YUVAL NE'EMAN

Commutateurs de courants locaux et termes à gradient dans une algèbre de Lie

Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg - RCP25, 1971, tome 13
« Conférences de B. Malgrange, Y. Ne'eman et F. Pham », , exp. nº 2, p. 1-31
<http://www.numdam.org/item?id=RCP25_1971__13__A2_0>

COMMUTATEURS DE COURANTS LOCAUX ET

TERMES A GRADIENT DANS UNE ALGEBRE DE LIE.

Yuval NE'EMAN*

Institut des Hautes Etudes Scientifiques
91 - Bures-sur-Yvette, France.

Conférence donnée à Strasbourg au cours de la Douzième Rencontre entre Physiciens Théoriciens et Mathématiciens dans le cadre de la R.C.P. n° 25 du Centre National de la Recherche Scientifique du 1er au 3 juin 1971.

* Adresses permanentes : Université de Tel-Aviv, Tel-Aviv et Université du Texas, Austin.

SOMMAIRE

Nous étudions d'abord la structure mathématique des termes en $\frac{\partial}{\partial x_k} \delta^3(x - y)$ de provenance algébrique dans les algèbres de Lie infinies définies par le système des courants. Nous posons ensuite un ansatz algébrique pour l'existence de ces termes dans une extension de l'algèbre des courants de quarks, où les courants même forment une algèbre $U(6) \times U(6)$ local. Nous prouvons que les termes à gradient ne peuvent point représenter une extension centrale de cet $U(6) \times U(6)$ local. Nous construisons l'extension "minimale" dans le cadre d'une algèbre de Lie finie (locale) ; c'est un système unique qui exploite $U(12)$. Nous prouvons qu'il ne correspond pas aux données physiques, et que seule une extension qui contiendrait aussi des éléments dépendant des équations de mouvement (des dérivées des densités de $U(12)$ par le temps) pourrait résoudre le problème.

Introduction.

Les résultats, surtout négatifs, quant à la physique, présentés dans cette conférence représentent des travaux [1-4] faits depuis juillet 1970 en collaboration avec Rui V. Mendès (LFEN, Portugal), Luis Gomberoff (Tel-Aviv) et un groupe de mathématiciens américains qui se trouvaient à Tel-Aviv l'été dernier : L. Ehrenpreis (Yeshiva), B. Kostant (M.I.T.) et surtout S. Sternberg (Harvard) qui parlait les deux langues ("mathématiçois et physiçois") ce qui nous a permi de nous entendre.

On connait le programme de Gell-Mann, qui a proposé l'emploi des densités* de charge et de courant $j^{\mu}_{a}(x)$ comme variables fondamentales pour les hadrons [5] , jouant à peu près le même rôle que les "p" et "q" de la mécanique quantique. L'analogue de l'algèbre de Heisenberg est ici l'algèbre "locale" et simultanée ($x^o = y^o$) de ces courants ; c'est une algèbre de Lie infinie. Par exemple, les composantes "temps" sont supposées donner une algèbre de SU(3) à chaque point de l'espace-temps

$$[V^o_a(x), V^o_b(y)]_{x^o=y^o} = i\, f_{abc}\, \delta^3(x-y)\, V^o_c(x) \tag{1}$$

représentant la solution la plus simple permettant de retrouver pour les intégrales sur tout l'espace

$$F_a(t) = \int d^3x \;\; V^o_a(x) \tag{2}$$

l'algèbre de SU(3), bien connue pour avoir donné la classification des hadrons et leur symétrie approximative :

---

* Les indices grecs vont de 0 à 3 et représentent le temps et l'espace ; les indices latins $i,j,\ldots m$ vont de 1 à 3 et représentent l'espace ; de même la notation $\vec{x},\vec{y}$ indique des vecteurs dans l'espace (3 dimensions). Les indices latins $a,b,\ldots h$ vont de 1 à 8 et représentent les coordonnées de l'algèbre de Lie SU(3) . Ses constantes de structure sont notées f_{abc} .

$$[F_a(t), F_b(t)] = i\, f_{abc} F_c(t) \qquad (3)$$

Les résultats que nous connaissons sur les hadrons dans le domaine des symétries - classification, couplages, règles d'intensité et règles de somme nous proviennent surtout de (3) et de ses généralisations à SU(3) x SU(3), SU(6) , $SU(6)_w$ etc , mais on connait quand même des règles de somme vérifiant (1) à 15 % près (règle de Fubini-Gell Mann-Dashen, règle de Cabibbo-Radicati etc..) [6,7].

Si l'algèbre des courants, y compris les composantes spatiales, est à la base du système des hadrons, elle pourrait par exemple remplir le rôle [8,9] d'une "Algèbre Génératrice du Spectre" (AGS) qui expliquerait l'existence de représentations de SU(6) ⊗ L etc. Cette algèbre contient* la généralisation de (3), l'algèbre des intégrales spatiales, comme une sous-algèbre, sur laquelle il faudra donc en réduire les représentations.

C'est là que se situe la question des termes $\partial^k \delta^3(x-y)$ à gradients de fonctions "delta" spatiales. Ceux-ci apparaissent au moins dans certains commutateurs entre composantes "temps" et "espace". L'algèbre indiquée par le modèle des quarks n'en tient pas compte directement. Si l'on passe tout de suite aux éléments de matrice entre états à moments $p_z \to \infty$ infinis (la proposition de Dashen et Gell Mann [10]), ils disparaissent. Evidemment, ceci ne permettrait pas l'emploi de l'algèbre entre états au repos, etc. En plus, si l'on veut construire d'abord les représentations de l'algèbre [11,12, 13] , et puis passer à la limite $p_z \to \infty$, il faut bien connaitre l'algèbre générale.

---

* Il suffit de passer aux transformées de Fourier dans l'espace des moments ; quant le transfer de moment tend vers zéro, on retrouve les charges globales.

La question a été étudiée depuis 1966 par J. Johnson et F. Low, S. Okubo, D. Gross et R. Jackiw et plusieurs autres physiciens [14,15]. Employant les méthodes de la théorie des champs, ils ont tous trouvé que les termes à gradient n'obéissent pas à l'identité de Jacobi ; l'algèbre complète des courants ne serait donc pas une algèbre de Lie. L'explication qui en est donnée se rattache au problème de la définition d'un double commutateur (chaque terme dans la formule de Jacobi) comme limite de densités à trois points différents dans le temps ($t+\varepsilon$, t, $t-\varepsilon$ etc...). Toutefois, même si cela représente la réalité physique, on perdrait en tout état de cause la notion d'une algèbre de Lie pour le système des courants.

Notre programme représente l'inversion de ces arguments. Nous partons d'un ansatz qui suppose que le <u>système complet des courants et termes à gradient forme une algèbre de Lie infinie</u>, et nous étudions les caractéristiques des termes à gradient capables d'obéir aux conditions algébriques requises par cet ansatz*.

Comme on le verra, nous trouvons d'abord deux théorèmes négatifs,

1) Il n'existe point d'extension par un élément central de l'algèbre $U(6) \times U(6)$ locale des composantes des courants vectoriels et axial-vectoriels, pouvant répondre aux données physiques sur l'algèbre complète des courants et termes à gradient. (Ce résultat était déjà indiqué en fait dans l'étude de F. Buccella et al [15]).

2) Il n'existe point d'extension dans le cadre d'une algèbre de Lie finie contenant $U(6) \times U(6)$ et supposée locale, sans faire appel à des éléments nécessitant la connaissance des équations du mouvement (ou de leurs relations de commutation avec un Hamiltonien).

On trouve aussi un modèle unique d'extension dans $U(12)$ moyennant donc l'introduction d'un ansatz traitant des dérivées de ces densités par le temps.

---

* L'article de F. Buccella et al [15] avait déjà abordé le problème dans cet esprit.

Sommaire de la Preuve d'Existence des Termes à Gradient.

Ces termes, connus sous le nom de "termes de Schwinger" furent découverts par T. Goto et T. Imamura [16] en 1955 et par Schwinger [17] en 1959. L'esquisse de preuve que nous en donnons (Okubo [18]) applique les méthodes plus modernes des représentations spectrales (Källen, Lehmann) et ne dépend pas de la conservation du courant.

Partant de l'invariance de Lorentz, de la positivité de l'énergie et de la définition du vide, on trouve pour la valeur moyenne sur le vide du commutateur de deux courants la représentation spectrale suivante :

$$\langle o|[j_a^\mu(x),j_b^\nu(y)]_{x_o=y_o}|o\rangle = \delta_{ab}\int_0^\infty dm^2 \;\{g^{\mu\nu}\rho_1(m^2) - \rho_2(m^2)\frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\}\;\Delta(x-y;m^2)_{x_o=y_o} \tag{4}$$

où la fonction invariante Δ est donnée par

$$\begin{aligned}\Delta(x-y;m^2) &= \frac{-i}{(2\pi)^3}\int d^4p\;\epsilon(p_o)\;\epsilon(p^2-m^2)e^{-ip(x-y)}\\ &= \frac{-i}{(2\pi)^3}\int d^3p\;(p_o)^{-1}\;e^{i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})}\;\sin p_o(x^o-y^o)\end{aligned} \tag{5}$$

et sa dérivée

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta(x-y;m^2)\Big|_{x^o=y^o=0} = -\delta(\vec{x}-\vec{y}) \tag{6}$$

Nous emploierons quelquefois la notation $\delta^{(3)}(x-y)$.

En passant à l'espace des moments, on trouve

$$\delta_{ab}\{\rho_1(m^2)g^{\mu\nu} + \rho_2(m^2)\;p^\mu p^\nu\} = \frac{1}{(2\pi)^3}\sum_n \delta^{(4)}(p-p_n)\langle o|j_a^\mu(0)|n\rangle\langle n|j_b^\nu(0)|o\rangle \tag{7}$$

où $p^2 = m^2$. En prenant maintenant $\mu = 0$, $\nu = k$,

$$\langle o|[j_a^o(x),j_b^k(y)]_{x_o=y_o}|o\rangle = \delta_{ab}\int_0^\infty d(m^2)\;\rho_2\frac{\partial}{\partial x^k}\frac{\partial}{\partial t}\Delta(\vec{x}-\vec{y},0;m^2) =$$

$$= \delta_{ab}\int_0^\infty dm^2\;\rho_2(m^2)\frac{\partial}{\partial x^k}\delta^{(3)}(x-y) \tag{8}$$

tandis que si l'on prenait simplement un modèle où $j_a^\mu(x) = \frac{1}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu\lambda_a\psi$ avec $\psi(x)$ le champ de quarks, on trouverait zéro pour le cas $a \equiv b$. En prenant $\bar{\psi}$ et ψ à des points différents, on retrouve par la méthode des perturbations un résultat équivalent à (8). Pour un courant conservé, on

trouve
$$m^2\rho_2(m^2) = \rho_1(m^2) \tag{9}$$
mais pour le cas général, on démontre seulement que
$$m^2\rho_2(m^2) \geq \rho_1(m^2) \geq 0 \quad . \tag{10}$$
Le commutateur (8) décrit bien $\langle o|[V_a^o,V_b^k]|o\rangle$ mais aussi $\langle o|[A_a^o,A_b^k]|o\rangle_{x^o=y^o}$ où $A_a^\mu(x)$ est le courant axial-vecteur qui, en général, n'est pas conservé.

Quelques exemples de termes à gradient engendrés algébriquement.

Il y a quand même des modèles où le terme à gradient est engendré algébriquement, et où il se voit donc directement. Dashen et Sharp [19] ont étudié les relations de commutation impliquées par diverses théories, d'où nous tirons les exemples suivants.

(i) Mécanique quantique non-relativiste.

En prenant des bosons ou des fermions, avec $\psi(\vec{x})$ représentant un champ (celui de l'électron par exemple) avec une deuxième quantification, les densités de charge $V^o(\vec{x})$ et de courant $\vec{V}(\vec{x})$ deviennent :
$$V^o(\vec{x}) = \psi^+(\vec{x})\,\psi(\vec{x}) \tag{11a}$$
$$V^k(\vec{x}) = \frac{1}{2i}\,[\psi^+(\vec{x})\,\frac{\partial}{\partial x^k}\,\psi(x) - (\frac{\partial}{\partial x^k}\,\psi^+(\vec{x}))\,\psi(\vec{x})] \tag{11b}$$
et l'on trouve les commutateurs,
$$[V^o(\vec{x}),V^o(\vec{y})] = 0 \tag{11c}$$
$$[V^o(\vec{x}),V^k(\vec{y})] = -i\,\frac{\partial}{\partial x^k}\,\{\delta(\vec{x}-\vec{y})V^o(\vec{x})\} \tag{11d}$$
$$[V^i(\vec{x}),V^j(\vec{y})] = -i\,\frac{\partial}{\partial x^j}\,\{\delta(\vec{x}-\vec{y})V^i(\vec{x})\} + i\,\frac{\partial}{\partial y^i}\,\{\delta(\vec{x}-\vec{y})V^j(\vec{x})\} \tag{11e}$$
(ii) Si l'on introduit un opérateur de spin $\Sigma^i(\vec{x}) = \frac{1}{2}\,\psi^+(\vec{x})\,\sigma^i\,\psi(\vec{x})$ (12a)
on a en plus :
$$[\Sigma^i(\vec{x}),\Sigma^j(\vec{y})] = i\,\epsilon^{ijk}\,\delta(\vec{x}-\vec{y})\Sigma^k(\vec{y}) \tag{12b}$$
$$[V^o(\vec{x}),\Sigma^i(\vec{y})] = 0 \tag{12c}$$
$$[\Sigma^i(\vec{x}),V^k(\vec{y})] = -i\,\frac{\partial}{\partial x_k}\,\{\delta(\vec{x}-\vec{y})\,\Sigma^i(\vec{x})\} \tag{12d}$$

(iii) Théorie quantique relativiste du Champ de Quarks*

On peut d'abord construire les 144 densités de l'algèbre locale de U(12), formée par les 72 opérateurs de $[U(6) \times U(6)]$ (local)

$$V_a^{\mu}(x) = \tfrac{1}{2}\,\bar{\psi}(x)\gamma^{\mu}\,\lambda_a\,\psi(x) \quad \text{où} \quad V_a^{o} \sim 1 \otimes 1 \otimes \frac{\lambda_a}{2}\ ,\ V^{k} \sim \gamma_5 \otimes \sigma^{k} \otimes \frac{\lambda_a}{2} \tag{13a}$$

$$A_a^{\mu}(x) = \tfrac{1}{2}\,\bar{\psi}(x)\gamma_5\gamma^{\mu}\,\lambda_a\,\psi(x) \qquad A_a^{o} \sim \gamma_5 \otimes 1 \otimes \frac{\lambda_a}{2}\ ,\ A_a^{k} \sim 1 \otimes \sigma^{k} \otimes \frac{\lambda_a}{2} \tag{13b}$$

(on voit que V_a^{o} et A_a^{k} forment le U(6) diagonal) et les 72 opérateurs formant l'espace d'une représentation $(6,\bar{6}) \otimes (\bar{6},6)$ de cet $[U(6) \times U(6)]_{\gamma_5}$,

$$S_a(x) = \tfrac{1}{2}\,\bar{\psi}(x)\,\lambda_a\,\psi(x) \qquad S_a \sim \beta \otimes 1 \otimes \frac{\lambda_a}{2} \tag{14a}$$

$$P_a(x) = \tfrac{1}{2}\,\bar{\psi}(x)\,\gamma_5\,\lambda_a\,\psi(x) \qquad P_a \sim i\beta\gamma_5 \otimes 1 \otimes \frac{\lambda_a}{2} \tag{14b}$$

$$T_a^{\mu\nu}(x) = \tfrac{1}{2}\,\bar{\psi}(x)[\gamma^{\mu},\gamma^{\nu}]\,\frac{\lambda_a}{2}\,\psi(x) \qquad T_a^{ij} \sim \beta \otimes \tfrac{1}{2}\,\varepsilon^{ijk}\sigma^{k} \otimes \frac{\lambda_a}{2}, \quad T_a^{oi} \sim i\beta\gamma_5 \otimes \sigma^{i} \otimes \frac{\lambda_a}{2} \tag{14c}$$

Remarquons pour mémoire que les commutateurs et les anticommutateurs des S,P,T sont tous des éléments V^{μ} ou A^{μ} de la sous-algèbre $[U(6) \times U(6)]_{\gamma_5}$. Toutes ces densités $D(x,M)$ forment l'algèbre locale de U(12) ; M est une des matrices finies de U(12) : $\{(1,\gamma_5,\beta,\beta\gamma_5) \otimes (1,\vec{\sigma}) \otimes \lambda\}$:

$$[D(x,M),D(y,M')]_{x^o=y^o} = \delta^{(3)}(x-y)D(x,[M,M']) \tag{15}$$

Dans ce genre de théorie des champs du type "orthodoxe", il y a encore des densités formant le terme de l'énergie cinétique

Dans ce genre de théorie des champs du type "orthodoxe", il y a encore les densités formant le terme de l'énergie cinétique

$$Z^{k}(x) = \frac{1}{2i}\left[\psi^{f}(x)\,\frac{\partial}{\partial x_k}\,\psi(x) - \left(\frac{\partial}{\partial x_k}\,\psi^{+}(x)\right)\psi(x)\right] \tag{16}$$

---

* Avec le tenseur métrique (1,-1,-1,-1), $\{\gamma^{\mu},\gamma^{\nu}\} = 2\,g^{\mu\nu}$, $\beta = \gamma^{o} = \beta^{+}$, $\gamma_5 = i\,\gamma^{o}\gamma^{1}\gamma^{2}\gamma^{3} = \gamma_5^{+}$, $\gamma^{k} = (\gamma^{k})^{+}$. Les λ_a sont une base orthogonale : $\tfrac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,\lambda_a\,\lambda_b = \delta_{ab}$ de matrices hermétiques 3 par 3 .

provenant de l'équation de Dirac et correspondant à $\theta^{ok}(x)$, les densités de moment, composantes du tenseur d'énergie-moment. On trouve alors,

$$[D(x,M),Z^k(y)]_{x^o=y^o} = -i\frac{\partial}{\partial x_k}\{\delta^{(3)}(x-y)D(x,M)\} \tag{17a}$$

$$[Z^i(x),Z^j(y)]_{x^o=y^o} = -i\frac{\partial}{\partial x^j}\{\delta^{(3)}(x-y)Z^i(x)\} + i\frac{\partial}{\partial y^i}\{\delta^{(3)}(x-y)Z^j(x)\} \tag{17b}.$$

(iv) Champ scalaire de mésons chargés.

On a

$$V^\mu(x) = i\, e_o[\varphi^*(x)\frac{\partial}{\partial x_\mu}\varphi(x) - \frac{\partial}{\partial x_\mu}\varphi^*(x)\ \varphi(x)] \tag{18a}$$

$$[V^o(x),V^o(y)]_{x_o=y_o} = 0 \tag{18b}$$

$$[V^o(x),V^k(y)]_{x_o=y_o} = 2i\frac{\partial}{\partial x_k}\{S(x)\ \delta^{(3)}(x-y)\} \tag{18c}$$

$$[V^i(x),V^j(x)]_{x_o=y_o} = 0 \tag{18d}$$

On a été obligé d'ajouter l'opérateur

$$S(x) = \varphi^*(x)\ \varphi(x) \tag{18e}$$

$$[S(x),S(y)]_{x_o=y_o} = [S(x),V^o(y)]_{x_o=y_o} = [S(x),V^k(y)]_{x_o=y_o} = 0 \tag{18f}$$

En analysant le système dynamique, on se trouve forcé d'ajouter encore un opérateur pour avoir un système complet. On choisit $\dot{S}(x)$, défini par

$$i[H,S(x)] = \dot{S}(x) \tag{18g}$$

H est P^o, l'Hamiltonien. On trouve,

$$[\dot{S}(x),\dot{S}(y)]_{x_o=y_o} = [\dot{S}(x),V^o(y)]_{x_o=y_o} = 0 \tag{18h}$$

$$[S(x),\dot{S}(y)]_{x_o=y_o} = 2i\ S(x)\delta^{(3)}(x-y) \tag{18i}$$

$$[V^k(x),\dot{S}(y)]_{x_o=y_o} = 2i\ V^k(x)\delta^3(x-y) \tag{18j}$$

Cet exemple représente donc un peu un modèle de notre résultat "négatif" pour les courants de hadrons ; la nécessité d'introduire des opérateurs déterminés par les équations de mouvement ou par les commutateurs de l'Hamiltonien.

(v) Les commutateurs de Lee-Weinberg-Zumino [20].

Introduits en 1967, ils servirent à justifier les règles de somme de

Weinberg. Ils furent aussi employés par H. Sugawara [21] dans sa tentative de réaliser le programme de Gell-Mann en construisant l'Hamiltonien à partir des courants, sans éléments du type (16) essentiels à une théorie des champs. Le modèle LWZ tire ses commutateurs d'une théorie d'un champ vectoriel $\Phi^{\mu}_{a}(x)$ du type Yang-Mills correspondant à une symétrie de jauge locale ; en fait, il faut encore briser cette symétrie en donnant une masse à ce champ, pour trouver ces commutateurs :

$$[V^{o}_{a}(x),V^{o}_{b}(y)]_{x^o=y^o} = i\ f_{abc}\ V^{o}_{c}(x)\ \delta^{(3)}(x-y) \tag{19a}$$

$$[V^{o}_{a}(x),V^{k}_{b}(y)]_{x^o=y^o} = i\ f_{abc}\ V^{k}_{c}(x)\ \delta^{(3)}(x-y) + C\ \delta_{ab}\frac{\partial}{\partial x_k}\ \delta^{(3)}(x-y) \tag{19b}$$

$$[V^{i}_{a}(x),V^{j}_{b}(y)] = 0 \tag{19c}$$

Donnons-nous maintenant une notation plus simple mathématiquement. Nous pouvons d'abord introduire des fonctions d'essai $\Phi(x)$ (comprenant la valeur $\Phi = 1$), de manière à avoir une représentation pour les densités locales de charge SU(3),

$$V^{o}_{a}(\Phi) = \int d^3x\ \Phi(x)\ V^{o}_{a}(x)$$

que nous emploierons beaucoup dans la seconde partie de cet exposé. Pour $\Phi = 1$, nous retrouvons les opérateurs F_a des charges totales de SU(3), dont (3) donne l'isomorphisme avec la représentation adjointe de SU(3). On peut donc écrire pour les densités des composantes temps des courants dans la représentation en Φ , $\{V^{o}_{a}(\Phi)\} = V(F,\Phi)$, un peu comme les $D(M,x)$ de (15).

Pour les composantes spatiales, nous voyons toujours un opérateur différentiel en x , ou mieux, un élément $(\Phi(x)\ \frac{\partial}{\partial x^i})$, donc un champ de vecteurs X^i sur ces fonctions $\Phi(x)$. On voit, dans l'exemple (11a-11e), que ces opérateurs remplissent ici le même rôle que les matrices de SU(3) pour les composantes temps : ils déterminent les relations de commutation, telle (11e). On a donc

$$\{V^{i}_{a}(\Phi)\} = V(f,X^{i}(\Phi))$$

où f_a est une composante d'une représentation de SU(3) : si f se comporte comme la représentation régulière, on aura l'action $[F_a,f_b] = i\ f_{abc}\ f_c$, ou plus généralement $(F \wedge f)$ tandis que pour tout autre représentation on aurait

$D(F_a)\ f_b \longrightarrow f_c$.

La synthèse de Ehrenpreis-Kostant-Sternberg.

La structure de ces algèbres de courant avait déjà intéressé R. Hermann [22] . Le résultat d'un séminaire commun entre les mathématiciens cités ci-dessus et les physiciens théoriciens de l'Université de Tel Aviv fut de mettre les premiers sur les traces d'une structure à laquelle ils trouvèrent beaucoup d'intérêt [23] . Ils ont depuis continué à l'étudier en profondeur, mais j'en donnerai un aperçu représentant ce que j'avais compris l'été dernier.

Nous travaillons dans deux systèmes qui commutent entre eux, i=1,2. Soit L_i une algèbre de Lie, M_i une algèbre commutative. On nous donne une représentation de L_i comme dérivations des M_i , donc une application :

$$L_i \times M_i \longrightarrow M_i \tag{20a}$$

envoyant X,m en Xm , avec (X,Y en L_i ; m,n en M_i)

$$X(mn) = (Xm)n + m(Xn) \tag{20b}$$

$$[X,Y]m = X(Ym) - Y(Xm) \tag{20c}$$

On nous donne aussi une application équivariante

$$M_i \times L_i \longrightarrow L_i \tag{21a}$$

envoyant m,X en mX ; l'équivariance est représentée par la condition

$$[mX,Y] = m[X,Y] - (Ym)X \quad . \tag{21b}$$

Ce qui est spécial dans ce système c'est que

$$\bar{L} = L_1 \otimes M_2 + L_2 \otimes M_1 \ , \ \bar{M} = M_1 \otimes M_2 \tag{22a}$$

sont encore un système (L,M) comme (L_i,M_i), une algèbre de Lie $\bar{L}$ une algèbre commutative $\bar{M}$. Il existe en fait un homomorphisme de $\bar{L}$ avec l'algèbre de Lie des dérivations de $\bar{M}$, donnée par

$$(X_1 \otimes m_2 + X_2 \otimes m_1)(n_1 \otimes n_2) = X_1n_1 \otimes m_2n_2 + m_1n_1 \otimes X_2n_2 \tag{22b}$$

On peut vérifier que $\bar{M}$ est un module sur $\bar{L}$ et que l'application qui envoie

$n_1 \otimes n_2$, $X_1 \otimes m_2 + X_2 \otimes m_1$ en $n_1X_1 \otimes n_2m_2 + n_1m_1 \otimes n_2X_2$ est équivariante.

Tous les exemples cités ci-dessus s'expliquent par cette construction. On identifie toujours V^o avec l'élément de $L_1 \otimes M_2$, et V^k avec l'élément de $L_2 \otimes M_1$. Les commutateurs deviendront

$$[X_1 \otimes m_2, Y_1 \otimes n_2] = [X_1, Y_1] \otimes m_2n_2 \tag{23a}$$

$$[X_1 \otimes m_2, Y_2 \otimes n_1] = -n_1X_1 \otimes Y_2m_2 + m_2Y_2 \otimes X_1n_1 \tag{23b}$$

$$[X_2 \otimes m_1, Y_2 \otimes n_1] = [X_2, Y_2] \otimes m_1n_1 \tag{23c}$$

On vérifie que l'identité de Jacobi est obéie.

Pour bien voir l'application, nous allons étudier l'exemple du modèle LWZ de (19a-c).

Pour la composante temps $V_a^o(\Phi)$, on trouve par (19a)

$$[V_a^o(\Phi_1), V_b^o(\Phi_2)] = i\ f_{abc}\ V_c^o(\Phi_1\Phi_2) \tag{24a}$$

ou, dans notre notation sans indices,

$$[V(F,\Phi), V(G,\psi)] = V([F,G],\Phi\psi)$$

Donc $L_1 = \{F\}$; nous verrons que ce sera cette fois l'algèbre du groupe des symétries internes $U(2)$ ou $U(3)$, et $M_2 = \{\Phi\}$, l'algèbre des fonctions d'essai. Pour les composantes spatiales $V_a^i(x)$ données ici par $L_2 \otimes M_1$, nous avons $M_1 = \{f\}$, un espace vectoriel isomorphe à la représentation adjointe de $SU(2)$ ou $SU(3)$. On voit que notre L_1 a une dimension de plus que M_1 . On définit aussi les produits $M_1 \times M_1$ et $M_1 \times L_1$. Notre définition envoie le produit dans le centre de l'algèbre :

$$fG = (f \circ g)1$$

$$fg = 0$$

où $(f \circ g)$ est le produit scalaire (la trace).

Pour $L_2 = \{X\}$, on a les champs de vecteurs $\Phi(x) \frac{\partial}{\partial x^i} = X^i$. Les produits $\Phi\psi$ et ψX sont conventionnels. Nous avons donc pour les commutateurs

$$[V_a^o(\Phi_1),V_b^k(\Phi_2)] = -C\ \delta_{ab}(\int d^3x\ \Phi_1 \frac{\partial}{\partial x^k}\Phi_2) + if_{abc}\ V_c^k(\Phi_1\Phi_2) \tag{24b}$$

$$[V_a^i(\Phi_1),V_b^j(\Phi_2)] = 0 \tag{24c}$$

les expressions

$$[V(F,\Phi),V(g,Y)] = -V((g \circ f)1,Y\Phi) + V(F\wedge g,\Phi Y)$$

$$[V(f,X),V(g,Y)] = V(fg,[X,Y]) = 0 .$$

On voit que le terme à gradient $n_1X_1 \otimes Y_2m_2$ ressemble ici à une composante-temps isoscalaire ou avec index $a=0$ dans les coordonnées d'un nonet $8+1$ de $SU(3)$; mais il n'y a pas d'homologues spatiales. On peut étudier de la même manière tous les exemples que nous avons présentés. Pour le modèle non relativiste de (11) on prend M_1 = nombres réels ou complexes, L_1 = algèbre de Lie à une dimension, agissant trivialement $X_1m_1 = 0$, et en même temps M_2 = fonctions C_∞ , L_2 = champs de vecteurs sur ces fonctions.

Le système (L,M) satisfaisant ces axiomes (un "système infinitésimal d'imprimivité") a donc un "produit" de (L_1,M_1) et (L_2,M_2) qui est notre $(\bar{L},\bar{M})$. Exemple :

M_i = fonctions c_∞ sur la variété différentiable V_i $(i=1,2)$

L_i = champs de vecteurs sur V_i

on trouve $M_1 \hat{\otimes} M_2$ (le produit tensoriel <u>complet</u>) = l'ensemble des fonctions sur $V_1 \otimes V_2$, et justement $L_1 \hat{\otimes} M_2 + L_2 \hat{\otimes} M_1$ = l'algèbre de tous les champs de vecteurs sur $V_1 \otimes V_2$.

<u>Inexistence (physique) de l'Extension centrale de</u> $\{U(6) \times U(6)\}_{\gamma_5}$

Nous revenons maintenant à notre problème physique : trouver une algèbre de Lie contenant le système $[U(6) \times U(6)]_{\gamma_5}$ local des courants des équations (13a)(13b) et en plus les termes à gradient. Nous essayons d'abord la solution la plus simple, une extension par un élément du centre. C'est ce que les physiciens appellent un "c-number Schwinger term", comme celui qui apparaît dans le modèle LWZ (équation 19b) où $[U(6) \times U(6)]_{\gamma_5}$ local est remplacé par une contraction (voir 19c) [24]. Remarquons que cette fois nous rentrons dans le cadre du programme basé sur les <u>courants</u>, c'est-à-dire que nous n'aurons pas affaire aux opérateurs Z^k de (16)-(17).

Notre résultat est un théorème négatif :

"Il n'existe pas d'extension centrale de $[U(6) \times U(6)]_{\gamma_5}$ locale satisfaisant les données physiques représentées par le commutateur (8) de Goto-Imamura et Schwinger".

Pour prouver ce résultat nous employons une représentation

$$V_a^\alpha(\Phi) = \int V_a^\alpha(x)\Phi(x)\, d^3x \ , \ A_a^\alpha(\Phi) = \int V_a^\alpha(x)\Phi(x)\, d^3x \qquad (25)$$

$\Phi(x)$ est une algèbre de fonctions en c_∞ sur l'espace R^3. Comme nous l'avons vu après (13a)(13b), l'ensemble

$$X_a^\alpha(\Phi) = \{V_a^o(\Phi), A_a^i(\Phi)\} \qquad (26a)$$

forme une algèbre U(6) locale (pour $\Phi = 1$ on retrouve l'algèbre finie de U(6) même), et l'ensemble

$$Y_a^\alpha(\Phi) = \{A_a^o(\Phi), V_a^i(\Phi)\} \qquad (26b)$$

forme un opérateur vectoriel sous $X_a^\alpha(1)$, isomorphe à la représentation adjointe de U(6). Le tout engendre $[U(6) \times U(6)]_{\gamma_5}$ local correspondant aux courants d'un champ quark libre (si l'on ne tient pas compte des termes à gradient calculés par le modèle des perturbations [14]). Nous trouvons les commutateurs

$$[X_a^\alpha(\Phi_1), X_b^\beta(\Phi_2)] = i\, C_{abc}^{\alpha\beta\gamma}\, X_c^\gamma(\Phi_1\Phi_2) + i\, H_{ab}^{\alpha\beta}(\Phi_1,\Phi_2) \qquad (27a)$$

$$[X_a^\alpha(\Phi_1), Y_b^\beta(\Phi_2)] = i\, C_{abc}^{\alpha\beta\gamma}\, Y_c^\gamma(\Phi_1\Phi_2) + i\, K_{ab}^{\alpha\beta}(\Phi_1,\Phi_2) \qquad (27b)$$

$$[Y_a^\alpha(\Phi_1), Y_b^\beta(\Phi_2)] = i\, C_{abc}^{\alpha\beta\gamma}\, X_c^\gamma(\Phi_1\Phi_2) + i\, R_{ab}^{\alpha\beta}(\Phi_1,\Phi_2) \qquad (27c)$$

Les termes à gradient qui restent à déterminer apparaissent ici sous la forme de fonctionnelles bilinéaires H, K et R ; les $C_{abc}^{\alpha\beta\gamma}$ sont les constantes de structure de U(6) [25].

Comme conditions tirées des données physiques, nous n'en avons qu'une de précise, provenant de l'équation (8),

$$K^{oi}_{aa}(\Phi_1,\Phi_2) \neq 0 \ , \ K^{io}_{aa}(\Phi_1,\Phi_2) \neq 0 \qquad (28)$$

En fait, Buccella et al [15] ont aussi démontré que

$$R^{\alpha\beta}_{[a,b]}(\Phi_1,\Phi_2) \neq 0 \qquad (29)$$

pour les combinaisons antisymétriques en (a,b). Leur preuve exploite les représentations spectrales et la condition (10) en même temps que la valeur moyenne dans le vide des termes de l'identité de Jacobi pour (V^i_a,V^j_b,V^k_c) , c'est-à-dire (Y^i_a,Y^j_b,Y^k_c) que nous emploierons aussi . Notre théorème négatif ressort déjà, en effet, de l'étude de Buccella et al.

Nous demandons ici à H , K , R de commuter avec tous les X et Y . On trouve 4 identités de Jacobi pour (XXX), (XXY), (XYY) et (YYY).

$$C^{\alpha\beta\nu}_{abn} H^{\nu\gamma}_{nc}(\phi_1\phi_2,\phi_3) + C^{\beta\gamma\nu}_{bcn} H^{\nu\alpha}_{na}(\phi_2\phi_3,\phi_1) + C^{\gamma\alpha\nu}_{can} H^{\nu\beta}_{nb}(\phi_3\phi_1,\phi_2) = 0 \qquad (X,X,X)(30a)$$

$$C^{\alpha\beta\nu}_{abn} K^{\nu\gamma}_{nc}(\phi_1\phi_2,\phi_3) - C^{\beta\gamma\nu}_{bcn} K^{\alpha\nu}_{an}(\phi_1,\phi_2\phi_3) + C^{\alpha\gamma\nu}_{acn} K^{\beta\nu}_{bn}(\phi_2,\phi_1\phi_3) = 0 \qquad (X,X,Y)\ (30b)$$

$$C^{\alpha\beta\nu}_{abn} R^{\nu\gamma}_{nc}(\phi_1\phi_2,\phi_3) - C^{\alpha\gamma\nu}_{acn} R^{\nu\beta}_{nb}(\phi_1\phi_3,\phi_2) + C^{\beta\gamma\nu}_{bcn} H^{\nu\alpha}_{na}(\phi_2\phi_3,\phi_1) = 0 \qquad (X,Y,Y)\ (30c)$$

$$C^{\alpha\beta\nu}_{abn} K^{\nu\gamma}_{nc}(\phi_1\phi_2,\phi_3) + C^{\beta\gamma\nu}_{bcn} K^{\nu\alpha}_{na}(\phi_2\phi_3,\phi_1) + C^{\gamma\alpha\nu}_{can} K^{\nu\beta}_{nb}(\phi_3\phi_1,\phi_2) = 0 \qquad (Y,Y,Y)(30d)$$

On voit que K est déterminé par (30b) et (30d) . Nous excluons du système les opérateurs $X^o_o(\Phi)$ et $Y^o_o(\Phi)$ de manière à n'employer que l'algèbre semi-simple $SU(6) \otimes SU(6)$ (nous exploitons cette semi-simplicité dans nos preuves).

On trouve d'abord (Appendice A) que K est anti-symétrique sous inversion simultanée de l'ordre des indices et des fonctions Φ ,

$$K^{\alpha\beta}_{ab}(\phi_1,\phi_2) = - K^{\beta\alpha}_{ba}(\phi_2,\phi_1) \qquad (31)$$

Le problème est donc réduit à la solution de l'équation (30b), avec la condition d'antisymétrie (31). On trouve (voir Appendice B) deux classes de solutions :

$$(\mathrm{I}) \qquad K^{\alpha\beta}_{ab}(\phi_1,\phi_2) = \delta_{ab}\,\delta_{\alpha\beta}\,K_1(\phi_1,\phi_2) \quad \text{avec} \quad K_1(\phi_1,\phi_2) = -K_1(\phi_2,\phi_1) \qquad (32a)$$

$$(\mathrm{II}) \qquad K^{\alpha\beta}_{ab}(\phi_1,\phi_2) = C^{\alpha\beta\nu}_{abc}\,K_2(\phi_1,\phi_2) \quad \text{avec } c \text{ et } \nu \text{ fixes et} \qquad (32b)$$

$$K_2(\phi_1,\phi_2) = K_2(\phi_2,\phi_1)$$

Le cas (I) avec $\delta^{\alpha\beta}$ ne répond pas aux données (28). Le cas II n'existe point pour (28) comme on peut le voir par inspection des $C^{\alpha\beta\gamma}_{abc}$ de SU(6) pour ces valeurs de α,β et a,b , ce qui achève notre résultat négatif. En comparant avec les résultats de Buccella et al [15] on voit que leur terme (29), opérateur non-commutatif, modifierait (30d).

<u>Extension "minimale" de $[U(6) \times U(6)]_{\gamma_5}$ local dans une algèbre de Lie semi-simple locale.</u>

Nos termes à gradients seront maintenant des "q-numbers". Il nous faut déformer le système (13a)-(13b) de manière à introduire des opérateurs différentiels qui engendreront les gradients dans les commutateurs. Il faut donc "renormaliser" les courants $V^{\mu}_{o}(x)$ et $A^{\mu}_{a}(x)$; on peut imaginer que cette renormalisation est le résultat des interactions (puisque $[U(6) \times U(6)]_{\gamma_5}$ correspondait aux champs libres). Nous avons à introduire des densités (= des champs) avec le comportement nécessaire à la covariance sous les groupes de Poincaré CPT et SU(3). On pourrait les prendre sur une algèbre abélienne de champs de bosons, ce qui introduirait des variables en dehors du système des courants. Nous préférons les trouver dans l'extension locale U(12) de $[U(6) \times U(6)]_{\gamma_5}$ définie par les matrices $\Gamma \otimes \lambda$ où Γ est l'algèbre U(4) des matrices de Dirac et de leurs produits, après "Hermitisation". Ceci implique les densités (14a) (14b) (14c) ; remarquons que les $S_a(x)$ de (14a) semblent déjà remplir un rôle physique (les u_a) dans la structure de $\theta^{oo}(x)$, le tenseur d'énergie, d'après Gell-Mann et al (GOR) [26]. Les $T^{ij}_a(x)$ de (14c) sont peut-être les densités de la symétrie approximative $SU(6)_W$ des processus colinéaires [27] . Les $P_a(x)$ correspondent peut-être aux éléments $(-v_a)$ de GOR.

Ceci explique notre préférence pour ce système U(12). Toutefois, notons que GOR n'impose pas les commutateurs de U(12) pour [u,u] , [v,v] ou [u,v] de sorte que ces densités pourraient aussi appartenir au système non-semi-simple que nous avons effleuré.

Autre indication justifiant notre choix : l'existence d'un moment magnétique anormal, dû aux interactions, introduirait justement un terme en $\frac{\partial}{\partial x^\nu} T_a^{\mu\nu}(x)$ dans $V_a^\mu(x)$ "renormalisé".

Inspectant les termes (14a), (14b) et (14c) sous les conditions de covariance sous le groupe de Poincaré et CPT, et sans déformer la structure en SU(3), nous trouvons comme possibilité de déformation maximale en U(12),

$$V_a^\mu(x) = \bar{V}_a^\mu(x) - c_V \frac{\partial}{\partial x^\nu} T_a^{\mu\nu}(x) \tag{33a}$$

$$A_a^\mu(x) = \bar{A}_a^\mu(x) - c_A \frac{\partial}{\partial x_\mu} P_a(x) \tag{33b}$$

où les opérateurs barrés représentent le courant pré-renormalisation, défini par ses relations de commutations dans U(12). Néanmoins, pour calculer les commutateurs des courants (33a) et (33b), il nous faudrait connaître le comportement de $\frac{\partial}{\partial t} T_a^{\mu o}$ et $\frac{\partial}{\partial t} P_a$. Si nous essayons de former l'algèbre des courants sans nous reporter à l'Hamiltonien, nous trouvons la solution unique ("minimale")

$$V_a^o(x) = \bar{V}_a^o(x) - C_V \frac{\partial}{\partial x^i} T_a^{oi}(x) \tag{34a}$$

$$V_a^i(x) = \bar{V}_a^i(x) \tag{34b}$$

$$A_a^o(x) = \bar{A}_a^o(x) \tag{34c}$$

$$A_a^i(x) = \bar{A}_a^i(x) - C_A \frac{\partial}{\partial x_i} P_a(x) \tag{34d}$$

Cette solution "minimale" a aussi l'avantage d'être la seule à donner un terme à gradient du premier ordre seulement dans le commutateur (8). Notons que V_a^μ et A_a^μ sont des quadrivecteurs sous le groupe de Lorentz, tandis que les $\bar{V}_a^\mu$ et $\bar{A}_a^\mu$ sont des composantes de quadrivecteurs, mais ne se transforment pas entre elles. $\bar{V}_a^o(x)$ par exemple appartient à un quadrivecteur dont les autres composantes sont $(\bar{V}_a^i(x) + c_V \frac{\partial}{\partial x^\nu} T^{i\nu})$ etc... Pour les $T_a^{\mu\nu}(x)$, nous trouverons plus tard qu'ils pourraient bien appartenir à deux tenseurs anti-symétriques différents.

Des déformations (34) nous tirons les commutateurs de l'Appendice C . Il est aussi facile de déterminer les commutateurs des V_a^μ et A_a^μ avec les S_a , P_a , $T_a^{\mu\nu}$. Pour les commutateurs semi-intégrés, c'est-à-dire ceux qui font intervenir l'algèbre finie de SU(3) x SU(3) , soit

$$\begin{aligned} F_a(t) &= \int d^3x\ V_a^o(x) \\ F_a^5(t) &= \int d^3x\ A_a^o(x) \end{aligned} \tag{35}$$

on trouve les résultats réguliers pour SU(3) (eq. 2), mais pour les F_a^5 on a (et pour $y_o = t$)

$$[F_a^5(x_o), A_b^o(y)] = i f_{abc}\{V_c^o(y) + C_V \frac{\partial}{\partial y^k} T_c^{ok}(y)\} \tag{36a}$$

$$[F_a^5(x_o), V_b^o(y)] = i f_{abc} A_c^o(y) + \frac{i}{2} C_V \varepsilon^{ijk}\{\sqrt{\frac{2}{3}}\, \delta_{ab} \frac{\partial}{\partial y^i} T_o^{jk}(y) + d_{abc} \frac{\partial}{\partial y^i} T_c^{jk}(y)\} \tag{36b}$$

$$[F_a^5(x_o), A_b^k(y)] = i f_{abc} V_c^k(y) + i C_A\{\sqrt{\frac{2}{3}}\, \delta_{ab} \frac{\partial}{\partial y_k} S_o(y) + d_{abc} \frac{\partial}{\partial y_k} S_c(y)\} \tag{36c}$$

$$[F_a^5(x_o), V_b^k(y)] = i f_{abc}\{A_c^k(y) + C_A \frac{\partial}{\partial y_k} P_c(y)\} \tag{36d}$$

Les $S_a(x)$ et $P_a(x)$ se comportent régulièrement sous tout SU(3) x SU(3) .

Nous notons dans l'Appendice C l'équation (C,2) correspondant à (8). La valeur moyenne du terme à gradient sur le vide sera donnée par $\langle o|S_a|o\rangle$, avec a = 0, 3, 8 . Dans (C,3) nous voyons que (29) est donné par $\frac{\partial}{\partial x^k} T_c^{ok}(x)$. Pour les $[A^i, A^j]$ on voit (29) donné (C,6) par le même terme.

Notons que la valeur moyenne sur le vide (8) est observable dans la production d'hadrons dans les anneaux de stockage

$$e^+ + e^- \longrightarrow \text{hadrons}.$$

Notre terme (8) est fini, donc

$$0 < \int_0^\infty d(m^2)\,\frac{\rho_1(m^2)}{m^2} < \infty \tag{37a}$$

et la section efficace se calcule comme (s est le carré de l'énergie totale dans le système du centre de masse et correspond donc à la variable m^2)

$$\sigma(s) \sim \alpha^2\, s^{-2}\, \rho_1(s) \quad (\alpha \text{ est la constante de structure finie}) \tag{37b}$$

pour $s \to \infty$ on a donc

$$\sigma(s) < s^{-2} \tag{37c}$$

Le modèle LWZ donne s^{-3} ; expérimentalement les premiers résultats, assez incertains, d'ailleurs donnent $\sim s^{-1}$. Pour vérifier la covariance du modèle (34) nous écrivons les commutateurs de l'Appendice C dans une notation covariante

$$V^{\mu\nu}_{ab}(x,y,n) = [V^\mu_a(x), V^\nu_b(y)]\ \delta([x-y].n) \tag{38a}$$

où $n^2 = 1$ avec $n(1,0,0,0)$ dans le système $x^o = y^o$. On applique une transformation de Lorentz Λ

$$U(\Lambda)\ V^{\mu\nu}_{ab}(x,y,n)U^{-1}(\Lambda) = (\Lambda^{-1})^\mu_\alpha(\Lambda^{-1})^\nu_\beta[V^\alpha_a(\Lambda x), V^\beta_b(\Lambda y)]\delta([\Lambda x - \Lambda y].\Lambda n)$$

$$= (\Lambda^{-1})^\mu_\alpha(\Lambda^{-1})^\nu_\beta\ V^{\alpha\beta}_{ab}(\Lambda x, \Lambda y, \Lambda n) \tag{38b}$$

Il faut donc vérifier si les commutateurs de l'Appendice C se comportent effectivement comme un tenseur du second ordre sur un espace à 12 dimensions défini par les quadrivecteurs x,y,n. Cela est démontré dans l'Appendice D pour les $[V^\mu_a, V^\nu_b]$ et on peut faire de même pour $[A^\mu_a, A^\nu_b]$ et $[V^\mu_a, A^\nu_b]$.

Inexistence de la déformation minimale au cas où le courant axial est conservé.

Après avoir élaboré le modèle (34), nous allons maintenant prouver qu'il ne peux pas exister sous des conditions physiques de conservation de courants. Nous allons d'abord montrer que les commutateurs (36a), (36c) ne permettent pas la conservation du courant axial

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} A^\mu_a = 0 \tag{39}$$

correspondant nous le savons aujourd'hui à l'approximation $m^2_\pi \to 0$, et très utile pour les théorèmes de basse-énergie.

On démontre facilement que pour $J_a(t) = \int d^3x \; j^o_a(x)$, j^μ_a un courant quelconque, en appliquant au commutateur $(y_o = t)$

$$[J_a(t), j^o_b(y)] = i\, X^o_{ab}(y) \tag{40a}$$

($X^o_{ab}(y)$ étant une composante temps quelconque) un "boost" ("transformation de Lorentz pure") M^{io} , on trouve à droite

$$[M^{io}, X^o_{ab}(y)] = i\,(y^i \frac{\partial}{\partial t} - t\,\frac{\partial}{\partial y_i})\, X^o_{ab}(y) + i\, X^i_{ab}(y) \tag{40b}$$

Comparant avec l'effet sur la gauche, on trouve la formule

$$[J_a(t), j^i_b(y)] = i\, X^i_{ab}(y) + \int d^3x (x^i - y^i)\, [\frac{\partial}{\partial x^\mu}\, j^\mu_a(x), j^o_b(y)]_{x^o = y^o = t} \tag{41}$$

En regardant (36a), (36c) et en posant (39), nous trouvons :

$$C_A \frac{\partial}{\partial x^i}\, \{\sqrt{2/3}\; \delta_{ab}\; S_o(x) + d_{abc}\; S_c(x)\} + C_V\; f_{abc} \frac{\partial}{\partial x^i}\, T^{ok}_c(x) = 0 \tag{42a}$$

ce qui suffit à prouver que

$$C_A = C_V = 0 \tag{42b}$$

Inexistence de la déformation minimale due à la conservation d'un courant vectoriel.

Nous appliquons maintenant un boost au commutateur (C,7). Pour le nombre de gauche on trouve :

$$[i\Lambda^{os},[V_a^o(x),A_b^o(y)]] = [[i\Lambda^{os},V_a^o(x)],A_b^o(y)] + [V_a^o(x),[i\Lambda^{os},A_b^o(y)]]$$

$$= [-x^o \frac{\partial}{\partial x^s} V_a^o(x) - x^s \frac{\partial}{\partial x^o} V_a^o(x) + V_a^s(x),A_b^o(y)] +$$

$$+ [V_a^o(x),-y^o \frac{\partial}{\partial y^s} A_b^o(y) - y^s \frac{\partial}{\partial y^o} A_b^o(y) + A_b^s(y)] =$$

$$= -(x^o \frac{\partial}{\partial x^s} + y^o \frac{\partial}{\partial y^s})[V_a^o(x),A_b^o(y)] - y^s \frac{\partial}{\partial y^o}[V_a^o(x),A_b^o(y)] -$$

$$- (x^s-y^s)[\frac{\partial}{\partial x^o} V_a^o(x),A_b^o(y)] + [V_a^s(x),A_b^o(y)] + [V_a^o(x),A_b^s(y)] \quad .$$

Si "a" représente un courant conservé, le terme en (x^s-y^s) devient

$$(x^s-y^s) \frac{\partial}{\partial x^r} [V_a^r(x),A_b^o(y)]$$

et en appliquant l'identité

$$(x^s-y^s) \frac{\partial}{\partial x^r} f(x) = \frac{\partial}{\partial x^r} \{(x^s- y^s)f(x)\} - \delta^{sr}f(x)$$

on trouve pour ce membre de gauche

$$\begin{aligned}[i\Lambda^{os},[V_a^o(x),A_b^o(y)]] &= - (x^o \frac{\partial}{\partial x^s} + y^o \frac{\partial}{\partial y^s}) [V_a^o(x),A_b^o(y)] - \\ &- y^s \frac{\partial}{\partial y^o} [V_a^o(x),A_b^o(y)] + \frac{\partial}{\partial x^r} \{(x^s- y^s)[V_a^r(x),A_b^o(y)]\} + [V_a^o(x),A_b^s(y)]\end{aligned} \tag{43a}$$

Pour le membre de droite, nous trouvons

$$\begin{aligned}&= i\, f_{abc}\{-y^o \frac{\partial}{\partial y^s} - y^s \frac{\partial}{\partial y^o}\} A_c^o(y)\, \delta^3(x-y) + i f_{abc}\, A_c^s(y)\, \delta^3(x-y) + \\ &+ i\, f_{abc}\, (-x^o \frac{\partial}{\partial x^s})\, A_c^o(y)\, \delta^3(x-y) \quad + \quad \text{termes symétriques en } (a,b)\end{aligned} \tag{43b}$$

Nous pouvons maintenant remplacer les commutateurs de (43a) par leurs valeurs données dans l'Appendice C .

$$[V_a^r(x),A_b^o(y)] = i\, f_{abc}\{A_c^r(x) + c_A \frac{\partial}{\partial x_r} P_c(x)\}\, \delta^3(x-y) \tag{44a}$$

$$\begin{aligned}[V_a^o(x),A_b^s(y)] &= i\, f_{abc}\{A_c^s(x)\, \delta^3(x-y)-(c_A+c_V)\, P_c(y) \frac{\partial}{\partial x_s} \delta^3(x-y)\} \\ &+ i\, f_{abc}\, c_V c_A \frac{\partial}{\partial y_s} \{((A_c^i(y) + c_A \frac{\partial}{\partial y_i} P_c(y))) \frac{\partial}{\partial x^i} \delta^3(x-y)\} \\ &+ \text{termes symétriques en } (a,b).\end{aligned} \tag{44b}$$

(44a) ne contient pas de gradient de $\delta^3(x-y)$ et ne contribue pas à (43a). Nous pouvons identifier les termes en f_{abc} de (43a) et (43b). Nous trouvons

$$(c_A + c_V)P_c(y) \frac{\partial}{\partial x_s} \delta^3(x-y) + c_V c_A \frac{\partial}{\partial y_s} \{(A^i_C(y) + c_A \frac{\partial}{\partial y^i} P_c(y))) \frac{\partial}{\partial x^i} \delta^3(x-y)\} = 0$$

avec $c_A = c_V = 0$ comme seule solution qui ne soit pas pathologique.

On en déduit donc la nécessité de revenir à la déformation "maximale" pour U(12), donnée par les équations (33). Comme dans le modèle du champ scalaire de mésons chargés (18) on sera forcé d'introduire des dérivées par le temps, ici

$$\frac{\partial}{\partial t} T^{\mu o}_a(x) \quad , \quad \frac{\partial}{\partial t} P_a(x) \ .$$

-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-

Je voudrais remercier les Professeurs L. Motchane et L. Michel pour l'hospitalité de l'I.H.E.S. Je voudrais aussi remercier L. Michel pour plusieurs discussions importantes au sujet de cet article.

-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-

APPENDICE A. - Preuve d'anti-symétrie de $K^{\alpha\beta}_{ab}(\Phi_1,\Phi_2)$

On sépare $K^{\alpha\beta}_{ab}(\Phi_1,\Phi_2)$ en parties symétriques et anti-symétriques

$$K^{\alpha\beta}_{ab}(\Phi_1,\Phi_2) = S^{\alpha\beta}_{ab}(\Phi_1,\Phi_2) + A^{\alpha\beta}_{ab}(\Phi_1,\Phi_2) \qquad (A.1)$$

avec $$S^{\alpha\beta}_{ab}(\phi_1,\phi_2) = S^{\beta\alpha}_{ba}(\phi_2,\phi_1) \quad \text{et} \quad A^{\alpha\beta}_{ab}(\phi_1,\phi_2) = -A^{\beta\alpha}_{ba}(\phi_2,\phi_1)$$

De (30b) et (30d) on trouve :

$$S^{\alpha\nu}_{an}(\phi_1,\phi_2\phi_3)\, C^{\gamma\nu\beta}_{cnb} = -C^{\gamma\alpha\nu}_{can}\, S^{\nu\beta}_{nb}(\phi_1\phi_3,\phi_2) \qquad (A.2)$$

L'échange de Φ_2 et Φ_3 donne :

$$C^{\gamma\alpha\nu}_{can}\left\{ S^{\nu\beta}_{nb}(\phi_1\phi_3,\phi_2) - S^{\nu\beta}_{nb}(\phi_1\phi_2,\phi_3) \right\} = 0 \qquad (A.3)$$

Pour chaque b et β, on considère le terme dans les crochets comme un vecteur Σ^{ν}_{n} dans l'espace de SU(6). Si Σ^{ν}_{n} n'était pas nul, on en conclurait l'existence d'un élément de l'algèbre de SU(6) qui serait orthogonal à tous les éléments que l'on obtient en commutant les éléments de l'algèbre. Ceci contredirait la semi-simplicité de SU(6) donc Σ^{ν}_{n} est nul et nous trouvons

$$S^{\alpha\beta}_{ab}(\phi_1,\phi_2) = S^{\alpha\beta}_{ab}(\phi_1\phi_2) \qquad (A.4)$$

Appliquant (A.4) en (A.3) :

$$S^{\alpha\nu}_{an}(\phi_1\phi_2\phi_3)\, C^{\gamma\nu\beta}_{cnb} = -C^{\gamma\alpha\nu}_{can}\, S^{\nu\beta}_{nb}(\phi_1\phi_2\phi_3) \qquad (A.5)$$

Ceci prouve que $S^{\alpha\nu}_{an}$ anticommute avec toutes les matrices de la représentation adjointe de SU(6).

De $[S,X_i]_+ = 0$ on conclut que $[S,[X_i,X_j]] = 0$. Appliquant encore la semi-simplicité de SU(6) , et le lemme de Schur, on trouve que $S^{\alpha\nu}_{an}$ est une matrice scalaire λ . De (A.5), $\lambda = 0 = S^{\alpha\nu}_{an}$, et $K^{\alpha\beta}_{ab}(\Phi_1,\Phi_2)$ est donc complètement anti-symétrique sous l'échange simultané des indices et des fonctions.

APPENDICE B. - Solution de l'équation (30b).

On décompose $K^{\alpha\beta}_{ab}(\Phi_1,\Phi_2)$ en deux parties :

$$K^{\alpha\beta}_{ab}(\phi_1,\phi_2) = K^{\alpha\beta}_{ab}(\phi_1,\phi_2)_1 + K^{\alpha\beta}_{ab}(\phi_1,\phi_2)_2 \tag{B.1}$$

où K_1 et K_2 sont respectivement symétrique (anti-symétrique) sous échange des indices et antisymétrique (symétrique) sous échange des fonctions. Dans l'équation (30b), échangeons Φ_1 et Φ_2 . En soustrayant l'équation qui résulte de l'équation (30b), et en mettant $\Phi_3 = 1$, on obtient :

$$K^{\alpha\nu}_{an}(\phi_1,\phi_2)_1 \; C^{\gamma\nu\beta}_{cnb} = C^{\gamma\alpha\nu}_{can} \; K^{\nu\beta}_{nb}(\phi_1,\phi_2)_1 \tag{B.2}$$

K_1 commute donc avec toutes les matrices d'une représentation adjointe. Appliquant le lemme de Schur, on obtient

$$\text{(I)} \qquad K^{\alpha\beta}_{ab}(\phi_1,\phi_2)_1 = \delta_{ab}\,\delta^{\alpha\beta}\,K_1(\phi_1,\phi_2)$$

En appliquant ce résultat à l'équation (30b), on obtient :

$$C^{\alpha\beta\gamma}_{abc}\left\{ K_1(\phi_1\phi_2,\phi_3) - K_1(\phi_1,\phi_2\phi_3) - K_1(\phi_2,\phi_1\phi_3) \right\} +$$

$$+ \; C^{\alpha\beta\nu}_{abn}\,K^{\nu\gamma}_{nc}(\phi_1\phi_2,\phi_3)_2 + C^{\beta\gamma\nu}_{bcn}\,K^{\nu\alpha}_{na}(\phi_1,\phi_2\phi_3) + C^{\gamma\alpha\nu}_{can}\,K^{\nu\beta}_{nb}(\phi_2,\phi_1\phi_3) = 0$$

On choisit maintenant les indices des constantes de structure dans la sous-algèbre SU(2) (l'isospin) de SU(6) $[\alpha = \beta = \gamma = 0$ et $a,b,c = 1,2,3]$. On trouve :

$$K_1(\phi_1\phi_2,\phi_3) = K_1(\phi_1,\phi_2\phi_3) + K_1(\phi_2,\phi_1\phi_3) \tag{B.3}$$

$$C^{\alpha\beta\nu}_{abn}\,K^{\nu\gamma}_{nc}(\phi_1\phi_2,\phi_3)_2 + C^{\beta\gamma\nu}_{bcn}\,K^{\nu\alpha}_{na}(\phi_1,\phi_2\phi_3)_2 + C^{\gamma\alpha\nu}_{can}\,K^{\nu\beta}_{nb}(\phi_2,\phi_1\phi_3)_2 = 0 \tag{B.4}$$

En échangeant $\binom{\alpha}{a}$ et $\binom{\beta}{b}$ dans (B.4) et en sommant avec (B.4) :

$$\left\{K^{\alpha\nu}_{an}(\phi_2,\phi_1\phi_3)_2 - K^{\alpha\nu}_{an}(\phi_1,\phi_2\phi_3)_2\right\} C^{\gamma\nu\beta}_{cnb} = - C^{\gamma\alpha\nu}_{can}\left\{K^{\nu\beta}_{nb}(\phi_2,\phi_1\phi_3) - K^{\nu\beta}_{nb}(\phi_1,\phi_2\phi_3)\right\}$$

Un argument comme celui de l'appendice A, (anticommutation avec toutes les matrices d'une représentation adjointe) donne :

$$K^{\alpha\nu}_{an}(\phi_2,\phi_1\phi_3)_2 = K^{\alpha\nu}_{an}(\phi_1,\phi_2\phi_3)_2$$

d'où $$K^{\alpha\beta}_{ab}(\phi_1,\phi_2)_2 = K^{\alpha\beta}_{ab}(\phi_1\phi_2)_2$$

Avec cette condition, les solutions anti-symétriques (pour les indices) de (B.4) ont la forme :

$$\text{(II)} \qquad K^{\alpha\beta}_{ab}(\phi_1,\phi_2)_2 = C^{\alpha\beta\gamma}_{abc}\, K_2(\phi_1\phi_2)$$

avec c et γ fixés.

Toute solution qui ne serait pas une combinaison linéaire de solutions de cette forme indiquerait l'existence d'un nouvel opérateur qui fermerait sur une algèbre de Lie sur commutation avec SU(6). Mais alors si $K^{\alpha\beta}_{ab}(\Phi_1,\Phi_2)_2 \neq 0$ ceci contredirait le fait que SU(6) est déjà formé en tant qu'algèbre de Lie.

APPENDICE C. - Relations de commutation de la déformation (34).

$$\left[V_a^o(x), V_b^o(y)\right] = i f_{abc} V_c^o(x)\ \delta^3(x-y)$$

$$+ i C_V^2 f_{abc} \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^i} \left\{\left[V_c^o(x) + C_V \frac{\partial}{\partial x^k} T_c^{ok}(x)\right] \delta^3(x-y)\right\} \tag{C.1}$$

$$+ i C_V^2 \varepsilon^{ijk} \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^i} \left\{\left(\sqrt{\tfrac{2}{3}}\, \delta_{ab} A_o^k(x) + d_{abc} A_c^k(x)\right) \delta^3(x-y)\right\}$$

$$\left[V_a^o(x), V_b^j(y)\right] = i f_{abc} V_c^j(x)\ \delta^3(x-y)$$

$$+ i C_V f_{abc} \frac{\partial}{\partial x^i} \left\{T_c^{ij}(x)\ \delta^3(x-y)\right\}$$

$$- i C_V \sqrt{\tfrac{2}{3}}\, \delta_{ab} \frac{\partial}{\partial x^j} \left\{S_o(x)\ \delta^3(x-y)\right\} \tag{C.2}$$

$$- i C_V d_{abc} \frac{\partial}{\partial x^j} \left\{S_c(x)\ \delta^3(x-y)\right\}$$

$$\left[V_a^i(x), V_b^j(y)\right] = i\, \delta^{ij} f_{abc}\ \delta^3(x-y) \left\{V_c^o(x) + C_V \frac{\partial}{\partial x^k} T_c^{ok}(x)\right\}$$

$$+ i \varepsilon^{ijk} \sqrt{\tfrac{2}{3}}\, \delta_{ab}\ \delta^3(x-y) \left\{A_o^k(x) + C_A \frac{\partial}{\partial x_k} P_o(x)\right\}$$

$$+ i \varepsilon^{ijk} d_{abc}\ \delta^3(x-y) \left\{A_c^k(x) + C_A \frac{\partial}{\partial x_k} P_c(x)\right\} \tag{C.3}$$

$$\left[A_a^o(x), A_b^o(y)\right] = i f_{abc}\, \delta^3(x-y) \left\{ V_c^o(x) + C_V \frac{\partial}{\partial x^k} T^{ok}(x) \right\} \tag{C.4}$$

$$\begin{aligned} \left[A_a^o(x), A_b^j(y)\right] &= i f_{abc}\, V_c^j(x)\, \delta^3(x-y) + \\ &+ i C_A \sqrt{\tfrac{2}{3}}\, \delta_{ab} \frac{\partial}{\partial y_j} \left\{ S_o(x)\, \delta^3(x-y) \right\} \\ &+ i C_A d_{abc} \frac{\partial}{\partial y_j} \left\{ S_c(x)\, \delta^3(x-y) \right\} \end{aligned} \tag{C.5}$$

$$\begin{aligned} \left[A_a^i(x), A_b^j(y)\right] &= i\, \delta^{ij} f_{abc}\, \delta^3(x-y) \left\{ V_c^o(x) + C_V \frac{\partial}{\partial x^m} T_c^{om}(x) \right\} \\ &- i C_A f_{abc} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} (T_c^{oj}(x)\, \delta^3(x-y)) + \frac{\partial}{\partial y_j} (T_c^{oi}(x)\, \delta^3(x-y)) \right\} \\ &+ i C_A^2 f_{abc} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_j} \left\{ (V_c^o(x) + C_V \frac{\partial}{\partial x^m} T_c^{om}(x))\, \delta^3(x-y) \right\} \\ &+ i \varepsilon^{ijk} \delta^3(x-y) \left\{ \sqrt{\tfrac{2}{3}}\, \delta_{ab} (A_o^k(x) + C_A \frac{\partial}{\partial x_k} P_o(x)) + d_{abc} (A_c^k(x) + C_A \frac{\partial}{\partial x_k} P_c(x)) \right\} \end{aligned} \tag{C.6}$$

$$\begin{aligned} \left[V_a^o(x), A_b^o(y)\right] &= i f_{abc}\, A_c^o(x)\, \delta^3(x-y) \\ &- \frac{i}{2} C_V \sqrt{\tfrac{2}{3}}\, \delta_{ab} \varepsilon^{ijk} \frac{\partial}{\partial x^i} \left\{ T_o^{jk}(x)\, \delta^3(x-y) \right\} \\ &- \frac{i}{2} C_V d_{abc}\, \varepsilon^{ijk} \frac{\partial}{\partial x^i} \left\{ T_c^{jk}(x)\, \delta^3(x-y) \right\} \end{aligned} \tag{C.7}$$

$$\left[V_a^o(x), A_b^j(y)\right] = i f_{abc} A_c^j(x)\, \delta^3(x-y)$$

$$- i f_{abc} C_A \frac{\partial}{\partial x^j} (P_c(x)\, \delta^3(x-y))$$

$$- i C_V f_{abc} \frac{\partial}{\partial x^j} \left\{ P_c(x)\, \delta^3(x-y) \right\} \qquad \text{(C.8)}$$

$$+ i f_{abc} C_V C_A \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y_j} \left\{ (A_c^i(x) + C_A \frac{\partial}{\partial x_i} P_c(x))\, \delta^3(x-y) \right\}$$

$$- i C_V \varepsilon^{ijk} \left\{ \sqrt{\frac{2}{3}}\, \delta_{ab} \frac{\partial}{\partial x^i} (T_o^{ok}(x)\, \delta^3(x-y)) + d_{abc} \frac{\partial}{\partial x^i} (T_c^{ok}(x)\, \delta^3(x-y)) \right\}$$

$$\left[A_a^o(x), V_b^j(y)\right] = i f_{abc}\, \delta^3(x-y) \left\{ A_c^j(x) + C_A \frac{\partial}{\partial x_j} P_c(x) \right\} \qquad \text{(C.9)}$$

$$\left[V_a^i(x), A_b^j(y)\right] = i \delta^{ij} f_{abc}\, A_c^o(x)\, \delta^3(x-y)$$

$$+ i \varepsilon^{ijk} \left\{ \sqrt{\frac{2}{3}}\, \delta_{ab} V_o^k(x) + d_{abc} V_c^k(x) \right\} \delta^3(x-y) \qquad \text{(C.10)}$$

$$- \frac{i}{2} C_A \varepsilon^{imn} \frac{\partial}{\partial y^j} \left\{ (\sqrt{\frac{2}{3}}\, \delta_{ab} T_o^{mn}(x) + d_{abc} T_c^{mn}(x))\, \delta^3(x-y) \right\}$$

APPENDICE D. - Covariance des commutateurs de l'Appendice C.

Définissons :

$$A^{o}_{ab}(x) \equiv iC_V^2 f_{abc}(V^o_c(x)+C_V \frac{\partial}{\partial x^k} T^{ok}_c(x)) \tag{D.1}$$

$$B^{k}_{ab}(x) \equiv iC_V^2\{\sqrt{\tfrac{2}{3}}\, \delta_{ab} A^k_o(x)+d_{abc}A^k_c(x)\} \tag{D.2}$$

$$C^{ij}_{ab}(x) \equiv iC_V f_{abc} T^{ij}_c(x) = iC_V f_{abc} L^{ij}_c \tag{D.3}$$

$$D_{ab}(x) \equiv -iC_V\{\sqrt{\tfrac{2}{3}}\, \delta_{ab} S_o(x)+d_{abc}S_c(x)\} \tag{D.4}$$

$$E^{o}_{ab}(x) \equiv iC_V f_{abc} \frac{\partial}{\partial x^k} T^{ok}_c(x) \equiv iC_V f_{abc} \frac{\partial}{\partial x^k} K^{ok}_c \tag{D.5}$$

$$F^{k}_{ab}(x) \equiv i\sqrt{\tfrac{2}{3}}\, \delta_{ab}\{A^k_o(x)+C_A \frac{\partial}{\partial x_k} P_o(x)\} + id_{abc}\{A^k_c(x)+C_A \frac{\partial}{\partial x_k} P_c(x)\} \tag{D.6}$$

$K^{ok}_c(x) \equiv T^{ok}_c(x)$ et $L^{ij}_o(x) \equiv T^{ij}_c(x)$ appartiennent aux tenseurs anti-symétriques $K^{\mu\nu}_c(x)$ et $L^{\mu\nu}_c(x)$ qui pour le moment ne sont pas identiques. On trouve que $A^o_{ab}(x)$ et $E^o_{ab}(x)$ sont des composantes temps de quadrivecteurs, $B^k_{ab}(x)$ et $F^k_{ab}(x)$ des composantes spatiales de quadrivecteurs axiaux, $D_{ab}(x)$ est une scalaire et $C^{ij}_{ab}(x)$ les composantes spatiales d'un tenseur antisymétrique. Les équations (C1,C2,C3) peuvent maintenant s'écrire dans une forme covariante conforme à (38b) :

$$[V_a^\mu(x), V_b^\nu(y)]\,\delta([x-y]\cdot n) = if_{abc}\{n^\mu V_c^\nu(x) + n^\nu V_c^\mu(x) - g^{\mu\nu} n_\alpha V_c^\alpha(x)\}\delta^4(x-y) +$$

$$+ \pi^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial}{\partial y^\beta} \{A^\sigma_{ab}(x)\,\delta^4(x-y)\} n_\sigma n^\mu n^\nu$$

$$- \varepsilon^{\sigma\alpha\beta}{}_\gamma \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial}{\partial y^\beta} \{B^\gamma_{ab}(x)\,\delta^4(x-y)\} n_\sigma n^\mu n^\nu$$

$$+ (\pi^\alpha_\beta \pi^\nu_\gamma n^\mu \frac{\partial}{\partial x^\alpha} + \pi^\alpha_\beta \pi^\mu_\gamma n^\nu \frac{\partial}{\partial y^\alpha}) \{C^{\beta\gamma}_{ab}(x)\,\delta^4(x-y)\}$$

$$+ (-n^\mu \pi^\nu_\beta \frac{\partial}{\partial x_\beta} + n^\nu \pi^\mu_\beta \frac{\partial}{\partial y_\beta} \{D_{ab}(x)\,\delta^4(x-y)\}$$

$$+ \pi^{\mu\nu} n_\gamma E^\gamma_{ab}(x)\,\delta^4(x-y)$$

$$- n_\gamma \varepsilon^{\gamma\mu\nu}{}_\alpha F^\alpha_{ab}(x)\,\delta^4(x-y)$$

où

$$\pi^{\alpha\beta} = n^\alpha n^\beta - g^{\alpha\beta}$$

REFERENCES

[1] R.V. Mendès et Y. Ne'eman, Physics Letters 32 B, 696 (1970).

[2] R.V. Mendès et Y. Ne'eman, Annals of Physics, à paraître.

[3] L. Gomberoff et A. Rangwala, Nuclear Physics, à paraître.

[4] L. Gomberoff et Y. Ne'eman, Lettere al Nuovo Cimento, à paraître.

[5] L'idée se trouve un peu chez M. Gell-Mann, dans "The Eight Fold Way", M. Gell-Mann et Y. Ne'eman (W.A. Benjamin, N.Y. 1964) p. 219.

[6,7] Pour ces règles de somme et plusieurs autres, voir

6. Y. Ne'eman - Algebraic Theory of Particle Physics (W.A. Benjamin N.Y. 1967).

7. B.L. Adler et R.F. Dashen - Current Algebras (W.A. Benjamin, N.Y. 196

[8] Y. Dothan et Y. Ne'eman, dans Symmetry Groups in Nuclear and Particle Physics, F.J. Dyson (W.A. Benjamin N.Y. 1966) p. 287.

[9] Y. Dothan, Phys. Rev. D 2 , 2944 (1970).

[10] R.F. Dashen et M. Gell-Mann, Phys. Rev. Letters 17, 340 (1966).

[11] R.V. Mendès et Y. Ne'eman, J. Math. Phys. 11, 3371 (1970).

[12] A. Joseph, Comm. Math. Phys. 19, 106 (1970).

[13] R.V. Mendès et Y. Ne'eman, dans Strong Interaction Physics (Springer, Heidelberg 1971).

[14] K. Johnson et F.E. Low, Prog. Theoret. Phys. (Kyoto) Suppl. 37-38, 74 (1966); B. Hamprecht, Nuovo Cimento 47A , 770 (1967) ; T. Nagyliki, Phys. Rev. 158, 1534 (1967) ; S. L. Adler et C.G. Callan, CERN TH 587 (1965) inédit.

[15] F. Buccella, G. Veneziano, R. Gatto et S. Okubo, Phys. Rev. 149, 1268 (1966).

[16] T. Goto et T. Imamura, Prog. Theoret Phys. (Kyoto) 14, 396 (1955).

[17] J. Schwinger, Phys. Rev. Letters 3 , 296 (1959).
K. Johnson, Nucl. Phys. 25, 431 (1961).

[18] S. Okubo, Nuovo Cimento 44A, 1015 (1966).

[19] R.F. Dashen et D.H. Sharp, Phys. Rev. 165, 1857 (1968).
D.H. Sharp, Phys. Rev. 165, 1867 (1968).
C.G. Callan, R.F. Dashen et D.H. Sharp, Phys. Rev. 165, 1883 (1968).

[20] T.D. Lee, S. Weinberg et B. Zumino, Phys. Rev. Letters 18, 1029 (1967).

[21] H. Sugawara, Phys. Rev. 170, 1659 (1968).

[22] R. Hermann, J. Math. Phys.
R. Hermann, dans Group Representations in Mathematics and Physics.
V. Bargmann ed., Springer (Berlin-Heidelberg-NY 1970), p. 312.

[23] Communications personnelles de S. Sternberg (Rehovoth-Tel-Aviv 1970).
Manuscrit de S. Sternberg, B. Kostant en préparation.

[24] L. Michel et Y. Ne'eman, dans Symmetries and Quark Models, R. Chand ed., Gordon and Breach, (N.Y. 1970) p. 15.

[25] Avec les conventions de cet article, les constantes de structure de SU(6) sont :

$$c^{ooo}_{abc} = f_{abc} \; ; \; c^{oij}_{abc} = f_{abc}\delta^{ij} \; ; \; c^{ijk}_{abc} = d_{abc}\varepsilon^{ijk} \; ; \; c^{ooi}_{abc} = 0$$

où f_{abc} et d_{abc} sont les constantes bien connues de SU(3).

[26] M. Gell-Mann, R.J. Oakes et B. Renner, Phys. Rev. 175, 2195 (1968).

[27] H. J. Lipkin et S. Meshkov, Phys. Rev. Letters 14, 670 (1965), voir aussi ref. 6.

-:-:-:-:-:-:-