C. Piron

Axiomatique de la théorie quantique

Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg - RCP25, 1973, tome 16
« Réédition des conférences les plus demandées contenues dans les volumes épuisés », ,
exp. nº 10, p. 1-13
<http://www.numdam.org/item?id=RCP25_1973__16__A10_0>

AXIOMATIQUE DE LA THEORIE QUANTIQUE

par

C. PIRON

Institut de Physique Théorique (GENEVE)

---oo 0 oo---

Cet exposé se divise en deux parties :

I . Les concepts, les axiomes, leurs motivations physiques.

II . La catégorie des Croc, les réalisations Hilbertiennes des systèmes de propositions.

I.

Référence : J.M. Jauch and C. Piron : On the Structure of Quantal Systems. Helvetica Physica Acta 42 p. 842 (1969).

1) LE TREILLIS DES PROPOSITIONS.

Pour définir cet objet nous avons besoin d'un certain nombre de concepts que nous allons définir rapidement :

Système Physique : Partie du réel conçue comme existant en dehors du physicien, suffisamment isolée pour pouvoir être considérée en elle-même.

Question : Expérience, mesure, ou encore manipulation qui, si elle était effectuée sur le système physique, conduirait à une alternative dont les termes sont "oui" et "non" .

Nous dirons qu'une question est vraie pour le système physique tel qu'il est actuellement si nous pouvons affirmer que, lors d'une éventuelle mesure, le résultat serait certainement le "oui" .

Treillis complet : Ensemble muni d'une relation d'ordre pour laquelle tout sous-ensemble admet une borne inférieure (plus grand minorant) et une borne supérieure (plus petit majorant).

Exemple : le treillis des parties d'un ensemble. Par analogie, nous dirons souvent intersection et union pour respectivement borne inférieure et borne supérieure.

Nous supposerons défini pour le système physique considéré un ensemble de questions, ensemble suffisamment grand pour que :

a) Il existe une question triviale notée I qui consiste à ne rien mesurer (ou faire n'importe quoi) et énoncer le résultat "oui" simplement au vu du système physique.

b) Si $\alpha^{\sim}$ est une question, on définit une autre question notée $\alpha^{\sim}$ en échangeant le "oui" et le "non" .

Exemple : Nous noterons 0 la question triviale définie comme $I^{\sim}$.

c) Si $\{\alpha_i\}$ est un sous-ensemble (non vide) de questions, on définit une nouvelle question notée $\prod\limits_i \alpha_i$ de la manière suivante :

Pour mesurer $\prod\limits_i \alpha_i$, on mesure une des α_i choisie au hasard (ou de toute autre manière imprévisible) et on attribue à $\prod\limits_i \alpha_i$ la réponse ainsi obtenue.

Le lecteur vérifiera la relation :

$$(\prod_i \alpha_i)^{\sim} = \prod_i (\alpha_i^{\sim})$$

Sur cet ensemble de questions, nous définirons la relation de préordre : $\alpha < \beta$ signifiant "α vraie" $\Rightarrow$ "β vraie" . Cette relation définit des classes d'équivalence :

$$\alpha \sim \beta \Leftrightarrow \alpha < \beta \text{ et } \beta < \alpha \text{ .}$$

Nous appelons proposition la classe des questions équivalentes à l'une d'entre elles.

<u>THEOREME</u> : Sous ces hypothèses, l'ensemble des propositions d'un système physique est un treillis complet noté $\mathcal{L}$.

<u>Démonstration</u> : $\mathcal{L}$ est un ensemble ordonné :

$a < b$ signifie $\alpha < \beta$ pour $\alpha \in a$ et $\beta \in b$. Soit $\{a_i\}$ une famille non-vide de propositions, notons $\bigwedge_i a_i$ la proposition qui contient $\prod_i \alpha_i$; où $\alpha_i \in a_i \quad \forall_i$. Il n'est pas difficile de vérifier que cette proposition ne dépend pas du choix des α_i dans les classes d'équivalence et que de plus :

$$x < a_i \quad \forall i \Leftrightarrow x < \bigwedge_i a_i$$

C'est donc bien la borne inférieure des a_i ce qui justifie la notation. La borne supérieure des a_i peut alors être définie comme la borne inférieure des majorants des a_i :

$$\bigvee_i a_i = \bigwedge_{x \in \mathcal{J}} x \quad \text{ou} \quad \mathcal{J} = \{x \in \mathcal{L} \mid a_i < x \quad \forall_i\}$$

Il est important de remarquer que $\mathcal{J}$ n'est jamais vide car il contient toujours la proposition maximale définie par I.

Ainsi pour tout couple a, b de propositions l'intersection $a \wedge b$ et l'union $a \vee b$ existe toujours.

En physique classique on simplifie ce problème en supposant brutalement des relations :

"$a \wedge b$ vraie" $\Leftrightarrow$ "a vraie" et "b vraie"

"$a \vee b$ vraie" $\Leftrightarrow$ "a vraie" ou "b vraie"

par analogie avec la logique. Ces relations imposent la <u>distributivité</u> :

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

Mais si la première relation découle directement des définitions, la seconde est en général fausse. De "$a \vee b$ vraie" on ne peut à priori pas déduire "a vraie" ou "b vraie". C'est là que réside la différence fondamentale entre la théorie classique et la théorie quantique.

2) LA COMPATIBILITE.

L'expérience montre néanmoins qu'il existe dans $\mathcal{L}$ des sous-treillis qui sont distributifs comme en théorie classique. C'est ce que nous allons maintenant discuter. Tout d'abord quelques définitions : Nous dirons que b est un complément pour a si :

$$a \wedge b = 0 \quad \text{et} \quad a \vee b = I$$

Si , en plus, il existe une question α telle que :

$$\alpha \in a \quad \text{et} \quad \tilde{\alpha} \in b \quad .$$

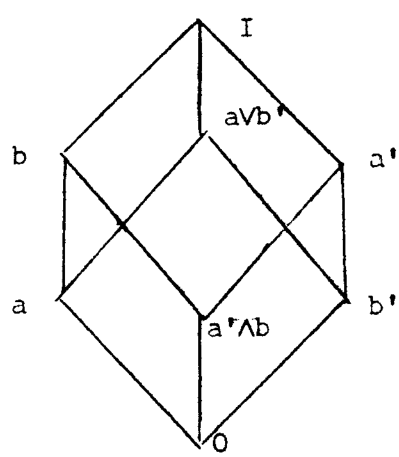
Nous dirons que b est un complément compatible pour a .

Nous admettrons les deux axiomes suivants :

Axiome C : Pour chaque proposition $a \in \mathcal{L}$ il existe au moins un complément compatible noté a' .

Axiome P : Si $a < b$, a' un complément compatible pour a , et b' un complément compatible pour b , le sous-treillis engendré par $\{a, a', b, b'\}$ est distributif.

Il est facile de vérifier qu'un tel sous-treillis est distributif si et si seulement il est isomorphe au treillis suivant :



Vérifions , par exemple, $b' < a'$. Nous avons :

$$b' = b' \wedge (a \vee a') = (b' \wedge a) \vee (b' \wedge a') \quad \text{mais} \quad b' \wedge a < b' \wedge b = 0$$

d'où $b' = b' \wedge a'$ ou encore $b' < a'$.

Il en résulte que le complément compatible est unique, et que la correspondance $a \mapsto a'$ définit sur $\mathcal{L}$ une orthocomplémentation :

$$a \wedge a' = 0 \quad , \quad a \vee a' = I$$

$$a < b \quad \Rightarrow \quad b' < a'$$

$$a'' = a$$

Enfin, il en résulte une autre propriété appelée la modularité faible

$$a < b \quad \Rightarrow \quad a \vee (b \wedge a') = b$$

Nous appellerons Croc un treillis complet orthocomplémenté et faiblement modulaire. En résumé nous avons démontré le théorème suivant .

THEOREME

Le treillis des propositions est un Croc. Réciproquement si dans un Croc $\mathcal{L}$ on interprète l'orthocomplément comme un complément compatible, $\mathcal{L}$ satisfait les axiomes C et P .

Nous dirons que deux propositions a et b sont compatibles et nous noterons $a \longleftrightarrow b$ si le sous-treillis engendré par $\{a, a', b, b'\}$ est distributif.

Exemple : $a \longleftrightarrow a$, $a \longleftrightarrow a'$, si $a < b$, alors $a \longleftrightarrow b$, enfin si $a \perp b$ c'est-à-dire par définition si $a < b'$ alors $a \longleftrightarrow b$.

3) ETATS (Pures)

Le treillis des propositions d'un système physique classique étant le treillis des parties de l'espace de phase Ω , l'état (pure) du système est défini par la donnée d'un point de Ω . Une proposition est vraie dans cet état si et seulement si elle contient le point représentatif. L'ensemble des propositions vraies définit complètement ce point. Par analogie, dans le cas quantique un état est défini par l'ensemble S de toutes les propositions actuellement vraies pour le système physique :

$$S = \{x \in \mathcal{L} \mid x \text{ est vraie}\}$$

Par définition on a les propriétés suivantes :

$$x \in S \quad \text{et} \quad x < y \Rightarrow y \in S$$

$$x_i \in S \quad \forall i \in \mathcal{J} \quad \Rightarrow \bigwedge_{i \in \mathcal{J}} x_i \in S$$

$$0 \notin S \quad \text{et} \quad I \in S \ .$$

$\forall x \in \mathcal{L}$, $x \neq 0 \Rightarrow \exists S$ tel que $x \in S$ (car une proposition qui n'est jamais vraie est équivalente à 0) .

Enfin l'interprétation physique demande que S soit maximal . Il en résulte que $p = \bigwedge_{x \in S} x$ est un <u>atome</u> de $\mathcal{L}$.

Rappelons que p est un <u>atome</u> si p <u>couvre</u> 0 c'est-à-dire si $0 < a < p \Rightarrow a = 0$ ou $a = p$

Ainsi se trouve justifié l'axiome suivant :

<u>Axiome</u> A_1 . Pour chaque $a \in \mathcal{L}$ et $a \neq 0$, il existe un atome $p < a$. En d'autres termes le treillis $\mathcal{L}$ est <u>atomique</u> .

4. <u>MESURES IDEALES ET DE PREMIERE ESPECE</u>.

Une mesure (plus exactement une question) de a est <u>idéale</u> si toute proposition, compatible avec a , vraie avant la mesure est encore vraie après.

Une mesure de a est de <u>première espèce</u> si le résultat "oui" entraîne "a vraie" immédiatement après la mesure.

Considérons un système dans un état S défini par l'atome p et soit a une proposition. Si la mesure de a est idéal et de première espèce, et si le résultat est oui, l'ensemble des propositions vraies à priori immédiatement après la mesure est :

$$S_a = \{x \in \mathcal{L} \mid (p \vee a') \wedge a < x\}$$

En effet a est vraie immédiatement après la mesure, d'autre part $p \vee a'$ est vraie avant la mesure et est encore vraie après la mesure car $p \vee a' \longleftrightarrow a$.

S_a est un état si et seulement si $(p \vee a') \wedge a$ est un atome. D'où le dernier axiome :

<u>Axiome</u> A_2 . Si p est un atome et si $p \not< a'$ alors $(p \vee a') \wedge a$ est un atome .

Nous appellerons système de propositions un treillis complet satisfaisant aux axiomes C, P, A_1 et A_2 .

<u>Exemples</u> : Le treillis des parties d'un ensemble est un système de propositions.

Le treillis des projecteurs d'un espace d'Hilbert :

$$P_a < P_b \quad \text{signifie} \quad P_a = P_a P_b$$

$$(P_a)' = I - P_a$$

$$P_a \wedge P_b = \lim_{n \to \infty} (P_a P_b)^n$$

$$P_a \leftrightarrow P_b \Leftrightarrow [P_a, P_b] = 0 .$$

II

<u>Références</u> .- Pour les Croc :

L.H. LOOMIS .- The Lattice Theoretic Background of Dimension Theory of operator Algebras. Mem. Amer. Math. Soc. n° <u>18</u> (1955) .

S. MAEDA .- Dimension Functions on Certain General Lattices. J. of Sc. of the Hiroshima Univ. Serie A <u>19</u> p. 211-237 (1955) .

Pour la géométrie projective :

E. ARTIN .- Algèbre géométrique, Gauthier-Villars (1962) .

Pour le plongement canonique :

M.D. MACLAREN.- Pacific J. of Math. <u>14</u> p. 597 (1964) .

C. PIRON .- Helvetica Physica Acta <u>37</u> p. 439 (1964) .

I. AMEMIYA et H. ARAKI .- Publ. Research Inst. Math. Sci. Kyoto University A <u>2</u> p.423 (1967).

1 . <u>LA CATEGORIE DES CROC</u> .

Les objets sont les Croc .

<u>THEOREME</u> : <u>Les relations suivantes sont équivalentes</u> :

a) $a \leftrightarrow b$

b) $(a \wedge b) \vee (a' \wedge b) \vee (a \wedge b') \vee (a' \wedge b') = I$

c) $(a \wedge b) \vee (a' \wedge b) = b$

d) $(a \vee b') \wedge b = a \wedge b$.

<u>THEOREME</u> : <u>Si</u> $a \longleftrightarrow b_i \quad \forall i$ <u>alors</u> $\bigvee_i (a \wedge b_i) = a \wedge (\bigvee_i b_i)$.

<u>Démonstration</u> : On applique la relation de modularité faible à l'inégalité

$$\bigvee_i (a \wedge b_i) < a \wedge (\bigvee_i b_i)$$

d'où

$$\bigvee_i (a \wedge b_i) \vee [\bigwedge_i (a' \vee b_i') \wedge a \wedge (\bigvee_i b_i)] = a \wedge (\bigvee_i b_i) .$$

Or $a \longleftrightarrow b_i \Rightarrow a \longleftrightarrow b_i' \Rightarrow$ d'après le théorème précédent :

$$(a' \vee b_i') \wedge a = b_i' \wedge a \qquad \forall i$$

d'où

$$\bigwedge_i (a' \vee b_i') \wedge a \wedge (\bigvee_i b_i) = \bigwedge_i b_i' \wedge a \wedge (\bigvee_i b_i) = a \wedge (\bigwedge_i b_i') \wedge (\bigvee_i b_i) = 0$$

d'où l'égalité.

Avec les règles de calcul que fournissent ces deux théorèmes on vérifie facilement le théorème suivant :

<u>THEOREME</u> : Le centre d'un Croc, c'est-à-dire, l'ensemble des propositions compatibles avec toutes les autres est un treillis distributif.

Ayant étudié les objets définissons les morphismes :

<u>Un morphisme</u> μ d'un Croc $\mathcal{L}_1$ dans un Croc $\mathcal{L}_2$ est une application de $\mathcal{L}_1$ dans $\mathcal{L}_2$ telle que :

a) $\mu(\bigvee_i a_i) = \bigvee_i \mu a_i$

b) $a \perp b \Rightarrow \mu a \perp \mu b$

Il en résulte immédiatement :

$$\mu 0_1 = 0_2$$

$$\mu(a') = (\mu a)' \wedge \mu I_1$$

$$\mu(\bigwedge_i a_i) = \bigwedge_i \mu a_i$$

L'image d'un Croc est donc un sous-Croc.

<u>Exemples</u> : Soit $\mathcal{L}$ un Croc, munissons le <u>segment</u> $[0,a] \equiv \{x \in \mathcal{L} \mid x < a\}$ de l'orthocomplémentation relative

$$x \mapsto x^r = x' \wedge a$$

alors l'injection canonique de $[0,a]$ dans $\mathcal{L}$ est un morphisme. L'injection canonique du centre de $\mathcal{L}$ dans $\mathcal{L}$ est aussi un morphisme

Nous appellerons <u>idéal</u> un sous-ensemble non vide $\mathcal{J}$ d'un Croc $\mathcal{L}$ tel que :

a) $a_i \in \mathcal{J} \Rightarrow \bigvee_i a_i \in \mathcal{J}$

b) $a \in \mathcal{J}$ et $x \in \mathcal{L} \Rightarrow (a \vee x') \wedge x \in \mathcal{J}$

<u>Exemples</u> : Ker μ le <u>noyau</u> $\mu^{-1} 0_2$ d'un morphisme μ est un idéal. Tout idéal d'un Croc est de la forme $[0,z]$ où z est dans le centre. En effet, si z est l'élément maximal de l'idéal et x une proposition quelconque alors d'après b) $(z \vee x') \wedge x < z$ d'où $(z \vee x') \wedge x = z \wedge x$ et $z \longleftrightarrow x$.

Nous définirons <u>l'union directe</u> d'une famille de Croc $\{\mathcal{L}_\alpha\}$ et nous noterons $\bigvee_\alpha \mathcal{L}_\alpha$ le Croc obtenu de la manière suivante : C'est l'ensemble des familles $\{x_\alpha\}$ où les $x_\alpha \in \mathcal{L}_\alpha$ avec la relation d'ordre :

$$\{x_\alpha\} < \{y_\alpha\} \Leftrightarrow x_\alpha < y_\alpha \quad \forall_\alpha$$

et l'orthocomplémentation :

$$\{x_\alpha\} \mapsto \{x_\alpha\}' = \{x'_\alpha\}$$

L'union directe correspond au produit dans la catégorie des Croc :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L} \arrow[r, "\mu_\beta"] \arrow[d, dashed, "\mu"'] & \mathcal{L}_\beta \\
\bigvee_\alpha \mathcal{L}_\alpha \arrow[ur, "\pi_\beta"'] &
\end{tikzcd}$$

$\mu x = \{\mu_\alpha x\}$, $\pi_\beta\{y_\alpha\} = y_\beta$

Si $\mathcal{L}$ n'est d'aucune manière l'union directe de deux sous-Croc contenant chacun au moins deux éléments, nous dirons que $\mathcal{L}$ est <u>irréductible</u>. Un Croc est irréductible si et seulement si son centre ne contient que 0 et I . En effet si z est dans le centre de $\mathcal{L}$ alors pour tout $x \in \mathcal{L}$:

$$x = (x \wedge z) \vee (x \wedge z')$$

ce qui démontre que $\mathcal{L}$ est union de $[0,z]$ et $[0,z']$.

L'étude des idéaux engendrés par les atomes de $\mathcal{L}$ permet de démontrer que le centre d'un système de proposition est lui-même atomique et qu'ainsi tout système de propositions est union directe de systèmes irréductibles.

2) REALISATION HILBERTIENNE D'UN SYSTEME DE PROPOSITIONS IRREDUCTIBLE

Soit $\mathcal{L}$ un système de propositions irréductible, le premier problème que nous voulons résoudre consiste à plonger $\mathcal{L}$ canoniquement dans le treillis des variétés linéaires d'une géométrie projective.

On appelle géométrie projective G_p la donnée d'un ensemble E , les points de G_p , et d'un ensemble de parties de E , les droites de G_p : le tout satisfaisant les axiomes suivants :

G_1 deux points distincts p et q définissent une droite notée pq et c'est la seule droite qui contient p et q .

G_2 étant donné trois points p,q,r non situés sur une même droite, un point $s \in pq$ (distinct de p et q) , un point $t \in pr$ (distinct de p et r), la droite st coupe rq en un point et un seul.

G_3 toute droite contient au moins trois points. On appelle variété linéaire de G_p toute partie de E qui contient en même temps que deux points distincts la droite qu'ils définissent. Les variétés linéaires forment un treillis complet.

Exemple : Soit V un espace vectoriel (à gauche) sur un corps K quelconque, commutatif ou non, les sous-espaces vectoriels s'identifient aux variétés linéaires d'une géométrie projective notée $G_p(V,K)$. Toute géométrie projective (de rang au moins égal à quatre) est isomorphe à une $G_p(V,K)$.

THEOREME : Si on appelle point un atome de $\mathcal{L}$ et droite le sous-ensemble des atomes inférieurs à l'union de deux atomes distincts alors ces points et ces droites définissent une géométrie projective notée $G_p(\mathcal{L})$.

L'application α qui à $b \in \mathcal{L}$ fait correspondre la variété linéaire définie par les atomes inférieures à b est une injection canonique telle que :

$$a) \quad \alpha(\bigwedge_i b_i) = \bigwedge_i(\alpha b_i)$$

$$b) \quad \alpha(b \vee p) = (\alpha b) \vee (\alpha p)$$

si p est un atome de $\mathcal{L}$

$$c) \quad \alpha(b \vee c) = (\alpha b) \vee (\alpha c)$$

si $b \perp c$.

COROLLAIRE : Si $I \in \mathcal{L}$ est union finie d'atomes $G_p(\mathcal{L})$ est de rang fini et l'injection canonique α est surjective.

Démonstration : On procède par induction en appliquant la propriété b) du théorème précédent .

Ainsi tout système de propositions irréductible de rang fini s'identifie à une géométrie projective, mais celle-ci hérite d'une structure supplémentaire l'orthocomplémentation. D'autre part, si $G_p(\mathcal{L})$ est de rang au moins égal à quatre elle est isomorphe à une $b_p(V,K)$.

THEOREME : Si (V,K) est un espace vectoriel de dimension finie au moins égale à trois toute orthocomplémentation sur le treillis des variétés linéaires de $G_p(V,K)$ est induite par une forme hermitienne définie qui joue le rôle d'un produit scalaire. Une telle forme est essentiellement unique.

Démonstration : L'orthocomplémentation fait correspondre à chaque rayon de V un hyperplan. Or les hyperplans sont eux-même en correspondance canonique avec les rayons de l'espace à droite dual de V (étant donné une forme linéaire, son noyau définit un hyperplan). Ainsi l'orthocomplémentation définit une application bijective des rayons de V sur les rayons du dual de V qui est une projectivité. D'après le théorème fondamental de géométrie projective il lui correspond une transformation antilinéaire qui à chaque vecteur $g \in V$ fait correspondre une forme linéaire notée $\varphi(f,g)$.

Dans le cas de dimension infinie, l'injection canonique de $\mathcal{L}$ dans $G_p(\mathcal{L})$ (isomorphe à une $G_p(V,K)$) n'est jamais surjective. Il est néanmoins pas difficile de caractériser les sous-espaces de V images de propositions. Deux atomes p et q sont dits orthogonaux s'ils satisfont la relation (symétrique) $p < q'$. De même deux rayons de V sont orthogonaux si les atomes correspondants sont orthogonaux. Soit $\mathcal{M}$ un sous-espace de V , nous noterons $\mathcal{M}^{\circ}$ le sous-espace de tous les rayons orthogonaux à tous ceux de $\mathcal{M}$. Un sous-espace est image d'une proposition si et seulement s'il est biorthogonal, c'est-à-dire par définition si $\mathcal{M}^{\circ\circ} = \mathcal{M}$.

THEOREME : Tout système de propositions irréductible $\mathcal{L}$ de rang au moins égal à quatre peut être réalisé via l'injection canonique α par la donnée d'un espace vectoriel (V,K) et d'une forme hermitienne définie φ . Une variété linéaire est image d'une proposition si et seulement si celle-ci peut être définie comme l'ensemble des vecteurs f satisfaisant :

$$\varphi(f,g_i) = 0 \qquad \forall g_i \in \mathcal{M} \subset V$$

Réciproquement on a le théorème suivant :

<u>THEOREME</u> : Soient (V,K) un espace vectoriel et φ une forme hermitienne définie construite sur cet espace, l'ensemble $\mathcal{P}$ des variétés linéaires biorthogonales pour cette forme est un système de proposition si et seulement si :

$$\mathcal{M} + \mathcal{M}^{\circ} = V \qquad \forall\, \mathcal{M} \in \mathcal{P}$$

Soient (V,C) un espace vectoriel sur les complexes et φ une forme hermitienne définie (avec la conjugaison habituelle), la condition précédente est satisfaite si et seulement si l'espace V est complet, c'est-à-dire si V est un espace d'Hilbert. Ce dernier théorème est dû à Amemiya et Araki, c'est en quelque sorte la réciproque du théorème de décomposition de Riesz.

En résumé, à part quelques cas exceptionnels, tout système de propositions irréductible peut être réalisé par le treillis $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ des variétés linéaires biorthogonales d'un espace d'Hilbert généralisé $\mathcal{H}$ (pas nécessairement un espace sur les complexes). Un système de propositions quelconque pourra donc être réalisé par une famille de tels espaces.