F. Pham

Classification des singularités

Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg - RCP25, 1971, tome 13
« Conférences de B. Malgrange, Y. Ne'eman et F. Pham », , exp. n° 3, p. 1-27
<http://www.numdam.org/item?id=RCP25_1971__13__A3_0>

C L A S S I F I C A T I O N D E S S I N G U L A R I T E S

Exposé fait à la Douzième Rencontre entre
Mathématiciens et Physiciens (R.C.P. n° 25,
Strasbourg, 31 Mai au 3 Juin 1971)

par

F. Pham

Université de Nice
Département de Mathématiques
Parc Valrose
N I C E 06

CLASSIFICATION DES SINGULARITES

La classification des singularités est un sujet très riche et très mal délimité. Des géomètres algébristes, des topologues disent chercher à "classifier les singularités", en ayant en tête des objets apparemment aussi dissemblables que des variétés algébriques, des applications différentiables, etc... Pourtant, lorsque ces gens veulent bien illustrer leur jargon par des exemples concrets, on s'aperçoit souvent que tous s'intéressent aux mêmes objets, sous des noms différents et avec des définitions mathématiques différentes. Ces objets, Thom en a fait la base de sa philosophie de la nature, sous le nom de "catastrophes élémentaires".

Mon exposé sera donc guidé par la démarche conceptuelle de Thom, tout en utilisant le jargon qui m'est familier, celui de la géométrie analytique complexe - ce qu'on me pardonnera, j'espère.

1. LA NOTION DE DEPLOIEMENT UNIVERSEL

1.1 Soit à classifier les déformations des germes de fonctions analytiques d'une variable complexe. Un tel germe f_o peut être considéré comme un élément de $\mathbb{C}\{z\}$, anneau des séries entières convergentes d'une variable z. Une <u>déformation à un paramètre</u> de f_o est un élément $f \in \mathbb{C}\{z,t\}$ tel que $f(z,o) = f_o(z)$. Un tel f peut être noté $f = f_o + tf_1 + t^2f_2 + \dots$, avec $f_i \in \mathbb{C}\{z\}$.

Ecrivons $f_o = z^n.w$ (w élément inversible de $\mathbb{C}\{z\}$), et faisons le changement de variable $z \longmapsto z/w^{1/n}$, qui définit un germe d'isomorphisme analytique de $\mathbb{C}\{z\}$. Par cet isomorphisme, l'étude des déformations de f_o est ramené à l'étude des déformations de z^n.

<u>LEMME</u> Soit $f \in \mathbb{C}\{z,t\}$ une déformation de $f_o = z^n$. Il existe une déformation h de l'identité *) et des éléments non inversibles u_i de $\mathbb{C}\{t\}$ $(i = 0,1,2,\dots,n-2)$ tels que si l'on pose $z_h = h(z,t)$ on ait $f(z,t) = z_h^n + u_{n-2}\, z_h^{n-2} + u_{n-3}\, z_h^{n-3} + \dots + u_1\, z_h + u_o$. De plus, h et les u_i sont définis de façon unique.

<u>Preuve</u>. La preuve "formelle" (nous admettrons la convergence des séries introduites) se fait en développant les deux membres de l'égalité proposée suivant les puissances croissantes de t, et en identifiant. La puissance zéro donne $z^n = z^n$, la puissance 1 donne

(1) $f_1(z) = nh_1(z)\, z^{n-1} + P_1(z)$,

la puissance 2 donne

(2) $f_2(z) = nh_2(z)\, z^{n-1} + n(n-1)\, [h_1(z)]^2\, z^{n-2} + P_2(z)$,

etc...

---

*) Par l'<u>identité</u> nous entendons l'application identique de $\mathbb{C}$, qu'on peut représenter par l'élément $h_o = z$ de $\mathbb{C}\{z\}$. Une déformation de l'identité s'écrit donc $h = z + th_1 + t^2h_2 + \dots$, avec $h_i \in \mathbb{C}\{z\}$.

où $P_r(z)$ $(r = 1,2,\dots)$ désigne le polynôme de degré $n-2$:

$$P_r(z) = \sum_{i=0}^{n-2} u_{i,r}\, z^i \text{ , avec } u_{i,r} = \text{coefficient de } t^r \text{ dans } u_i \text{ .}$$

La ligne (1) permet de déterminer h_1 et P_1 comme quotient et reste de la division de f_1 par nz^{n-1}, de même la ligne (2) permet, connaissant h_1, de déterminer h_2 et P_2 comme quotient et reste d'une division analogue, etc...

Au lieu de déformations à un paramètre, on peut aussi considérer des déformations à nombre quelconque de paramètres, et en particulier la déformation à $n-1$ paramètres de z^n définie par le " polynôme générique de degré n " :

$$G_n = z^n + u_{n-2}\, z^{n-2} + u_{n-3}\, z^{n-3} + \dots + u_1 z + u_0$$
$$\in \mathbb{C}\{z, u_{n-2}, u_{n-3}, \dots, u_1, u_0\} \text{ .}$$

Le lemme se généralise immédiatement aux déformations à nombre quelconque de paramètres - il suffit de remplacer t par $(t_1, t_2, \dots, t_q)$ et les indices par des multi-indices - et peut se formuler en langage géométrique de la façon suivante :

PROPRIETE UNIVERSELLE DE G_n :

Pour toute déformation f à q paramètres de z^n, il existe un et un seul germe d'application analytique

$$u_f : \mathbb{C}^q \longrightarrow \mathbb{C}^{n-1}$$
$$t \longmapsto u_0(t), u_1(t), \dots, u_{n-2}(t)$$

tel qu'en faisant sur G_n le "changement de base" u_f on obtienne une déformation "équivalente" à f.

Dans cet énoncé, "changer de base" signifie simplement substituer aux indéterminées u_i les fonctions $u_i(t)$, tandis que l' "équivalence" de deux déformations à q paramètres signifie qu'on passe de l'une à l'autre par une défromation de l'application $1_{\mathbb{C}}$ (la déformation h du lemme).

L'énoncé de la propriété universelle se résume en disant que G_n est la <u>déformation universelle</u> de z^n .

1.2 Après les fonctions d'une variable, il est naturel de chercher à déformer les fonctions de plusieurs variables. Mais pour des raisons qui vont apparaître bientôt, il est commode de pousser tout de suite plus loin la généralisation, en cherchant à déformer les <u>germes d'applications analytiques</u> $f_o : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^p$. Une <u>déformation</u> d'un tel germe se définit de façon évidente. L'<u>équivalence</u> de deux déformations pourrait aussi se définir comme dans 1.1 , mais une telle définition, très naturelle dans le cas des fonctions, l'est un peu moins dans le cas des applications : car si l'on permet à l'espace source $\mathbb{C}^n$ de se déformer, pourquoi ne pas le permettre aussi à l'espace but $\mathbb{C}^p$?

Nous dirons donc que deux déformations f, g d'un germe d'application $f_o : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^p$ sont <u>équivalentes</u> s'il existe une déformation h de $1_{\mathbb{C}^n}$ et une déformation k de $1_{\mathbb{C}^p}$ telles que

$$k(g(z,t),t) = f(h(z,t),t) .$$

Par exemple, revenant au cas des fonctions, nous voyons que pour tout élément non inversible $w \in \mathbb{C}\{t\}$ les fonctions $f \in \mathbb{C}\{z,t\}$ et $f + w$ définissent des déformations équivalentes (poser $h(z,t) = z$, et $k(z,t) = z - w(t)$: k opère sur l'espace but par translation dépendant de t) .

En particulier, considérons le polynôme G_n^o déduit du polynôme générique G_n en retranchant le terme u_o :

$$G_n^o = z^n + u_{n-2} z^{n-2} + u_{n-3} z^{n-3} + \dots + u_1 z .$$

Considéré comme élément de $\mathbb{C}\{z, u_{n-2}, \dots u_1, u_o\}$ (indépendant de u_o !), ce polynôme définit une déformation à $n - 1$ paramètres (indépendante de l'un des paramètres !) qui est équivalente à celle définie par G_n. Autrement dit, <u>la déformation à</u> $n-1$ <u>paramètres</u> G_n <u>est équivalente à celle déduite de la déformation à</u> $n-2$ <u>paramètres</u>

$$G_n^o \in \mathbb{C}\{z, u_{n-2}, \dots , u_1\}$$

<u>par le changement de base "trivial"</u>

$$\begin{array}{c} \mathbb{C}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{C}^{n-2} \\ (u_{n-2},\dots,u_1,u_o) \longmapsto (u_{n-2},\dots,u_1) \ . \end{array}$$

Il n'est pas difficile de vérifier que la propriété universelle est maintenant satisfaite par cette déformation à $n-2$ paramètres G_n^o. La déformation G_n, elle, satisfait à une propriété analogue mais <u>sans l'unicité du changement de base</u> (car $u_o(t)$ peut être choisie arbitraire) : elle n'est plus déformation universelle mais seulement déformation "<u>verselle</u>".

1.3 Maintenant, les principaux personnages sont en scène : déformations, équivalences de déformations, changements de bases, déformations verselles et universelles. Mais il va encore falloir modifier une définition : il paraît (les experts le disent) que c'est trop demander à une déformation universelle que d'exiger l'unicité du changement de base ; on demandera donc seulement l'<u>unicité au premier ordre</u>, c.à d. l'unicité de l'application tangente au changement de base. Intuitivement, cela signifie que seule la notion de déformation <u>infinitésimale</u> a des chances raisonnables de s'universaliser.

Il est facile de voir (grâce au théorème des fonctions implicites) que cette notion plus lâche de "déformation universelle" a encore d'assez bonnes propriétés pour mériter son nom. Notammment, chaque fois qu'elle existe, <u>la déformation universelle est unique à équivalence près</u>, <u>et toute déformation verselle s'en déduit</u> (à équivalence près) <u>par un changement de base trivial</u>, comme dans l'exemple étudié plus haut.

1.4 Déploiements.

Une déformation f d'un germe d'application $f_o : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^p$ se définit par un germe d'application

$$f : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^q \longrightarrow \mathbb{C}^p$$

mais peut également se représenter par le germe d'application

$$\tilde{f} : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^q \longrightarrow \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^q$$
$$x, t \longmapsto f(x,t), t .$$

Pour éviter les confusions, nous donnerons deux noms différents à ces deux germes f et $\tilde{f}$, réservant au premier le nom de <u>déformation</u> et appelant le second <u>déploiement</u> de f_o (associé à la déformation f). On remarquera que c'est en termes de déploiements que l'équivalence de deux déformations s'exprime le plus simplement : deux déformations f et g de f_o sont équivalentes s'il existe des déformations h de $1_{\mathbb{C}^n}$ et k de $1_{\mathbb{C}^p}$ telles que $\tilde{k} \circ \tilde{g} = \tilde{f} \circ \tilde{h}$.

Le déploiement associé à une déformation universelle resp. verselle s'appelle <u>déploiement universel</u> resp. <u>versel</u> de f_o.

<u>Stabilité des déploiements versels.</u>

Un germe d'application est dit <u>stable</u> s'il n'admet que des déformations triviales, c. à d. des déformations équivalentes à la déformation constante. On peut montrer (J. Mather) <u>qu'un déploiement versel d'un germe $f_o : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^p$ est un germe d'application stable</u>. Inversement, tout germe d'application stable est évidemment le déploiement universel d'un germe d'application, à savoir lui-même !

<u>Exemples.</u>

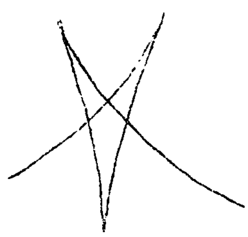
La fonction $f_o = z^2$ est une application stable $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$. Plus généralement, $f_o = z^n$ admet comme déploiement universel l'application stable

$\tilde{G}_n^o : \mathbb{C}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{C}^{n-1}$, déploiement associé à la déformation universelle G_n^o définie un peu plus haut.

Les lieux de valeurs critiques de ces applications $\tilde{G}_n^o$ (en fait, de leurs analogues <u>réelles</u>) jouent un rôle important dans la théorie des catastrophes de Thom. La figure ci-dessous en représente quelques formes typiques.

Courbe des valeurs critiques du déploiement universel de $f_o = x^3$ ("<u>fronce de Whitney</u>").

Section plane typique de la surface des valeurs critiques du déploiement universel de $f_o = x^4$ ("<u>queue d'aronde</u>").



Section plane typique de l'hypersurface (dans $\mathbb{R}^4$) des valeurs critiques du déploiement universel de $f_o = x^5$ ("<u>papillon</u>") .

2. <u>LA STABILITE EST-ELLE GENERIQUE</u> ?

Dans le modèle de Thom [1], un processus morphologique se déroulant dans l'espace-temps $\mathbb{R}^4$ est décrit par un "<u>champ continu de dynamiques</u>" sur $\mathbb{R}^4$: à chaque point x de $\mathbb{R}^4$ est associée une fonction $V_x : E \longrightarrow \mathbb{R}$, la fonction "potentiel" de la dynamique au point x ; l'espace E sur lequel est définie cette fonction s'interprète comme un "espace de phase", ou espace des états internes du système au point x (le fait que cet espace soit indépendant de x correspond à une hypothèse d'homogénéité) : le potentiel V_x varie continûment (et même différentiablement) avec x , et c'est l'étude qualitative de sa variation qui fournit la description du processus morphologique.

Le processus morphologique sera structurellement stable au point x_o si la variation du potentiel au voisinage de x_o définit une déformation verselle de V_{x_o}. Pour classifier localement toutes les morphologies structurellement stables dans $\mathbb{R}^4$, il suffira donc de classifier toutes les déformations verselles paramétrées par $\mathbb{R}^4$. Thom a montré que celles-ci se classent en sept types locaux : les quatre premiers sont le pli, la fronce, la queue d'aronde, et le papillon (cf. exemples du § précédent) ; les trois autres sont les ombilics (ombilic elliptique, hyperbolique, et parabolique), dont nous reparlerons à la fin du dernier paragraphe.

Une propriété intéressante des processus morphologiques structurellement stables dans $\mathbb{R}^4$ est leur caractère générique : "presque tout" processus morphologique dans $\mathbb{R}^4$ est localement équivalent à l'un des sept modèles de Thom. Mais si l'on regarde, plus généralement, les processus morphologiques dans $\mathbb{R}^q$ (q quelconque), on a une surprise : la stabilité structurelle (au sens défini plus haut) n'est générique que pour les petites valeurs de q. Nous verrons au § 2.2 un contre-exemple pour $q = 7$, dû à J. Mather : il s'agit de déformations à 7 paramètres d'une fonction à deux variables (la fonction $x^4 + y^4$), qui ne peuvent être rendues stables par aucune perturbation.

En fait, J. Mather s'est intéressé à un problème plus général, celui de la stabilité des applications de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$, et il a montré que la stabilité n'est générique que pour certaines valeurs de n et p. De son analyse très fine de la notion de stabilité [2], je vais essayer de donner quelques aperçus sommaires, toujours dans le langage analytique complexe du § 1 (bien que Mather ait formulé son étude dans le langage différentiable réel).

2.1 Fibre d'un germe d'application analytique

On a vu (§ 1) que le déploiement universel de la fonction z^n s'écrivait :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^{n-1} & \xrightarrow{\tilde{G}_n^o} & \mathbb{C}^{n-1} \\ z & & u_o = z^n + u_{n-2} z^{n-2} + \dots + u_1 z \\ u_1 & \longmapsto & u_1 \\ \vdots & & \vdots \\ u_{n-2} & & u_{n-2} \end{array}$$

L'image réciproque, ou "fibre" $(\tilde{G}_n^o)^{-1}(u)$ d'un point u de l'espace but est en général formée de n points, correspondant aux n racines d'une équation du n-ième degré en z. Si $u = 0$, les n racines sont confondues : un topologue dira que la fibre au dessus de l'origine se réduit à un point, mais le langage de la géométrie analytique (ou algébrique) traduit mieux l'idée intuitive de " n points confondus" en disant que la fibre est l'espace analytique de dimension zéro défini par l'algèbre analytique $\mathbb{C}\{z\}/(z^n)$ (quotient de $\mathbb{C}\{z\}$ par l'idéal engendré par z^n).

Plus généralement, on appelle fibre d'un germe d'application analytique $f = (f_1, f_2, \dots f_p) : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^p$ le germe d'espace analytique défini par l'algèbre quotient $\mathbb{C}\{z_1, z_2, \dots, z_n\}/(f_1, f_2, \dots, f_p)$.

L'intérêt de cette notion apparaît dans le

THEOREME DE MATHER

Deux germes d'applications stables $\mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^p$ sont équivalents (c. à d. se déduisent l'un de l'autre par des germes d'isomorphismes de la source et du but) si et seulement s'ils ont des fibres isomorphes.

D'autre part, étant donné une algèbre analytique complexe A, Mather donne des moyens [2] IV de reconnaître si elle est la fibre d'un germe d'application stable, et de construire explicitement ce germe d'application. Sans entrer dans les détails, notons seulement qu'une condition nécessaire sur A est d'être l'algèbre analytique d'une germe d'espace à singularité isolée ; cette condition est aussi suffisante dans le cas d'une intersection complète (germe d'espace donné par exactement autant d'équations que sa codimension) : il existe dans ce cas une application stable $f : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^p$ $(n - p = \dim A)$, à fibre donnée par A, et qu'on peut interpréter comme la "déformation universelle" de cette fibre. Je n'indiquerai pas ici comment se fait la construction (cf. par exemple [3]), tout en me réservant d'y recourir sur des exemples.

2.2 Un contre-exemple de Mather.

Les géomètres savent bien que même un germe de courbe plane (le type le plus simple d'hypersurface à singularité isolée !) peut avoir un type d'isomorphisme qui varie continûment lors d'une déformation : par exemple la famille à un paramètre de courbes

$$x^4 + y^4 + tx^2y^2 = 0$$

est une famille de cônes de degré 4 dans le plan, c. à d. quatre droites concourantes ; on vérifiera que le birapport de ces quatre droites varie avec t, or le birapport est un invariant analytique !

Cet exemple va nous permettre de construire une application (instable) telle qu'aucune application voisine ne soit stable, démontrant ainsi le caractère non générique de la stabilité.

Regardons la déformation universelle de la fonction $x^4 + y^4$: elle dépend de 8 paramètres, et peut s'écrire

$$F(x,y,u) = x^4 + y^4 + u_{1,0}x + u_{0,1}y + u_{2,0}x^2 + u_{1,1}xy + u_{0,2}y^2 +$$
$$+ u_{2,1}x^2y + u_{1,2}xy^2 + u_{2,2}x^2y^2 \quad ;$$

on observe que l'axe des $u_{2,2}$ est un lieu de fibres "excentriques" du déploiement $\tilde{F}$: deux fibres distinctes, sur cet axe, ne sont jamais isomorphes (différence de birapport), et une fibre sur l'axe ne peut être isomorphe à une fibre hors de l'axe (différence de multiplicité par exemple : 4 sur l'axe, < 4 en dehors). Soit alors $\tilde{f}$ un déploiement à 7 paramètres de $x^4 + y^4$, déduit du déploiement universel $\tilde{F}$ par un changement de base transverse à l'axe des $u_{2,2}$ (par exemple le changement de base $\begin{array}{c} \mathbb{C}^7 \subset \mathbb{C}^8 \\ \underline{u} \longmapsto (\underline{u},o) \end{array}$, consistant à annuler la coordonnée $u_{2,2}$).

Je prétends qu'aucune application voisine de $\tilde{f}$ n'est stable.
En effet, l'universalité de $\tilde{F}$ permet d'affirmer (en trichant un peu, car il ne s'agit plus de germes !) que toute application voisine de $\tilde{f}$ se déduit du déploiement $\tilde{F}$ par un changement de base voisin du précédent, donc lui aussi transverse à l'axe des $u_{2,2}$. Une telle application est instable sous l'effet de la déformation "parallèle à l'axe des $u_{2,2}$" : j'entends par là la déformation à un paramètre définie en translatant parallèlement à l'axe des $u_{2,2}$ le changement de base qui définit l'application ; en effet la "fibre excentrique" se modifie lors de cette déformation.

3. STABILITE TOPOLOGIQUE. PROBLEME DE L' "EQUIVALENCE TOPOLOGIQUE STABLE".

D'après Thom, le caractère non générique de la stabilité est imputable à une définition trop stricte de l'équivalence : si au lieu de l'équivalence analytique (ou différentiable) on admet l'équivalence topologique (définie par des homéomorphismes de la source et du but) la stabilité devient générique.

L'idée de la démonstration (dans la formulation de Mather) pourrait se résumer ainsi :

l'exemple 2.2 ci-dessus illustre un phénomène général : "presque toute" application $f : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^p$ peut se déduire d'une application stable $F : \mathbb{C}^N \longrightarrow \mathbb{C}^q$ $(N = n - p + q)$ par un changement de base $\lambda : \mathbb{C}^p \longrightarrow \mathbb{C}^q$ (dans la terminologie de Mather, une telle f est dite "de type singulier fini" ou T.S.F.) ; de plus, toute application voisine de f se déduit de F par un changement de base voisin de λ ; or on peut "stratifier" F (c. à d. partager la source et le but de F en collection localement finie de variétés, images les unes des autres par F, avec des propriétés topologiques convenables) de telle façon que tous les changements de base "transverses aux strates" soient topologiquement stables (cela résulte du "théorème d'isotopie" de Thom) ; comme les changements de base transverses aux strates forment un ouvert dense dans l'espace fonctionnel de toutes les applications $\mathbb{C}^p \longrightarrow \mathbb{C}^q$ (théorème de transversalité), le caractère générique de la stabilité topologique est ainsi démontré.

Le noeud de la démonstration est donc l'existence d'une bonne stratification de F. La construction que donne Thom de cette stratification est très technique, et a subi beaucoup d'avatars au cours des différentes rédactions du théorème d'isotopie [4]. Je me permettrai néanmoins, prenant mes désirs pour des réalités, de parler de la stratification de Thom comme d'un objet défini canoniquement, avec la propriété qu'un changement de base sur F définit une application topologiquement stable <u>si et seulement si</u> (?) ce changement de base est transverse aux strates. En particulier, pour que le germe d'application f qu'on s'est donné au début soit topologiquement stable, il <u>faudrait</u> (?) qu'il se déduise de F par un changment de base transverse à "la strate de Thom" passant par l'origine, et alors, d'après le théorème d'isotopie de Thom, son type topologique serait entièrment déterminé par celui de F (F étant topologiquement équivalent à un déploiement trivial de f) ; cela "démontrerait" (!) la

<u>CONJECTURE</u> : Si deux germes d'application analytiques topologiquement stables $\mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^p$ ont des fibres <u>isomorphes</u>, ils sont topologiquement équivalents.

Le fait que la réciproque de cette conjecture soit fausse (comme le montre l'exemple 2.2, où le type d'isomorphisme de la fibre varie continûment) nous conduit à nous poser le

<u>PROBLEME</u> (dit "DE L'EQUIVALENCE TOPOLOGIQUE STABLE").

Etant donné deux algèbres analytiques A et A' qui définissent les fibres de deux germes d'applications stables f et $g : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^p$, comment lire sur A et A' que f et g sont topologiquement équivalentes ?

<u>N.B.</u> : Si l'on croit à la discussion qui précède, le problème posé pour les applications <u>topologiquement</u> stables peut toujours se ramener au même problème pour les applications <u>analytiquement</u> stables ; mais même si l'on n'y croit pas, et si l'on n'aime pas que l'énoncé d'un problème dépende d'une conjecture, le problème pour les applications <u>analytiquement stables</u> est assez intéressant par lui-même.

A titre d'expérience, voyons s'il est facile de résoudre ce problème dans le cas particulier où A et A' sont les algèbres analytiques de deux <u>germes de courbes planes</u>. L'intérêt de ce cas est que l'<u>équivalence</u>

topologique de deux germes de courbes planes a déjà été étudiée très à fond, et on sait très bien la traduire sur les algèbres (O. Zariski). Mais il s'avère que cette équivalence "ordinaire" est beaucoup moins fine que celle que nous cherchons ; par exemple, bien que les courbes $y^3 + x^9 = 0$ et $y^3 + (ax^6 + bx^7)y + x^9 = 0$ soient topologiquement équivalentes (pour a et b petits), la première admet des déformations qui ne sont topologiquement équivalentes à aucune déformation de la seconde (cf. mon article [3]) : l'équivalence topologique "ordinaire" n'implique pas l'équivalence topologique stable.

4. LES SYMBOLES ET LEURS MULTIPLICITES.

Dans son premier article sur les singularités d'applications différentiables [5], Thom "classifiait" les singularités grâce à l'idée suivante : l'ensemble critique se "stratifie" suivant les différentes valeurs du rang de l'application tangente, chacune des strates ainsi obtenues se sous-stratifie à son tour suivant les valeurs du rang de l'application restreinte à cette strate, etc... En regardant les rangs de ces restrictions successives, on obtient des invariants numériques de la singularité, connus sous le nom de "symboles de Thom-Boardman" (Boardman a reformulé et démontré ce qui n'était que suggéré par Thom).

THEOREME DE BOARDMAN [6]

Soit $F : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^p$ une application analytique stable. A toute suite d'entiers $\underline{k} = (k_1, k_2, \ldots, k_s)$, $k_1 \geq k_2 \geq \ldots \geq k_s \geq 0$, est associée une suite de sous-variétés analytiques localement fermées

$$\mathbb{C}^n \supset \Sigma^{k_1} \supset \Sigma^{k_1,k_2} \supset \ldots \supset \Sigma^{k_1,k_2,\ldots,k_s}$$

définies par

$$\Sigma^{k_1} = \{ x \in \mathbb{C}^n \mid \dim \operatorname{Ker} T_xF = k_1 \} ,$$

$$\Sigma^{k_1,\ldots,k_r,k_{r+1}} = \{x \in \Sigma^{k_1,\ldots,k_r} \mid \dim \operatorname{Ker} T_x(F|\Sigma^{k_1,\ldots,k_r}) = k_{r+1}\} ,$$

$$r = 1, 2, \ldots, s-1 .$$

Les dimensions de ces variétés sont calculables explicitement en fonction de n, p, $\underline{k}$ ("formule de Boardman"). Ces dimensions sont $< p$, et strictement décroissantes, sauf lorsque la suite $\underline{k}$ se termine par des 0 , auquel cas la suite de sous-variétés devient stationnaire :

$$\Sigma^{k_1,k_2,\ldots,k_s} \supset \Sigma^{k_1,k_2,\ldots,k_s,0} = \Sigma^{k_1,k_2,\ldots,k_s,0,0} = \ldots$$

($\Sigma^{k_1,k_2,\ldots,k_s,0}$ est l'ouvert dense des points de $\Sigma^{k_1,k_2,\ldots,k_s}$ où la restriction de F est une immersion).

Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{C}^n$, il existe une suite $k_1 \geq k_2 \geq \ldots \geq k_s > 0$ et une seule telle que $x \in \Sigma^{k_1,k_2,\ldots,k_s,0}$. La suite $(k_1, k_2, \ldots, k_s)$ est alors appelée <u>symbole de</u> F <u>au point</u> x.

<u>Calcul algébrique du symbole.</u>

Soit A une algèbre analytique, donnée par une présentation $A = \mathbb{C}\{x_1,\ldots,x_d\} / I$, et donnons nous également un système de générateurs $(f_1,\ldots,f_r)$ de l'idéal I. Pour tout entier $k \geq 0$, notons $\Delta^k I$ l'idéal de $\mathbb{C}\{x_1,\ldots,x_d\}$ engendré par $f_1, \ldots, f_r$ et par tous les déterminants mineurs d'ordre $d-k+1$ de la matrice jacobienne $\|\partial f_j/\partial x_i\|$ (avec la convention $\Delta^k I = I$ si $k \leq \sup(0, d-r)$, et $\Delta^k I = \mathbb{C}\{x_1, \ldots, x_d\}$ si $k > d$). Il est facile de voir que cet idéal $\Delta^k I$ dépend seulement de l'idéal I (et pas du choix des générateurs). On l'appelle <u>extension jacobienne à l'ordre</u> k de l'idéal I. On vérifiera aussi que l'algèbre quotient $\mathbb{C}\{x_1,\ldots,x_d\}/\Delta^k I$ dépend seulement de l'algèbre A, et pas du choix de la présentation : nous la noterons $\nabla^k A$, et nous l'appellerons <u>quotient jacobien à l'ordre</u> k <u>de l'algèbre</u> A.

On remarquera que si $k < k'$, $\Delta^k I \subset \Delta^{k'} I$, de sorte que les divers quotients jacobiens de A forment une suite d'épimorphismes d'algèbres $A = \nabla^0 A \longrightarrow \nabla^1 A \longrightarrow \nabla^2 A \longrightarrow \ldots$. Le dernier $\nabla^k A$ qui soit différent de zéro est appelé <u>quotient jacobien critique de</u> A. En itérant l'opération "quotient jacobien critique", on associe à toute algèbre analytique A une suite canonique d'épimorphismes d'algèbres

$$A \longrightarrow \nabla^{k_1} A \longrightarrow \nabla^{k_2}\nabla^{k_1} A \longrightarrow \ldots \longrightarrow \nabla^{k_s} \ldots \nabla^{k_2}\nabla^{k_1} A \longrightarrow \ldots$$

(où chaque algèbre est définie comme le quotient jacobien critique de la précédente). La suite stationne (caractère noethérien de A) et se termine nécessairement par des algèbres régulières (les seules qui soient égales à leur quotient jacobien critique). En particulier, si A est l'algèbre d'un germe d'espace analytique à singularité isolée, les quotients jacobiens critiques successifs forment une suite d'algèbres analytiques artiniennes (c. à d. de dimension zéro) qui finit par stationner à

$$\ldots \xrightarrow[(k_s>0)]{\nabla^{k_s}} \nabla^{k_s} \ldots \nabla^{k_2} \nabla^{k_1} A = \mathbb{C} \xrightarrow{\nabla^{0}} \mathbb{C} \xrightarrow{\nabla^{0}} \mathbb{C} \longrightarrow \ldots$$

Théorème de Boardman (suite) [6]

Si A est l'algèbre analytique fibre d'un germe d'application stable F, la suite de nombres $(k_1, k_2, \ldots, k_s)$ définie ci-dessus est le symbole de F à l'origine. De plus, pour tout $r \leq s$, $\nabla^{k_r} \ldots \nabla^{k_2} \nabla^{k_1} A$ est l'algèbre analytique de l'intersection $\Sigma^{k_1 \ldots k_r} \cap F^{-1}(0)$ (intersection de la variété lisse réduite $\Sigma^{k_1 \ldots k_r}$ avec la fibre de F).

Multiplicités jacobiennes.

Tous les exemples connus semblent accréditer l'idée que les symboles sont des invariants topologiques, autrement dit :

CONJECTURE : Si deux germes d'applications analytiques stables F et $G : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^p$ sont topologiquement équivalents, ils ont même symbole.

On sait par contre que la réciproque de cette conjecture est fausse : les symboles ne suffisent pas à caractériser la topologie des applications stables (cf. exemples ci-dessous). Nous allons introduire des invariants numériques plus fins que les symboles, les multiplicités jacobiennes.

Soit B une algèbre analytique, I un idéal de définition de B (c. à d. un idéal tel que B/I soit artinienne). Un résultat classique de Samuel affirme que $\dim_{\mathbb{C}} B/I^m$ est asymptotiquement équivalent, pour m grand, à

$$e(I)\ \frac{m^d}{d!}$$

où d est la dimension de B, et $e(I)$ est un entier appelé <u>multiplicité de l'idéal</u> I.

C'est cette notion algébrique de multiplicité qui sert à définir, en géométrie analytique, la <u>multiplicité</u> $\nu_x(X)$ <u>d'un espace analytique</u> X <u>en un point</u> x :

$$\nu_x(X) = e(M_x)$$

où M_x est l'idéal maximal de l'anneau local de X en x.

Nous allons faire un autre usage de cette notion, en remarquant que si A est une algèbre analytique <u>artinienne</u> donnée par une présentation $A = R/I$ (R algèbre régulière), la multiplicité $e(I)$ ne dépend que de A et pas de la présentation : cela peut se montrer en remarquant que si $R' = R\{x\}$ est l'algèbre analytique régulière déduite de R par l'adjonction d'une indéterminée x, cet x est un "élément superficiel" - dans la terminologie de Samuel - de l'idéal $I' = IR' + xR'$, de sorte que d'après un résultat de Samuel ([7], Chap. II § 5.c), $e(I') = e(I)$.

Nous noterons donc $\epsilon(A)$ cette multiplicité $e(I)$, que nous appellerons <u>multiplicité ambiante</u> de l'algèbre artinienne A.

<u>THEOREME</u> : Soit $F : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^p$ un germe d'application analytique stable, et notons A l'algèbre analytique de sa fibre. Alors les multiplicités ambiantes des quotients jacobiens critiques itérés de A sont égales aux multiplicités (géométriques) des images des variétés de Boardman :

$$\epsilon(\nabla^{k_r} \ldots \nabla^{k_2} \nabla^{k_1} A) = \nu_0(F(\Sigma^{k_1,k_2,\ldots,k_r})) ,$$

$$r = 1,2, \ldots, s , \ (k_1, k_2, \ldots k_s) = \text{symbole de } F .$$

N.B. : L'application F définit un morphisme fini donc localement propre de $\Sigma^{k_1, \ldots, k_r}$ dans $\mathbb{C}^p$; donc le germe de l'image $F(\Sigma^{k_1, \ldots, k_r})$ au point 0 (origine de $\mathbb{C}^p$) est un germe d'espace analytique (théorème de Remmert) ; ν_0 désigne la multiplicité de ce germe à l'origine.
Le théorème ci-dessus se déduit du théorème de Boardman grâce à un théorème de Samuel ([7], Chap. II § 5f), en remarquant que l'application $F|\Sigma^{k_1, \ldots, k_r}$ est biméromorphe sur son image (un point "générique" de l'image ne provient que d'un seul point de $\Sigma^{k_1, \ldots, k_r}$) .

L'intérêt de ce théorème est renforcé par un résultat d'Hironaka [8], d'après lequel toute stratification analytique régulière au sens de Whitney a la propriété d'équimultiplicité le long des strates : l'adhérence de chaque strate a une multiplicité constante le long de chaque strate qu'elle contient. Si donc la stratification de Thom est régulière au sens de Whitney et "respecte les symboles", elle doit aussi respecter les "multiplicités jacobiennes critiques" : non seulement le symbole $(k_1, \ldots , k_s)$ devra rester constant le long de chaque strate, mais aussi les multiplicités ambiantes $\epsilon(\nabla^{k_r} \ldots \nabla^{k_1} A)$ $(r = 1, 2, \ldots , s)$.

On notera que les multiplicités ambiantes qui interviennent ici sont celles des quotients jacobiens critiques itérés de A , et que nous ne savons rien dire - pour le moment - des multiplicités ambiantes des quotients jacobiens non critiques ; il serait pourtant bien intéressant de savoir si elles aussi sont des invariants topologiques.

Remarque sur la multiplicité ambiante $\epsilon(A)$, lorsque F est un morphisme fini $(\mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^p , n \leq p)$.

$\boxed{\text{Cas } n = p}$

A est l'algèbre analytique d'une intersection complète, de sorte que *)

$\epsilon(A) = \dim_{\mathbb{C}} A =$ degré du revêtement défini par F .

$\epsilon(A)$ est donc un invariant topologique.

$\boxed{\text{Cas } n < p}$

On peut voir que l'application F est elle aussi biméromorphe sur son image, et le théorème de Samuel déjà utilisé permet d'en conclure que

$$\epsilon(A) = \nu_0(F(\mathbb{C}^n)) .$$

$\epsilon(A)$ est donc constante sur chaque strate d'une stratification régulière au sens de Whitney.

Le nombre μ de Milnor comme multiplicité jacobienne .

Dans le cas particulier où A est l'algèbre analytique d'un germe d'hypersurface à singularité isolée $(A = \mathbb{C}\{x_1, \dots , x_d\}/(f)$, le quotient jacobien critique de A est $\nabla^d A = \mathbb{C}\{x_1, \dots , x_d\}/\Delta^d(f)$, $\Delta^d(f) = (f, f'_{x_1} , \dots , f'_{x_d})$, qui correspond à la variété de Boardman $\Sigma^d = \{x \in \mathbb{C}^n | T_x F$ non surjective$\}$ (ensemble critique de F). $F(\Sigma^d)$ est alors une hypersurface de $\mathbb{C}^p$, le "lieu discriminant" ou ensemble des valeurs critiques de F . La multiplicité de ce lieu discriminant admet une interprétation homologique : c'est le nombre de "cycles évanouissants" de l'hypersurface $(f = 0)$ dont on est parti, nombre noté μ par Milnor [9]

*) On utilise le lemme suivant ([7], Chap. II § 5c) : si I , idéal de définition d'une algèbre analytique B , est engendré par exactement d éléments (d = dimension de B) , alors $e(I) = \dim_{\mathbb{C}} B/I$.

D'après notre théorème, la <u>multiplicité jacobienne</u> $\varepsilon(\nabla^d A)$ <u>est donc égale au nombre</u> μ <u>de Milnor.</u>*)

Indiquons, à titre d'amusement, comment on peut retrouver algébriquement ce résultat.

Par définition, $\varepsilon(\nabla^d A) = e(\Delta^d(f))$.

Notons J l'idéal de $\mathbb{C}\{x_1, \dots, x_d\}$ engendré par $(f'_{x_1}, \dots, f'_{x_d})$. On a $\Delta^d(f) = (f) + J$. Or on peut montrer que l'élément f est <u>entier sur l'idéal</u> J , c. à d. satisfait à une équation $f^r + a_1 f^{r-1} + a_2 f^{r-2} + \dots + a_r = 0$, avec $a_i \in J^i$ (c'est la traduction algébrique d'une "inégalité de Łojasiewicz" $|f(x)| \leq C \,\|\mathrm{grad}\, f(x)\|$) . De cette dépendance intégrale de f sur J , on déduit par un calcul algébrique très facile que $e((f) + J) = e(J)$: "asymptotiquement", tout se passe comme si f appartenait à J . Or l'idéal de définition J dans l'anneau $\mathbb{C}\{x_1, \dots, x_d\}$ est engendré par exactement d éléments, de sorte que d'après le lemme de Samuel déjà utilisé

$$e(J) = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\{x_1, \dots, x_d\}/J \ .$$

Ce dernier nombre n'est autre que l'expression algébrique bien connue du nombre μ de Milnor, C.Q.F.D.

<u>EXEMPLES.</u>

1. <u>Ombilic parabolique.</u>

$A = \mathbb{C}\{x,y\}/(f_o)$, $f_o = x^2y + y^4$

$$\Delta^2(f_o) = (f_o, \frac{\partial f_o}{\partial x}, \frac{\partial f_o}{\partial y}) = (xy, x^2 + 4y^3)$$

$$\Delta^2 \Delta^2(f_o) = \Delta^2(f_o) + (\frac{\partial^2 f_o}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f_o}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f_o}{\partial y^2}) \qquad = (x, y) \ .$$

---

*) Il serait intéressant de savoir si les autres multiplicités jacobiennes admettent elles aussi des interprétations homologiques.

Le symbole est donc (2,2) .

Le déploiement universel de f_o peut s'écrire

$$F : \mathbb{C}^6 \longrightarrow \mathbb{C}^5$$

$$\begin{matrix} x, y, & f(x, y, u, v, s, t) \\ u, v, s, t & u, v, s, t \end{matrix}$$

avec

$$f(x, y, u, v, s, t) = y^4 + uy^3 + vy^2 + (x^2 + s)y + tx \ .$$

Pour u, v, s, t fixés, l'extension jacobienne $\Delta^2\ \Delta^2(f)$ s'écrit

$$\Delta^2\ \Delta^2(f) = (f, f'_x, f'_y, f''_{x^2}, f''_{xy}, f''_{y^2}) =$$

$$= (x, y, v, s, t) \ .$$

La variété de Boardman $\Sigma^{2,2,0}$ (ensemble des points de symbole (2,2)) est donc l'axe des u $(x = y = v = s = t = 0)$.

La suite des extensions jacobiennes critiques itérées, en un point de l'axe des u , est donc

$(f) \subset \Delta^2(f) \subset \Delta^2\ \Delta^2(f)$ = idéal maximal.

Calculons la multiplicité de $\Delta^2(f)$ en un point de l'axe des u . Tous calculs faits, on trouve

$$\Delta^2(f) = (f, f'_x, f'_y) = (y^4 + uy^3, xy, 4y^3 + 3uy^2 + x^2)$$

$$c(\Delta^2(f)) = c(f, f'_x, f'_y) = c(f'_x, f'_y) =$$

$$= c(xy, 4y^3 + 3uy^2 + x^2) =$$

$$= \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\{x,y\}/(xy, 4y^3 + 3uy^2 + x^2)$$

$$= \begin{cases} 4 \text{ pour } u \neq 0, \ u \text{ petit} \\ 5 \text{ pour } u = 0 \ . \end{cases}$$

L'invariant $c(\Delta^2(f))$ (nombre μ de Milnor) permet donc de distinguer l'origine parmi tous les points de symbole (2,2). En fait, les topologues savent bien qu'au voisinage de l'origine (singularité baptisée "ombilic parabolique"), les autres points de $\Sigma^{2,2,0}$ sont d'un type topologique différent, baptisé "ombilic ordinaire" (ombilic "elliptique" ou"hyperbolique" dans le cas réel).

2. <u>Singularité de transition de Whitney.</u>

$A = \mathbb{C}\{x,y\}/I_0$, $I_0 = (xy,\ x^2 + y^3)$

La matrice jacobienne s'écrit $\begin{array}{|c|c|} \hline y & x \\ \hline 2x & 3y^2 \\ \hline \end{array}$

de sorte que $\Delta^2 I_0 = (x,y)$.

<u>Le symbole est donc</u> (2) .

Le déploiement universel peut s'écrire

$$F : \mathbb{C}^5 \longrightarrow \mathbb{C}^5$$

$$\begin{array}{ll} x,\ y, & xy,\ x^2 + y^3 + ty^2 + ux + vy, \\ t,\ u,\ v & t,\ u,\ v \end{array}$$

Pour t, u, v fixés, l'extension jacobienne $\Delta^2 I$ de l'idéal $I = (xy,\ x^2 + y^3 + ty^2 + ux + vy)$ s'écrit $\Delta^2 I = (x,\ y,\ u,\ v)$.

<u>La variété de Boardman</u> $\Sigma^{2,0}$ (ensemble des points de symbole (2)) <u>est donc l'axe des</u> t $(x = y = u = v = 0)$.

Calculons la multiplicité de I en un point de l'axe des t . On trouve

$$e(I) = e(xy,\ x^2 + y^3 + ty^2) = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\{x,y\}/(xy,\ x^2 + y^3 + ty^2)$$

$$= \begin{cases} 4 \text{ pour } t \neq 0 \text{ , } t \text{ petit} \\ 5 \text{ pour } t = 0 \text{ .} \end{cases}$$

L'invariant $e(I)$ (multiplicité ambiante de la fibre du morphisme fini F) permet donc de distinguer l'origine parmi tous les points de symbole (2).

En fait, on peut montrer que l'origine a la particularité suivante (Whitney ; voir aussi exercice ci-dessous) : <u>c'est le seul point de</u> $\Sigma^{2,0}$ <u>qui soit adhérent à</u> $\Sigma^{1,1,1,1,0}$.

Exercice : Dans l'exemple ci-dessus, le lieu des points de la source où la multiplicité ambiante de la fibre vaut 5 est constitué par la courbe donnée paramétriquement par :

$x = s^3$, $y = s^2$, $t = -5s^2$, $u = -5s^3$, $v = 10s^4$.

Le complémentaire de l'origine dans cette courbe est la variété $\Sigma^{1,1,1,1,0}$.

QUESTIONS EN SUSPENS.

Outre les questions déjà mentionnées, signalons les suivantes (la 2^e et la 3^e sont des versions très édulcorées de la $1^{ère}$) :

1°) En admettant que les symboles et les multiplicités jacobiennes (critiques et non critiques) soient constants sur chaque strate de Thom, suffisent-ils à caractériser la stratification de Thom, au moins localement ?

2°) Les ensembles d' "équimultiplicité jacobienne" sont-ils des sous-variétés de l'espace source ? Si oui, quel genre de stratification définissent-ils ?

3°) L' "équimultiplicité jacobienne" implique-t-elle l'équivalence topologique des fibres ?

La réponse à la 3^e question est oui dans le cas des courbes planes : en effet, on sait que la constance du nombre μ de Milnor suffit à assurer l'équivalence topologique des membres d'une famille analytique des courbes planes (Lê Dung Trang [10] ; la démonstration est beaucoup plus facile si l'on sait par ailleurs que la multiplicité des courbes est constante, ce qui est bien le cas si le symbole est constant).

4°) Il est très facile de voir que même pour les déformations de courbes planes la constance de μ et celle du symbole sont deux phénomènes indépendants : μ peut varier alors que le symbole reste constant (exemple 1), et inversement. Mais <u>si</u> μ <u>et le symbole sont tous deux constants</u>, les multiplicités jacobiennes critiques itérées autres que μ peuvent-elles varier ? Je n'en ai pas trouvé d'exemple.

[1] R. THOM . Stabilité structurelle et morphogenèse (livre à paraître)

. Topological models in Biology. Topology, 8 (1969) 313-335

. Modèles mathématiques de la morphogenèse, Séminaire I.H.E.S. 1970-1971.

[2] J. MATHER Stability of C^{∞} mappings.

I. The division theorem. Ann. of Math. 87 (1968) 89-104

II. Infinitesimal stability implies stability. Ann. of Math. 89 (1969) 254-291

III. Finitely determined map-germs. Publ. Math. I.H.E.S. 35 (1968) 127-156

IV. Classification of stable germs by R-algebras. Publ. Math. I.H.E.S. 37 (1969) 223-248

V. Transversality. Advances in Math. 4 (1970) 301-336

VI. The nice dimensions. Proceedings of Liverpool Singularities Symposium I (1971) 207-253 (Lecture Notes in Mathematics 192)

[3] F. PHAM Remarque sur l'équisingularité universelle. Prétirage Fac. Sci. Nice (Mathématiques), Décembre 1970

[4]. R. THOM Ensembles et morphismes stratifiés. Bull. Amer. Math. Soc. 75, 1 (1969) 240-284

. J. MATHER Notes on topological stability (Preprint, Harvard University, July 1970).

[5]. R. THOM Les singularités des applications différentiables. Ann. Inst. Fourier 6 (1955-1956) 43-87

[6] J.M. BOARDMAN Singularities of differentiable maps. Publ. Math. I.H.E.S. 33 (1967) 383-419

[7] P. SAMUEL Algèbre locale. Mémorial des Sc. Math. Fasc. CXXIII (1953)

[8] H. HIRONAKA Normal cones in analytic Whitney stratifications. Publ. Math. I.H.E.S. 36 (1969) 127 - 138 (Volume dédié à O. Zariski).

[9] J. MILNOR Singular points of complex hypersurfaces, Annals of Math. Studies 61 (Princeton, 1968)

[10] LÊ DUNG TRANG Exposés au Séminaire Norguet 1970-71.

En outre, on recommande vivement la lecture de

V. ARNOLD Singularités des applications différentiables (en Russe) Ousp. Mat. Naouk 13, 1(139) (1968) 3-44,

ainsi que des articles de C.T.C. WALL résumant la théorie de Mather dans les Proceedings of Liverpool Singularities Symposium I (1971) Lecture Notes in Math. 192).

Pour la question des multiplicités jacobiennes, je remercie C. HOUZEL pour d'encourageantes discussions, et F. EL ZEIN qui m'a montré à quelle page du livre de Samuel se trouvaient les résultats requis.

Presque tous les exemples m'ont été suggérés par B. MORIN, à qui je suis très reconnaissant de m'avoir fait comprendre (entre autres) le contre-exemple de Mather.

Enfin, je remercie l'auditoire de la R.C.P. n° 25 grâce à qui j'ai pu corriger un certain nombre de fautes d'une première rédaction.