Recherche Coopérative sur
Programme n° 25

Bernard Malgrange

Opérateurs pseudo-différentiels et opérateurs de Fourier

Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg - RCP25, 1971, tome 13
« Conférences de B. Malgrange, Y. Ne'eman et F. Pham », , exp. n° 1, p. 1-26
<http://www.numdam.org/item?id=RCP25_1971__13__A1_0>

OPERATEURS PSEUDO-DIFFERENTIELS ET OPERATEURS DE FOURIER

B. Malgrange

INTRODUCTION.

L'exposé qui suit est un résumé de Hörmander [1] , article qui comprend essentiellement deux parties :

1) Une réexposition de la théorie des opérateurs pseudo-différentiels, exposition qui améliore les précédentes, notamment par l'utilisation systématique des intégrales oscillantes.

2) Une généralisation de la théorie précédente : les "opérateurs de Fourier" (en anglais "Fourier integral operators").

Nous avons laissé de côté les applications à la théorie des équations aux dérivées partielles, non abordées dans cet article (voir à ce sujet l'article d'exposition Hörmander [2]). Disons seulement que, en gros, les opérateurs de Fourier sont une systématisation des classiques "développements en paquets d'ondes" de l'optique géométrique, et qu'ils fournissent un moyen d'étude puissant des équations aux dérivées partielles "à caractéristiques simples", alors que les opérateurs pseudo-différentiels ne permettent guère d'étudier que les équations elliptiques. Nous avons aussi laissé de côté la question des "fronts d'ondes" (qui joue d'ailleurs un rôle important dans les applications) et ses relations avec les travaux de Sato et de ses élèves sur les hyper-fonctions (voir notamment Sato [1]). Cette dernière question fera l'objet d'un exposé ultérieur à la R.C.P.

I. OPERATEURS PSEUDO-DIFFERENTIELS.

Soit X un ouvert de $\mathbb{R}^n$; nous noterons $\Sigma^m(X,\mathbb{R}^p)$ l'espace des fonctions $a(x,\xi) \in C^\infty(X\times\mathbb{R}^p,\mathbb{C})$, telles qu'on ait, pour tout $K \subset\subset X$

$$|D_\xi^\alpha D_x^\beta a(x,\xi)| \leq C_{\alpha,\beta,K}(1+|\xi|)^{m-|\alpha|} \qquad , \quad (x,\xi) \in K \times \mathbb{R}^p \quad .$$

On utilise, bien sûr, les notations habituelles sur les multi-entiers, avec $D_\xi^\alpha = (-i\frac{\partial}{\partial\xi})^\alpha$, et $|\xi|$ la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^p$.

Pour $n=p$, on associe à a l'opérateur $A : \mathcal{D}(X) \to C^\infty(X)$ qui est ainsi défini :

$$(1.1.) \qquad (Af)(x) = (\frac{1}{2\pi})^n \int e^{ix\xi} a(x,\xi)\hat{f}(\xi)d\xi$$

avec $\hat{f}(\xi) = \int f(x)e^{-ix\xi}dx$, $x\xi = \sum x_\ell \xi_\ell$.

Supposons en particulier que a soit un polynôme en ξ : on aura alors $a = \sum a_\alpha \xi^\alpha$, $a_\alpha \in C^\infty(X,\mathbb{C})$, et la formule d'inversion de Fourier nous donne $Af = \sum a_\alpha D^\alpha f$: ici, A est donc un générateur différentiel, d'où le nom "d'opérateurs pseudo-différentiels" donné aux A dans le cas général.

Le <u>noyau</u> de A est, par définition, la distribution K_A sur X^2 définie par $\langle K_A, g(x)f(y)\rangle = \int (Af)(x)g(x)dx$; on voit immédiatement que K_A est défini à partir de a par la formule suivante : pour $h \in \mathcal{D}(X^2)$, on a :

$$(1.2.) \qquad \langle K_A, h\rangle = (\frac{1}{2\pi})^n \iint e^{i\xi x} a(x,\xi)dxd\xi \int h(x,y)e^{-i\xi y}dy \; .$$

Le lecteur pourra vérifier facilement la convergence de l'intégrale double, en utilisant le fait que $\int h(x,y)e^{i\xi y}dy$ est à décroissance rapide en (x,ξ) et "à support compact en x ". Par contre, si l'on avait écrit une intégrale triple en $dxd\xi dy$, cela ne convergerait pas, au sens usuel : nous reviendrons plus loin sur cette question.

Théorème 1.1.

K_A est un "noyau très régulier" au sens de Schwartz, ce qui signifie ceci :

1) A opère de $\mathcal{D}(X)$ dans $C^\infty(X)$

2) A se prolonge par continuité en un opérateur $\mathcal{E}'(X) \to \mathcal{D}'(X)$ (noté encore A)

3) K_A est C^∞ en-dehors de la diagonale.

Rappelons qu'on appelle support singulier d'une distribution $S \in \mathcal{D}'(X)$ le plus petit fermé $Y \subset X$ tel que la restriction de S à $X-Y$ soit C^∞. Il résulte du théorème précédent que A n'augmente pas les supports singuliers, ou, si l'on préfère, que A agit localement sur $\mathcal{E}'(X)/\mathcal{D}(X)$; il peut donc se prolonger en un opérateur sur $\mathcal{D}'(X)/C^\infty(X)$.

Rappelons aussi qu'un opérateur très régulier B est dit "régularisant" s'il envoie continûment $\mathcal{E}'(X)$ dans $C^\infty(X)$; il revient au même de dire que le noyau K_B est C^∞ partout. On vérifie facilement que, si $a \in \Sigma^{-\infty} = \bigcap \Sigma^m$, A est régularisant.

Pour $m \in \mathbb{R}$, ou $m = -\infty$, on appelle "opérateur pseudo-différentiel d'ordre $\leq m$ " un B très régulier de la forme $B = A +$ régularisant, avec $a \in \Sigma^m$; leur ensemble sera noté $S^m(X)$; en particulier, $S^{-\infty}(X)$ est l'ensemble des régularisants. L'application $a \to A$ définit alors par passage au quotient une application surjective $\sigma : \Sigma^m/\Sigma^{-\infty} \to S^m/S^{-\infty}$; on démontre que, si A est régularisant, on a : $a \in \Sigma^{-\infty}$; autrement dit on a le théorème suivant :

Théorème 1.2.

L'application σ est bijective.

L'application σ^{-1} s'appelle "le symbole" ; si $A \in S^m$, $a \in \Sigma^m$, et si $\sigma(\tilde{a}) = \tilde{A}$ ("tilde" = passage au quotient), on dira encore que a est un symbole de A .

On peut aussi, en passant encore plus au quotient, considérer la bijection $\Sigma^m/\Sigma^{m-1} \to S^m/S^{m-1}$; l'application inverse, dite "symbole principal", généralise la notion de "partie principale d'un opérateur différentiel" ; en fait, c'est elle qui joue souvent le rôle essentiel dans les applications.

Sur $\Sigma^m/\Sigma^{-\infty}$, on met la topologie linéaire où un système fondamental de voisinage, de 0 est constitué par les $\Sigma^p/\Sigma^{-\infty}$, $p \leq m$; autrement dit, une série $\tilde{a}_p \in \Sigma^m/\Sigma^{-\infty}$ converge si et seulement si l'ordre de a_p tend vers $-\infty$; un lemme facile assure que cette topologie est complète, autrement dit, si l'on a des a_p ayant la propriété précédente, il existe $a \in \Sigma^m$ tel que l'ordre de $(a-\sum_0^N a_p)$ tende vers $-\infty$ avec N . On écrira alors $a \sim \Sigma a_p$.

Les théorèmes suivants permettent de calculer avec les o.p.d. (modulo régularisants) comme avec les opérateurs différentiels :

Théorème 1.3.

Le transposé ${}^tA$ de $A \in S^m$ est aussi un o.p.d. d'ordre $\leq m$. Si a (resp ${}^ta$) est un symbole de A (resp ${}^tA$) , on a :

$$ {}^ta(x,\xi) \sim \sum_\alpha (iD_\xi)^\alpha D_x^\alpha a(x,-\xi)/\alpha! \quad . $$

Il revient au même de considérer l'adjoint $A^* = {}^t\bar{A}$ de A ("barre" = complexe conjugué) ; on a alors $a^*(x,\xi) = \overline{{}^ta(x,-\xi)}$; d'où $a^*(x,\xi) \sim \Sigma(iD_\xi)^\alpha(-D_x)^\alpha\overline{a(x,\xi)}/\alpha!$.

En particulier, le symbole principal de a^* est équivalent à $\overline{a(x,\xi)}$. Soient $A \in S^m$, $B \in S^{m'}$; le composé $A_\circ B$ n'est pas toujours défini ; néanmoins, il sera défini par exemple si K_A ou K_B est à support propre, i.e. a un support dans X^2 dont les deux projections sur X sont propres ; comme K_A est C^∞ en dehors de la diagonale, on peut, en la multipliant par une fonction C^∞ à support propre, et égale à 1 au voisinage de la diagonale écrire $A = A'+A''$, A' à support propre et A'' régularisant, et de même pour B ; on trouve alors que $A'\circ B'$ est bien défini modulo les régularisants ; nous noterons $A\circ B$ un des opérateurs obtenus ainsi. Un autre procédé équivalent consiste à remarquer que $A\circ B$ est bien défini en tant qu'opérateur sur $\mathcal{D}'/C^\infty$, puisque A et B opèrent de manière locale sur cet espace. On a alors le théorème suivant :

Théorème 1.4.

Pour $A \in S^m$, $B \in S^{m'}$, on a $A\circ B \in S^{m+m'}$; si c est un symbole de $A\circ B$, on a

$$c \sim \sum \frac{1}{\alpha!}[(iD_\xi)^\alpha a][D_x^\alpha b] \quad .$$

Le terme général de cette série est d'ordre $m+m'-|\alpha|$, donc la série converge.

En particulier, le symbole principal de $A\circ B$ est équivalent à ab ; et le symbole principal (d'ordre $m+m'-1$) de $[A,B] = AB - BA$ est équivalent au crochet de Poisson de a et b , à un facteur i près.

Théorème 1.5.

Soit φ un difféomorphisme $X \to X'$, et soit $A \in S^m$; on a $\varphi(A) \in S^m$, et son symbole a_φ vérifie :

$$a_\varphi(x',\eta) \equiv a(x,\xi) \mod \Sigma^{m-1}$$

avec $x' = \varphi(x)$, $\xi = {}^t\varphi'(x)\eta$.

Il résulte de là que le symbole principal de A se transforme comme une section de $\Sigma^m(X,T^*X)/\Sigma^{m-1}(X,T^*X)$, T^*X le fibré cotangent à X ; cela permet de définir les o.p.d. et leurs symboles principaux (mais non leurs symboles tout court) sur les variétés. Notons aussi qu'il existe une formule asymptotique complète pour a_φ (qui ne semble pas avoir d'importance essentielle jusqu'à nouvel ordre ?) .

Donnons maintenant quelques indications sur les démonstrations. Je laisse de côté le théorème 1, élémentaire ; d'ailleurs, je reviendrai plus loin sur un cas plus général. Les théorèmes 2 à 5 se démontrent essentiellement en même temps, à partir d'une situation plus générale, que nous allons examiner maintenant.

Reprenons la formule 1.2 : elle s'écrit formellement

$$\langle K_A, h\rangle = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \iiint e^{i\xi(x-y)} a(x,\xi) f(x,y)\,dx\,dy\,d\xi \quad .$$

On va donner un sens à une telle formule ; pendant que nous y sommes, et en vue des paragraphes suivants, considérons plus généralement une "intégrale" du type suivant :

$$I_\varphi(f) = \int e^{i\varphi(x,\theta)} f(x,\theta)\,dx\,d\theta \quad , \quad x \in X \ , \ \theta \in \mathbb{R}^N$$

avec les hypothèses suivantes :

P.1) $\varphi \in C^\infty(X\times\mathbb{R}^N_*)$, $(\mathbb{R}^N_* = \mathbb{R}^N - \{0\})$,

P.2) φ est réelle, et sans points critiques pour $\theta \neq 0$.

P.3) φ est homogène de degré 1 en θ , i.e. $\varphi(x,t\theta) = t\varphi(x,\theta)$, $t>0$.

P.4) $f \in \Sigma^m(X\times\mathbb{R}^N)$ et il existe $K \subset\subset X$, avec $f(x,\theta) = 0$ pour $x \notin K$.

Il est alors facile de fabriquer un $L = \sum a_j \frac{\partial}{\partial\theta_j} + \sum b_k \frac{\partial}{\partial x_k} + c$,

tel qu'on ait $L'(e^{i\varphi}) = e^{i\varphi}$, avec $a_j \in \Sigma^o(X;\mathbb{R}^N)$; $b_k, c \in \Sigma^{-1}(X;\mathbb{R}^N)$.
Supposons $f = 0$ au voisinage de $\theta = 0$ (on se ramène à ce cas en posant $f = \alpha f + (1-\alpha)f$, $\alpha \in \mathcal{D}_\theta$, $\alpha = 1$ au voisinage de 0 ; le terme correspondant à αf dans l'intégrale converge trivialement).

Soit $\chi \in \mathcal{D}_\theta$, $\chi = 1$ au voisinage de 0 ; posons $f_\varepsilon(x,\theta) = \chi(\varepsilon\theta)f(X,\theta)$; en appelant M le transposé de L il vient, en intégrant par parties k fois

$$I_\varphi(f_\varepsilon) = I_\varphi(M^k f_\varepsilon) = \int e^{i\varphi}(M^k f_\varepsilon)dxd\theta$$

on a $M_k f \in \Sigma^{m-k}$; si l'on a choisi k assez grand pour qu'on ait $m-k \leq -(N+1)$, on voit que $I_\varphi(f_\varepsilon)$ converge, pour $\varepsilon \to 0$ vers l'intégrale usuelle indépendante de χ

$$I_\varphi(M^k f) = \int e^{i\varphi}(M_k f)dxd\theta \quad .$$

Par définition, nous poserons $I_\varphi(f) = I_\varphi(M^k f)$ ou encore $I_\varphi(f) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} I_\varphi(f_\varepsilon)$ et nous appellerons $I_\varphi(f)$ une "intégrale oscillante" ; nous emploierons les mêmes notations que pour les intégrales usuelles. Les formules usuelles d'intégration successive et de changement de variables seront alors vérifiées, sous des hypothèses convenables que je n'ai pas envie d'expliciter ici.

Revenons alors à la théorie des o.p.d. ; suivant une idée de Kuranishi, considérons, plus généralement que (1.2) , des intégrales oscillantes de la forme

$$\langle K_A, f\rangle = \int e^{i\xi(x-y)}a(x,y,\xi)f(x,y)dxdyd\theta$$

avec $f \in \mathcal{D}(X^2)$, $a(x,y,\xi) \in \Sigma^m(X^2 \times \mathbb{R}^n)$. On démontre facilement qu'on a $A \in S^m(X)$, A l'opérateur associé au noyau K_A (nous admettrons ce point). Si $a(x,x,\xi) = 0$ pour $x \in X$, on peut écrire $a(x,y,\xi) = \sum(x_j-y_j)b_j(x,y,\xi)$,

$b_j \in \Sigma^{m-1}(X^2 \times \mathbb{R}^N)$; d'où, en intégrant par parties :

$$\langle K_A, f\rangle = i\Sigma\int e^{i\xi(x-y)} \frac{\partial b_j}{\partial \xi_j} f dx dy d\xi$$

donc $A \in S^{m-1}$; ceci montre que le symbole principal de A est équivalent à $a(x,x,\xi)$; plus généralement, en itérant, on trouve qu'un symbole b de A est donné par la formule

$$b(x,\xi) \sim \Sigma \frac{1}{\alpha!} (iD_\xi)^\alpha D_y^\alpha a(x,y,\xi) \Big|_{y=x} \quad .$$

Le théorème 3 est alors immédiat : en effet on passe de K_A à K_{A^*} en conjuguant et échangeant x et y ; donc si A est défini par $a(x,\xi)$, A^* est défini par $\overline{a(y,\xi)}$ et il suffit d'appliquer la formule précédente.

Pour le théorème 4, on opère en gros ainsi ; soit $A \in S^m$, de symbole a ; en utilisant le théorème précédent, A peut aussi être défini par un $\tilde{a}(y,\xi)$, et on a alors (en modifiant au besoin A par un régularisant) :

$$\langle Af, g\rangle = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int e^{i\xi(x-y)} \tilde{a}(y,\xi) f(y) g(x) dx dy d\xi$$

et, par Fourier :

$$\widehat{Af}(\xi) = \int e^{-i\xi y} \tilde{a}(y,\xi) f(y) dy$$

alors on a (formellement, cela s'arrange facilement).

$$(A\circ B)f(x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int e^{i\xi x} a(x,\xi)\, \widehat{Bu}(\xi) d\xi$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int e^{i\xi(x-y)} a(x,\xi) \tilde{b}(y,\xi) f(y) dy \quad .$$

Donc $A\circ B$ est défini par $c(x,y,\xi) = a(x,\xi)\tilde{b}(y,\xi)$, et l'on termine facilement.

Enfin, pour la formule de changement de variables (qui était le point délicat dans les présentations antérieures), on se ramène modulo des régularisants à traiter le cas où A est défini par $a(x,y,\xi)$, avec $a = 0$ en dehors d'un petit voisinage de la diagonale de X^2 ; on a alors, en posant $\psi = \varphi^{-1}$ (et en considérant ici des intégrales oscillantes pour x fixé)

$$\begin{aligned}\varphi(A)f(x') &= A(f\circ\varphi)\psi(x') \\ &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int e^{i\xi[\psi(x')-y]} a(\psi(x'),y,\xi)f(\varphi(y))dy\,d\xi \\ &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int e^{i\xi[\psi(x')-\psi(y')]} a(\psi(x'),\psi(y'),\xi)(f(y')\left|\frac{D\psi}{Dy'}\right| dy'd\xi\end{aligned}$$

au voisinage de la diagonale, on a $\psi(x')-\psi(y') = \chi(x',y')(x'-y')$, et $\chi(x',x') = \psi'(x')$, donc χ est inversible ; on fait alors le changement de variables $\eta = {}^t\chi(x',y')\xi$ et l'on trouve

$$\varphi(A)f(x') = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int e^{i\eta(x'-y')} a_\varphi(x',y',\eta)f(y')dy'$$

avec $a_\varphi(x',y',\eta) = a(\psi(x'),\psi(y'),{}^t\chi(x',y')^{-1}\eta)\left|\frac{D\psi}{Dy'}\right| |\text{dét}\chi(x',y')|^{-1}$ et le théorème résulte du fait qu'on a $a_\varphi \in \Sigma^m$, et

$$a_\varphi(x',x',\eta) = a(\psi(x'),\psi(x'),{}^t\psi'(x')^{-1}\eta) .$$

II. DISTRIBUTIONS DE FOURIER.

Reprenons les intégrales oscillantes dans le cas général ; une fonction φ sur $X \times \mathbb{R}^N$ vérifiant P.1 à P.3 sera appelée "une phase". On posera

$$\Gamma_\varphi = \{(x,\theta) \mid \varphi'_\theta = 0\} \quad \text{et} \quad C_\varphi = \{(x,\varphi'_x) \in X \times \mathbb{R}^n_* \mid (x,\theta) \in \Gamma_\varphi\} \quad .$$

On dira qu'une phase φ est "non dégénérée" si, pour tout $(x,\theta) \in \Gamma_\varphi$, les $d(\frac{\partial\varphi}{\partial\theta_i})$ sont linéairement indépendants ; alors (fonctions implicites), Γ_φ est une variété de dimension n (ou est vide, cas pour nous sans intérêt).

Soit $a \in \Sigma^m(X,\mathbb{R}^N)$; on considère sur X la distribution $A : f \longmapsto I_\varphi(af)$, $f \in \mathcal{D}(X)$. Il résulte facilement des calculs définissant les intégrales oscillantes que A est une distribution d'ordre k , pour tout k vérifiant $m-k < -N$.

Théorème 2.1.

1) Le support singulier de A est contenu dans la projection de C_φ (= la projection de Γ_φ) .

2) Si φ est non dégénérée, alors

   i) Si a est plat (= nul à l'ordre infini) sur Γ_φ , $A \in C^\infty$;

   ii) Si a est nul sur Γ_φ , A peut aussi être défini par (φ et) $b \in \Sigma^{m-1}(X,\mathbb{R}^N)$.

Les démonstrations sont immédiates :

1) Pour $x \notin \mathrm{proj}(\Gamma_\varphi)$, $\int e^{i\varphi(x,\theta)}\, a(x,\theta)d\theta$ a un sens en tant qu'intégrale oscillante, et le même calcul montre que sa valeur dépend de manière C^∞ de x .

2) Il suffit de démontrer la seconde assertion; pour cela on montre qu'on peut écrire $a = \sum b_j \frac{\partial\varphi}{\partial\theta_j}$, avec $b_j \in \Sigma^m(X, \mathbb{R}^N)$, en dehors d'un voisinage de $\theta = 0$; une intégration par parties donne alors le résultat.

Exemple 2.2 :

Ici on remplace n par $2n$ (resp N par n) et x par (x,y) (resp θ par ξ) on a $\varphi = \xi(x-y)$, donc $C_\varphi = \{(x,x,\xi,-\xi)\}$ et $\text{proj } C_\varphi = \Delta$, diagonale de X^2 : on retrouve le fait que le noyau d'un o.p.d. est C^∞ en dehors de la diagonale.

Exemple 2.3 :

Considérons le problème de Cauchy pour l'équation des ondes:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0 \\ u(x,0) = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = f \end{cases}$$

à l'instant t , on a $u(x,t) = \sum\limits_{\varepsilon=\pm 1} \varepsilon\left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int e^{i\xi x+\varepsilon t|\xi|}(2i|\xi|)^{-1}\hat{f}(\xi)d\xi$

ou encore

$$u(x,t) = \sum \varepsilon\left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int e^{i[\xi(x-y)+\varepsilon t|\xi|]}(2i|\xi|)^{-1}f(y)dyd\xi \text{ (intégrale oscillante)} .$$

(Le fait que $|\xi|^{-1}$ n'est pas régulier à l'origine est sans importance ; il suffit de tronquer au voisinage de 0 dans l'espace des ξ pour se ramener au cas général + un régularisant). Pour (x,t) fixé, les variables étant ici y et ξ , on a $\varphi = \xi(x-y) + \varepsilon t|\xi|$; Γ_φ est défini par $y-x = \varepsilon t \frac{\xi}{|\xi|}$ et sa projection dans $\mathbb{R}^n_y$ est la sphère $(y-x)^2 = t^2$, ce qui est conforme aux propriétés de "propagation des singularités" de l'équation des ondes.

De même, si l'on considère le noyau associé à l'opérateur $f \longmapsto u$, on voit que son support singulier dans l'espace des (x,y,t) est l'ensemble $(x-y)^2 = t^2$. La théorie des opérateurs de Fourier a, entre autres, pour but d'étendre ces faits à des équations du type le plus général possible ; malheureusement, comme il a déjà été dit dans l'introduction, nous n'aborderons pas cette question ici.

Remarquons encore qu'on peut "localiser" les définitions précédentes ainsi : soit V un ouvert conique de $X \times \mathbb{R}^N_+$, i.e. V est stable par $(x,\theta) \longmapsto (x,t\theta)$ pour tout $t \geq 0$; soit φ une phase définie sur V et soit $a \in \Sigma^m(X,\mathbb{R}^N)$ ayant son support conique dans V (*) ; alors pour $f \in \mathcal{D}(X)$, l'intégrale oscillante $I_\varphi(af) = \int e^{i\varphi(x,\theta)} a(x,\theta)f(x)d\theta dx$ sera bien définie, et définira donc encore une distribution sur X.

Dans la suite, nous supposerons toujours les phases non dégénérées ; alors le résultat principal est en gros le suivant : la classe des distributions de Fourier définies par φ ne dépend que de C_φ. Pour le voir, nous allons commencer par examiner deux cas particuliers importants.

i) Changement de variables.

Le calcul est ici immédiat et servira seulement à préciser comment il faut s'y prendre pour tout écrire de manière invariante : soit $x = u(x')$, $\theta = v(x,\theta')$ avec v homogène en θ' un difféomorphisme de la variété conique (X,V) sur une variété conique (X',V') ; on a l'égalité entre intégrales oscillantes :

(*) on appellera "support conique" de a le plus petit fermé conique $F \subset X \times \mathbb{R}^N_*$ tel que $a = 0$ dans $X \times \mathbb{R}^N_* - F$.

$$\int e^{i\varphi(x,\theta)}a(x,\theta)f(x)d\theta dx = \int e^{i\bar{\varphi}(x',\theta')}\bar{a}(x',\theta')\bar{f}(x')\left|\frac{Du}{Dx'}\right|\left|\frac{Dv}{D\theta'}\right|dx'd\theta'$$

avec $\bar{\varphi}(x',\theta') = \varphi(u(x'),v(x'))$, et de même pour $\bar{a}$ et $\bar{f}$.

Il est commode ici de poser $b(x,\theta) = a(x,\theta)d\theta\sqrt{dx}$, $g(x) = f(x)\sqrt{dx}$, i.e. de travailler, non avec des fonctions a et f , mais des sections respectivement des fibrés $\Omega_\theta \otimes \Omega_{1/2,x}$ et $\Omega_{1/2,x}$, où Ω (resp $\Omega_{1/2}$) désigne le fibré des volumes (ou densités d'ordre 1) et $\Omega_{1/2}$ le fibré des densités d'ordre 1/2 ; on a alors

$$\int e^{i\varphi(x,\theta)}b(x,\theta)g(x) = \int e^{i\bar{\varphi}(x',\theta')}\bar{b}(x',\theta')\bar{g}(x')$$

avec $\bar{b}'$ (resp $\bar{g}$) transformé de b (resp g) par (u,v) , par définition de Ω et $\Omega_{1/2}$.

On a par un calcul facile : $\bar{a}(x',\theta')\left|\frac{Dv}{D\theta'}\right|\left|\frac{Du}{Dx'}\right|^{1/2} \in \Sigma^m(X',\mathbb{R}^N)$, ce qu'on écrira :

$$\bar{b}(x',\theta') \in \Sigma^m(X,\mathbb{R}^N ; \Omega_\theta \otimes \Omega_{1/2,x}) .$$

D'autre part, (et cela est plus important), on a $\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial\theta'} = \frac{\partial\varphi}{\partial\theta}(u,v)\frac{\partial v}{\partial\theta'}$; donc Γ_φ est le transformé de $\Gamma_{\bar{\varphi}}$ par le difféomorphisme (u,v) ; enfin, sur $\Gamma_{\bar{\varphi}}$, on a $\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial x'} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x'}$: ceci montre que C_φ est le transformé de $C_{\bar{\varphi}}$ par (u,v) à condition de considérer C_φ comme sous-ensemble du <u>cotangent</u> T^*X de X (et "non" de $X \times \mathbb{R}^n$) .

Rappelons que T^*X peut être défini comme l'ensemble des couples $(x,(df)_x)$, $x \in X$, $(df)_x$ la différentielle d'une fonction en x ; en coordonnées locales, un point de T^*X sera représenté par $(x_1,\dots,x_n,\xi_1,\dots,\xi_n)$ avec $(\xi_1,\dots,\xi_n)$ représentant la différentielle en x de $\xi_1x_1+\dots+\xi_nx_n$

(ou de toute autre fonction f telle que $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \xi_i$) . Sur T^*X , la forme différentielle $\pi = \sum \xi_i dx_i$ est invariante par changement de coordonnées, ainsi que sa différentielle extérieure $\omega = \sum d\xi_i \wedge dx_i$ (nous laissons le lecteur, à titre d'exercice, donner une définition "intrinsèque" de π et de ω). La forme ω définit ce qu'on appelle une "structure symplectique" sur T^*X .

Il importe ici de remarquer que la variété (immergée) C_φ n'est pas quelconque : en effet l'image réciproque de π sur Γ_φ par $i : \Gamma_\varphi \to C_\varphi$ vérifie

$$i^*(\sum \xi_i dx_i) = \sum \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} dx_i = d\varphi - \sum \frac{\partial\varphi}{\partial\theta_i} d\theta_i = d\varphi = 0$$

(car $\varphi = 0$ sur Γ_φ par l'identité d'Euler : $\varphi = \sum \theta_i \frac{\partial\varphi}{\partial\theta_i}$) . Par suite, <u>la restriction de ω (et même de π) à C_φ est nulle</u> ; C_φ est ce qu'on appelle une <u>variété lagrangienne de</u> T^*X , i.e. une variété (immergée dans T^*X) de dimension maximale n sur laquelle la restriction de ω soit nulle ; on pressent ici le rôle que vont jouer dans la théorie les transformations canoniques de T^*X , i.e. les difféomorphismes de T^*X laissant ω invariante. Réciproquement, il est facile de voir, qu'une variété lagrangienne conique de $T^*X - \{0\}$, peut localement (i.e. dans un voisinage conique de chacun de ses points) être définie par une phase non dégénérée.

ii) <u>Adjonction de nouvelles variables</u> :

(Nous n'utiliserons pas encore ici la discussion qui précède). Soit φ une phase sur V , ouvert conique de $X \times \mathbb{R}^N$; soit W l'ouvert conique de $X \times \mathbb{R}^{N+1}$ formé des (x,θ,τ) vérifiant $(x,\theta) \in V$, $|\tau| < K|\theta|$ pour un $K > 0$; posons $\tilde{\varphi}(x,\theta,\tau) = \varphi(x,\theta) + \tau^2/2|\theta|$; on a évidemment $C_{\tilde{\varphi}} = C_{\varphi}$; soit $a \in \Sigma^m(X;\mathbb{R}^{N+1})$, à support conique dans W ; on a, pour $f \in \mathcal{D}(X)$, par intégrations successives :

$$I_{\tilde{\varphi}}(af) = I_{\varphi}(bf) \quad , \quad \text{avec} \quad b(x,\theta) = \int e^{i\tau^2/2|\theta|}\, a(x,\theta,\tau)d\tau$$

on a ici une intégrale usuelle, puisque $a = 0$ pour $|\tau| \geq K|\theta|$.

Pour évaluer b , on applique la méthode de la <u>phase stationnaire</u>, i.e. on écrit d'abord :

$$b(x,\theta) = |\theta| \int e^{i\sigma^2|\theta|/2}\, a(x,\theta,|\theta|\sigma)d\sigma$$

d'où, par Fourier

$$b(x,\theta) = \sqrt{\frac{|\theta|}{2\pi}}\, e^{i\pi/4} \int e^{-i\eta^2/2|\theta|}\, \hat{a}(x,\theta,\eta)d\eta$$

avec $\hat{a}(x,\theta,\eta) = \int a(x,\theta,|\theta|\sigma)e^{-i\sigma\eta}d\eta$.

Pour $|\theta| \to \infty$ la partie principale de la dernière intégrale est $\int \hat{a}(x,\theta,\eta)d\eta = 2\pi a(x,\theta,0)$ par Fourier ; de façon plus précise, en utilisant le développement asymptotique

$$\left|e^{-i\eta^2/2\theta} - \sum_0^p (-i\eta^2/2|\theta|)^k/k!\right| \leq (\eta^2/2|\theta|)^{p+1}/(p+1)! \quad \text{(p entier)} ,$$

on montre facilement le résultat suivant :

<u>Proposition 2.1.</u>

(En dehors d'un voisinage de $0 \in \mathbb{R}^N$), <u>on a</u> $b(x,\theta) \in \Sigma^{m+1/2}(X,\mathbb{R}^N)$; <u>et</u>, modulo $\Sigma^{m-1/2}(X,\mathbb{R}^N)$, <u>la partie principale de</u> b <u>est</u>

$$\sqrt{2\pi|\theta|}\; e^{i\pi/4}\, a(x,\theta,0) .$$

Si l'on avait pris $\bar{\varphi}(x,\theta,\tau) = \varphi(x,\theta) - \tau^2/2|\theta|$ dans le résultat on aurait $e^{-i\pi/4}$; plus généralement, si l'on prend

$$\bar{\varphi}(x,\theta,\tau) = \varphi(x,\theta) - A(\tau,\tau)/2|\theta| \quad ,$$

A une forme quadratique non dégénérée sur $\mathbb{R}^p$, on trouve, en éliminant τ par réduction à la forme diagonale et applications successives du résultat précédent :

$$b(x,\theta) \sim (2\pi|\theta|)^{p/2}|\text{dét } A|^{-1/2}e^{i\pi\sigma/4}a(x,\theta,0) \text{ modulo } \Sigma^{m-1+p/2} \quad ,$$

avec σ = signature de A .

iii) Le cas général :

Avant de l'examiner, il faut encore faire une construction qui permette de mettre dans le même sac les deux cas particuliers précédents. Soit φ une phase non dégénérée, définie sur un ouvert conique $V \subset X \times \mathbb{R}^N_*$; l'application $\Gamma_\varphi \to C_\varphi$ est localement un difféomorphisme, du fait que φ est non dégénérée ; en restreignant V, on peut supposer que c'est un difféomorphisme. Sur Γ_φ, on a un volume μ_φ défini ainsi : soit α_φ la forme différentielle de degré n sur V définie par

$$\alpha_\varphi \wedge d(\frac{\partial\varphi}{\partial\theta_1}) \wedge \ldots \wedge d(\frac{\partial\varphi}{\partial\theta_N}) = dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \wedge d\theta_1 \wedge \ldots \wedge d\theta_N \quad ,$$

alors $\mu_\varphi = |\alpha_\varphi|$; choisissons, au voisinage d'un point de Γ_φ des fonctions sur V, soit $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$, telles que les λ_i et les $\frac{\partial\varphi}{\partial\theta_j}$ forment un système de coordonnées locales ; on aura

$$\mu_\varphi = |D(\lambda_i,\frac{\partial\varphi}{\partial\theta_j})/D(x,\theta)|^{-1} d\lambda_1 \ldots d\lambda_n \quad .$$

Pour les gens savants, on peut aussi définir μ_φ par la formule :

$\mu_\varphi = \delta(\frac{\partial\varphi}{\partial\theta_i})dxd\theta$, δ la "fonction" (= courant de degré 0) de Dirac sur $\mathbb{R}^N$.

Soit alors $a(x,\theta) \in \sum^m(X,\mathbb{R}^N)$, à support conique dans V , et soit $\tilde{a}$ la restriction de a à Γ_φ ; d'après le théorème 2.1, si l'on s'intéresse seulement à la "partie principale" de l'opérateur défini par a (i.e., si on travaille modulo les opérateurs définis par des éléments de $\sum^{m-1}$), seul $\tilde{a}$ nous intéresse ; il sera encore mieux de travailler avec l'image $i(\tilde{a})$ de $\tilde{a}$ par $i : \Gamma_\varphi \to C_\varphi$ puisque nous voulons finalement faire tous les changements de phase (non dégénérée) qui ne changent pas C_φ ; il faut donc voir comment $i(\tilde{a})$ est transformé par les opérations de i) et ii).

Cas i). Le théorème de dérivation des fonctions composées permet de s'assurer immédiatement que la correspondance $a\sqrt{dxd\theta} \longmapsto \tilde{a}\sqrt{\mu_\varphi}$ est invariante par les difféomorphismes envisagés. Nous sommes donc amenés à considérer le "symbole principal" de la distribution définie par a et φ doit être défini par $i(\tilde{a}\sqrt{\mu_\varphi})$.

Cas ii). Soit $\varphi_1(x,\theta,\tau) = \varphi(x,\theta) + A(\tau,\tau)/2|\theta|$ $(\tau\in\mathbb{R}^p)$ comme en ii), et soient $a(x,\theta,\tau) \in \sum^m(X,\mathbb{R}^{N+p})$ et $b(x,\theta)$ comme en ii); désignons par π la projection $X \times \mathbb{R}^{N+p} \to X \times \mathbb{R}^N$; comme Γ_{φ_1} est défini par $\tau = 0$, $\frac{\partial\varphi}{\partial\theta_i} = 0$, π est un isomorphisme $\Gamma_{\varphi_1} \sim \Gamma_\varphi$; on vérifie alors facilement la formule suivante

$$\pi(\tilde{a}\sqrt{\mu_{\varphi_1}}) = c\,\sqrt{\mu_\varphi} \quad , \text{ avec } c = \text{restriction à } \Gamma_\varphi \text{ de } |\theta|^{p/2}|\text{dét}\,A|^{-1/2}a(x,\theta,0)$$

Comparant avec la formule qui donne la partie principale de b, on trouve la même chose à deux "détails" près :

a) Un facteur $(2\pi)^{p/2}$, qu'il est facile d'éliminer en normalisant autrement la définition des distributions de Fourier : dans la suite, à φ , phase sur $X \times \mathbb{R}^N$ et $a \in \sum^m(X,\mathbb{R}^N)$, nous ferons correspondre la distribution $A : f \longmapsto (2\pi)^{-(n+2N)/4} I_{\varphi}(af)$, $f \in \mathcal{D}(X)$. Cette normalisation est d'ailleurs aussi cohérente avec celle que nous avons adoptée pour les pseudo-différentiels.

b) Le facteur $e^{i\pi\sigma/4}$, σ = signature de A , qui, lui, ne se laisse pas exorciser, comme on va le voir.

Passons maintenant au cas général : nous examinerons directement la construction "globale" des distributions de Fourier, en supposant toutefois que X est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ (il sera facile ensuite de passer au cas général, où X est une variété). Soit C une sous-variété lagrangienne conique fermée de $T^*X - \{0\}$, et m un entier ≥ 0 . On se donne en outre :

a) Des phases non dégénérées φ_j définies chacune dans un ouvert conique $U_j \subset X \times \mathbb{R}_*^{N_j}$, telles que $\Gamma_{\varphi_j} \to C_{\varphi_j}$ soit un isomorphisme, que C_{φ_j} soit un ouvert de C , et que les C_{φ_j} soient un recouvrement de C .

b) Des $a_j \in \Sigma^{m+(n-2N_j)/4}(X,\mathbb{R}^{N_j})$ avec "support conique de a_j" $\in K$, K étant un cône à base compacte de U_j . Soit A_j la distribution de Fourier définie par φ_j et A_j ; on appelle $I^m(X,C)$, l'ensemble des distributions $A = \sum A_j$, pour n'importe quel choix des a_j (les φ_j étant fixés). On a d'abord le résultat suivant :

<u>Proposition 2.4.</u>

$I^m(X,C)$ <u>ne dépend pas du choix des</u> φ_j .

Pour obtenir un résultat plus précis, il faut associer un "symbole principal" à un élément de $I^m(X,C)$. Pour cela, on considère d'abord les $i(\tilde{a}_j\sqrt{\mu_{\varphi_j}})$, qui sont des densités d'ordre 1/2 sur C ; compte tenu du fait que

$i(\sqrt{\mu_{\varphi_j}})$ est homogène de degré $N_j/2$ (comme on le voit, en considérant l'action de l'homothétie $\theta \longmapsto t\theta$ sur μ_{φ_j}), on peut considérer $i(\tilde{a}_j\sqrt{\mu_{\varphi_j}})$, avec des définitions plus ou moins évidentes, comme un élément de $\Sigma^{m+n/4}(C;\Omega_{1/2})$.

Pour tenir compte des facteurs de phase, une construction supplémentaire est nécessaire : on convient que a_j et a_k définissent "le même symbole" dans un ouvert de $C_{\varphi_j} \cap C_{\varphi_k}$ si, dans cet ouvert, on a

$$e^{\pi i\sigma_j/4}\, i(\tilde{a}_j\sqrt{\mu_{\varphi_j}}) = e^{\pi i\sigma_k/4}\, i(\tilde{a}_k\sqrt{\mu_{\varphi_k}})$$

avec σ_j = signature de $(\Phi_j)''_{\theta^2}$, σ_k = etc ...

D'une façon plus savante : on montre que $\sigma_j - \sigma_k$ est localement constant dans $C_{\varphi_j} \cap C_{\varphi_k}$ (mais <u>non nécessairement</u> σ_j et σ_k) ; on considère alors le fibré L de fibre-type $\mathbb{C}$ défini par le "cocycle de Maslov" $\alpha_{jk} = e^{\pi i(\sigma_j-\sigma_k)/4}$ (sur lequel on convient que les homothéties agissent trivialement), et on considère les $i(\tilde{a}_j\sqrt{\mu_{\varphi_j}})$ comme des sections de $\Omega_{1/2} \otimes L$, i.e. des éléments de $\Sigma^{m+n/4}(C,\Omega_{1/2}\otimes L)$; le "symbole de A" est alors, par définition, la somme $\Sigma i(\tilde{a}_j\sqrt{\mu_{\varphi_j}})$ et l'on a le résultat suivant :

<u>Si</u> A <u>et</u> B, <u>définis comme précédemment</u> (<u>avec éventuellement des systèmes</u> $\{\varphi_j\}$ <u>différents</u>) <u>ont même symbole</u> modulo $\Sigma^{m+n/4-1}$, <u>on a</u> $A-B \in I^{m-1}(X,C)$.

Ce résultat se démontre, en même temps que la proposition 2.4, par réduction aux deux cas particuliers i) et ii) . On définit ainsi une application

$$\Sigma^{m+n/4}(C,\Omega_{1/2}\otimes L)/\Sigma^{m+n/4}(-) \to I^m(X,C)/I^{m-1}(X,C)$$

qui est évidemment surjective, compte tenu de ce qui précède, et le résultat principal est le suivant :

<u>Théorème 2.5.</u>

<u>Cette application est bijective.</u>

A noter que la démonstration de l'injectivité demande encore du travail. Notons aussi que le cocycle α_{jk} est à valeurs dans le groupe des racines huitièmes de l'unité, ou, en notations additives, dans $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$; en fait, comme on a $\operatorname{sgn}(\Phi_j)''_{\theta^2} - N_j \equiv 0 \pmod 2$, on peut réduire le groupe structural à $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ en remplaçant α_{jk} par le cocycle équivalent $\alpha_{jk}e^{-i\pi(N_j-N_k)/4}$. Hörmander donne aussi une autre interprétation, plus géométrique, du fibré correspondant, lié à des constructions antérieures de Maslov et Arnold, et montre par un exemple que, en général, on ne peut pas réduire davantage le groupe structural.

III. NOYAUX DE FOURIER.

On applique les constructions précédentes, avec X remplacé par $X\times Y$. X (resp Y) ouvert de $\mathbb{R}^n$ (resp $\mathbb{R}^p$) -ou, plus généralement, avec X et Y des variétés, mais peu importe. Soit alors $A \in I^m(X\times Y, C)$, C une variété conique lagrangienne fermée dans $T^*(X\times Y) - \{0\}$; A est une distribution sur $X\times Y$, ou plus précisément une forme linéaire continue sur $\mathcal{D}(X\times Y, \Omega_{1/2})$, en tenant compte des conventions précédentes. Par suite (théorème des noyaux), A définit une application continue $\mathcal{D}(Y, \Omega_{1/2}) \to \mathcal{D}'(X, \Omega_{1/2})$ qu'on notera encore A ; localement, A sera défini par la formule

$$\langle Af, g\rangle = (2\pi)^{-(n+p+2N)/4} \int e^{i\varphi(x,y,\theta)} a(x,y,\theta) f(y) g(x) dx dy d\theta$$

avec $a \in \Sigma^{m+(n+p-2N)/4}(X\times Y, \mathbb{R}^N)$, et φ une phase non dégénérée sur $X\times Y\times\mathbb{R}^N$ (ou sur un ouvert conique V de cet espace, a étant à support conique dans V).

Il est plus commode ici de considérer l'ensemble $C' \subset T^*(X\times Y) - \{0\}$ obtenu à partir de C par l'application $(x,y,\xi,\eta) \longrightarrow (x,y,\xi,-\eta)$; sur C' la restriction de la forme $\omega_X - \omega_Y$ est nulle, ω_X (resp ω_Y) désignant la 2-forme canonique de T^*X (resp T^*Y). Si, <u>par exemple</u>, et c'est souvent le cas dans les applications, c'est le graphe d'une application $F : T^*Y \to T^*X$, on a $F^*(\omega_X) = \omega_Y$, c'est-à-dire que F est une transformation canonique. Par exemple, dans le cas d'un opérateur pseudo-différentiel, on a $X = Y$, C' est la diagonale de $(T^*X)^2$, et F est l'identité.

Un cas particulier important est celui où C (ou C', cela revient au même), est contenu dans $[T^*X - \{0\}] \times [T^*Y - \{0\}]$; on dira alors que C est une <u>relation canonique</u> (homogène de T^*Y dans T^*X) . Si $\varphi(x,y,\theta)$ est une fonction définissant localement C, cela veut dire qu'en tout point

(x,y,θ) où l'on a $\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = 0$, on a $\frac{\partial\varphi}{\partial x} \neq 0$ et $\frac{\partial\varphi}{\partial y} \neq 0$. Utilisant la première inégalité, on voit que, pour $f \in \mathcal{D}(Y)$ et x fixé, l'intégrale oscillante

$$\int e^{i\varphi(x,y,\theta)} a(x,y,\theta) f(y) dy d\theta$$

sera définie, et on voit facilement (par le même raisonnement qui définit les intégrales oscillantes) qu'elle dépend de manière C^∞ de x ; donc A envoie (continuement) $\mathcal{D}(Y)$ dans $C^\infty(X)$; de même, la 2e inégalité nous montre que le transposé A' de A envoie $\mathcal{D}(X)$ dans $C^\infty(Y)$, donc en transposant A envoie $\mathcal{E}'(Y)$ dans $\mathcal{D}'(X)$ et finalement A est un noyau <u>régulier</u> (mais non très régulier, sauf si la projection de C sur $X \times Y$ est contenu dans la diagonale).

Les résultats importants de ce paragraphe concernent i) les adjoints (ou les transposés) ii) la composition. Le point i) est immédiat, (il suffit essentiellement de permuter le rôle des variables x et y). Nous insisterons un peu plus sur ii), sans toutefois entrer dans tous les détails. Supposons que C_1 et C_2 soient deux <u>relations canoniques</u> , respectivement de T^*Y dans T^*X et de T^*Z dans T^*Y ; grâce aux nouveaux programmes des lycées et collèges, tous les enfants savent aujourd'hui ce que signifie le composé $C_1 \circ C_2$; rappellons quand même que c'est l'ensemble des (x,ξ,z,ζ) tels qu'il existe (y,η) avec $(x,\xi,y,\eta) \in C_1$ et $(y,\eta,z,\zeta) \in C_2$. Une meilleure manière de dire les choses est de considérer la "diagonale" $\Delta \subset T^*X \times (T^*Y)^2 \times T^*Z$, i.e. les points dont les deux composantes dans T^*Y sont égales, de prendre $C_1 \times C_2 \cap \Delta$, et de le projeter dans $T^*X \times T^*Z$. Supposons que $C_1 \times C_2$ <u>rencontre transversalement</u> Δ ; on voit alors que $C_1 \times C_2 \cap \Delta$ est une bonne variété, de dimension $\dim X + \dim Z$, et que sa projection dans $T^*X \times T^*Z$ est une immersion (i.e. la différentielle de la dite projection est partout de rang maximum) ; si nous supposons en outre cette projection injective et propre, son image $C_1 \circ C_2$ sera une sous-variété de $T^*X \circ T^*Z$ dont on voit facilement que c'est une relation canonique homogène de T^*Z dans T^*X . Sous les hypothèses précédentes, on a le théorème suivant :

Théorème 3.1.

Soient $A_1 \in I^{m_1}(X \times Y, C_1')$ et $A_2 \in I^{m_2}(Y \times Z, C_2')$, à supports propres. On a alors : $A_1 A_2 \in I^{m_1+m_2}(X \times Z, (C_1 \circ C_2)')$.

La démonstration, en gros, se fait ainsi : en omettant le facteur de normalisation, on écrit, après avoir pris quelques précautions de support :

$$A_1 \circ A_2 f(x) = \int e^{i[\varphi_1(x,y,\theta)+\varphi_2(y,z,\tau)]} a_1(x,y,\theta) a_2(y,z,\tau) f(z)\, dy\, dz\, d\theta\, d\tau$$

on pose $\sigma = (\sqrt{\theta^2+\tau^2}\, y, \theta, \tau)$ et l'on considère $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ et $a = a_1 a_2$ comme fonctions de (x, z, σ) . On voit alors que C_φ est bien l'ensemble qu'on cherche, i.e. $(C_1 \circ C_2)'$; la difficulté est qu'il n'est pas "tout à fait" vrai que a soit un symbole de l'ordre voulu, mais on arrive à s'en sortir par une troncature.

Le symbole principal de $A_1 A_2$ s'obtient à partir du même calcul ; nous ne donnerons pas la formule complète pour ne pas allonger encore cet exposé, et nous omettrons les densités et le fibré de Maslov (qui, d'ailleurs ne changent les choses que par un facteur "universel", i.e. ne dépendant que des C_i et non des A_i) ; à cette restriction près, on voit que le symbole principal de $A_1 A_2$ s'obtiendra ainsi : on prend le produit des symboles de A_1 et A_2 sur $C_1 \times C_2$, on prend la restriction à $C_1 \times C_2 \cap \Delta$, et on projette sur $C_1 \circ C_2$; moyennant des conventions convenables, cette manière de faire garde un sens pour les symboles "exacts", à valeurs dans

$\Omega_{1/2} \otimes L$.

Un cas particulièrement simple est celui où les relations canoniques C_1 et C_2 sont des "graphes canoniques locaux", i.e. leurs projections sur T^*X et T^*Y (resp T^*Y et T^*Z) sont des difféomorphismes locaux (ceci implique en particulier que X , Y , Z ont même dimension) ; alors sur C_1 et C_2 , on a un volume canonique obtenu par image réciproque à partir de celui de T^*Y (ou T^*X pour C_1 , ou T^*Z pour C_2) , donc on peut identifier les densités d'ordre 1/2 à des fonctions, donc les symboles principaux de A_1 et A_2 à des <u>fonctions</u> sur C_1 et C_2 (éventuellement tordues par le fibré de Maslov) ; c'est en particulier ce qui se passe pour les pseudodifférentiels, où le fibré de Maslov est par dessus le marché trivial.

On peut voir qu'alors la construction précédente du symbole principal de A_1A_2 est exactement la bonne.

Pour terminer, donnons quelques exemples importants pour les application :

i) Supposons que C soit le graphe d'un difféomorphisme canonique , et soit $A \in I^{\circ}(X \times Y, C)$; alors on a $A^* \in I^{\circ}(Y \times X, C^{*\prime})$, où $C^* = C$ (mais en faisant jouer à X et Y des rôles permutés). On aura $A^*A \in I^{\circ}(Y \times Y, \Delta')$, i.e. A^*A est un <u>pseudo-différentiel d'ordre</u> 0 sur Y ; d'après une propriété des pseudo-différentiels (que j'ai omis de rappeler, mais qui se démontre aussi avec les considérations du §1) , A^*A opère continuement de $L^2 \cap \mathcal{E}'$ dans (L^2 local) ; par suite, A possèdera la même propriété.

ii) Supposons $X = Y = Z$; soit C le graphe d'un difféomorphisme canonique, et soit $A \in I^m(X, C')$, le symbole principal de A étant inversible ; et soient P et Q deux pseudo-différentiels de symbole principal p et

q respectivement, tels qu'on ait $PA = AQ$; alors si $(x,\xi) = F(y,\eta)$ est l'équation définissant C, on aura : $p(F(x,\xi)) = q(x,\xi)$, donc p et q se déduisent l'un de l'autre par la transformation canonique F. Ce résultat est fondamental pour les applications, car il permet souvent de simplifier considérablement la partie principale des pseudo-différentiels. Il a été établi d'abord (dans un cas un peu moins général) par Egorov [1] .

Donnons un exemple ; soit H l'opérateur pseudo-différentiel défini par (1.1), avec $h(x,\xi) = |\xi|$ (peu importe ce qui se passe au voisinage de 0 dans l'espace des ξ, cela ne change les choses que par un régularisant) Soit F_t la solution du problème de Cauchy pour la "demi équation des ondes" $-i\frac{dF_t}{dt} = HF_t$, avec $F_o = f$; par transformation de Fourier en x, on a

$$F_t = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int e^{i(t|\xi|+x\xi)}\hat{f}(\xi)d\xi \qquad \text{(intégrale ordinaire)}$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int e^{i(t|\xi|+\langle x-y,\xi\rangle)}f(y)dyd\xi \qquad \text{(intégrale oscillante)}$$

i.e., pour t fixé, F_t est donné par U_tf, U_t un opérateur de Fourier de phase $\varphi_t = \langle x-y,\xi\rangle + t|\xi|$; alors C'_{φ_t} est donné par

$$\begin{cases} x = y + t\frac{\xi}{|\xi|} \\ \eta = \xi \end{cases}$$

le groupe à un paramètre de transformations canoniques qui fait passer de (y,η) à (x,ξ) est celui qu'on obtient en résolvant les équations canoniques correspondant au hamiltonien H, comme on voit tout de suite; par suite, si P est un pseudo-différentiel (on aurait envie de dire "un observable"), le symbole principal de $U_tPU_t^{-1}$ est lié à celui de P par la transformation canonique précédente.

En utilisant des développements en paquets d'ordre, on peut voir que ceci est vrai pour tout h de partie principale homogène de degré 1 en ξ et tel que H soit autoadjointe.

BIBLIOGRAPHIE.

Y.V. EGOROV [1] - "Sur les transformations canoniques des opérateurs pseudo-différentiels".
Usp. Mat. Nauk 25 (1969), pp. 235-236.

L. HÖRMANDER [1] - "Fourier integral operators I".
Acta Math. 127 (1971), pp. 79-183.

[2] - "On the existence and the regularity of solutions of linear pseudo-differential equations".
(A paraître).

M. SATO [1] - "Regularity of hyperfunctions solutions of partial differential equations".
A paraître aux Actes du Congrès International de Nice, 1970.
