_i les sous-groupes fermés de G associés aux $\mathcal{A}^i$. Toute application linéaire multiplicative $U_0 : \mathcal{A}_0^1 \to \mathcal{A}_0^2$ commutant avec les $\rho(g)$, $g \in G$, et isométrique pour les normes $L^2(K_i\backslash^G)$ est de la forme $\lambda(h)$ pour un $h \in H$ tel que $K_2 = h\,K_1\,h^{-1}$.

Démonstration du théorème 3(ii)

Soit ω un état fidèle de $\mathfrak{A}$, β-KMS extrémal pour α; et soit ϕ une extension α-invariante extrémale de ω à $\mathfrak{F}$. Nous dénotons par G_ϕ le stabilisateur de ϕ dans G, par $\{\pi_\phi, U_\phi, \mathcal{H}_\phi, \Omega_\phi\}$ la construction GNS de ϕ et par $\{\mathfrak{M}, \mathbb{R}\times G_\phi, \alpha\times\gamma\}$ le W^*-système correspondant ($\mathfrak{M} = \pi_\phi(\mathfrak{F})''$, $\gamma = \mathrm{ad}\, U_\phi$, cf. Def. 4). Le premier stade de la démonstration consiste à étudier la restriction de ϕ à l'algèbre $\mathfrak{F}^{G_\phi}$ des points fixes de $\mathfrak{F}$ pour G_ϕ (de fermeture $\mathfrak{M}^{G_\phi}$) :

$$\text{(53)}\qquad \begin{aligned} \mathfrak{F}^{G_\phi} &= \{ a \in \mathfrak{F} ; \gamma_g(a) = a \quad \text{pour tous les } g \in G_\phi \} \\ \mathfrak{M}^{G_\phi} &= \{ a \in \mathfrak{M} ; \gamma_g(a) = U_\phi(g)\, a\, U_\phi(g)^* \text{pour tous les } g \in G_\phi \end{aligned}$$

Nous montrons que

ϕ restreint à $\mathfrak{F}^{G_\phi}$ est β-KMS pour $t \to \alpha_t$. $\mathfrak{M}^{G_\phi}$ coïncide avec $\pi_\phi(\mathfrak{A})''$ et est un facteur (au sens de Von Neumann). Ω_ϕ sépare $\mathfrak{M}$ [36].

Pour ceci, nous notons que, d'après la propriété β-KMS de ω pour $t \to \alpha_t$, nous avons pour des éléments α-entiers quelconques a, a', b, b' $\in \mathfrak{F}$

$$\text{(54)}\qquad \phi\Big(\varepsilon\big(a^* \alpha_t(a')\big)\ \alpha_{i\beta}\big[\varepsilon\big(b^* \alpha_t(b')\big)\big]\Big) = \phi\Big(\varepsilon\big(b^* \alpha_t(b')\big)\, \varepsilon\big(a^* \alpha_t(a')\big)\Big)$$

où ε est l'opérateur "moyenne en jauge"

$$\text{(55)}\qquad \varepsilon(a) = \int_G \gamma_g(a)\, dg \qquad , \quad a \in \mathfrak{F}.$$

---

36) Si nous savions que $\mathfrak{M}^{G_\phi} = \pi_\phi(\mathfrak{A})''$ et que $\mathfrak{M}^{G_\phi}$ est un facteur, la propriété β-KMS de $\phi|_{\mathfrak{F}^{G_\phi}}$ pour $t \to \alpha_t$ découlerait immédiatement du fait que $\pi_\omega(\mathfrak{A})'' = \pi_\phi(\mathfrak{A})''$. Mais c'est dans l'ordre inverse que ces fait apparaissent dans nos raisonnements !

Appliquant

$$(56) \qquad M_T = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} dt$$

aux deux membres de (54), nous avons alors, pour $T \to \infty$, grâce au clustering faible de ϕ et à l'asymptoticité abélienne de $\{\mathcal{F}, R, \alpha\}$:

$$(57) \qquad \iint \phi\big(\gamma_{g_1}(a^*)\,\gamma_{g_2}\circ\alpha_{i\beta}(b^*)\big)\cdot\phi\big(\gamma_{g_1}(a')\,\gamma_{g_2}\circ\alpha_{i\beta}(b')\big)\,dg_1\,dg_2$$
$$= \iint \phi\big(\gamma_{g_1}(b^*)\,\gamma_{g_2}(a^*)\big)\cdot\phi\big(\gamma_{g_1}(b')\,\gamma_{g_2}(a')\big)\,dg_1\,dg_2 .$$

Ceci s'écrit, tenu compte de ce que $\alpha_{i\beta}(b^*) = \alpha_{-i\beta}(b)^*$:

$$(58) \qquad \left(s\,\phi^{(\alpha_{-i\beta}(b),a)}, \phi^{(a',\alpha_{i\beta}(b'))}\right) = \left(\phi^{(a,b)}, s\,\phi^{(b',a')}\right)$$

où (,) dénote un produit scalaire dans $L^2(G\otimes G)$, où $sf(g_1,g_2) = f(g_2,g_1)$, $g_1, g_2 \in G$ et où les "fonctions à deux points en jauge" sont définies comme

$$(59) \qquad \phi^{(a,b)}(g_1,g_2) = \phi\big(\gamma_{g_1}(a)\,\gamma_{g_2}(b)\big) \quad , g_1,g_2 \in G,\ a,b \in \mathcal{F}.$$

Remplaçant b' par $\alpha_{-i\beta}(b')$ dans (57) donne

$$(60) \qquad \left(s\,\phi^{(\alpha_{-i\beta}(b),a)}, \phi^{(a',b')}\right) = \left(\phi^{(a,b)}, s\,\phi^{(\alpha_{-i\beta}(b'),a')}\right)$$

vraie pour a, b, a', b' $\in \mathcal{F}$ α-analytiques quelconques. Choisissant a , b dans $\mathcal{F}^{G_4}$, remplaçant a' par $\alpha_t(a')$ appliquant M_T des deux côtés et passant à la limite $T \to \infty$, il vient

$$\left(s\,\phi^{(\alpha_{-i\beta}(b),a)} - \phi^{(a,b)}, \phi^{(a')}\otimes\phi^{(b')}\right) = 0$$

d'où

$$s\,\phi^{(\alpha_{-i\beta}(b),a)} = \phi^{(a,b)} \qquad , \qquad \text{a,b } \alpha\text{-entiers} \in \mathcal{F}^{G_4},$$

c'est-à-dire la propriété β-KMS de $\phi|_{\mathfrak{F}^{G_\phi}}$ pour $t \to \alpha_t$ (noter que le produit scalaire est en fait dans $L^2(G_\phi\backslash^{G} \otimes G_\phi\backslash^{G})$ pour lequel les $\phi^{(a')} \otimes \phi^{(b')}$ forment un sous-ensemble total puisque les $\phi^{(a)}$, $a \in \mathfrak{F}$ sont denses dans $\mathcal{E}(G_\phi\backslash^{G})$ et que les éléments α-analytiques sont denses). Maintenant, puisque $\phi|_{\mathfrak{F}^{G_\phi}}$ est invariant extrémal et β-KMS pour $t \to \alpha_t$, la fermeture faible $\mathcal{N}$ de $\pi(\mathfrak{F}^{G_\phi})$, où π est la représentation de $\mathfrak{F}^{G_\phi}$ engendrée par ϕ, est un facteur d'ailleurs égal à $\mathcal{N} = E\mathcal{M}^{G_\phi}E = \mathcal{M}^{G_\phi}E$, E étant le projecteur dans $\mathcal{H}_\phi$ sur la composante cyclique de Ω_ϕ pour $\mathfrak{F}^{G_\phi}$. De plus Ω_ϕ sépare $\mathcal{N}$, donc $a \in \mathcal{M}^{G_\phi} \to aE$ est un $*$-isomorphisme de $\mathcal{M}^{G_\phi}$ sur $\mathcal{N}$: $\mathcal{M}^{G_\phi}$ est donc un facteur [37]. Finalement Ω_ϕ sépare $\mathcal{M}$ comme on le voit en considérant le projecteur F sur $[\mathcal{M}'\Omega_\phi]$: F appartient évidemment à $\mathcal{M}^{G_\phi} = \mathcal{M} \cap U_\phi(G)'$ et satisfait à $F\Omega_\phi = \Omega_\phi$, d'où $F = I$ puisque Ω_ϕ sépare $\mathcal{M}^{G_\phi}$: mais ceci équivaut à dire que Ω_ϕ est cyclique pour $\mathcal{M}'$, donc séparant pour $\mathcal{M}$.

Le second stade de notre preuve consiste à montrer qu'un état ϕ α-invariant extrémal du C^*-système $\{\mathfrak{F}, \mathbb{R} \times \mathcal{G}, \alpha \times \gamma\}$ (où $\mathcal{G} = G_\phi$ est désormais la partie intéressante du groupe de jauge) lequel est β-KMS sur $\mathfrak{F}^{\mathcal{G}} = \mathfrak{F}^{G_\phi}$ pour $t \to \alpha_t$, est nécessairement β-KMS pour un sous-groupe à un paramètre de $\mathbb{R} \times \mathcal{G}$ dont le second facteur appartient au centre de $\mathcal{G}$. La preuve est basée sur le résultat suivant : [38]

---

37) Ce résultat est en fait une autre expression du théorème 3(iii)(a).

38) résultat du même type que le fait (utilisé plus haut pour montrer l'unicité de l'extension à une jauge près) que $\mathcal{E}'_\phi(G) = \mathcal{E}(G\backslash^{G})$. Le lecteur notera qu'ici également l'hypothèse que ω est β-KMS n'intervient pas.

Soit $\mathcal{C}^2_\phi(\mathcal{G})$ l'ensemble des fonctions sur $\mathcal{G}$ restrictions à $\{e\}\otimes G_\phi$ des fonctions (59) (appelons aussi ces restrictions $\phi^{(a,b)}$: $\phi^{(a,b)}(g) = \phi(a\,\gamma_g(b))$, $g\in\mathcal{G}$, $a,b\in\mathfrak{F}$).
Sous les hypothèses de 3(ii), l'enveloppe linéaire fermée $[\mathcal{C}^2_\phi(\mathcal{G})]$ de $\mathcal{C}^2_\phi(\mathcal{G})$ coïncide avec $\mathcal{C}(\mathcal{G})$.

Supposant ceci démontré, nous raisonnons comme suit : la propriété β-KMS de $\phi|_{\mathfrak{F}\otimes G_\phi}$ pour $t\to\alpha_t$ entraîne (54) où ε est à définir avec $\mathcal{G}$ au lieu de G dans (55). De là suit (60) avec la nouvelle définition des $\phi^{(a,b)}$, (,) étant le produit scalaire dans $L^2(\mathcal{G})$ et avec $(sf)(g) = f(g^{-1})$, $g\in\mathcal{G}$.

Si, donc, nous posons, pour a_i, b_i α- entiers dans $\mathfrak{F}$ et $c_i\in\mathbb{R}$, $i = 1,2,\ldots,n$,

$$(61)\qquad S\sum_{i=1}^{n} c_i f_\phi^{(a_i,b_i)} = \sum_{i=1}^{n} c_i\, s f_\phi^{(\alpha_{-i\beta}(b_i),a_i)} ,$$

nous obtenons une définition cohérente de S : en effet, d'après (59), pour a', b' α-entiers dans $\mathfrak{F}$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} c_i\, s f_\phi^{(\alpha_{-i\beta}(b_i),a_i)}\,\middle|\, f_\phi^{(a',b')}\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} c_i f_\phi^{(a_i,b_i)}\,\middle|\, s f_\phi^{(\alpha_{-i\beta}(b'),a')}\right),$$

en sorte que le second membre de (61) ne s'annule que si [39]

$$\sum_{i=1}^{n} c_i f_\phi^{(a_i,b_i)} = 0 .$$

L'opérateur linéaire S ainsi défini est d'après (60) tel que

$$(62)\qquad \left(S f_\phi^{(a,b)}\,\middle|\, f_\phi^{(a',b')}\right) = \left(f_\phi^{(a,b)}\,\middle|\, S f_\phi^{(a',b')}\right),$$

c'est donc un opérateur linéaire préfermé, tel que $S\subset S^*$, défini sur les combinaisons linéaires des $f_\phi^{(a,b)}$,

39) Nous utilisons ici le fait que $\mathcal{C}^2_\phi(\mathcal{G})$ est total dans $\mathcal{C}(\mathcal{G})$, donc dans $L^2(\mathcal{G})$.

a, b α - entiers dans $\mathfrak{F}$, lesquelles sont denses dans $L^2(\mathcal{G})$ puisque $[\mathcal{E}_\phi^2(\mathcal{G})] = \mathcal{E}(\mathcal{G})$. Comme

(63) $$\lambda(g)\phi^{(a,b)} = \phi^{(\gamma_g(a),b)}, \quad \rho(g)\phi^{(a,b)} = \phi^{(a,\gamma_g(b))}, \quad g \in \mathcal{G}, a,b \in \mathfrak{F},$$

les translations resp. à gauche et à droite $\lambda(g)$ et $\rho(g)$ par les $g \in \mathcal{G}$ commutent avec S et laissent son domaine invariant. Donc la fermeture $\bar{S}$ de S commute avec ces translations et commute alors avec les

(64) $$e(p) = \int_{\mathcal{G}} \lambda(g)\chi_p(g)^* dg$$

pour tous les caractères χ_p correspondant aux représentations irréductibles p de $\mathcal{G}$. On conclut de là que

(65) $$S e(p) = S(p)\, e(p)$$

où $S(p)$ est un nombre dont il n'est pas très difficile de voir qu'il est strictement positif : $\bar{S}$ est donc self adjoint positif, donc $t \in \mathbb{R} \to \bar{S}^{it}$ est un groupe continu d'opérateurs unitaires.
Le caractère faiblement clustering de ϕ entraîne que

(66) $$S(\phi^{(a,b)} \cdot \phi^{(a',b')}) = (S\phi^{(a,b)})(S\phi^{(a',b')}), \quad a,b,a',b' \in \mathfrak{F},$$

propriété également vérifiée pour $\bar{S}^{it}$ (notons que $S(p)S(q) = S(r)$ si r est contenue dans p ⊗ q).
$Ad\,\bar{S}^{it}$ est alors justiciable du Lemme C ci-dessus qui entraîne que

(67) $$Ad\,\bar{S}^{it} = \lambda(\xi_t) = \rho(\xi_t), \quad t \in \mathbb{R},$$

avec $t \to \xi_t$ un sous-groupe à un paramètre continu du centre de $\mathcal{G} = G_\phi$.

Pour achever la démonstration, il nous rester à prouver les deux résultats admis plus haut.

a) Démonstration de $\mathcal{M}^{G_\phi} = \pi_\phi(\mathfrak{A})''$. 40)

Nous nous plaçons d'abord, pour simplifier, dans le cas où G est abélien. Désignant par Ĝ le groupe dual de Ĝ, on a alors les résultats suivants [21]:

Posant

(68) $$\mathfrak{F}^{(\chi)} = \{ a \in \mathfrak{F} \,;\, \gamma_g(a) = \chi(g)a \} \qquad , \chi \in \hat{G},$$

le sous-ensemble Σ_ϕ de Ĝ défini par

(69) $$\Sigma_\phi = \{ \chi \in \hat{G} \,;\, \exists\, a \in \mathfrak{F}^{(\chi)} \text{ avec } \phi(a) \neq 0 \}$$

est un sous-groupe fermé de Ĝ égal à l'annihilateur de G_ϕ :

(70) $$\Sigma_\phi = G_\phi^{\perp} = \{ \chi \in \hat{G} \,;\, \chi(g) = \quad \forall g \in G_\phi \} \;;\; G_\phi = \Sigma_\phi^{\perp} .$$

De plus, l'algèbre de Von Neumann $\mathcal{M}^{G_\phi}$ est engendrée par les $a \in \mathfrak{F}^{(\chi)}$, $\chi \in \Sigma_\phi$:

(71) $$\mathcal{M}^{G_\phi} = \Big\{ \bigcup_{\chi \in \Sigma_\phi} \mathfrak{F}^{(\chi)} \Big\}'' .$$

En effet, pour $\chi, \chi' \in \Sigma_\phi$ il existe $a \in \mathfrak{F}^{(\chi)}$, $a' \in \mathfrak{F}^{(\chi')}$, tels que $\phi(a) \neq 0$, $\phi(a') \neq 0$. Alors $a\,\alpha_t(a') \in \mathfrak{F}^{(\chi\chi')}$, $t \in \mathbb{R}$, n'est pas identiquement nul en t puisque, ϕ étant faiblement clustering, $\phi(a\,\alpha_t(a'))$ tend à la Cesaro vers $\phi(a)\cdot\phi(a')$ pour t = ∞. Donc $\chi\chi' \in \Sigma_\phi$. Par ailleurs, $\bar{\chi} \in \Sigma_\phi$ puisque $\overline{\phi(a)} = \phi(a^*)$ avec $a^* \in \mathfrak{F}^{(\bar{\chi})}$. Σ_ϕ est donc bien un groupe.

Démonstration de (70) : pour $a \in \mathfrak{F}^{(\chi)}$, $\chi \in \hat{G}$, et $g \in G$ on a

40) La démonstration ci-dessous est celle de Roberts [21], valable pour des états clustering quelconques. On trouvera une autre démonstration dans [2].

(72) $$\phi(\gamma_g(a)) = \chi(g)\phi(a) .$$

Donc, si $g \in G_\phi$,

$$[1 - \chi(g)]\phi(a) = 0 ,$$

d'où $\chi(g) = 1$ si on a choisi $a \in \mathcal{F}^{(\chi)}$ tel que $\chi \in \Sigma_\phi , \phi(a) \neq 0$: Inversement, si $g \in \Sigma_\phi^\perp$ (72) montre que

$$\begin{cases} \phi(\gamma_g(a)) = \phi(a) & \text{si} \quad \chi \in \Sigma_\phi \\ \phi(\gamma_g(a)) = 0 = \phi(a) & \text{si} \quad \chi \notin \Sigma_\phi \end{cases} ,$$

d'où $g \in G_\phi$: $\Sigma_\phi^\perp \subset G_\phi$. On a montre $\Sigma_\phi^\perp = G_\phi$ d'où $G_\phi^\perp = \Sigma_\phi$ puisque $\widehat{G}$ est discret.

Pour prouver (71), on remarque d'abord que, pour $a \in \mathcal{F}^{(\chi)}$, $\chi \in \Sigma_\phi$, (72) entraîne $a \in \mathfrak{M}^{G_\phi}$, compte-tenu de (70), ce qui montre l'inclusion $\supseteq$ dans (71). Pour démontrer l'inclusion inverse, on utilise le fait que, pour tout $a \in \mathfrak{M}$

(73) $$a = \sum_{\chi \in \widehat{G}} a^{(\chi)} \quad , \quad a^{(\chi)} = \int \overline{\chi(g)}\, \gamma_g(a)\, dg ,$$

la somme convergeant au sens faible [41] : il suffira donc de vérifier que si $a \in \mathfrak{M}^{G_\phi}$, $a^{(\chi)} = 0$ sauf si $\chi \in \Sigma_\phi$: cela résulte de l'orthogonalité des caractères de G puisque, dans ce cas, $a = \varepsilon(a)$, où ε est la moyenne sur G_ϕ (cf. (56)).

Pour démontrer $\mathfrak{M}^{G_\phi} = \pi_\phi(\mathfrak{A})''$, il suffit donc de voir que $a \in \pi(\mathfrak{A})''$ pour $a \in \mathfrak{M}^{(\chi)}$, $\chi \in \Sigma_\phi$. Alors $\overline{\chi} \in \Sigma_\phi$, on peut donc trouver $b \in \mathcal{F}^{(\overline{\chi})}$ tel que $\phi(b) \neq 0$. On a alors

(74) $$\frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \pi_\phi(\alpha_t(b))\, a \xrightarrow[T=\infty]{} \phi(b)\, a$$

41) Résultat valable pour tout W^*-système $\{\mathfrak{M}, G, \gamma\}$, où G est compact abélien (ou non abélien, la somme étant sur les représentations irréductibles de G, où χ est le caractère associé).

dans la topologie faible des opérateurs (dû à ce que ϕ est faiblement clustering, $\{\mathfrak{F}, \mathcal{R}, \alpha\}$ étant asymptotiquement abélien). Comme le premier membre de (74) appartient à $\pi(\mathfrak{A})''$ et que $\phi(b) \neq 0$, il en est de même de a q.e.d.

La démonstration précédente se transpose au cas où G est non abélien en étendant la notion de "support de ϕ" grâce au résultat classique suivant [42)]

<u>Lemme A'</u>

Soit G un groupe compact et soit $\mathcal{R}$ l'ensemble des représentations unitaires (irréductibles) σ de G sur des espaces $\mathbb{C}^{n_\sigma}$, $n_\sigma < \infty$:

$$(75) \qquad \sigma : \; g \in G \longrightarrow \{(u^i) \in \mathbb{C}^{n_\sigma} \longrightarrow (U_\sigma(g)u)^k = \sum_{i=1}^{n_\sigma} U_\sigma(g)^i_k \, u^k\}.$$

Considérons l'ensemble $\mathcal{E}$ des applications $E : \sigma \in \mathcal{R} \to E_\sigma$, E_σ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{n_\sigma}$, satisfaisant aux propriétés

(i) $E_{\sigma \otimes \tau} \subset E_\sigma \otimes E_\tau \quad , \; \sigma, \tau \in \mathcal{R}$

(ii) $E_{\bar{\sigma}} = \overline{E_\sigma} \quad , \; \sigma \in \mathcal{R}$,
où $U_{\bar{\sigma}}(g)^i_k = \overline{U_\sigma(g)^i_k} \quad , \; \overline{(u^i)} = (\overline{u^i})$

(iii) $S(E_\sigma) \subset E_\tau$, $\sigma, \tau \in \mathcal{R}$, pour tout opérateur d'entrelacement $S : \mathbb{C}^{n_\sigma} \to \mathbb{C}^{n_\tau} \; (U_\tau(g) S = S \, U_\sigma(g) \; , g \in G)$.

Les formules suivantes établissent une bijection de $\mathcal{E}$ avec l'ensemble $\mathfrak{K}$ des sous-groupes fermés K de G :

$$(76) \qquad E \longrightarrow K = E^\perp = \{k \in G \; ; \; U_\sigma(k)u = u \quad \forall u \in E_\sigma \, \forall \sigma \in \mathcal{R}\}$$

$$(77) \qquad K \longrightarrow E = K^\perp : \sigma \in \mathcal{R} \longrightarrow E_\sigma = \{u \in \mathbb{C}^{n_\sigma} ; \; U_\sigma(k)u = u \, \forall k \in K\}$$

42) Voir [19] théorème (30-47).

Ce lemme est une variante du Lemme A ci-dessus, la C^*-algèbre $\mathcal{A}_K = \mathcal{C}(K\backslash G)$ étant celle engendrée par les fonctions

$$g \in G \to (u|U_\sigma(g)|v) \quad , \quad u \in E_\sigma \, , \, v \in \mathbb{C}^{n_\sigma} \, , \, \sigma \in \mathcal{R} \, .$$

Etant donnée $\sigma \in \mathcal{R}$ on appellera maintenant "multiplet de type σ" tout ensemble (a_i) de n_σ élément de $\mathfrak{F}$ tels que [43)]

$$(78) \qquad \gamma_g(a_i) = \sum_{k=1}^{n_\sigma} U_\sigma(g)_i^k \, a_k \quad , \quad g \in G \, .$$

La notion de support de ϕ généralisant celle du sous-ensemble $\Sigma_\phi \in \hat{G}$ considéré plus haut est alors fournie par le résultat suivant [21]:

Soit $\sigma \in \mathcal{R}$ et soit E_σ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{n_\sigma}$ engendré par les $(\overline{\phi(a_i)})$, où les (a_i) sont tous les multiplets de type σ . Alors $E \in \mathcal{E}$, le sous-groupe fermé de G associé à E étant le stabilisateur G_ϕ de ϕ :

$$(79) \qquad E = G_\phi^\perp \quad , \quad G_\phi = E^\perp \qquad \text{au sens de (76), (77)} \, .$$

De plus, l'algèbre $\mathfrak{M}^{G_\phi} = \pi_\phi(\mathfrak{F}^{G_\phi})''$ des points fixes de $\mathfrak{M} = \pi_\phi(\mathfrak{F})''$ par G_ϕ est alors engendrée par les

$$(80) \qquad \pi_\phi(a(u)) = \sum_{i=1}^{n_\sigma} u^i \, \pi_\phi(a_i) \quad , \quad u \in E_\sigma \, , \, \sigma \in \mathcal{R} \, ,$$

en d'autres termes, par les

$$(81) \qquad \sum_{i=1}^{n_\sigma} \overline{\phi(b_i)} \, \pi_\phi(a_i) \quad ,$$

(b_i), (a_i) , des multiplets quelconques de type σ, σ parcourant $\mathcal{R}$.

43) On notera que $a : (u^i) \in \mathbb{C}^{n_\sigma} \to \sum_{i=1}^{n_\sigma} u^i a_i$ est alors un opérateur linéaire de $\mathbb{C}^{n_\sigma}$ dans $\mathfrak{F}$ entrelaçant U_σ et γ : $a \circ U_\sigma(g) = \gamma_g \circ a$, $g \in G$: il résulte donc du lemme de Schur que, pour σ irréductible, les a_i sont soit tous nuls, soit linéairement indépendants.

Soient (a_i) et (b_k) des multiplets respectivement de type σ et τ, $\sigma,\tau \in \mathcal{R}$. Alors (a_i^*) est un multiplet de type $\overline{\sigma}$ avec $\phi(a_i^*) = \overline{\phi(a_i)}$, E satisfait donc à (ii). Par ailleurs, les $c_{ik}(T)$ où

$$c_{ik}(T) = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} \alpha_t(a_i)\, b_k \, dt$$

forment un multiplet de type $\sigma \otimes \tau$ pour tous les T, tel que

$$\overline{\phi(c_{ik}(T))} \xrightarrow[T=\infty]{} \overline{\phi(a_i)}.\overline{\phi(b_k)}$$

(dû au clustering faible de ϕ) : E satisfait donc à (i). Par ailleurs, si $S = (S^i_k) : \mathbb{C}^{m_\sigma} \to \mathbb{C}^{m_\tau}$ entrelace σ et τ, on voit immédiatement que $(b_i = \sum_k \overline{S^i_k} a_k)$ est un multiplet de type τ, par conséquent $\sum_k S^i_k \overline{\phi(a_k)} = \overline{\phi(\sum_k \overline{S^i_k} a_k)} = \overline{\phi(b_i)}$, E satisfait donc à (iii). On a donc bien $E \in \mathcal{E}$.

D'autre part, pour $g \in G$

(82) $$\sum_{k=1}^{m_\sigma} U_\sigma(g)^i_k\, \overline{\phi(a_k)} = \overline{\phi\Big(\sum_{k=1}^{m_\sigma} U_\sigma(g)^k_i\, a_k\Big)} = \overline{\phi(\gamma_g(a_i))}$$

donc $g \in E^\perp$ si et seulement si $\phi(\gamma_g(a_i)) = \phi(a_i)$ pour tous les multiplets (a_i) de type σ et tous les $\sigma \in \mathcal{R}$: (73) entraîne alors que ceci équivaut à $\phi \circ \gamma_g = \phi$, i.e. $g \in G_\phi$: donc $E^\perp = G_\phi$. Enfin on a, pour $g \in G$, $(u^i) \in \mathbb{C}^{m_\sigma}$ et (a_i) un multiplet de type σ irréductible

(83) $$\gamma_g\Big(\sum_{i=1}^{m_\sigma} u^i a_i\Big) = \sum_{i=1}^{m_\sigma} u^i \gamma_g(a_i) = \sum_{i=1}^{m_\sigma}\sum_{k=1}^{m_\sigma} U_\sigma(g)^k_i\, u^i a_k$$

donc $\sum_{i=1}^{m_\sigma} u^i a_i \in \mathfrak{F}^{G_\phi}$ si et seulement si (cf. note 43)

$$\sum_{i=1}^{m_\sigma} U_\sigma(g)^k_i\, u^i = u^k \quad , \quad g \in G_\phi$$

i.e. si $(u^i) \in E_\sigma$: (73) implique alors que $\pi_\phi(\mathfrak{F}^{G_\phi})''$ est engendrée par les opérateurs de type (80). Le raisonnement s'achève alors comme dans le cas abélien.

b) <u>Démonstration de $\overline{[\mathcal{E}_\phi^2(\mathcal{G})]} = \mathcal{E}(\mathcal{G})$</u> 44)

$\overline{[\mathcal{E}_\phi^2(\mathcal{G})]}$, linéaire par définition, est globalement invariant par les translations à droite par les $g \in \mathcal{G}$ en vertu de (63). Par ailleurs, nous montrons que $\overline{[\mathcal{E}_\phi^2(\mathcal{G})]}$ est multiplicatif (comme $\overline{\mathcal{E}_\phi^1(G)}$, et pour une raison analogue) : ϕ étant faiblement clustering et $\{\mathfrak{F}, \alpha, \mathcal{R}\}$ asymptotiquement abélien, on a, pour $a, a', b, b' \in \mathfrak{F}$

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} \phi\left(a\,\alpha_t(a')\,\gamma_g[b\,\alpha_t(b')]\right) dt \xrightarrow[T=\infty]{} \phi(a\,\gamma_g(b)) \cdot \phi(a'\gamma_g(b')) ,$$

le premier membre appartenant à $\overline{[\mathcal{E}_\phi^2(\mathcal{G})]}$ et la convergence étant uniforme en g, par équicontinuité. Montrons maintenant que $\overline{[\mathcal{E}_\phi^2(\mathcal{G})]}$ est globalement invariant par conjugaison complexe.

Nous remarquons tout d'abord qu'en vertu de la cyclicité de Ω_ϕ pour π_ϕ, $[\mathcal{E}_\phi^2(\mathcal{G})]$ est également l'enveloppe linéaire fermée des fonctions

$$\phi^{(x,y)} : g \in \mathcal{G} \to (\Omega_\phi | x\,\gamma_g(y) | \Omega_\phi) \quad , x, y \in \mathfrak{M} .$$

Considérons alors, pour $y \in \mathfrak{M}$, le développement

$$(84) \qquad \gamma_g(y) = \sum_\sigma \sum_{ij} U_\sigma(g)_j^i \, y_j^{\sigma i} \ , \quad y_j^{\sigma i} = \dim\sigma \cdot \int_{\mathcal{G}} \overline{U_\sigma(g)_j^i}\, \gamma_g(y)\, dg$$

où $\sum_\sigma$ est sur toutes les classes d'équivalences de représentations unitaires irréductibles de . Portant (85) dans (84)

(85a)

et tenant compte du fait que les $y_j^{\sigma i}$ forment <u>pour i et</u> σ fixés un multiplet de type σ, nous voyons que $\overline{[\mathcal{E}_\phi^2(\mathcal{G})]}$ coïncide également avec l'enveloppe linéaire fermée des

45) La décomposition (84) est convergente pour la topologie faible des opérateurs dans la représentation π_ϕ : (85) converge alors en norme par équicontinuité, ce qui résulte par ailleurs de la théorie de Peter-Weyl.

fonctions $\phi^{(x,y_i)}$, x parcourant $\mathfrak{M}$ et (y_i) les multiplets de tous les types -ou encore, celle des éléments de matrice de toutes les représentations irréductibles de $\mathcal{G}$ associées à ces multiplets. Nous atteindrons donc notre but en vérifiant que, pour chacune de ces représentations σ, la représentation conjuguée $\bar{\sigma}$ apparait aussi comme sous-représentation à la fois de γ et de U_ϕ : or, d'une part, à chaque multiplet non nul (y_i) de type σ correspond un multiplet non nul de type $\bar{\sigma}$, à savoir (y_i^*) ; d'autre part, chaque multiplet non nul de type σ donne lieu à une sous-représentation de U_ϕ identique à U_σ : cela résulte du fait que l'application $y \to \pi_\phi(y)\Omega_\phi$ entrelace γ et U_σ, et donc est nulle ou biunivoque sur les combinaisons linéaires des y_i, la première alternative étant exclue du fait que $\sum_i y_i^* y_i \neq 0 \in \mathfrak{M}^{G_\phi}$, Ω_ϕ séparant $\mathfrak{M}^{G}$ puisque ϕ est β-KMS sur $\mathfrak{M}^{G_\phi}$ pour $t \to \alpha_t$. Nous pouvons donc maintenant conclure du Lemme A que $\overline{[\mathcal{E}_\phi^{i}(\mathcal{G})]} = \mathcal{E}(\mathcal{N}_\phi \backslash \mathcal{G})$, avec

$$(86) \qquad \mathcal{N}_\phi = \left\{ s \in \mathcal{G} \,;\, \phi(a\,\gamma_s(b)) = \phi(ab) \ \ \forall\, a,b \in \mathfrak{F} \right\} .$$

Nous montrons maintenant que l'hypothèse $\phi|_{\mathfrak{A}}$ fidèle entraîne la trivialité du groupe d'asymétrie $\mathcal{N}_\phi$: cela est immédiat si G est abélien : pour tout multiplet (b_i) de type σ relativement à $\{\mathfrak{F}, G, \gamma\}$ et tout $s \in \mathcal{N}_\phi$, $(a_i) = (b_i - \gamma_s(b_i))$ est alors un multiplet de même type, alors $A = \sum a_i^* a_i \in \mathfrak{A}$ est nul d'après (86) : la fidélité de $\phi|_{\mathfrak{A}}$ implique alors $b_i = \gamma_s(b_i)$, d'où (85) $b = \gamma_s(b)$ pour tout $b \in \mathfrak{F}$, d'où $s = e$ si γ agit fidèlement. Pour un G non abélien, la preuve est un peu plus complexe.

<u>Remarque 6</u>. Si $\phi|_{\mathfrak{A}}$ n'est pas fidèle (possible si $\mathfrak{A}$ n'est pas simple, comme dans le cas où $\mathfrak{F}$ est l'algèbre des CAR) $\mathcal{N}_\phi$ peut être non trivial. ϕ est alors β-KMS pour $t \to \alpha\gamma_{\xi_t}$ avec $t \to \xi_t$ dans le centre de $G_\phi/\mathcal{N}_\phi$, le spectre de $U_\phi|_{\mathcal{N}_\phi}$ étant unilatéral (voir [2]).

c) Second stade : démonstration basée sur le formalisme de J. Roberts. Considérons, à nouveau, le C^*-système $\{\mathfrak{F}, \mathbb{R}\times\mathcal{G}, \alpha\times\gamma\}$ où $\mathcal{G} = \mathcal{G}_\phi$ et soit $\{\mathfrak{M}, \mathbb{R}\times\mathcal{G}, \alpha\times\gamma\}$ le W^*-système associé à la représentation covariante obtenue par la construction GNS $\{\pi_\phi, U_\phi, \mathcal{H}, \Phi\}$ de ϕ. On démontre tout d'abord que le vecteur Φ sépare $\mathfrak{M}$ 46), et définit donc un groupe à un paramètre σ^ϕ d'automorphismes modulaires de $\mathfrak{M}$ commutant avec $\alpha_{\mathbb{R}}$ et $\gamma_{\mathcal{G}}$ 47). Comme on suppose ϕ faiblement clustering et $\{\mathfrak{F}, \mathbb{R}, \alpha\}$ asymptotiquement abélien $Ad\, U_\phi(\mathbb{R})$ agit ergodiquement sur $\mathfrak{M}'$ (i.e. ne laisse invariants que les scalaires). Mais comme $\mathfrak{M} = J_\phi \mathfrak{M}' J_\phi$, où J_ϕ est la conjugaison modulaire associée à ϕ, laquelle commute avec $U_\phi(\mathbb{R})$ pour lequel Φ est invariant, on voit que l'action de $Ad\,U_\phi(\mathbb{R})$ sur $\mathfrak{M}$ est ergodique : conséquemment le spectre réduit $S(\mathfrak{M})$ [16] 48) se confond avec le spectre de la représentation U_ϕ de $\mathbb{R}$, lequel couvre la droite réelle d'après le Théorème 1 : par conséquent l'algèbre $\mathfrak{M}^{\mathcal{G}}$ des points fixes de $\mathfrak{M}$ pour $\gamma(\mathcal{G})$ (fermeture faible de $\pi_\phi(\mathfrak{F}^\gamma)$) est un facteur de type III_1. Posant alors $\alpha = \alpha_{\beta t}\, \sigma_t^\phi$, $t \in \mathbb{R}$, on obtient un automorphisme de $\mathfrak{M}$ qui commute avec α_t, $t \in \mathbb{R}$ 47), et d'autre part α se réduit à l'identité sur $\mathfrak{M}^{\mathcal{G}}$ (on a démontré plus haut que $\alpha_{\beta t} = \sigma_t^\phi$, $t \in \mathbb{R}$, en restriction sur $\mathfrak{M}^{\mathcal{G}}$). L'automorphisme $\alpha = \alpha_t^{-1} \sigma_t^\phi$ est donc justiciable du

---

46) Ceci résulte de la démonstration donnée plus haut

47) Rappelons qu'un automorphisme laissant invariant un état de $\mathfrak{M}$ commute avec les automorphismes modulaires de cet état [21].

48) Le lecteur trouvera en [16a] et [3] Chap. VIII des exposés simplifiés de la théorie de l'invariant $S(\mathfrak{M})$ de A. Connes.

Théorème 4

Soit $\{\mathcal{M}, \mathcal{G}, \gamma\}$ un W^*-système où le groupe $\mathcal{G}$ est compact et où l'algèbre $\mathcal{M}^{\mathcal{G}}$ des points fixes de $\mathcal{M}$ pour $\mathcal{G}$ est un facteur de type III. Supposons de plus que le groupe $Aut_\gamma(\mathcal{M})$ des automorphismes de $\mathcal{M}$ commutant avec les γ_g, $g \in \mathcal{G}$, possède un sous-groupe $\mathcal{S}$ agissant ergodiquement sur $\mathcal{M}$ [49]. Alors tout automorphisme α de $\mathcal{M}$ qui commute avec $\mathcal{S}$ et se réduit à l'identité sur $\mathcal{M}^{\mathcal{G}}$ est de la forme $\alpha = \gamma_{g_\alpha}$ pour un $g_\alpha \in \mathcal{G}$.

Il résulte de ce théorème et de la commutativité de α et γ que $\sigma_t^\phi = \alpha_t \gamma_{\xi_t}$, avec $t \to \xi_t$ un sous-groupe à un paramètre de $\mathcal{G} = G_\phi$. De plus tout $s \in G_\phi$ commute avec les α_t par hypothèse et avec les σ_t^ϕ comme laissant ϕ invariant : le sous-groupe ξ appartient donc au centre de G_ϕ.

La démonstration du théorème 4 est basée sur une notion due à J. Roberts dont voici une esquisse[50] : étant donnée une algèbre de von Neumann $\mathcal{M}$, Roberts appelle <u>espace de Hilbert dans $\mathcal{M}$</u> tout sous-espace linéaire normiquement fermé $\mathcal{H}$ de $\mathcal{M}$ tel que

(i) x^*y est un multiple de l'unité pour tous $x, y \in \mathcal{H}$

(ii) $ax = 0$ pour tout $x \in \mathcal{H}$, $a \in \mathcal{M}$, entraîne $a = 0$.

Comme alors, pour $x \in \mathcal{H}$, $x^*x = \|x^*x\| = \|x\|^2$, il suit de là que $\mathcal{H}$ muni du produit scalaire

$$(x|y) = x^*y \qquad , \quad x, y \in \mathcal{H}, \tag{88}$$

est un espace de Hilbert. Soit $\mathcal{H}(\mathcal{M})$ l'ensemble des espaces

---

49) c'est-à-dire dont les points fixes dans $\mathcal{M}$ se réduisent aux scalaires.

50) pour la notion d'espace de Hilbert dans une algèbre de von Neumann, voir [12] où cette notion est proposée et étudiée.

de Hilbert dans $\mathcal{M}$ ainsi définis : on voit facilement que toute base orthonormale $\{u_i\}$ de $\mathcal{G} \in \mathcal{H}(\mathcal{M})$ est formée d'isométries u_i à images orthonormales complémentaires : $u_i^* u_j = \delta_{ij}$, $\sum u_i u_i^* = I$ [51]; de plus la formule

$$(89) \qquad \varphi_{\mathcal{G}}(a) = \sum_i u_i a u_i^* \qquad , a \in \mathcal{M},$$

définit alors un morphisme biunivoque de $\mathcal{M}$ sur une sous-algèbre de von Neumann $\varphi_{\mathcal{G}}(\mathcal{M})$ de $\mathcal{M}$, morphisme indépendant du choix de la base orthonormale $\{u_i\}$, car aussi définissable par la propriété d'entrelacement

$$(90) \qquad \varphi_{\mathcal{G}}(a) x = x a \qquad , a \in \mathcal{M}, x \in \mathcal{G} .$$

Il est utile de remarquer qu'étant donnés $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2 \in \mathcal{H}(\mathcal{M})$ l'espace vectoriel $(\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2)$ des applications linéaires bornées de $\mathcal{G}_1$ dans $\mathcal{G}_2$ peut être linéairement plongé dans $\mathcal{M}$, par extension linéaire et continue du procédé

$$(91) \qquad (x_2 x_1^*) y_1 = x_2 (x_1^* y_1) \qquad , x_1, y_1 \in \mathcal{G}_1 , x_2 \in \mathcal{G}_2 ,$$

associant aux $x_2 x_1^* \in \mathcal{M}$ les opérateurs de rang 1 de $\mathcal{G}_1$ dans $\mathcal{G}_2$. On vérifie alors qu'on a l'isormophisme

$$(92) \qquad \mathcal{M} = \varphi_{\mathcal{G}}(\mathcal{M}) \,\bar{\otimes}\, (\mathcal{G}, \mathcal{G})$$

où figure à droite un produit tensoriel d'algèbres de von Neumann. Etant donnés $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2 \in \mathcal{H}(\mathcal{M})$ on vérifie d'autre part que $[\mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2]$, où $[\ ]$ désigne l'enveloppe linéaire fermée dans $\mathcal{M}$, est un élément de $\mathcal{H}(\mathcal{M})$ isomorphe à $\mathcal{G}_1 \otimes \mathcal{G}_2$ par extension de la correspondance :

$$(93) \qquad \sum_i x_1^i x_2^i \longrightarrow \sum_i x_1^i \otimes x_2^i \ , \ x_1^i \in \mathcal{G}_1 , x_2^i \in \mathcal{G}_2$$

---

51) Ceci montre que l'existence d'espaces de Hilbert dans $\mathcal{M}$ non triviaux (de dimension > 1) implique que l'algèbre de von Neumann $\mathcal{M}$ est proprement infinie.

ceci en vertu du fait que

(94) $$\Big(\sum_i x_1^i x_2^i\Big)^* \sum_i y_1^i y_2^i = \sum_{ij} (x_1^i | y_1^j)(x_2^i | y_2^j)$$

$$x_1^i, y_1^j \in \mathcal{H}_1 \ ; \ x_2^i, y_2^j \in \mathcal{H}_2 .$$

Les notions précédentes vont nous servir à décrire les "multiplets de jauge" de notre W^*-système $\{\mathcal{M}, \mathcal{G}, \gamma\}$: nous obtiendrons ces derniers comme les $\mathcal{H} \in \mathcal{H}(\mathcal{M})$ de dimension finie, invariants par les γ_g , $g \in \mathcal{G}$, i.e. comme les éléments de

(95) $$\mathcal{H}_\gamma(\mathcal{M}) = \{\mathcal{H} \in \mathcal{H}(\mathcal{M}) \ ; \ \dim \mathcal{H} < \infty , \ \gamma_g(\mathcal{H}) \subset \mathcal{H} \ \forall g \in \mathcal{G}\}$$

Notons que pour un tel $\mathcal{H}$ la restriction $\gamma_g/_{\mathcal{H}}$ de γ_g à $\mathcal{H}$ fournit une représentation unitaire du groupe $\mathcal{G}$. En effet, pour $x, y \in \mathcal{H}$

(96) $$(\gamma_g(x) | \gamma_g(y)) = \gamma_g(x)^* \gamma_g(y) = \gamma_g(x^* y) = (x|y) .$$

Nous définissons alors <u>le spectre $Sp(\gamma)$ de γ</u> (resp. <u>le spectre monoïdal $Msp(\gamma)$ de γ</u>) comme l'ensemble des représentations irréductibles de $\mathcal{G}$ apparaissant comme sous-représentations de γ dans $\mathcal{M}$ (resp. comme restrictions $\gamma/_{\mathcal{H}_\gamma}$ de γ à des $\mathcal{H} \in \mathcal{H}_\gamma(\mathcal{M})$). Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le résultat fournissant la clé de la démonstration du Théorème 4:

<u>Lemme D</u> (dualité de Tannaka dans le formalisme de J. Roberts). Soit $\{\mathcal{M}, \mathcal{G}, \gamma\}$ un W^*-système où $\mathcal{G}$ est compact, $\mathcal{M}^{\mathcal{G}}$ proprement infinie, et supposons que $Sp(\gamma) = Msp(\gamma)$. Alors tout automorphisme α de $\mathcal{M}$ tel que

(i) α laisse globalement invariant tout $\mathcal{H} \in \mathcal{H}_\gamma(\mathcal{M})$

(ii) α se réduise à l'identité sur $\mathcal{M}^{\mathcal{G}}$

est tel que $\alpha = \gamma_{g_\alpha}$ pour un $g_\alpha \in \mathcal{G}$.

Démonstration du Lemme D : on se ramène au Lemme C de la façon suivante : soit $\mathcal{E}_\gamma(\mathcal{G})$ l'ensemble des fonctions

$$g \in \mathcal{G} \longrightarrow f_{x,y}(g) = (x \mid \gamma_g(y)) = x^* \gamma_g(y)$$

où $x, y \in \mathcal{H}$, $\mathcal{H}$ parcourant $\mathcal{H}_\gamma(\mathcal{M})$: $\mathcal{E}_\gamma(\mathcal{G})$ est une sous $*$-algèbre de $\mathcal{E}(\mathcal{G})$: étant donnés $x_1, y_1 \in \mathcal{H}_1$ et $x_2, y_2 \in \mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2 \in \mathcal{H}_\gamma(\mathcal{M})$ on vérifiera en effet que

- si l'on choisit des isométries $u, v \in \mathcal{M}^{\mathcal{G}}$ d'images orthogonales complémentaires (possible car $\mathcal{M}^{\mathcal{G}}$ est proprement infinie), alors $\mathcal{H} = u\mathcal{H}_1 + v\mathcal{H}_2 \in \mathcal{H}_\gamma(\mathcal{M})$ et

$$f_{x,y} = f_{x_1,y_1} + f_{x_2,y_2}$$

où $x = ux_1 + vx_2$, $y = ux_2 + vy_2$.

- on a

$$f_{x_1 y_1, x_2 y_2} = f_{x_1 y_1} f_{x_2 y_2}$$

où $x_1 y_1, x_2 y_2 \in [\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2]$.

- si $\mathcal{U} \in M\text{sp}(\gamma)$, $\mathcal{U} = \gamma|_{\mathcal{H}}$, $\mathcal{H} \in \mathcal{H}_\gamma(\mathcal{M})$, sa conjuguée $\overline{\mathcal{U}} \sim \gamma|_{\mathcal{H}^*}$ apparaît dans $Sp(\gamma) = M\text{sp}(\gamma)$.

Ceci étant on vérifie que, pour $x, y, x', y' \in \mathcal{H}$, $\mathcal{H} \in \mathcal{H}_\gamma(\mathcal{M})$,

$$\left(f_{\alpha(x),y} \mid f_{\alpha(x'),y}\right)_{L^2(\mathcal{G})} = \left(f_{x,y} \mid f_{x',y'}\right)_{L^2(\mathcal{G})}.$$

$f_{x,y} \to f_{\alpha(x),y}$ est donc restriction d'une isométrie U de $L^2(\mathcal{G})$ et on vérifie immédiatement que U est multiplicative et commute avec les translations à droite : le Lemme C assure alors l'existence d'un $g_\alpha \in \mathcal{G}$ tel que $(Uf_{x,y})(g) = f_{x,y}(g_\alpha^{-1} g)$ ce qui entraîne immédiatement $\alpha = \gamma_{g_\alpha}$ en restriction à tous les $\mathcal{H} \in \mathcal{H}_\gamma(\mathcal{M})$. Pour étendre ceci à tout $\mathcal{M}$ il suffit de le vérifier sur tout sous-espace vectoriel $\mathcal{V} \in \mathcal{M}$ tel que $\gamma|_{\mathcal{V}}$ soit irréductible. Pour un tel $\mathcal{V}$ il existe, puisque $Sp(\gamma) = M\text{sp}(\gamma)$, un $\mathcal{G}_\gamma \in \mathcal{H}_\gamma(\mathfrak{M})$ tel que $\gamma|_{\mathcal{G}_\gamma}$ soit équivalent à $\gamma|_{\mathcal{V}} = \mathcal{V}$: donc nous avons des bases $\{e_i\}$ et $\{f_i\}$ respectivement de $\mathcal{V}$ et $\mathcal{G}_\gamma$ avec $\{f_i\}$ orthonormale et

$$\gamma_g(e_i) = \sum_{j=1}^{n} (V_g)_{ji}\, e_j$$

$$\gamma_g(f_i) = \sum_{j=1}^{n} (V_g)_{ji}\, f_j$$

avec la même matrice $(V_g)_{ji}$. Il en résulte que

$$A = \sum_{i=1}^{n} e_i f_i^* \in \mathfrak{M}^{\mathcal{G}}$$

avec $\mathcal{V} = A\mathcal{G}_\gamma$ car $Af_i = e_i$, $i=1,2,\dots n$; et donc que pour tout $Ax \in \mathcal{V}$, $x \in \mathcal{G}_\gamma$, $\alpha(Ax) = A\,\alpha(x) = A\gamma_{g_\alpha}(x) = \gamma_{g_\alpha}(Ax)$.

Démonstration du Théorème 4 à partir du Lemme D : il suffit de montrer que l'automorphisme α du Théorème 4 est justiciable du Lemme D. Pour cela il faut déduire des hypothèses du Théorème 4

- que $Sp(\gamma) = Msp(\gamma)$: en d'autres termes que les éléments (irréductibles) de $\mathcal{H}_\gamma(\mathfrak{M})$ sont bien, à une équivalence près, tous les "multiplets de jauge". Pour cette démonstration, très technique, nous renvoyons à [2]
- que $\alpha(\mathcal{G}_\gamma) \subset \mathcal{G}_\gamma$ pour tout $\mathcal{G}_\gamma \in \mathcal{H}_\gamma(\mathfrak{M})$. Ceci se démontre comme suit :

Soit u_i , $i=1,2\cdots n$ une base orthonormale de $\mathcal{G}_\gamma$. Comme $\mathfrak{M}^{\mathcal{G}}$ est proprement infinie on peut trouver n isométries $u_i^\circ \in \mathfrak{M}^{\mathcal{G}}$ telles que $u_i^{\circ *} u_j^\circ = \delta_{ij}$, $\sum_{i=1}^{n} u_i^\circ u_i^{\circ *} = I$: les u_i° sous-tendent donc un $\mathcal{G}_{\gamma\circ} \in \mathcal{H}_\gamma(\mathfrak{M})$ appliqué bijectivement sur $\mathcal{G}_\gamma$ par l'unitaire $v = \sum_{i=1}^{n} u_i u_i^{\circ *}$. Dénotant par U la représentation unitaire de $\mathcal{G}$ restriction de γ à $\mathcal{G}_\gamma$ nous avons alors pour $x = v x_\circ \in \mathcal{G}_\gamma$, $x_\circ \in \mathcal{G}_{\gamma\circ}$,

$$\gamma_g(x) = \gamma_g(v x_\circ) = \gamma_g(v)\, x_\circ = U_g x = U_g v x_\circ \quad , g \in \mathcal{G},$$

avec $U_g \in (\mathcal{G}_\gamma, \mathcal{G}_\gamma) \subset \mathfrak{M}$; d'où, puisque $\mathcal{G}_{\gamma\circ} \in \mathcal{H}(\mathfrak{M})$,

(97) $$\gamma_g(v) = U_g v \qquad , g \in \mathcal{G}.$$

Notre but est de démontrer que $\alpha(\mathcal{H}) \subset \mathcal{H}$, c'est-à-dire que pour tout $x = v x_0$, $x_0 \in \mathcal{H}_0$, on a $\alpha(x) = \alpha(v) x_0 \in \mathcal{H}$; en d'autres termes que $v^* \alpha(v) \in (\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_0)$. Puisqu'on a

(98) $$\mathcal{M} = \varphi_{\mathcal{H}_0}(\mathcal{M}) \otimes (\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_0),$$

que $\varphi_{\mathcal{H}_0}$ est biunivoque et que $\mathcal{S}$ agit ergodiquement sur $\mathcal{M}^{\mathcal{H}_0}$, ceci résultera de

(99) $$\bar{\tau}(v^* \alpha(v)) = v^* \alpha(v) \quad , \tau \in \mathcal{S},$$

avec

(100) $$\bar{\tau} = \varphi_{\mathcal{H}_0} \circ \tau \circ \varphi_{\mathcal{H}_0}^{-1} \otimes id \quad , \tau \in \mathcal{S}.$$

Comme α et $\mathcal{S}$ commutent, (99) s'écrit

(101) $$\alpha(v \bar{\tau}(v^*)) = v \bar{\tau}(v^*),$$

relation entraînée par

(102) $$\gamma_g(v \bar{\tau}(v^*)) = v \bar{\tau}(v^*) \quad , g \in \mathcal{G},$$

puisque α agit trivialement sur $\mathcal{M}^{\mathcal{G}}$. Mais, comme les $\bar{\tau}$, $\tau \in \mathcal{S}$, commutent avec les γ'_g, $g \in \mathcal{G}$, (ceci résulte de $\mathcal{S} \in Aut_{\mathcal{G}}(\mathcal{M})$ et de ce que

$$\gamma'_g = \varphi_{\mathcal{H}_0} \circ \gamma_g \circ \varphi_{\mathcal{H}_0}^{-1} \otimes id,$$

$\varphi_{\mathcal{H}_0}$ commutant avec les γ_g parce que $\mathcal{H}_0 \in \mathcal{M}^{\mathcal{G}}$), on a bien

$$\gamma_g(v \bar{\tau}(v^*)) = \gamma_g(v) \bar{\tau}(\gamma_g(v^*)) = U_g v \bar{\tau}(v^* U_g^*)$$
$$= v \bar{\tau}(v^*)$$

car $\bar{\tau}(v^* U_g^* v) = v^* U_g^* v$ puisque $v^* U_g^* v \in (\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_0)$.

Démonstration du théorème 3 (iii)

a) Quasi-équivalence de $\omega\circ\rho$ et de ω

Soit ϕ une extension α-invariante extrémale de ω à $\mathfrak{F}$ et soit $\{\pi_\phi, \mathcal{H}, \Phi\}$ la construction GNS de ϕ. Soient, d'autre part, π_ω et $\pi_{\omega\circ\rho}$ les représentations de $\mathfrak{A}$ engendrées respectivement par ω et $\omega\circ\rho$. π_ω coïncide évidemment avec la restriction de $\pi_\phi|_{\mathfrak{A}}$ à sa composante cyclique $\mathcal{K}$ pour Φ. D'autre part, comme ρ = Ad u pour un unitaire $u \in \mathfrak{F}$, $\pi_{\omega\circ\rho}$ coïncide avec la restriction de $\pi_\phi|_{\mathfrak{A}}$ à sa composante cyclique pour $\pi_\phi(u)\Phi$.
Par ailleurs, Φ est séparant pour $\pi_\phi(\mathfrak{F})''$ du fait que, d'après (ii), ϕ est β-KMS pour le groupe $t \to \alpha_t\,\gamma_{\mu t}$. Soit alors E le projecteur de $\mathcal{H}$ sur $\mathcal{K}$: on a $E \in \pi_\phi(\mathfrak{A})'$ et le support central de E pour $\pi_\phi(\mathfrak{A})'$ est la projection sur $[\pi_\phi(\mathfrak{A})'\mathcal{K}]$. Mais

$$[\pi_\phi(\mathfrak{A})'\mathcal{K}] \supset [\pi_\phi(\mathfrak{A})'\Phi] \supset [\pi_\phi(\mathfrak{F})'\Phi] = \mathcal{H}$$

puisque Φ sépare $\pi_\phi(\mathfrak{F})''$. On voit donc que π_ω , restriction de $\pi_\phi|_{\mathfrak{A}}$ à $\mathcal{K}$ est quasi équivalente à $\pi_\phi|_{\mathfrak{A}}$, donc aussi à sa sous-représentation $\pi_{\omega\circ\rho}$.

b) Relation (41)

Par définition de $(D(\omega\circ\rho) : D\omega)_t = w_t$

$$\pi_\omega\left(\sigma_t^{\omega\circ\rho}(A)\right) = w_t\ \pi_\omega\left(\sigma_t^\omega(A)\right) w_t^* \tag{103}$$

l'opérateur modulaire $\sigma_t^{\omega\circ\rho}$ de $\omega\circ\rho$ n'étant autre que $\rho^{-1}\circ\sigma_t^\omega\circ\rho$.
Par hypothèse, ω étant β-KMS pour α, $\sigma_t^\omega = \alpha_{-\beta t}$, donc

$$\pi_\omega\left(\rho^{-1}\circ\alpha_{-\beta t}\circ\rho\,(A)\right) = w_t\ \pi_\omega\left(\alpha_{-\beta t}(A)\right) w_t^* . \tag{104}$$

52) Notons le caractère physiquement intuitif de ce résultat : ρ créant une charge n ne modifiera que très peu l'état ω décrivant une "mer de Fermi" contenant une infinité de charges (contrairement à ce qui se produit pour un vide, que ρ transforme en un état disjoint).

53) Voir [16] I.1.2. et Lemme 1.2.10. On pourra aussi consulter [16a] et [3] chap VII

En comparant ceci avec (40), qui fournit

$$\pi_\omega\left(\rho^{-1}\circ\alpha_{-\beta t}\circ\rho(A)\right) = \pi_\omega(v_{-\beta t})\ \pi_\omega(\alpha_{-\beta t}(A))\ \pi_\omega(v_{-\beta t})^*$$

on conclut, vue la factorialité de ω, que $w_t\,\pi_\omega(v_{-\beta t}^*)$ est un scalaire, lequel, comme w_t et v_t sont des cocycles, est de la forme $e^{i\lambda t}$:

$$(105)\qquad w_t = \left(D(\omega\circ\rho):D\omega\right)_t = e^{i\lambda t}\,\pi_\omega(v_{-\beta t}) .$$

Par ailleurs, en utilisant les notations de a) ci-dessus, on a pour ϕ_u tel que $\phi_u(a) = \phi(u^* a\, u)$, $a\in\mathfrak{F}$:

$$(106)\qquad \begin{aligned}(D\phi_u : D\phi)_t &= \pi_\phi(u^*)\ \sigma_t^\phi\left(\pi_\phi(u)\right)\\ &= \pi_\phi\left(u^*\alpha_{-\beta t}\,\gamma_{-\mu\beta t}(u)\right)\\ &= e^{-n\beta\mu t}\ \pi_\phi\left(u^*\alpha_{-\beta t}(u)\right)\end{aligned}$$

(on a utilisé la formule donnant $(D\phi_u : D\phi)_t$ [54], le fait que ϕ est β-KMS pour le groupe $t\to\alpha_t\gamma_{\mu t}$ démontré en (ii) et le fait que $\gamma_\theta(u) = e^{in\theta}u$, l'automorphisme localisé ρ étant supposé de charge n). Comme, par ailleurs, le cocycle $u^*\alpha_t(u)$ satisfait à la même relation (40) que v_t on a que

$$(107)\qquad u^*\alpha_t(u) = e^{-inct}\,v_t$$

où c est une constante indépendante de ω (ne dépendant que de ρ et u). La restriction de (106) à la composante cyclique $\mathfrak{K}$ de Φ pour $\pi_\phi(\mathfrak{A})$ donne alors par comparaison avec (105) la relation cherchée (41).

54) Cf. [16] Lemme 1.2.3. (c)

- BIBLIOGRAPHIE -

[1] R. HAAG, D. KASTLER, E. TRYCH-POHLMEYER
Stability and Equilibrium States
Commun.math.Phys. 38, 173 (1974).

[1a] O. BRATTELI, D. KASTLER
Relaxing the Clustering Condition in the Derivation of the KMS Property.
Commun.math.Phys. 46, 37 (1976).

[2] H. ARAKI, R. HAAG, D. KASTLER, M. TAKESAKI
Extension of KMS States and Chemical Potential.
ZIF Preprint, Bielefeld, à paraître dans Commun.math.Phys.

[3] D. KASTLER
Equilibrium States of Matter and Operator Algebras.
Marseille preprint - à paraître dans Symposia Mathematica - (Actes des Colloques de l'Istituto di Alta Matematica, Rome).

[4] H. ARAKI, A. KISHIMOTO
Symmetry and Equilibrium States.
RIMS Preprint, Kyoto.

[5] D. TESTARD
Asymptotic Ratio Set of von Neumann Algebras Generated by Temperature States in Statistical Mechanics.
ZIF Preprint, Bielefeld.

[6] R. HAAG, N. HUGENHOLTZ, M. WINNINK
On the Equilibrium States in Quantum Statistical Mechanics.
Commun.math.Phys. 5, 215 (1967).

[7] R. KUBO
J. Physic. Soc. Japan, 12, 570 (1957).

[8] P.C. MARTIN, J. SCHWINGER
Phys. Rev., 115, 1342 (1959).

[9] M. TAKESAKI
Tomita's Theory of modular Hilbert Algebras and its Applications.
Springer Lecture Notes in Math. n° 128 (1970).

[10] S. DOPLICHER, R. HAAG, J.E. ROBERTS

Fields, Observables and Gauge Transformations I and II.
Commun.math.Phys. 13, 1 (1969) et 15, 173 (1969).

[11] S. DOPLICHER, R. HAAG, J.E. ROBERTS

Local Observables and Particle Statistics I and II.
Commun.math.Phys. 15, 173 (1969) et 23, 199 (1971).

[12] J. ROBERTS

Cross Products of von Neumann Algebras by Group Duals
Marseille preprint - à paraître dans Symposia Mathematica - (Actes des Colloques de l'Istituto di Alta Matematica, Rome).

[13] H. ARAKI

Expansional in Banach Algebras.
Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 6, 1 (1973).

[14] H. ARAKI

Relative Hamiltonian for faithful Normal States of a von Neumann Algebra.
Pub. RIMS Kyoto University 9, 165 (1973).

[15] D.W. ROBINSON

Return to Equilibrium.
Commun.math.Phys. 31, 171 (1973).

[16] A. CONNES

Une classification des facteurs de type III.
Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 6, 133 (1973).

[16a] A. CONNES
The Tomita-Takesaki Theory and classification of Type III Factors C^* in C^*-Algebras and their Applications to Statistical Mechanics and Quantum Field Theory - Societa Italiana di Fisica,North Holland 1976.

[17] R. HERMAN, D. KASTLER

Energy Spectrum of extremal invariant States
Pennsylvania State University Preprint

[18] D. KASTLER, G. LOUPIAS, M. MEBKHOUT, L. MICHEL

Central Decompositions of Invariant States.
Commun.math.Phys. 27, 195 (1972).

[19] H. HEWITT, K.A. ROSS

Abstract Harmonic Analysis.
Springer

[20] R. HERMAN, M. TAKESAKI
States and Automorphism Groups of Operator Algebras
Commun. Math. Phys. 19, 141 (1970).

[21] J. ROBERTS
Spontaneously broken Gauge Symmetries and Superselection Rules
School of Mathematical Physics Camerino (Italy)
October 1974
Marseille Preprint 74/P665

[22] D.W. ROBINSON Private communication