M. Froissart

Approximation de Pade Application à la physique des particules élémentaires

Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg - RCP25, 1973, tome 16
« Réédition des conférences les plus demandées contenues dans les volumes épuisés », ,
exp. n° 4, p. 1-13
<http://www.numdam.org/item?id=RCP25_1973__16__A4_0>

APPROXIMATION DE PADE

APPLICATION A LA PHYSIQUE DES PARTICULES ELEMENTAIRES

par

M. FROISSART

Le présent exposé est destiné à rendre compte d'un regain récent d'intérêt des physiciens des particules élémentaires pour la méthode de Padé de resommation des séries de Taylor divergentes. Je le diviserai en deux parties : l'une expose comment nous concevons les problèmes mathématiques, encore largement inexplorés, et l'autre fait le point à cette date des travaux d'application dans ce domaine de la physique.

I - RAPPELS MATHEMATIQUES DE BASE (1)

La notion fondamentale de l'approximation de Padé peut se déduire de la formule de Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(z')\, dz'}{z'-z} \qquad (1)$$

qui indique que toute fonction analytique dans un domaine schlicht peut s'exprimer comme limite d'une somme de termes polaires, c'est-à-dire comme limite de fonctions rationnelles. Si l'on se donne une série de Taylor (formelle), on est donc conduit à rechercher des fonctions rationnelles dont la série de Taylor coïncide avec la série donnée sur le plus grand nombre de termes. On est donc conduit à la

Définition :

Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une série(formelle) de Taylor. On appellera approximant de Padé

$$f_{[M,N]}(z) = \frac{P_M(z)}{Q_N(z)} \qquad (2)$$

une fraction rationnelle, rapport de polynômes de degrés M et N , satisfaisant

$$f(z) - f_{[M,N]}(z) = o(z^{M+N}) \quad . \tag{3}$$

Il est facile de se convaincre que s'il existe, l'approximant de Padé $[M,N]$ est unique.

Propriétés élémentaires :

On vérifie aisément les propriétés suivantes :

i) Si $M-N > P > 0$ et si R_P est un polynôme de degré P, alors

$$f_{[M,N]}(z) - R_P(z) = (f - R_P)_{[M,N]}(z) \quad . \tag{4}$$

ii) Si $\frac{f}{z^P}$ est régulier à l'origine, alors

$$\frac{f_{[M,N]}(z)}{z^P} = \left(\frac{f}{z^P}\right)_{[M-P,N]} \quad . \tag{5}$$

iii) Si $f(0) \neq 0$:

$$\frac{1}{f_{[M,N]}(z)} = \left(\frac{1}{f}\right)_{[N,M]}(z) \quad . \tag{6}$$

Algorithme des fractions continues

Il est très facile de calculer l'approximant de Padé $f_{[M,N]}$ à partir de la série f, comme on le voit par récurrence :

$f_{[M,0]}$ est le développement limité à l'ordre M.

Si $M \geq N$, alors on se ramène au cas $[N-1,N]$ par utilisation de (4) et (5) : $f_{[M,N]}(z) - f_{[M-N,0]}(z)$ est divisible par z^P : $P > M-N$. Donc :

$$\frac{f_{M,N}(z) - f_{M-N,0}(z)}{z^P} = \left(\frac{f - f_{[M-N,0]}}{z^P}\right)_{[M-P,N]} \quad . \tag{7}$$

Le cas $M < N$ se ramène au précédent par utilisation de (6). Donc, dans tous les cas, on arrive à décroître les indices jusqu'à $[M,0]$. Si on exprime le résultat de cette récurrence sous forme explicite, on obtient une expression de la forme :

$$f_{M,N}(z) = a_o^o + a_o z + \dots + a_o^{M-N} z^{M-N} + \cfrac{z^{p_o}}{a_1^o + a_1^1 z + \dots + \cfrac{z^{p_1}}{a_2^o + a_2^1 + \dots + \cfrac{z^{p_2}}{\dots + a_n^K z^K}}} \tag{8}$$

qui est une expression du type fraction continue.

Il faut noter qu'en général, P_i vaut 2 , sauf P_o qui vaut $\mathrm{Sup}(0,M-N+1)$ ou P_1 qui vaut $\mathrm{Sup}(2,N-M+1)$. Il est à noter que la fraction continue (8) ne dépend que de la différence $(M-N)$, et par suite on obtiendra tous les approximants à $M-N$ donné en tronquant l'expression (8) en différents endroits. Le fait que certains P_i peuvent être supérieurs à 2 implique que tous les approximants peuvent ne pas exister.

Cela étant, le formalisme de la fraction continue est une raison heuristique pour faire des études de convergence en se plaçant à $M-N$ fixé, soit, pour fixer les idées à $M=N$, c'est-à-dire dans ce que nous appellerons le cas diagonal.

<u>Problème de convergence des approximants de Padé diagonaux</u>

La difficulté majeure dans l'étude de la convergence de la suite diagonale de Padé est le problème de la localisation des pôles de la fraction rationnelle. En fait, le seul cas qui ait été l'objet d'une étude détaillée et d'une littérature abondante, est celui où l'on sait exercer un contrôle complet sur la position de ces pôles. C'est le cas de Stieltjes :

Supposons que la série f soit un germe convergent d'une fonction analytique que nous dénoterons également $f(z)$. Nous pouvons récrire la condition de définition (3) :

$$Q_N(z)\, f(z) - P_N(z) = o(z^{2N}) \quad ,$$

ou, en utilisant la formule de Cauchy autour de $z=0$:

$$\oint Q_N(z)\, f(z) \frac{dz}{z^{N+L+2}} = 0 \qquad 0 \leq L < N \quad . \tag{9}$$

Mais $\frac{Q_N(z)}{z^N}$ est un polynôme en $\frac{1}{z}$, et cette expression exprime qu'il est orthogonal à toutes les puissances de $\frac{1}{z}$ de degré inférieur, avec la fonction poids $f(z)$ sur le contour complexe choisi.

On se ramène à la théorie classique des polynômes orthogonaux (en $\frac{1}{z}$) dans le cas où $f(z)$ est coupée sur l'axe réel, mais est au demeurant régulière. y compris à l'infini. Dans ce cas, par déformation du contour d'intégration, on récrit (9) sous la forme :

$$\int_a^b \frac{Q_N(z)}{z^N} \, \Delta f(z) \left(\frac{1}{z}\right)^L d\left(\frac{1}{z}\right) = 0 \qquad ; \qquad 0 \leq L < N \quad , \qquad (10)$$

où Δf est la discontinuité de f à travers la coupure. Si Δf garde une phase constante (disons Δf réel positif) alors on est dans le cas classique et on sait que tous les zéros de Q_N sont sur le support de Δf. Dans ce cas on peut poursuivre l'étude et démontrer la convergence uniforme de la suite de Padé diagonale sur tout fermé disjoint de la coupure.

Ce cas, malheureusement, ne se généralise que très faiblement, et il est clair que la classe de fonctions correspondante est extrêmement petite.

Conjecture de Padé

On en est réduit à la conjecture suivante attribuée à Padé : il existe des sous-suites de Padé diagonales uniformément convergentes sur tout compact dans le cercle de convergence de la série. On doit noter à ce propos une propriété de covariance des approximants de Padé diagonaux qui étend considérablement cette conjecture :

si $\quad g(z) = f\left(\frac{z}{a+bz}\right)$

alors $$g_{[N,N]}(z) = f_{[N,N]}\left(\frac{z}{a+bz}\right) \quad . \qquad (11)$$

On vérifie en effet immédiatement ceci sur la définition. La transformation $z \to \frac{z}{a+bz}$, que l'on écrit de façon plus transparente $z^{-1} \to az^{-1} + b$, est donc une similitude dans le plan de la variable z^{-1}.

Dans ce plan, la conjecture de Padé s'énonce en disant que l'on a convergence à l'extérieur de tout cercle centré à l'origine et contenant toutes les singularités de $f(z)$. La condition de covariance énoncée ci-dessus étend cette propriété à l'extérieur de tout cercle contenant l'ensemble des singularités, c'est-à-dire finalement à l'extérieur de l'enveloppe convexe des singularités.

Résultats expérimentaux sur la convergence

Le fait que l'on obtienne convergence dans le cas de Stieltjes, et le mécanisme de cette convergence, indique que l'on doit attendre convergence dans une région plus vaste encore peut être que la région qui découle de l'hypothèse de Padé, tout au moins pour les fonctions, qui, par exemple, ont des points de branchement isolés. En effet, il est remarquable de voir comment, dans le cas de Stieltjes, on arrive à approcher avec une grande précision une fonction discontinue par une fonction rationnelle, donc uniforme.

Le mécanisme de cette approche est illustré par l'exemple suivant. Soit A un nombre positif grand. La fonction $\operatorname{tg} \pi Az$ est uniforme, méromorphe mais cependant est une bonne approximation de la fonction $i \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} z)$ qui est analytique de part et d'autre de l'axe réel, mais discontinue sur ce dernier. En effet, on a

$$\operatorname{tg} \pi Az = \frac{1}{i} \frac{e^{2i\pi Az} - 1}{e^{2i\pi Az} + 1} = i \operatorname{sgn} (\operatorname{Im} z) + O(e^{-2\pi A|\operatorname{Im} z|})$$

L'approximation est donc bonne dès que l'on reste à une distance de l'axe réel grande par rapport à la distance $\frac{1}{A}$ de deux pôles successifs. On peut donc s'attendre à ce que des fonctions qui ne présentent que des points de branchement soient bien approchées, par ce mécanisme , en-dehors de lignes joignant les points de branchement, et, par suite, dans des domaines plus vastes que le domaine décrit ci-dessus à partir de la conjecture de Padé.

Des expériences numériques semblent confirmer ce point de vue, en apportant d'ores et déjà les précisions suivantes :

i) pour certains ordres, il apparaît, en-dehors des lignes où les pôles et zéros s'alignent apparemment, des paires zéro-pôle très rapprochées (donc le pôle a un résidu très faible) et caractérisées par une grande instabilité. Ceci rend nécessaire l'exclusion de certains éléments de la suite diagonale si l'on veut obtenir convergence uniforme au sens ordinaire.

ii) En vertu du caractère essentiellement non-linéaire de l'approximation de Padé, la position des lignes de pôles dépend non seulement de la position des singularités, mais encore des coefficients dont ces singularités sont affectées. (Cas d'une combinaison linéaire de logarithmes). Il ne semble pas, toutefois, que ces lignes sortent de la région déduite de la considération de la conjecture de Padé, région qui est peut-être, par suite, la plus petite région où l'on ne puisse pas affirmer la convergence au seul vu de la géométrie du domaine d'analyticité.

Problèmes de stabilité des approximations

Un problème qui est de la plus haute importance pour les utilisations possibles de la méthode est celui de la stabilité par rapport aux données , et tout particulièrement, le comportement des approximants quand les coefficients de la série de Taylor sont affectés de "bruit" aléatoire, ce qui correspond à la situation réaliste où l'on calcule ces coefficients avec une précision finie.

Des expériences numériques ont été faites pour essayer de caractériser le comportement des approximations en présence de bruit.

Une expérience typique consiste à considérer une série initiale de terme général $a_n = \frac{1}{n} + (\varepsilon_n + i\varepsilon'_n)B$, où B est un coefficient faible (10^{-3}), ε_n et ε'_n étant des nombres aléatoires indépendants, variant sur un intervalle $[0,1]$ par exemple.

On sait qu'une telle série admet avec probabilité 1 un cercle de singularités essentielles de rayon 1 . Il semble donc exclu de pouvoir gagner aucune information au sujet de la coupure de la fonction $\ln(1-z)$ dont on a une approximation. Cependant, l'expérience montre que les pôles se répartissent en deux groupes : certains se rangent sur une courbe voisine de $[1,+\infty]$, tandis que d'autres se groupent au voisinage du cercle unité. Numériquement, si l'on se place à l'écart des pôles, l'approximation de la fonction $\ln(1-z)$ est bonne, et de l'ordre de 10^{-3} , y compris à l'extérieur du cercle. Il est évidemment difficile de savoir comment la situation évolue asymptotiquement. La plus grosse difficulté actuellement provient de la précision finie avec laquelle le calculateur électronique peut effectuer les calculs. Nous avons en cours l'écriture de programmes avec lesquels les calculs pourront être faits avec une précision nominale de 10^{-500} , à comparer avec la précision de 10^{-15} existant sur les machines IBM 360 . Il faut dire aussi que certains autres exemples, de structure plus compliquée, sembleraient indiquer des phénomènes plus complexes : dédoublement du cercle de singularités essentielles, par exemple. Une chose est à noter, en tous cas, et c'est une certaine instabilité de la ligne de pôles représentant la coupure : il semble qu'elle oscille de part et d'autre de l'axe réel, dans l'exemple choisi, et il n'est pas évident qu'elle se stabilise. Mais l'amplitude de l'oscillation dans les cas analysés restait toujours localement bien inférieure à la distance de deux pôles successifs, et par suite ne peut pas être considérée comme significative.

II - APPLICATIONS A LA PHYSIQUE DES PARTICULES ELEMENTAIRES

En 1967, Bessis et Pusterla [2] ont songé à utiliser la méthode de Padé pour resommer la série de perturbations de la théorie des champs renormalisés. Il s'agit d'une série, probablement asymptotique, dont les termes deviennent rapidement d'une grande complication, ce qui fait que l'on n'a pas de renseignements précis sur les propriétés du terme général.

D'une façon plus précise, on s'intéresse au calcul d'amplitudes liées à des processus physiques de collision de particules, avec éventuellement possibilité de réactions entre elles. Le carré du module de ces amplitudes est proportionnel à la probabilité de la collision dans la configuration considérée. Cette configuration est précisée par des variables telles que : énergie des particules avant collision, angles de déflection par la collision, etc... Nous appellerons ces variables collectivement variables cinématiques : leur nombre est $3n-10$, où n représente la somme du nombre de particules incidentes et du nombre de particules émergentes. Dans le cas le plus simple de collision sans production, $n=4$, et il existe deux variables cinématiques indépendantes.

La théorie des champs fournit une expression des amplitudes comme série de puissances d'un paramètre appelé constante de couplage. Les coefficients de cette série sont évidemment des fonctions, de complexité rapidement croissante, des variables cinématiques.

Dans le cadre de la théorie de l'électromagnétisme, il se trouve que la constante de couplage, reliée à la charge électrique de l'électron, est de l'ordre de 10^{-2} . Les premiers termes de la série de perturbations décroissent donc très rapidement, et la comparaison avec les résultats expérimentaux se fait aisément ; or on trouve un accord, avec une précision de l'ordre de grandeur que l'on peut attendre du premier terme négligé dans la resommation. On se trouve dans le cas classique d'application des séries asymptotiques : il est fort possible que la série diverge, mais l'erreur faite en la tronquant à un ordre suffisamment petit reste très faible.

Le problème des interactions fortes, qui sont à la base des phénomènes nucléaires, est bien différent, en ce sens que la constante de couplage est ici un nombre d'un ordre de grandeur de quelques unités. Dès le départ, les termes de la série de perturbation sont croissants en module, et par suite une tentative de comparaison avec des résultats expérimentaux quelconques ne peut avoir aucune signification.

Il est d'ailleurs fort probable que, à supposer que la série des perturbations soit une série de Taylor à rayon de convergence non nul, la réalité physique se situe en-dehors du cercle de convergence. Une indication de ce fait est donnée par l'existence d'états liés, ou de résonances ; ces états liés ou ces résonances se traduisent par l'existence de singularités polaires des amplitudes au voisinage immédiat de valeurs physiquement acceptables pour les variables cinématiques. Or il est exclu dans un grand nombre de cas, que l'un quelconque des coefficients de la série de perturbations présente une singularité de ce genre. On aboutit dans ce cas à la preuve par l'absurde de la divergence de la série des perturbations.

Jusqu'à présent, la théorie des interactions fortes n'a progressé que très lentement, de façon extrêmement heuristique, en se basant sur des analogies tirées de l'analyse de certains des coefficients de la série des perturbations. Quelques notions qualitatives, et, on peut le penser, très générales, ont été mises en valeur par ces études.

D'abord, des conditions physiques inhérentes à l'interprétation des amplitudes et leur relation avec les phénomènes physiques, se sont montrées assez restrictives : propriétés d'invariance relativiste, et surtout propriété d'unitarité ; cette dernière propriété exprime le fait que la probabilité d'un évènement certain est 1 . Etant donné l'interprétation des amplitudes donnée ci-dessus, l'unitarité s'exprime par des relations non linéaires entre les amplitudes.

Une autre notion est apparue comme primordiale, et c'est la notion d'analyticité des amplitudes par rapport aux variables cinématiques : avec un choix convenable des variables cinématiques, les amplitudes jouissent de la propriété d'être valeurs limites de fonctions, analytiques dans un très vaste domaine de l'espace complexifié des variables cinématiques. Les singularités qui limitent ce domaine ont une interprétation physique qui est maintenant bien connue, et leur type suit des règles générales qui sont assez claires, qualitativement. Citons à ce propos les pôles mentionnés ci-dessus, qui n'apparaissent pas dans la série de perturbations, mais dont la nature est parfaitement élucidée, grâce à de nombreux modèles.

Une autre propriété, fondamentale elle aussi apparemment, et qui provient essentiellement de l'aspect relativiste de la théorie, est la propriété de croisement. C'est la traduction en langage moderne des idées de Dirac sur les anti-particules. Si, en effet, on considère une collision, entre électrons, pour fixer les idées, les propriétés d'analyticité mentionnées ci-dessus permettent de faire le prolongement de l'amplitude dans l'espace des variables cinématiques complexes. On peut ainsi arriver à des valeurs des variables cinématiques de nouveau rélles, mais où l'énergie de certains électrons est négative. D'après Dirac, on interprète ces électrons d'énergie négative comme des antiparticules - des positons - d'énergie positive. On obtient ainsi une relation de prolongement analytique entre des amplitudes de collision électron-électron et électron-positon, qui correspondent à des situations expérimentales entièrement distinctes. Cette propriété de croisement, en diminuant le nombre d'amplitudes indépendantes, rend les contraintes d'unitarité beaucoup plus importantes.

Enfin, une dernière propriété, importante elle aussi, est l'existence de certaines symétries internes des particules. Cette propriété s'exprime sur les amplitudes par l'identification de chaque particule avec une représentation unitaire finie d'un groupe de symétrie, par exemple SU(2) pour la symétrie isotopique. Dans ces conditions, la condition d'invariance exprime que l'amplitude considérée comme élément du produit tensoriel des représentations correspondant à chaque particule prenant part à la collision, est dans le sous-espace de la représentation triviale.

Avantages et inconvénients a priori de la méthode de Padé

Avant d'examiner en détail les applications qui ont été faites de la méthode de Padé à la resommation de la série des perturbations, citons quelques faits qui militent a priori pour l'usage de cette méthode. Pour ceci, examinons sous cet angle, les principaux faits que nous avons rappelé ci-dessus.

L'unitarité des amplitudes, qui s'exprime par des relations non-linéaires, est grossièrement violée par la série perturbative, puisqu'elle n'est satisfaite qu'asymptotiquement, c'est-à-dire à une certaine puissance de la constante de couplage près. Dans le cas qui nous occupe, la constante de couplage est grande, et par suite, ce critère perd toute sa signification. Par contre, on peut montrer que les approximants de Padé, dans certains cas, satisfont rigoureusement l'unitarité. Ceci est rendu possible grâce à la structure non-linéaire de l'approximation, qui permet de ramener la propriété d'unitarité à une propriété de réalité. Il est raisonnable de penser, et on le vérifie dans les applications, que si l'unitarité n'est pas rigoureusement satisfaite dans d'autres cas voisins, l'erreur commise reste numériquement faible.

La situation en ce qui concerne l'analyticité est extrêmement favorable. En effet, les approximants de Padé s'expriment de façon rationnelle en fonction des coefficients de la série de perturbations. Leurs propriétés d'analyticité seront donc les mêmes, à la présence près de pôles, dus aux zéros du dénominateur de la fraction de Padé. Ces pôles seront capables d'assurer des fonctions diverses, selon les valeurs des variables cinématiques : au voisinage de résonances ou d'états liés, pôles qui n'existent pas en théorie des perturbations, on conçoit que des pôles provenant du dénominateur de Padé puissent remplir ce rôle ; au voisinage de singularités qui n'existent que dans des termes de la série des perturbations d'ordre élevé, et qui n'ont pas été pris en compte pour le calcul d'approximants d'ordre donné, le mécanisme d'imitation des singularités par des pôles, évoqué dans la première partie, peut jouer.

Si des propriétés de convergence existent, on distinguera ces deux rôles par la stabilité des premiers pôles qui convergeront vers les positions exactes des résonances, par opposition avec l'instabilité des seconds.

Il y a peu à dire en ce qui concerne le croisement, qui exprimé dans sa forme la plus simple, est une identité entre deux amplitudes. Il est donc satisfait aussi bien par la série de perturbations que par les approximants de Padé.

Enfin, le point sans doute le plus délicat dans l'application de la méthode de Padé est le problème de l'invariance par rapport aux symétries internes : étant donné qu'il s'agit là de représentations linéaires de groupes de symétrie, le caractère non-linéaire de l'approximation va, en général, violer la règle d'invariance de l'amplitude. On peut s'affranchir de cette objection en choisissant d'appliquer la méthode de Padé sur certaines combinaisons linéaires d'amplitudes, de sorte que le résultat soit effectivement invariant, mais alors on risque là de violer la condition de croisement, car le croisement devient alors un ensemble de relations linéaires sur les prolongements analytiques des nouvelles amplitudes choisies.

Ce point nous amène à remarquer qu'il y a donc dans la théorie un ensemble de vérifications a posteriori de la crédibilité de ce schéma d'approximations : certaines propriétés faciles à vérifier fournissent un test de l'erreur commise, en plus de la propriété de convergence que l'on peut estimer par comparaison des approximations successives. Brièvement, nous avons : l'unitarité dans certains cas, l'ensemble symétries/croisement, et finalement certaines propriétés qualitatives que doivent satisfaire les pôles correspondant aux résonances et états liés : dans une certaine représentation des variables cinématiques, ces pôles doivent être des variétés linéaires, avec un nombre fini de directions possibles. A un ordre fini, les pôles de l'approximant de Padé n'ont aucune raison a priori de satisfaire ces critères, et, par suite, la déviation du comportement du pôle par rapport à la prédiction donne une mesure de la validité de l'approximation. De tels recoupements sont, pour les applications, extrêmement utiles, car la difficulté du calcul des termes de perturbation d'ordre élevé est telle que l'on doit se borner à des ordres relativement bas, pour lesquels la précision de l'approximation serait autrement parfaitement inconnue.

Résultats des applications

Les calculs les plus poussés ont été faits dans une théorie simplifiée [2], qui ne tient compte que de l'existence de mésons pi. Dans cette théorie, les calculs ont été poussés jusqu'à l'ordre 4 des perturbations, ce qui a fourni les approximants [1,1] , [1,2] , [2,1] et [2,2] . Tous les tests de cohérence a posteriori que nous avons mentionnés ci-dessus ont été faits, et on a constaté une remarquable convergence : les résultats entre [1,2] , [2,1] et [2,2] ne diffèrent pas de plus que 10 % les uns des autres. Ce succès, inespéré, il faut bien le dire, nous a encouragés à poursuivre les calculs sur des modèles plus compliqués et plus rapprochés de la situation physique. Les calculs n'ont été poussés en général que jusqu'au $3^{ème}$ ordre de perturbations, le $4^{ème}$ n'étant pas "payant" étant donné sa grande complexité, et le peu de modifications qu'il apporte au tableau général dans le cas des mésons pi seuls. On a ainsi introduit les mésons K [3], le méson σ [4], dont l'existence jusqu'ici était mal comprise, en raison de difficultés survenant à la comparaison d'expériences différentes donnant apparemment des résultats discordants. Les résultats trouvés, non seulement confirment la validité de l'hypothèse de l'existence du σ, mais encore expliquent dans une large mesure les contradictions apparentes entre les expériences faites, dont l'interprétation était basée sur des hypothèses simplificatrices que le calcul montre erronées. Tous les résultats expérimentaux sont interprétés correctement, sauf quelques cas où des résonances prédites n'ont pas été trouvées par l'expérience. Il pourrait s'agir dans ce cas d'une erreur sur la masse, due au bas ordre des approximations.

Dans d'autres types d'applications [5], il se trouve que le premier terme de la série de perturbations est notablement différent, par son comportement général, des termes suivants. Comme la précision de la méthode de Padé est basée sur une certaine régularité des coefficients (que l'on identifie avec une somme de progressions géométriques), il est probable que la convergence sera beaucoup plus médiocre que dans les exemples cités ci-dessus. Il devient alors extrêmement important de maîtriser ce problème de convergence, afin de savoir quels sont les procédés qui permettent, soit d'améliorer la convergence, soit de faire des approximations sur les termes successifs sans faire disparaître la convergence. C'est tout le problème de la stabilité des approximants de Padé qui se trouve posé ainsi, et sur lequel nous n'avons jusqu'à présent que des idées trop imprécises.

BIBLIOGRAPHIE

[1] - H.S. WALL - Continued Fractions, Chap.19,20 ; New York (1948)

- G.A. BAKER - Advances in Theoretical Physics (1965)

[2] - D. BESSIS et M. PUSTERLA - Nuovo Cimento 54A, 243 (1968)

- Voir aussi C.A. COPLEY et D. MASSON - Phys. Rev. 164, 2059 (1967)

[3] - J.L. BASDEVANT, D. BESSIS et J. ZINN-JUSTIN - Nuovo Cimento 60A, 185 (1969)

[4] - J.L. BASDEVANT et B.W. LEE - Padé Approximation in the σ-model - Preprint CEN-Saclay DPh-T/69-27 (mai 1969)

[5] - J.A. MIGNACO, M. PUSTERLA, E. REMIDDI - Interactions π-nucléon - Preprint CEN-Saclay DPh-T/68-53 (1968)

- J.L. GAMMEL, M.T. MENTZEL et J.J. KUBIS - Preprint UCLA

- D. BESSIS, S. GRAFFI, V. GRECCHI, G. TURCHETTI - Interactions nucléon-nucléo Phys. Letters 28B, n°8 (Février 1969)

- W.R. WORTMAN - Phys. Rev. 176, 1767 (1968)