

# RECHERCHE COOPÉRATIVE SUR PROGRAMME N° 25

ALDO ANDREOTTI

MAURO NACINOVICH

## **Théorie élémentaire de la convexité**

*Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg - RCP25, 1977, tome 24*  
« Conférences de : A. Andreotti, A. Connes, D. Kastler, P. Lelong, J.E. Roberts et G. Velo.  
Un texte proposé par W. Laskar », , exp. n° 1, p. 1-12

[http://www.numdam.org/item?id=RCP25\\_1977\\_\\_24\\_\\_1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RCP25_1977__24__1_0)

© Université Louis Pasteur (Strasbourg), 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Recherche Coopérative sur Programme n° 25 » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

THEORIE ELEMENTAIRE DE LA CONVEXITE

par

Aldo ANDREOTTI et Mauro NACINOVICH

1. Position du problème.

a) Etant donné un espace topologique  $X$  (à topologie dénombrable), on a le critère suivant de Weierstrass pour reconnaître si un sous ensemble fermé  $C$  de  $X$  est compact :

(W) Soit  $C(X)$  l'espace des fonctions continues sur  $X$ . L'ensemble fermé  $C \subset X$  est compact si et seulement si  $\forall f \in C(X)$

$$\sup_C |f| < \infty .$$

En effet si  $C$  est compact par un théorème de Weierstrass  $|f(x)|$  atteint son maximum sur  $C$ . Réciproquement si  $C$  n'est pas compact, on peut extraire de  $C$  une suite  $\{x_\nu\}$  divergente dans  $X$  (i.e. sans points d'accumulation dans  $X$ ) et construire une fonction  $f \in C(X)$  telle que

$$\sup_\nu |f(x_\nu)| = \infty .$$

En général, étant donné  $X$  et une partie  $S \subset C(X)$  on peut envisager l'ensemble

$$C(X,S) = \{ C \subset X \mid C \text{ fermé } \forall f \in S \sup_C |f| < \infty \}$$

Il est évident que  $C(X,S) \supset$  les compacts de  $X$ .

La théorie de la convexité s'occupe en un certain sens de la question suivante :

Quels sont les couples  $(X,S)$  tels que

$$(W(X,S)) \quad C(X,S) = \text{ensemble des compacts de } X .$$

b) Exemple : Soit  $X$  un ouvert de  $\mathbb{C}^n$  et  $S = \mathcal{H}(X)$  l'espace des fonctions holomorphes sur  $X$ . Le théorème de Cartan Thullen dit que :

"  $\mathcal{C}(X, \mathcal{H}(X)) =$  ensemble des compacts de  $X$   
si et seulement si  $X$  est un ouvert d'holomorphic "

En effet  $X$  ouvert d'holomorphic équivaut (par le dit théorème) à la condition suivante

(K)  $\forall K$  compact de  $X$  l'ensemble

$$\hat{K} = \{ x \in X \mid |f(x)| \leq \sup_K |f|, \forall f \in \mathcal{H}(X) \}$$

est aussi compact.

et celle-ci équivaut à son tour à la condition

(D) pour toute suite divergente  $\{x_\nu\} \subset X$  il existe  $f \in \mathcal{H}(X)$

telle que

$$\sup_\nu |f(x_\nu)| = \infty .$$

Le but de cet exposé est de montrer comment le théorème de Cartan Thullen s'étend à des structures de cette nature " on se donne un ouvert  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  et un opérateur différentiel (matriciel)

$$A(x, D) : \mathcal{E}^P(\Omega) \rightarrow \mathcal{E}^Q(\Omega)$$

à coefficient constant ou analytique réels sur  $\mathbb{R}^n$ . On prend par

$\mathcal{H}(\Omega) = \{ u \in \mathcal{E}^P(\Omega) \mid A(x, D)u = 0 \}$  et on se demande pour quels  $\Omega$  le critère  $W(\Omega, \mathcal{H}(\Omega))$  est valable " .

Nous ferons l'hypothèse cruciale suivante sur  $A(x, D)$  :

$A(x, D)$  est elliptique dans le sens que  $\forall \Omega . \forall u \in \mathcal{D}'(\Omega)^P$  telle que

$$A(x, D)u = 0$$

on a  $u \in G(\Omega) =$  l'espace des fonctions analytiques réelles sur  $\Omega$ .

Dans l'énoncé du théorème de Cartan-Thullen il y a deux notions : celle de domaine d'holomorphie et celle de convexité holomorphe donnée par la condition (K) ou (D).

## 2. Enveloppes de régularité pour $A$ .

a) Soit  $A$  comme tout à l'heure et soit  $\mathcal{G}_A$  le faisceau des germes des solutions de l'équation homogène  $Au = 0$  sur  $\mathbb{R}^n$ . Le faisceau  $\mathcal{G}_A$  a, en particulier la propriété suivante

(Ar)  $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n, \forall u \in \mathcal{G}_{A, x_0}$  soit  $\mathcal{F}_{x_0} u$  le développement de Taylor de  $u$  en  $x_0$ . L'application ainsi définie

$$\mathcal{G}_{A, x_0} \xrightarrow{\mathcal{F}_{x_0}} \mathcal{F}_{x_0},$$

où  $\mathcal{F}_{x_0}$  est l'espace des séries formelles (à valeurs dans  $\mathbb{C}^p$ ) centrés en  $x_0$ , est une application injective.

En d'autres mots, l'équation  $Au = 0$  n'admet pas des solutions plates en aucun point  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ . Cette condition est satisfaite sous des hypothèses fort plus larges que celles admises pour  $A$ . Par exemple pour un opérateur.

$A = \sum a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} + c(x)$  (opérant sur une seule fonction) à coefficients  $C^\infty$  et elliptique dans le sens usuel, la condition (Ar) a été démontrée par

Aronszajn.

On topologise le faisceau  $\mathcal{G}_A$  de la manière usuelle en prenant (avec Lazard) comme base d'ouverts les ensembles

$$V(\Omega, u) = \{u_y \mid u \in \mathcal{E}^p(\Omega), Au = 0, \forall y \in \Omega\}$$

où  $\Omega$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $u$  une solution de  $Au = 0$  sur  $\Omega$ .

Le remarque précédente nous dit que, avec cette topologie le faisceau  $\mathcal{G}_A$  a une topologie d'Hansdorff.

Soit  $u \in \mathcal{O}_A(\Omega)$  c'est-à-dire une solution de  $Au = 0$  sur un convexe  $\Omega$ . Elle définit une section (désignée par la même lettre)

$$u : \Omega \longrightarrow \mathcal{O}_A$$

Soit  $\tilde{\Omega}_u$  la composante connexe de  $u(\Omega)$  dans  $\mathcal{O}_A$  et soit  $\pi : \tilde{\Omega}_u \longrightarrow \mathbb{R}^n$  la projection naturelle dans  $\mathbb{R}^n$ .

On voit que

i)  $\tilde{\Omega}_u \xrightarrow{\pi} \mathbb{R}^n$  est un espace connexe étalé sur  $\mathbb{R}^n$  i.e.  $\pi$  est un homéomorphisme local et  $\tilde{\Omega}_u$  acquiert donc une structure de variété différentielle connexe et parallélisable.

ii) L'opérateur  $A$  se transporte donc de manière naturelle sur un opérateur  $\pi^*A$  sur  $\tilde{\Omega}_u$  et il existe une fonction

$$U : \tilde{\Omega}_u \longrightarrow \mathbb{C}^p$$

telle que

$$(\alpha) \quad (\pi^*A) U = 0$$

$$(\beta) \quad U|_{u(\Omega)} = \pi^*u.$$

$U$  est donc le prolongement analytique de  $u$  sur  $\mathbb{R}^n$  et  $\tilde{\Omega}_u \xrightarrow{\pi} \mathbb{R}^n$  son domaine de Riemann.

Une variété différentiable connexe  $\hat{\Omega} \xrightarrow{\hat{\pi}} \mathbb{R}^n$  étalée sur  $\mathbb{R}^n$  et admettant une section

$$u : \Omega \longrightarrow \hat{\Omega}$$

telle que la condition ii) de tout à l'heure soit satisfaite (en remplaçant  $\tilde{\Omega}$  et  $\tilde{\pi}$  par  $\hat{\Omega}$  et  $\hat{\pi}$ ) s'appellera une complétion de  $\Omega$  par  $u$ . On a un diagramme d'applications naturelles

$$\begin{array}{ccc}
 \hat{\Omega} & \xrightarrow{\lambda} & \tilde{\Omega}_u \\
 \hat{\pi} \searrow & & \swarrow \pi \\
 & \mathbb{R}^n &
 \end{array}
 \quad (\hat{\Omega} \text{ dominé par } \tilde{\Omega}_u)$$

de sorte que  $\tilde{\Omega}_u$  apparait comme la complétion maximale de  $\Omega$  par  $u$ .

b) Ce qu'on a dit pour une fonction  $u \in \mathcal{H}_A(\Omega) = \{v \in \mathcal{E}^p(\Omega) \mid Av = 0\}$  on peut le répéter, mutadis mutandis, pour une partie  $S \subset \mathcal{H}_A(\Omega)$ .

Le faisceau  $\mathcal{O}_A$  est remplacé à présent par le faisceau

$\mathcal{O}_{A,S}$  des germes d'application dans  $(\mathbb{C}^p)^S$  dont les composantes  $u_\alpha$  satisfont à l'équation  $Au_\alpha = 0 \quad \alpha \in S$ .

On construit alors  $\forall \Omega$  ouvert convexe  $\forall S \subset \mathcal{H}_A(\Omega)$  une variété connexe étalée sur  $\mathbb{R}^n$

$$\tilde{\Omega}_S \xrightarrow{\tilde{\pi}} \mathbb{R}^n$$

admettant une section

$$F_S : \Omega \longrightarrow \tilde{\Omega}_S$$

telle que

i)  $\forall g \in S$  il existe une fonction

$$G : \tilde{\Omega}_S \longrightarrow \mathbb{C}^p$$

ayant les propriétés suivantes

$$(\alpha) \quad (\pi^* A)G = 0$$

$$(\beta) \quad G|_{F_S(\Omega)} = F_S^* g.$$

ii) elle domine toute  $S$ -complétion de  $\Omega$ .

En particulier, si  $S = \mathcal{H}_A(\Omega)$  on dira que  $\tilde{\Omega} \xrightarrow{\tilde{\pi}} \Omega$  est (à isomorphisme près) l'enveloppe de régularité de  $\Omega$  par rapport à  $A$ .

c) Un ouvert convexe  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}^n$  s'appellera un domaine de régularité (pour  $A$ ) si il "coïncide" avec son enveloppe i.e.

$$F_{\mathcal{H}(\Omega)} : \Omega \longrightarrow \tilde{\Omega}_{\mathcal{H}(\Omega)}$$

est un isomorphisme.

Pour tout ouvert connexe  $\Delta \subset \Omega$  envisageons les ouverts connexes  $\tilde{\Delta} \supset \Delta$  dans  $\mathbb{R}^n$  qui sont des  $\mathbb{H}_A(\Omega)|_{\Delta}$ -complétion de  $\Delta$  i.e. tels que

$$\text{Im} \left( \mathbb{H}_A(\tilde{\Delta}) \xrightarrow{r_{\tilde{\Delta}, \Delta}} \mathbb{H}_A(\Delta) \right) \supset \mathbb{H}_A(\Omega)|_{\Delta} .$$

THEOREME. -  $\Omega$  est un domaine de régularité pour  $A$  si et seulement si  $\forall \Delta \subset \tilde{\Delta}$  comme tout à l'heure, on a  $\tilde{\Delta} \subset \Omega$ .

Démonstration presque évidente.

### 3. L'exemple des opérateurs - $\bar{\partial}$ - suspendus .

a) Soit  $A_0(x, D)$  un opérateur différentiel matriciel à coefficients analytiques sur  $\mathbb{R}^n$  mais pas nécessairement elliptique :

$$A_0(x, D) : \mathcal{E}^p(\Omega) \longrightarrow \mathcal{E}^q(\Omega) \quad \forall \Omega \text{ ouvert de } \mathbb{R}^n .$$

Envisageons  $\mathbb{R}^n$ , où  $x_1, \dots, x_n$  sont les coordonnées, dans  $\mathbb{C}^n$  où  $z_1 = x_1 + iy_1, \dots, z_n = x_n + iy_n$  sont les coordonnées holomorphes.

L'opérateur  $A_0(x, \frac{\partial}{\partial x})$  s'étend à un voisinage  $U$  de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{C}^n$ .

Pour tout  $\tilde{\Omega}$  ouvert dans  $U$  envisageons l'opérateur

$$A = A_0 \oplus \bar{\partial} : \mathcal{E}^p(\tilde{\Omega}) \longrightarrow \mathcal{E}^q(\tilde{\Omega}) \oplus (\mathcal{E}^{0,1}(\tilde{\Omega}))^p$$

on obtient de cette manière un nouvel opérateur différentiel (à coefficients constants si  $A_0$  l'est) et qui est elliptique.

On l'appellera l'opérateur  $\bar{\partial}$ -suspension de  $A_0$ . Voici une manière de construire en partant d'opérateurs à coefficients constants beaucoup d'opérateurs elliptiques sur  $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$ .

b) Soit à présent  $A_0(x, D)$  un opérateur elliptique sur  $\mathbb{R}^n$  à coefficients analytiques. Pour tout  $\Omega$  ouvert de  $\mathbb{R}^n$  on envisage l'espace  $\mathbb{H}_{A_0}(\Omega)$  des solutions sur  $\Omega$  de  $A_0 u = 0$ . Pour tout  $u \in \mathbb{H}_{A_0}(\Omega)$  et pour tout  $K$  compact contenu dans  $\Omega$  on pose

$$\|u\|_K = \sup_{x \in K} |u(x)|$$

On obtient par là un ensemble de seminormes sur  $\mathcal{H}_{A_0}(\Omega)$ . Comme  $A_0$  est supposé elliptique, l'espace  $\mathcal{H}_{A_0}(\Omega)$  avec cette topologie est complet, donc un espace de Fréchet.

Une application simple du théorème de Baire nous démontre alors le théorème suivant :

THEOREME. - Etant donné un ouvert  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  on peut trouver une fonction

$$\rho : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$$

semicontinue inférieurement sur  $\Omega$  ayant la propriété suivante.

Pour tout point  $x^0 \in \Omega$  et pour toute solution  $u \in \mathcal{H}_{A_0}(\Omega)$  de  $A_0(x, D)u = 0$  dans  $\Omega$ , le développement de Taylor  $\sum_{x^0} u$  de  $u$  au point  $x_0$  est convergent dans le polycylindre de  $\mathbb{C}^n$

$$|z_i - x_i^0| < \rho(x^0).$$

COROLLAIRE 1. - Sous les mêmes hypothèses, il existe un voisinage  $U$  de  $\Omega$  dans  $\mathbb{C}^n$   $\{\Omega$  - connexe et tel que  $U \cap \mathbb{R}^n = \Omega$  et que  $A_0(\frac{\partial}{\partial z})$  y soit défini  $\}$ , tel que si on désigne par  $\mathcal{H}_{A_0}(U)$  l'espace des fonctions  $u$  holomorphes dans  $U$  solution de l'équation  $A_0(\frac{\partial}{\partial z})u = 0$  on a un isomorphisme de restriction

$$r_{\Omega}^U : \mathcal{H}_{A_0}(U) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_{A_0}(\Omega).$$

Ceci permet de ramener l'étude de l'opérateur  $A_0$  sur  $\Omega$  à celui de sa  $\bar{\partial}$ -suspension dans un voisinage de  $\Omega$  dans  $\mathbb{C}^n$ .

Nous poserons

$$r(x) = \sup\{\rho(x) \text{ vérifiant le théorème avec } \rho(x) < \text{dist}(x, \partial\Omega)\} \quad (*)$$

c'est aussi une fonction semicontinue inférieurement.

\* la distance calculée avec la norme  $|x| = \sup |x_i|$  comme il est naturel dans ce cas.

COROLLAIRE 2. - Pour tout compact  $K \subset \Omega$   $\forall \lambda > 1$ , il existe un compact  $K'(\lambda) \subset \Omega$  et une constante  $c(\lambda) > 0$  tels que  $\forall u \in \mathbb{H}_{A_0}(\Omega)$  on a

$$\|D^\alpha u\|_K \leq \alpha! c(\lambda) \frac{\|u\|_{K'(\lambda)}}{(r(K)/\lambda)^{|\alpha|}},$$

où  $r(K) = \inf_{x \in K} r(x)$ .

4. Théorie de la convexité - cas des coefficients constants. Soit  $A(D)$  un opérateur matriciel différentiel à coefficients constants. Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ .

Pour tout compact  $K \subset \Omega$  et pour toute constante  $c > 1$  désignons par

$$\hat{K}_\Omega(c) = \{x \in \Omega \mid |u(x)| \leq c \|u\|_K \quad \forall u \in \mathbb{H}_A(\Omega)\}$$

Nous dirons que  $\Omega$  est  $A$ -convexe si

$(K)_\Omega$  : pour  $K$  compact,  $\forall c > 1$ ,  $\hat{K}(c)$  est aussi compact.

THEOREME. -  $A$  étant elliptique, la condition  $(K)_\Omega$  est équivalente à la condition  $(D)_\Omega$  pour  $\forall$  suite  $\{x_\nu\}$  divergente dans  $\Omega$  il existe  $u \in \mathbb{H}_A(\Omega)$  telle que

$$\sup_\nu |u(x_\nu)| = \infty.$$

Preuve :  $(D)_\Omega \Rightarrow (K)_\Omega$ . S'il n'était pas ainsi, il existerait  $K$  compact  $c > 1$  tel que  $\hat{K}(c)$  ne soit pas compact. Une suite  $\{x_\nu\}$  divergente extraite de  $\hat{K}(c)$  entraîne une contradiction.

$(K)_\Omega \Rightarrow (D)_\Omega$ . S'il n'était pas ainsi, il existerait une suite divergente  $\{x_\nu\}$  dans  $\Omega$  telle que  $\forall u \in \mathbb{H}_A(\Omega)$  on aurait

$$\sup_\nu |u(x_\nu)| < \infty$$

Soit

$$A = \{ u \in \mathbb{H}_A(\Omega) \mid \sup_\nu |u(x_\nu)| \leq 1 \}$$

L'ensemble  $A$  est convexe, fermé et symétrique par rapport à l'origine.

Comme

$$H_A(\Omega) = \bigcup_{m=1}^{\infty} mA$$

l'un des ensembles  $mA$ , et donc  $A$  contient un point intérieur. Donc aussi un voisinage de l'origine, à savoir il existe  $K$  compact et  $\epsilon > 0$  tel que

$$V(K, \epsilon) = \{u \in H_A(\Omega) \mid \|u\|_K < 2\epsilon\} \subset A.$$

De là, si  $\|u\|_K \neq 0$  on pose

$$\frac{\epsilon}{\|u\|_K} u \in V(K, \epsilon) \subset A$$

donc

$$\sup |u(x_\nu)| \leq \frac{1}{\epsilon} \|u\|_K$$

(Cette relation est aussi valable si  $\|u\|_K = 0$ ). Par conséquent  $\{x_\nu\} \subset \hat{K}_\Omega(\frac{1}{\epsilon})$  et ne peut pas être divergente.

COROLLAIRE. - Si  $\Omega$ , ouvert connexe de  $\mathbb{R}^n$ , est  $A$ -convexe, il est aussi un domaine de régularité pour  $A$ .

La réciproque de ce corollaire serait le théorème analogue au théorème de Cartan Thullen. Malheureusement, elle est fautive.

Exemple sur  $\mathbb{R}^n$  l'opérateur gradient

$$u \rightarrow \left( \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)$$

est elliptique et à coefficients constants. Si  $K = \{x_0\}$   $\Omega = \mathbb{R}^n \quad \forall c > 1 \quad \hat{K}(c) = \mathbb{R}^n$  et donc il n'est pas compact. Il y a ici un seul domaine de régularité, à savoir  $\mathbb{R}^n$  tout entier, mais celui-ci n'est pas convexe. Nous faisons donc l'hypothèse suivante :

"  $\mathbb{R}^n$  est  $A$ -convexe " .

Cela signifie qu'il y a beaucoup de solution de  $Au = 0$  sur  $\mathbb{R}^n$  ; pour toute suite  $\{x_\nu\} \subset \mathbb{R}^n$  divergente, il existe une solution de  $Au = 0$  sur  $\mathbb{R}^n$  telle que  $\sup_\nu |u(x_\nu)| = \infty$ .

Avec cette hypothèse, le corollaire précédent a sa réciproque. Ceci découle du

LEMME. - Soit A à coefficients constant elliptique et soit r la fonction définie au théorème et corollaire du n° précédent.

Soit K un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et K un compact de  $\Omega$  et soit  $c > 1$ .

Alors si on pose

$$r(K) = \inf_{x \in K} r(x)$$

$\forall \zeta \in \hat{K}(c)$  et  $\forall u \in \mathcal{H}_A(\Omega)$  la série de Taylor  $\mathcal{T}_\zeta u$  de u au point  $\zeta$  converge dans le polycylindre

$$|z_i - \zeta_i| < r(K).$$

Preuve : On a

$$\mathcal{T}_\zeta u = \sum \frac{D^\alpha u(\zeta)}{\alpha!} (z - \zeta)^\alpha$$

Comme A est à coefficients constants  $D^\alpha u \in \mathcal{H}_A(\Omega)$  de sorte que

$$|D^\alpha u(\zeta)| \leq c \|D^\alpha\|_K \quad \text{car } \zeta \in \hat{K}(\zeta)$$

Par le corollaire 2 de la section 2, on a  $\forall \lambda > 1$  qu'il existe un compact  $K'(\lambda)$  tel que

$$\|D^\alpha u\|_K \leq \alpha! c(\lambda) \frac{\|u\|_{K'(\lambda)}}{(r(K)/\lambda)^{|\alpha|}}$$

Donc

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_\zeta u &< \sum c c(\lambda) \|u\|_{K'(\lambda)} \frac{|z - \zeta|^\alpha}{(r(K)/\lambda)^{|\alpha|}} \\ &< c c(\lambda) \|u\|_{K'(\lambda)} \sum \frac{|z - \zeta|^\alpha}{(r(K)/\lambda)^{|\alpha|}} \end{aligned}$$

et cette série est convergente pour

$$|z_i - \zeta_i| < r(K)/\lambda$$

Comme ceci est vrai pour tout  $\lambda > 1$  on en tire la conclusion.

COROLLAIRE 1. - Si  $\Omega$  est un domaine de régularité pour  $A$  alors pour tout compact  $K$  de  $\Omega$  et tout  $c > 1$  on a

$$r(K) = r(\hat{K}(c)) .$$

En effet  $r(K) \geq r(\hat{K}(c))$  car  $\hat{K}(c) \supset K$  mais du lemme précédent, on tire que

$$r(\hat{K}(c)) \geq r(K) .$$

COROLLAIRE 2. - (théorème de Cartan-Thullen) . Si  $\mathbb{R}^n$  est  $A$ -convexe, alors  $\Omega$  est un domaine de régularité pour  $A$  si et seulement si  $\Omega$  est  $A$ -convexe.

En effet  $\forall K$  compact  $\forall c > 1$   $r(\hat{K}(c)) > 0$  comme  $\hat{K}(c)$  est borné par l'hypothèse de convexité sur  $\mathbb{R}^n$  on dira que  $\hat{K}(c)$  est compact.

5. Le cas des coefficients analytiques. Il nous reste à dire un mot dans le cas d'un opérateur elliptique  $A(x, D)$  à coefficients analytiques sur  $\mathbb{R}^n$ . La situation est pratiquement la même, mais il faut changer les conditions  $(K)_\Omega$  et  $(D)_\Omega$  dans les conditions

$$(K_\infty)_\Omega \quad \forall K \text{ compact dans } \Omega \quad \forall c \geq 1 \quad L \geq 1 \quad \text{l'ensemble}$$

$$\hat{K}_\infty(L, c) = \{x \in \Omega \mid |u(x)|_m \leq L c^m \|u\|_{K, m}, \forall u \in \mathcal{H}_A(\Omega), \forall m \in \mathbb{N}\}$$

est aussi compact. Ici, on a posé

$$|u(x)|_m = \sum_{|\alpha| \leq m} \left| \frac{D^\alpha u(x)}{\alpha!} \right|$$

et

$$\|u\|_{K,m} = \sup_{x \in K} |u(x)|_m$$

Si  $A$  est à coefficients constants, alors

$$\hat{K}_\infty(L,c) = \hat{K}_\infty(L,1) = \hat{K}(L)$$

et la notion de convexité se réduit à la notion déjà introduite.

La condition  $(D)_\Omega$  est remplacée par

$(D_\infty)_\Omega$  pour toute suite divergente  $\{x_\nu\} \subset \Omega$  et pour toute constante  $c$ ,  
 $0 < c < 1$  il existe un  $u \in \mathcal{H}_A(\Omega)$  tel que

$$\sup_{\nu} \left\{ \sup_{\alpha} c^{|\alpha|} \left| \frac{D^\alpha u(x_\nu)}{\alpha!} \right| \right\} = \infty$$

On peut répéter avec peu de changement les considérations précédentes ;  
en particulier, on trouve que pour un domaine  $\Omega$  de régularité pour  $A$ , on a

$$r(\hat{K}_\infty(c,L)) \geq \frac{1}{c} r(K)$$

de sorte que si  $\mathbb{R}^n$  est  $A$ -convexe (i.e. vérifie la condition  $(K_\infty)_{\mathbb{R}^n}$ ) on a  
que les domaines de régularité ne sont autres que les domaines  $A$ -convexes.